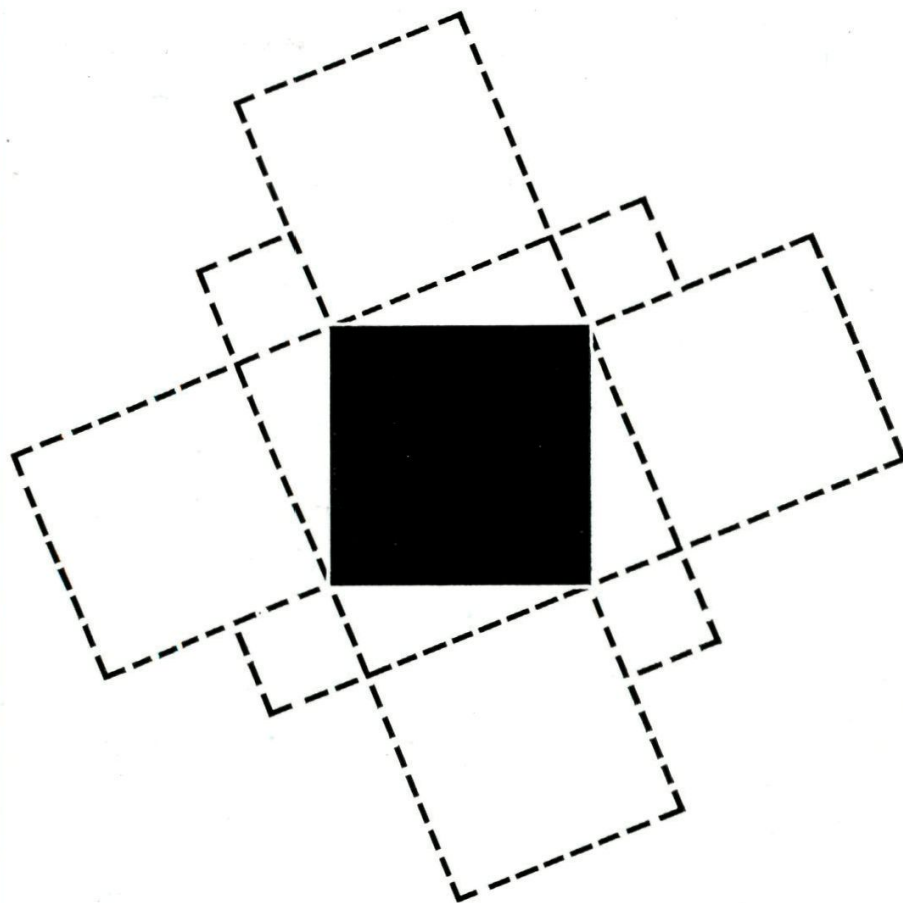


pythagoras

2



wiskundetijdschrift voor jongeren
jaargang 10 1970|1971



Prenten van Escher

Tot de onderwerpen die in vroegere jaargangen veel waardering genoten, behoren de besprekingen van een aantal prenten van Escher. Ook nadat we hiermee gestopt waren kregen we nog veel vraag naar deze besprekingen. En geen wonder, houtsneden, houtgravures, lithos en mezzotinten van M.C. Escher vormen een klasse apart en zijn beroemd over de gehele wereld.

We zijn de heer Escher dan ook bijzonder dankbaar dat we ter gelegenheid van het tienjarig bestaan van Pythagoras van een zestal creaties afdrukken op groot formaat aan onze abonnees kunnen aanbieden.

Het zijn de prenten:

Dag en Nacht	formaat	81 × 46 cm
Belvedere	„	61 × 40 cm
Boven en Onder	„	63 × 25 cm
Hol en Bol	„	57 × 47 cm
Balkon	„	36 × 29 cm
Prententoonstelling	„	34 × 34 cm

De eerlijkheid gebiedt te zeggen dat waarschijnlijk niet aan alle aanvragen zal kunnen worden voldaan. De oplage is beperkt, bestellingen worden vanzelfsprekend op volgorde van binnenkomst afgehandeld.

De platen worden in twee series van drie geleverd:

Serie 1: Dag en Nacht, Hol en Bol, Prententoonstelling

Serie 2: Belvedere, Boven en Onder, Balkon

De prijs *per serie* bedraagt: f 6,00.

Bestellingen kunnen *uitsluitend* plaatsvinden door storting of overschrijving op giro-nummer 1 308 949 ten name van Wolters-Noordhoff nv, onder vermelding van Escher-platen, serie 1 en/of serie 2 op het stortingsbiljet.

Belvedere, één van de Escher-prenten die je ter gelegenheid van het tienjarig bestaan van Pythagoras kunt bestellen.

Wordt het verkeer onveiliger? °

Op de ranglijst van sterfte-oorzaken nemen 'verkeersongevallen met dodelijke afloop op de openbare weg' een zeer hoge plaats in. Het aantal slachtoffers neemt regelmatig toe, zoals blijkt uit het volgende overzicht, afkomstig van het Centraal Bureau voor de Statistiek:

jaar	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
aantal doden	1997	2082	2007	2375	2465	2620	2862	2907	3070

Ook figuur 1, waarin de aantallen verkeersdoden per jaar vanaf 1956 grafisch zijn weergegeven, laat er weinig twijfel over bestaan, dat van een vrijwel voortdurende stijging van het aantal doden kan worden gesproken. De jaren 1958 en 1963 vormen een uitzondering op de regel, in de daaropvolgende jaren is de 'achterstand' echter snel weer weggewerkt.

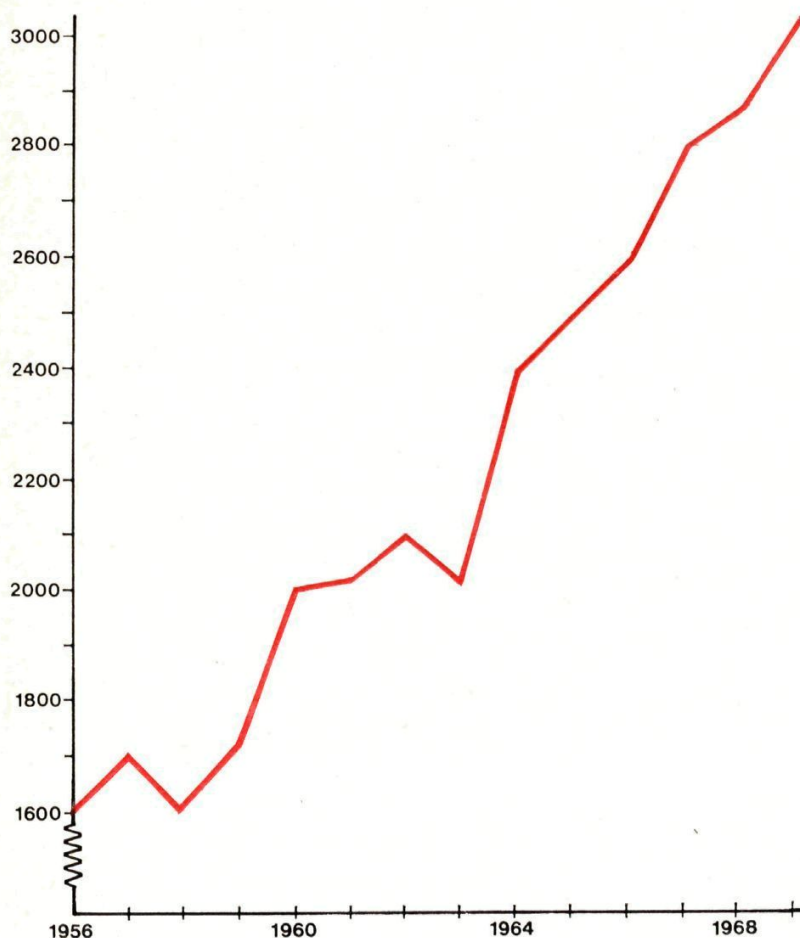


Fig.1. *Het aantal doden in het verkeer, per jaar*

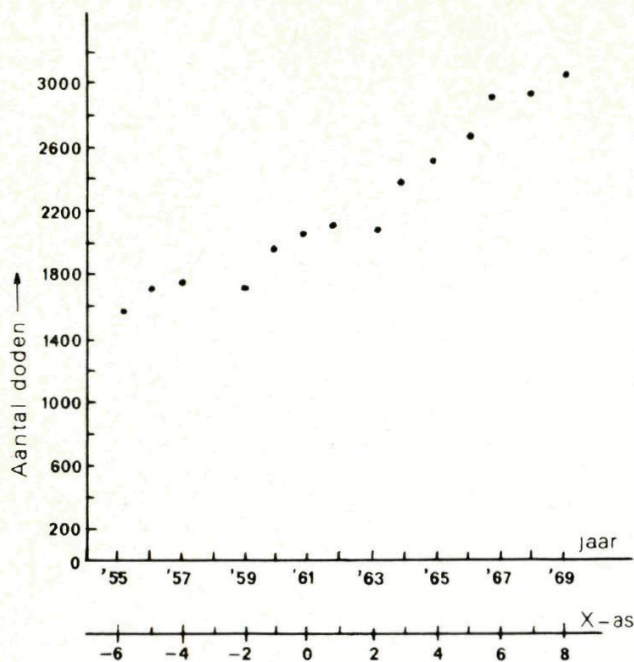


Fig. 2

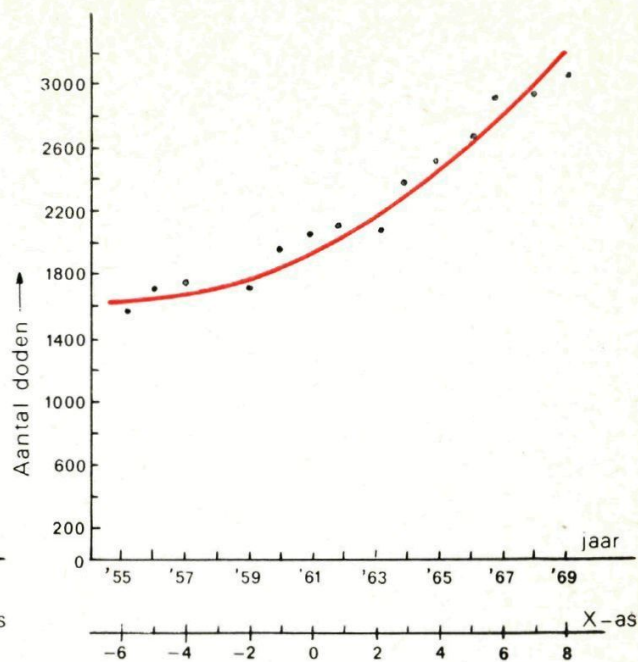


Fig. 3

De kromme van figuur 1 vertoont een wat grillig verloop. In feite is het ook onjuist de aantallen die boven de jaartallen zijn uitgezet, te verbinden door lijnstukken. In figuur 2 zijn dezelfde aantallen nogmaals uitgezet, nu zonder ze met elkaar te verbinden. De vraag is: zit er een zekere regelmaat in de stijging van het aantal doden, zoals die blijkt uit de grafiek?

Er zijn methoden om dit te onderzoeken.

In figuur 3 zie je hoe een vloeiende kromme getrokken kan worden, die een goede weergave vormt van het verloop van het aantal verkeersdoden. De kromme is zo getrokken, dat de gemiddelde afwijking van de werkelijke aantallen minimaal is. De getrokken kromme is een deel van de grafiek van de functie:

$$D(x) = 6,35 x^2 + 101,8 x + 1948.$$

Op de afleiding van deze functie gaan we hier niet nader in, geïnteresseerden verwijzen we naar het aprilnummer 1970 van het tijdschrift Verkeerstechniek, uitgegeven door de A.N.W.B.

$D(x)$ geeft het aantal verkeersdoden voor het jaar x .

Voor 1961 moet $x = 0$ worden genomen. Het berekende aantal $D(0) = 1948$ wijkt natuurlijk iets af van het werkelijke aantal (1997), zoals dat ook voor de andere jaren het geval is, maar deze afwijkingen zijn niet groot. Voor $x = 5$ (1966) vinden we bijvoorbeeld



$$D(5) = 158,75 + 509,0 + 1948 \approx 2616$$

en dit wijkt slechts 4 af van het werkelijke aantal.

Voor 1969 moeten we nemen $x = 8$:

$$D(8) = 406,4 + 814,4 + 1948 \approx 3170.$$

Voor 1970: $D(9) = 514,35 + 916,2 + 1948 \approx 3379$.

Voor 1971: $D(10) = 635 + 1018 + 1948 \approx 3601$.

Geven $D(9)$ en $D(10)$ goede benaderingen voor de te verwachten aantallen verkeersdoden in 1970 en 1971? De toekomst zal dit moeten uitwijzen, maar we mogen hopen dat deze berekende waarden te hoog blijken te zijn. Immers: voor grotere waarden van x nemen de functiewaarden van $D(x)$ sterk toe, omdat het een kwadratische functie is. Voor 1969 is het berekende aantal 100 meer dan het werkelijke, hopelijk zal het gunstige verschil over 1970 nog groter zijn.

Mogen we uit het voorgaande nu afleiden dat het steeds gevaarlijker wordt om een voet buiten de deur te zetten? Zo eenvoudig ligt de zaak niet.

De toename van het aantal doden wordt onder meer veroorzaakt door de toename van de verkeersintensiteit, dus het steeds grotere aantal auto's enzovoort, dat aan het verkeer deelneemt.

Het C.B.S. berekent een jaarlijks indexcijfer voor de verkeersintensiteit van het autoverkeer, uitgaande van het 'cijfer' 100 voor 1963:

jaar	1961	1962	1963	1966	1967	1968
index	85	92	100	135	143	154

(Het zou beter zijn om te spreken van indexgetallen.)
 Bij het beantwoorden van de vraag of het verkeer on-
 veiliger wordt moet met het indexcijfer rekening wor-
 den gehouden.

Zo is de intensiteit van 1963 ten opzichte van 1962 $\frac{100}{92}$
 maal zo groot. Bij een evenredige stijging van inten-
 siteit en aantal doden zou de verwachting voor 1963
 zijn $\frac{100}{92} \times 2082 = 2263$ doden. De werkelijkheid was
 2007 dus 256 minder.

Voor 1963 ten opzichte van 1962 geldt:

het absolute aantal is 75 minder

het relatieve aantal is 256 minder

Je kunt zelf nagaan of de stijging van het aantal doden
 in de jaren 1966, 1967, 1968 groter of kleiner is dan op
 grond van de indexcijfers ten opzichte van 1963 kon
 worden verwacht. Voor 1969 is het indexcijfer nog niet
 bekend. Zoals bij alle statistische gegevens moet je ook
 met getallen over het verkeer voorzichtig omspringen.
 Je kunt gemakkelijk voorbarige conclusies trekken of
 onvoorzichtige voorspellingen doen.

Dit neemt echter niet weg dat meer dan 3000 doden
 per jaar er niet om liegen. Verbetering van de verkeers-
 veiligheid, waar dat mogelijk is, blijft een zaak van
 algemeen belang.

Denkertjes

- 11 In een boekenkast staan de acht delen van een ency-
 clopaedie in de volgorde 3, 6, 5, 7, 1, 8, 4, 2. Zoals
 je ziet staat er geen enkel deel op zijn plaats. Onder-
 zoek in hoeveel grepen je de volgorde 1, 2, 3, 4, 5, 6,
 7, 8 tot stand kunt brengen. Onder een 'greep' wordt
 verstaan: met elke hand neem je een deel uit de
 kast en daarna zet je die twee delen verwisseld weer
 op de oorspronkelijke plaatsen terug.
- 12 Verdeel een willekeurig gegeven driehoek in drie
 stukken, die in een andere schikking samengevoegd
 kunnen worden tot een rechthoek.



Zuinige reizigers^{oo}

‘Vannacht een vreselijke storm gehad. Resultaat: vijf van de negen moeizaam aangelegde verbindingswegen tussen onze zes posten door omgewaaide bomen geblokkeerd voor zwaar verkeer. Kost ons minstens een week om alle rommel weer op te ruimen. Gelukkig hoefde ik mijn trouwe jeep *geen tweemaal dezelfde weg* op te jagen om alles te controleren.’

Aldus een fragment uit het dagboek van een missionaris in het afrikaanse binnenland anno 1949.

In een begeleidende schets, schematisch weergegeven in figuur 4, staat de route waarlangs de geplaagde pater zijn geteisterde wegen bezoekt.

Nog diezelfde dag is onze pater opnieuw op reis gegaan, nu met het doel in elk van de zes missieposten mankracht te werven om de geblokkeerde wegen weer berijdbaar te maken.

‘Bezocht vandaag alle posten elk eenmaal om herstelwerkzaamheden te organiseren.

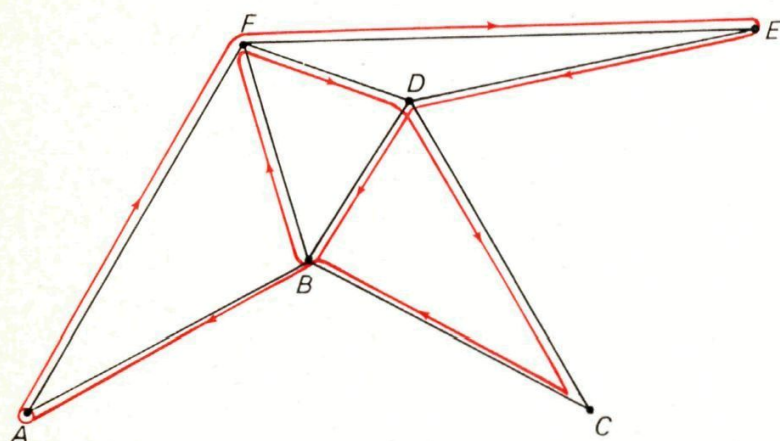


Fig. 4: *geen enkele weg tweemaal . . .*

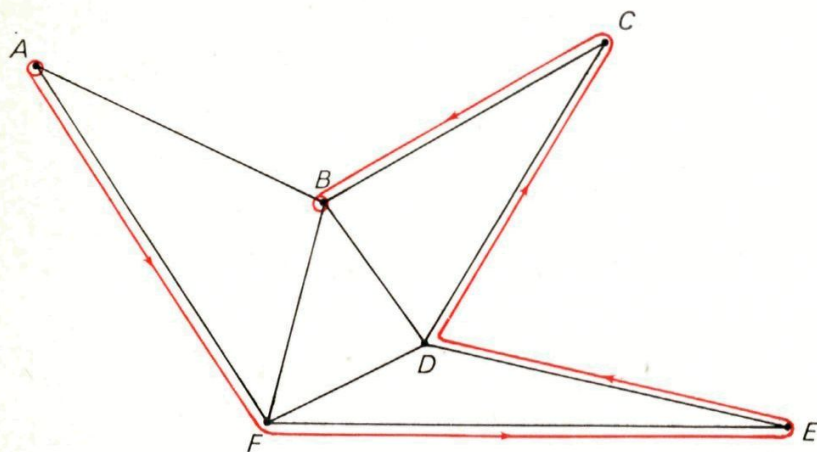


Fig. 5: *geen enkele post tweemaal . . .*

Veel tijdwinst geboekt omdat ik *geen enkele post meer dan eenmaal* hoefde te passeren. Overnachting in B. . .'

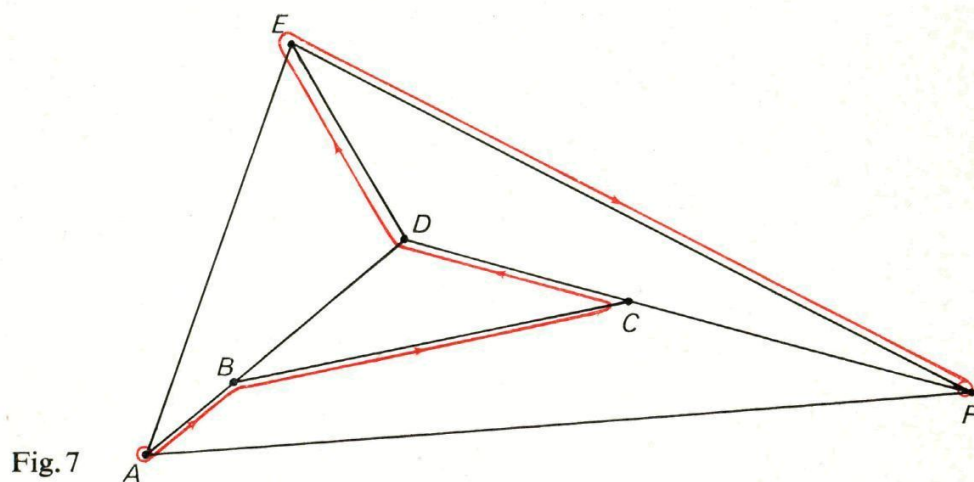
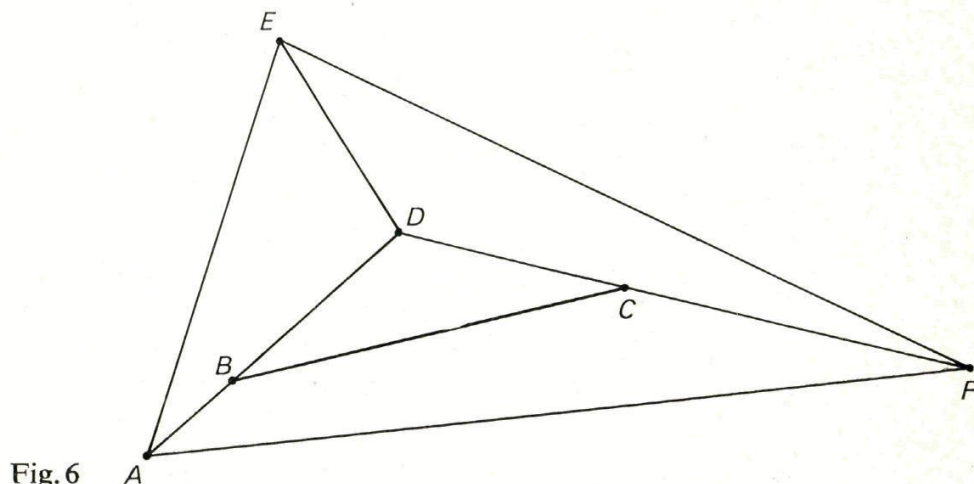
Ook hier bevat het dagboek een schematische routebeschrijving.

Uit het verdere verslag blijkt, dat de schade snel is verholpen; hoogste tijd dus, om de zaak nu eens vanuit een wiskundige gezichtshoek te gaan bekijken: bij de eerste reis ging het er om alle *wegen* te inspecteren, hierbij was het van groot belang een eenmaal gecontroleerde verbindingsweg niet nog eens te berijden. Bij de tweede reis stond een heel ander doel voor ogen: bezoek aan alle *posten* onder vermijding van dubbele doortochten.

De ijverige pater was zo fortuinlijk voor beide reizen over de gewenste route te kunnen beschikken. In de situatie van figuur 6 liggen deze zaken niet zo gelukkig.

Waar de inspectiereis ook begint tenminste één verbindingsweg moet tweemaal worden bereisd. Het is wél mogelijk een rondgang te maken waarbij elke post juist eenmaal wordt bezocht! (Zie figuur 7.)

Waarom bestaat er nu eigenlijk geen inspectiereis in de situatie van figuur 6? Bij het knooppunt *A* komen 3 wegen samen: is *A* nòch het beginpunt nòch het eindpunt van de reis, dan zal tenminste één keer een bij *A* uitkomende weg twee keer bereisd moeten worden; *A* moet dus het begin- of het eindpunt zijn van een inspectiereis. De zelfde redenering is ook van toepassing op het knooppunt *B*. Hierdoor liggen begin en eind van een inspectiereis vast: bij *A* beginnen en dus eindigen bij *B* of omgekeerd.



Ongelukkigerwijs komen ook bij het knooppunt *C* drie wegen samen. Omdat elke reis maar op één plaats kan beginnen en maar op één plaats kan eindigen, is het kennelijk onmogelijk in het wegensysteem van figuur 6 een route te vinden waarbij elke verbindingsweg precies éénmaal voorkomt.

Meer in het algemeen gesproken: als bij een knooppunt een *oneven* aantal verbindingswegen samenkomt, moet de inspectiereis daar beginnen of eindigen; bevat het systeem van verbindingswegen meer dan twee knooppunten, waarin een *oneven* aantal wegen samenkomt, dan is een inspectiereis niet uitvoerbaar zonder in herhalingen te vervallen.

Om een volledige oplossing te vinden voor het probleem in welk systeem van verbindingswegen wél een inspectiereis zonder herhalingen is te maken, moeten nog de volgende gevallen onderzocht worden:

- a. het systeem van verbindingswegen bevat precies één knooppunt waarin een oneven aantal wegen samenkomt,
- b. het systeem van verbindingswegen bevat geen enkel knooppunt waarin een oneven aantal wegen samenkomt,
- c. het systeem van verbindingswegen bevat precies twee knooppunten waarin een oneven aantal wegen samenkomt.

Het eerste geval, dat er toch heel natuurlijk uitziet, is in werkelijkheid een onmogelijk geval, zoiets als een vierkante cirkel; er bestaat namelijk geen systeem van verbindingswegen met precies één knooppunt waarin een oneven aantal wegen samenkomt! Om dit te begrijpen beginnen we een reis in het 'oneven knooppunt' en we spreken af, dat we volkomen willekeurig op tournee gaan met deze, belangrijke, beperking, dat we geen enkele weg voor een tweede keer zullen opgaan. Is het aantal wegen groot en hebben we wat geluk, dan kunnen we op deze manier een flinke trip maken, maar . . . er komt onherroepelijk een moment, dat we 'vast' komen te zitten, immers het aantal wegen is beperkt. Waar eindigt deze zwerftocht? In het beginpunt? Onmogelijk! Immers, zodra we de reis aanvangen blijft er in dit 'oneven knooppunt' óf geen enkele vrije weg meer over (en dan is het zonder meer duidelijk, dat we ergens anders vastlopen) óf een even aantal; in dat geval zal er steeds wanneer we ons beginpunt weer eens aandoen ten minste één nog vrije ontsnappingsweg zijn; in beide gevallen kan de reis dus niet eindigen waar hij begon. De reis eindigt dus in een 'even knooppunt'. Maar dat kan al evenmin! Immers, er zal iedere keer als we zo'n punt aandoen weer minstens één weg zijn waarlangs we onze reis kunnen voortzetten. Er bestaat eenvoudig geen systeem van verbindingswegen met precies één 'oneven knooppunt'. Maar wat niet bestaat is ook niet te inspecteren!

In het tweede geval, een systeem met uitsluitend 'even knooppunten', is de situatie uitermate plezierig voor een zo zuinig mogelijke inspectiereis.

Als in een systeem van verbindingswegen alle knooppunten 'even' zijn, bestaat er een route waarbij elke verbindingsweg precies éénmaal gebruikt wordt, bovendien kan de reis in onverschillig welk knooppunt beginnen en hij eindigt noodzakelijk daar waar hij begon.

We maken gebruik van het zelfde reisplan als bij geval **a.** d.w.z. we beginnen de reis in een willekeurig knooppunt *K*, reizen vervolgens lukraak over de aanwezige wegen, maar hoeden ons er voor een weg voor de tweede keer in te slaan. Uiteraard moet ook aan deze reis vroeg of laat een eind komen.

Waar?

Zodra we vertrekken is het beginpunt *K* een knooppunt geworden waarin een oneven aantal nog vrije wegen samenkomt en iedere keer als we dit punt *K* weer eens passeren neemt dit aantal met 2 af en blijft dus oneven; in het ergste geval blijft er in *K* nog

Fig.8: een lukraakreis . . .

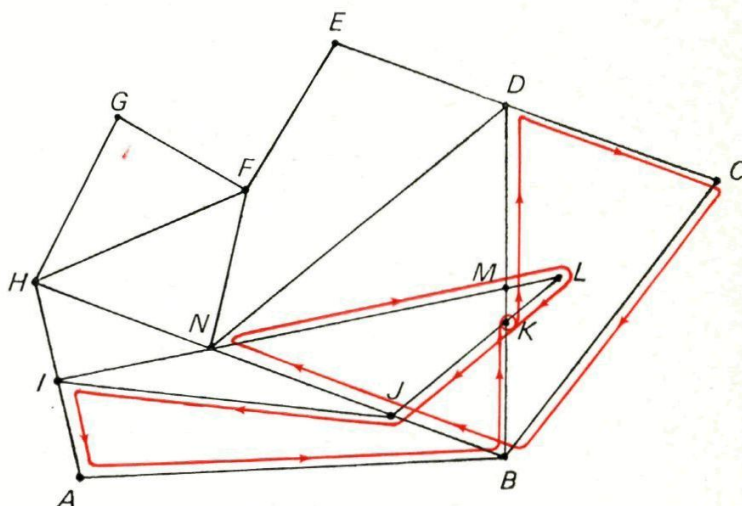
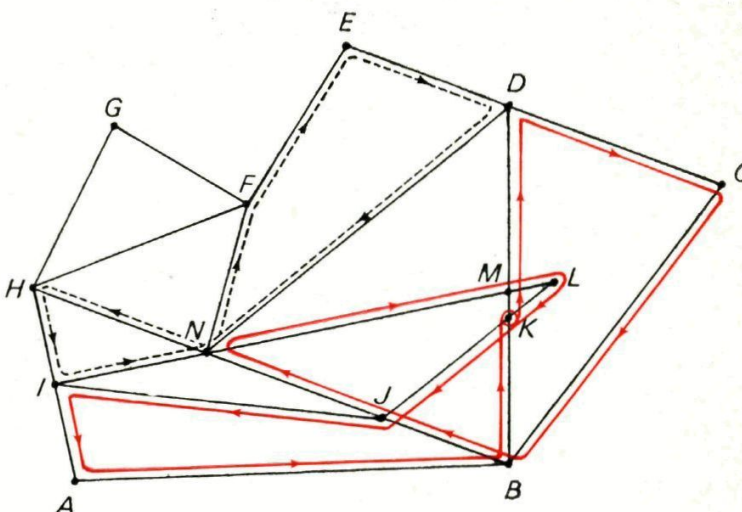


Fig.9: een toertje om . . .



precies één vrije weg over; dit betekent, dat we in *theorie* bij ons beginpunt *K* kunnen vastlopen! Maar omdat alle andere knooppunten 'even' zijn is het uitgesloten in zo'n punt de reis gedwongen te beëindigen. Dus? . . . Inderdaad, we moeten wel in *K* vastlopen!

In figuur 8 vind je een voorbeeld van een lukraakreis over een wegennet met uitsluitend 'even knooppunten'.

Uit figuur 8 blijkt ook, dat een willekeurige tournee van *K* naar *K* niet noodzakelijk langs *alle* verbindingswegen voert: in het knooppunt *N* blijven nog 4 onbetreden wegen over. Maar dat is voor algehele inspectie helemaal geen bezwaar, immers wat belet ons om, vóórdat we de weg *NM* inslaan eerst nog even een toertje om te gaan? We weten immers, dat we noodzakelijk toch weer in het punt *N* terug zullen komen! (Figuur 9).

Het is duidelijk, dat we, op deze manier doorgaand, vanuit onze aanvankelijke reis van *K* naar *K*, alle uithoeken van het wegennet juist eenmaal kunnen inspecteren. In figuur 10 vind je een volledige inspectiereis in kaart gebracht.

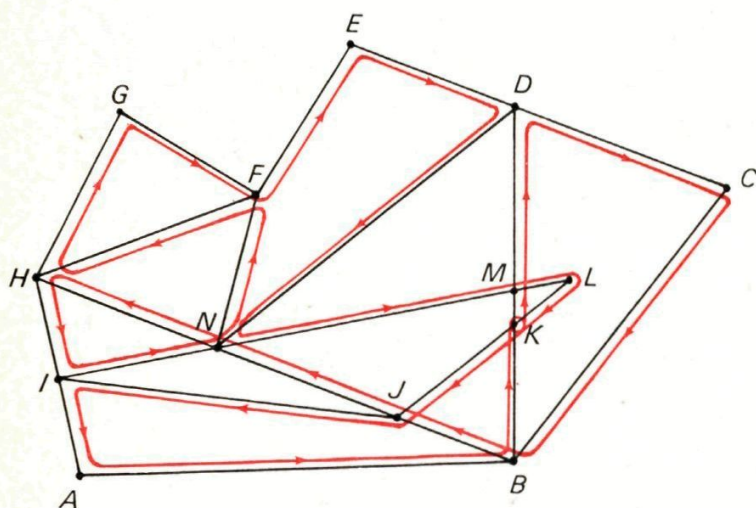


Fig. 10: een volledige inspectiereis . . .

Nu het derde en laatste geval: het systeem van verbindingswegen bevat precies twee 'oneven knooppunten'. Ook nu is er reden tot juichen:

Als in een systeem van verbindingswegen precies twee 'oneven knooppunten' voorkomen, bestaat er een route waarbij elke verbindingsweg juist éénmaal wordt afgelegd; de reis voert van het ene 'oneven knooppunt' naar het andere 'oneven knooppunt'.

Immers, kies maar eens een weg van het ene 'oneven knooppunt' naar het andere; wat dan overblijft is een systeem van verbindingswegen, dat precies beantwoordt aan de voorwaarden van geval **b**.

Alvorens het vraagstuk van de zuinige inspecteur voor opgelost te verklaren, nog even dit: we moeten ons wel realiseren, dat in het systeem van verbindingswegen *samenhang* wordt verondersteld d.w.z. we zijn er van uitgegaan, dat elk knooppunt vanuit elk ander knooppunt is te bereiken!

Nu de conclusie

Als in een (samenhangend) systeem van verbindingswegen in elk knooppunt een *even* aantal wegen samenkomt of in precies twee knooppunten een *oneven* aantal verbindingswegen samenkomt, is het mogelijk een inspectiereis door het systeem te maken waarbij elke weg juist éénmaal wordt afgelegd. In het eerste geval eindigt de reis daar waar hij begon, in het andere geval moet de reis voeren van het ene 'oneven knooppunt' naar het andere.

Het probleem van de zuinige inspectiereis is al in 1735 opgelost door de grote wiskundige Euler. Hij schreef: 'In de stad Königsberg ligt een eiland genaamd Kneiphof, gelegen in de rivier de Pregel. Het eiland is met 7 bruggen verbonden aan het vasteland. De vraag is of iemand een wandeling kan maken, waarbij hij elke brug juist éénmaal gebruikt' (zie figuur 11). Wat is het antwoord?

Keren we nog eens terug naar het dagboek van onze ijverige missionaris, dan moeten we vaststellen, dat we ons onderzoek voor de helft hebben voltooid. Veel verrassender

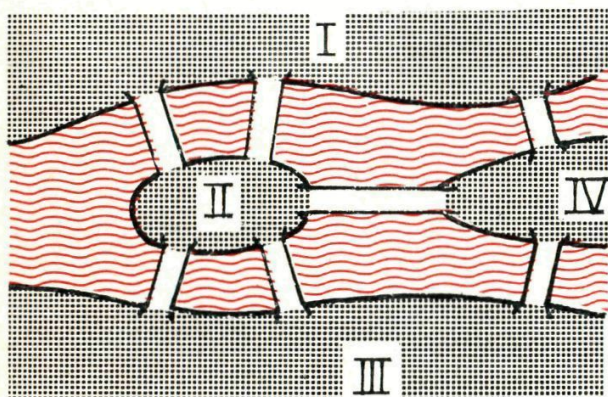


Fig. 11: het Königsberger-bruggenprobleem

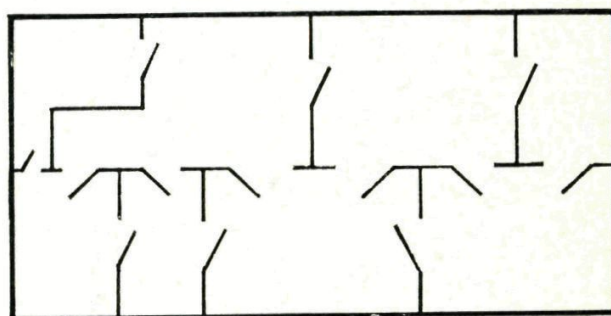


Fig. 12: tocht door het museum

dan deze opmerking is het feit, dat, sinds in 1859 de wiskundige Hamilton het probleem als eerste onder woorden bracht,

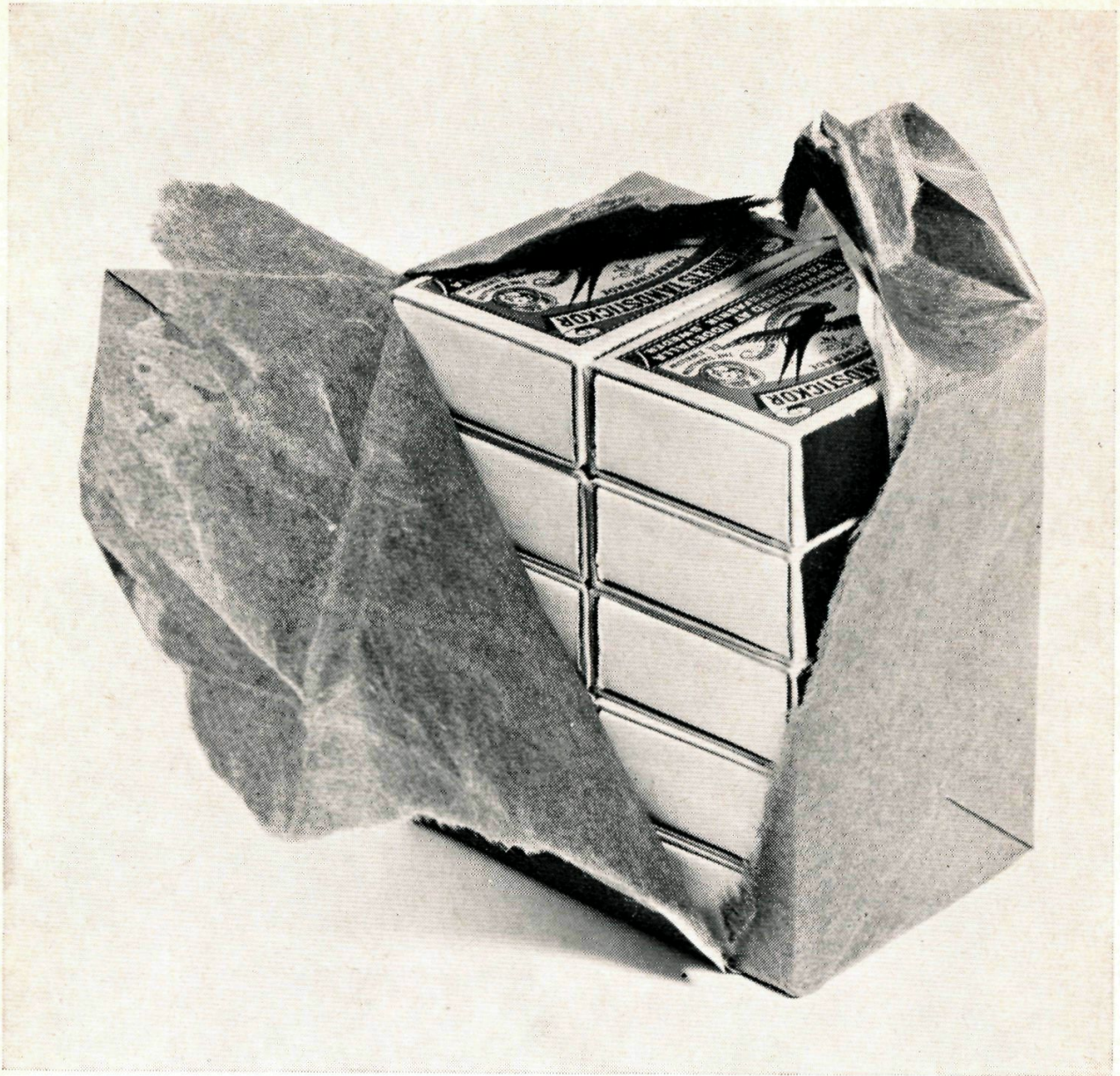
het tot op heden een onopgelost probleem is of een gegeven systeem van verbindingswegen wel of niet zó kan worden doorkruist, dat elk knooppunt juist éénmaal wordt bezocht.

Anders gezegd: als je in je vakantie wilt deelnemen aan de 'elf-stedentocht' vraag dan nooit aan een wiskundige of dit ook wel kan, want hij zal je onveranderlijk antwoorden: zoek het zelf maar uit!

Problemen

Kan iemand een wandeling maken door dit museum waarbij hij elke deur juist éénmaal (elke zaal juist éénmaal) passeert? (Figuur 12.)

Bewijs, dat in elk systeem van verbindingswegen, waarbij in elk knooppunt twee wegen samenkomen, een route bestaat die onze pater in elk opzicht kan bekoren.



De goedkoopste verpakking °

Een fabrikant staat voor het volgende probleem: Hij heeft zijn tabletten tot nu toe verkocht in doosjes met de afmetingen $l = 60$ mm, $b = 30$ mm en $h = 12$ mm. Het is wenselijk een grotere eenheid – in de vorm van een rechthoekig blok – bevattende 10 van de genoemde doosjes in de handel te brengen. Bij de verpakking zal o.a. een papieren wikkel worden gebruikt.

Welke combinatie van de 10 doosjes vereist de kleinste wikkel en is dus het goedkoopst?

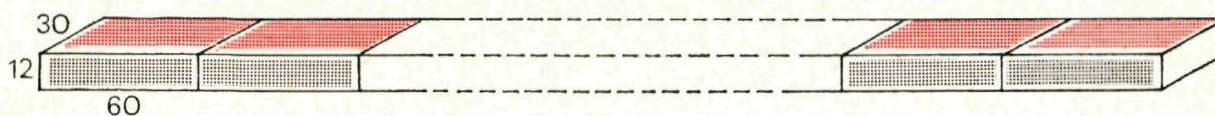


Fig. 13

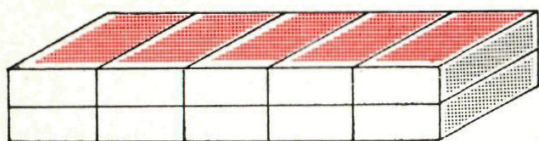


Fig. 14

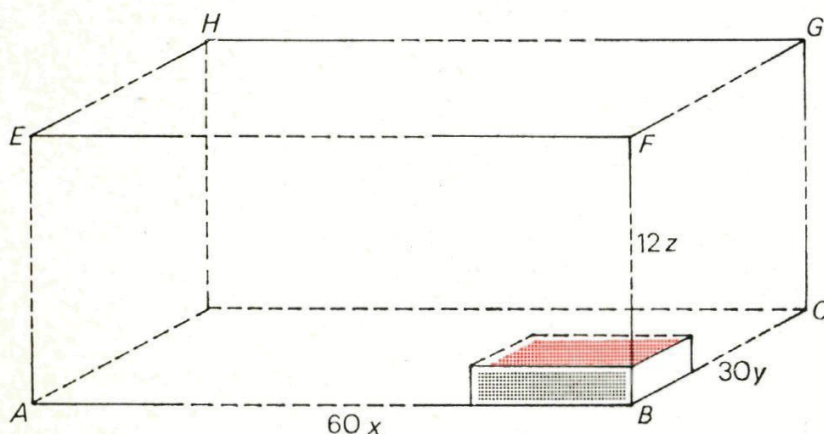


Fig. 15

Een van de mogelijkheden zie je in figuur 13. De grootte van de wikkel (afgezien van eventuele omslagen) is gelijk aan de oppervlakte:

$$\begin{aligned} O &= 2(600 \times 12 + 12 \times 30 + 600 \times 30) \\ &= 2(7200 + 360 + 18000) \\ &= 2 \times 25\,560 \\ &= 51\,120 \end{aligned}$$

Een andere keuze toont figuur 14. Nu is de oppervlakte van de wikkel:

$$\begin{aligned} O &= 2(150 \times 24 + 60 \times 24 + 150 \times 60) \\ &= 2(3600 + 1440 + 9000) \\ &= 2 \times 14\,040 \\ &= 28\,080 \end{aligned}$$

Je ziet dat er een aanmerkelijk verschil in oppervlakte, dus in grootte van de wikkel is. Bij een groot aantal doosjes zal de wijze van verpakking het kostenniveau dan ook sterk beïnvloeden.

Stel dat het rechthoekig blok van figuur 15 de ideale verpakkingsvorm is.

Langs AB liggen x doosjes met hun lengte 60.

Langs BC liggen y doosjes met hun kant 30.

Langs BF liggen z doosjes met hun hoogte 12.

De inhoud is $x \cdot y \cdot z$ doosjes en uit het gestelde volgt $xyz = 10$.

Uiteraard komen voor x , y en z alleen in aanmerking de getallen 1, 2, 5 en 10.

De totale oppervlakte van het pakket in figuur 15 is:

$$\begin{aligned} O &= 2(AB \cdot BC + BC \cdot BF + AB \cdot BF) \\ &= 2(60x \cdot 30y + 30y \cdot 12z + 60x \cdot 12z) \\ &= 2(1800xy + 360yz + 720xz) \end{aligned}$$

Voor bijvoorbeeld $x = 1$, $y = 1$ en $z = 10$ vinden we de oppervlakte van de wikkel door een eenvoudige substitutie:

$$\begin{aligned} O &= 2(1800 \cdot 1 \cdot 1 + 360 \cdot 1 \cdot 10 + 720 \cdot 1 \cdot 10) \\ &= 2(1800 + 3600 + 7200) \\ &= 25\,200 \end{aligned}$$

In de onderstaande tabel staan alle mogelijke combinaties van x , y en z met de bijbehorende oppervlakten.

x	y	z	oppervlakte
1	1	10	25 200
1	10	1	44 640
10	1	1	51 120
1	2	5	21 600
1	5	2	28 080
2	1	5	25 200
2	5	1	42 480
5	1	2	33 840
5	2	1	44 640

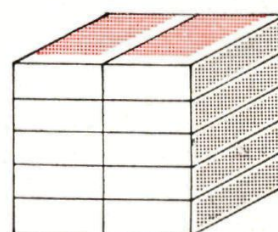


Fig. 16:

het eindresultaat

Uit de tabel blijkt duidelijk het verschil tussen de grootste en de kleinste wikkel.

Of de doosjes tabletten bevatten of iets anders doet aan de probleemstelling niets af of toe.

Neem daarom nu zelf eens doosjes met de afmetingen 52, 37 en 17 mm. Deze maten zijn van een luciferdoosje.

Wil je een controle?

Welnu, je gaat naar de winkel, koopt een pak lucifers en gaat de inhoud na. Vergelijk die maar eens met figuur 16.

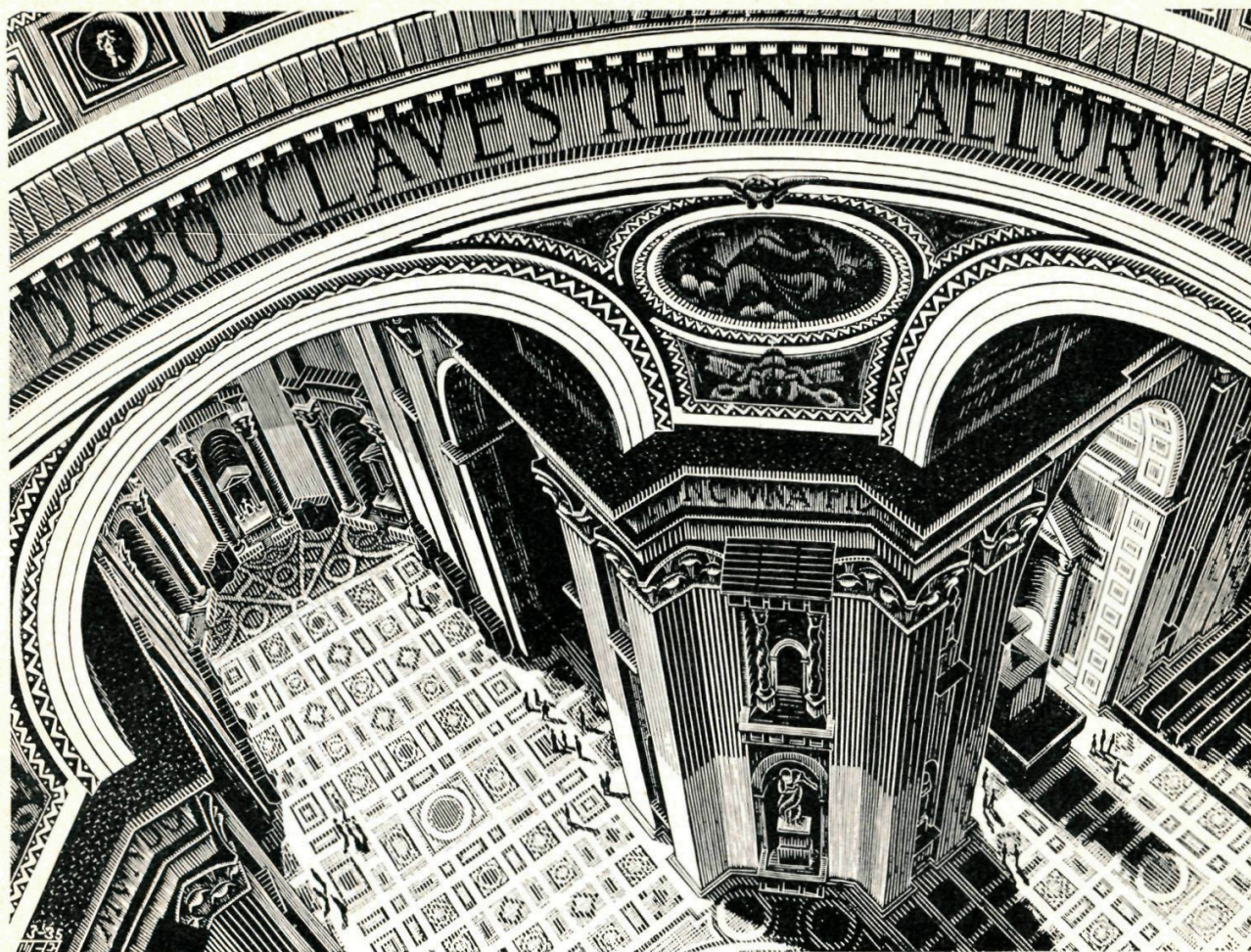


Fig.17. M. C. Escher, *Sint Pieter*

© Escherstichting

Wat is er fout aan de perspectivische afbeelding? °°

Naarmate een voorwerp verder van ons verwijderd is zien wij het onder een kleinere hoek. We zeggen meestal: hoe verder iets van ons af is, hoe kleiner we het zien. Als we de ruimte om ons heen gaan afbeelden, moet dit eerste beginsel van de ruimte-waarneming natuurlijk tot zijn recht komen: een voorwerp moet des te kleiner afgebeeld worden, naarmate het verder van ons verwijderd is.

We zullen nagaan of de perspectivische afbeelding hieraan voldoet.

In figuur 18 zien we de perspectivische afbeelding van een tegelvloer, en daaronder een plattegrond van dezelfde tegelvloer. Op de horizon is het hoofd-verdwijnpunt V aangegeven en ook het verdwijnpunt D_1 van de lijnen die een hoek van 45° met het tafereel

maken. Met deze twee hulppunten is een tegelvloer, waarvan de tegels een afmeting hebben van 1×1 meter, in perspectief gebracht. (Zie Pythagoras 10/1.)

De rechthoekig gelijkbenige driehoek ABC springt duidelijk naar voren.

Als we van A over C in de richting van V gaan, zien we dat de meters steeds kleiner worden afgebeeld. Dat is keurig, want het komt helemaal overeen met onze ruimtewaarneming.

Gaan we echter van C , over P en Q naar B , dan blijft de meter even groot, want $CP = QB$. Dit volgt uit de perspectivische constructie, en we hebben het in Pythagoras 10/1 afgeleid. Toch is de meter QB verder van ons verwijderd dan de meter CP .

Hoe groot zou QB afgebeeld moeten worden, als we zijn grotere afstand in rekening willen brengen?

Daartoe cirkelen we AB om op AC (dit doen we natuurlijk in de plattegrond) en we vinden dat $AB = AD =$ iets meer dan 7 meter. DR is een meter, die op een afstand van 7 meter staat, dus QB zou hoogstens even groot als DR mogen zijn.

Gaan we verder naar rechts, dan wordt het nog erger, want de meter ST wordt nog steeds even groot afgebeeld als de meter CP , terwijl ST meer dan 11 meter van ons verwijderd is en CP maar 5 meter.

Bekijken we verder de meter CE en gaan we naar rechts, dan zien we dat het beeld van de meter steeds groter wordt, TW is al meer dan 1,5 maal zo groot als CE . Dit wordt al te bont: het beeld van de meter zou kleiner moeten worden, maar groeit juist aan.

Precies dezelfde ongerechtigheden kunnen we opmerken bij verticale lijnen (in onze tekening zijn alleen lijnen in het grondvlak getekend). Bij een keurige perspectivische tekening van een toren wordt een meterlat die zich recht voor ons uit tegen de torenmuur bevindt even groot afgebeeld als diezelfde meterlat aan de top van de toren, terwijl de top toch verder van ons verwijderd is.

Misschien wil je zoveel kwaad van de perspectivische afbeelding niet geloven en denk je aan schilderijen en foto's, waarop de bovenkant van een toren wel kleiner was afgebeeld dan de onderkant.

We hebben er hier twee gereproduceerd: de foto van een flatgebouw (figuur 21) en een tekening van Escher

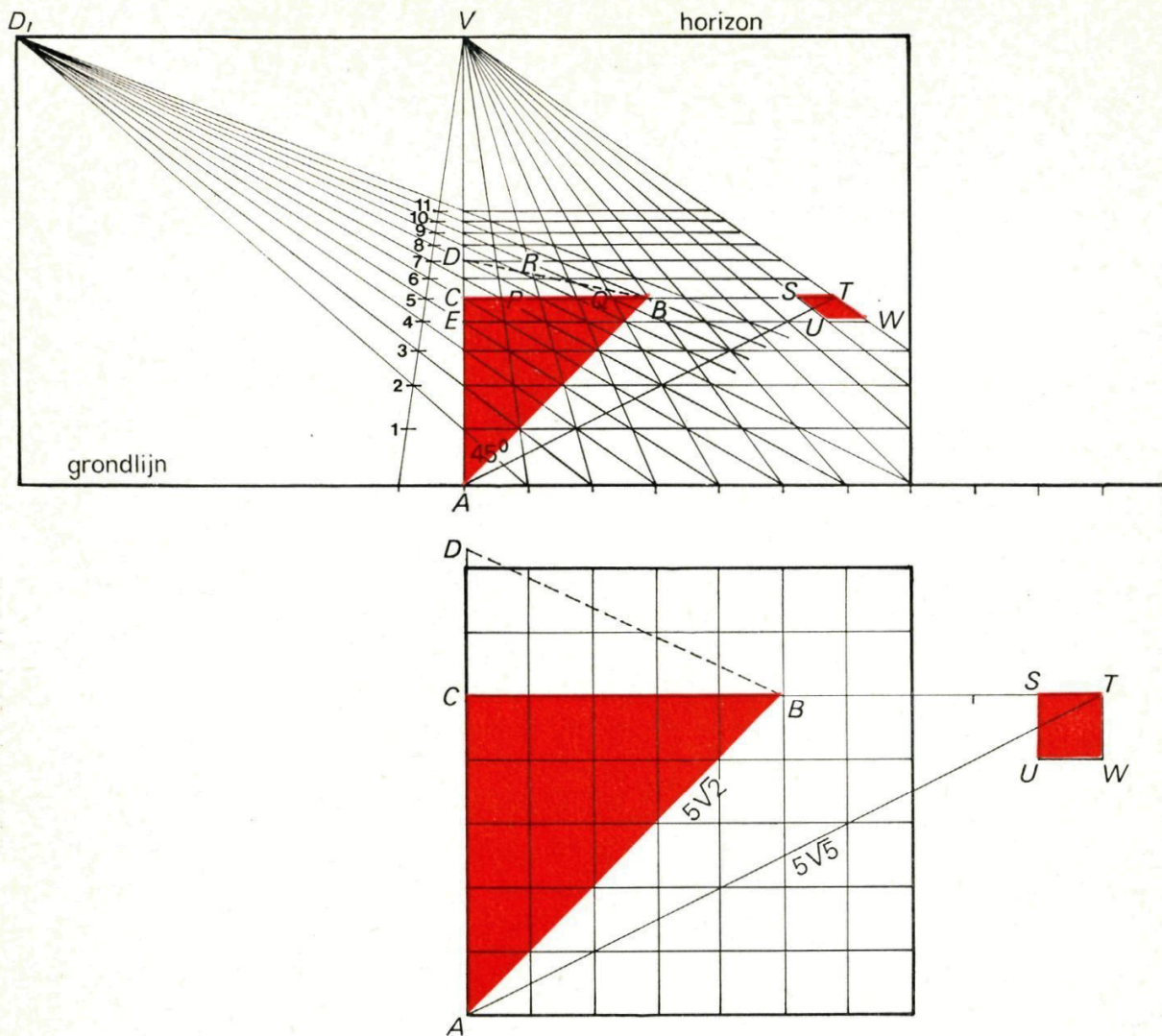


Fig. 18

van de Sint Pieter in Rome (figuur 17).

Beide schijnen in tegenspraak te zijn met wat hierboven aangetoond werd. Op de foto lopen de verticale omhooggaande lijnen naar één punt er boven en bij de tekening van de Sint Pieter lopen ze naar één punt beneden de tekening. Beide zijn goede perspectivische afbeeldingen, maar ... bij beide staat het tafereel niet meer loodrecht op het grondvlak! Als dat zo was geweest dan zouden alle verticale lijnen evenwijdig afgebeeld zijn. Maak maar eens een foto van een toren terwijl de camera goed horizontaal staat: de verticale lijnen komen als zuiver evenwijdige lijnen op de foto. Blijf je echter op hetzelfde punt staan, maar richt je de camera schuin naar boven, dan zullen de vertikaal omhooggaande lijnen op de foto verschijnen als lijnen die door één punt boven de foto gaan.

De waarnemer kan ook naar beneden kijken met een horizontaal tafereel voor zich: alle verticale lijnen snijden elkaar in een punt recht onder de waarnemer: het nadir. Dit is in de tekening van Escher duidelijk te zien.

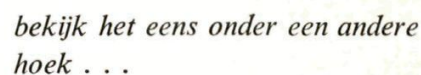


Fig. 21



Onze conclusie is:

De perspectivische afbeelding laat verstek gaan, als het erop aan komt om te voldoen aan de eerste beginselen van onze ruimtewaarneming. Een meterlat die verder van ons af is, wordt niet altijd kleiner afgebeeld dan een die dicht bij ons is. Een behoorlijk met de waarneming overeenkomende verkleining vinden we eigenlijk alleen maar op de lijnen die loodrecht op het tafereel staan.

De afbeelding van verticale en horizontale lijnen die evenwijdig aan het tafereel lopen is slechter naarmate ze verder van het centrum van het tafereel zijn afgebeeld. Alleen als het tafereel een klein beeldveld weergeeft, is de perspectivische afbeelding niet al te zeer in strijd met onze ruimtewaarneming.

Zijn er betere ruimte-afbeeldingen mogelijk? In een volgend artikel zullen we dat bekijken.

Denkertjes

- 13 Een vriend zei me: Ik had 21 dagen vakantie; op 14 dagen regende het 's ochtends en op 10 dagen regende het 's middags; het aantal droge dagen was gelijk aan het aantal dagen met een droge ochtend of middag. Kun je nu vinden op hoeveel dagen het zowel 's ochtends als 's middags regende?



- 14 Hoeveel wortels heeft de vergelijking

$$\sqrt{x} + \frac{1}{x-1} = 1?$$

geen: $2x > 1$ $x=1$ niet
 $0 < x < 1$ geen gedef.

- 15 Bewijs: als n , $n+2$, $n+4$ drie priemgetallen zijn, dan is $n+6$ geen priemgetal.

$n=3$, 9 geen priem

- 16 Bereken alle natuurlijke getallen tussen 900 en 1000 waarvan de som van de delers oneven is (het getal d heet een deler van het natuurlijke getal n als zowel d als $\frac{n}{d}$ een natuurlijk getal is).

n priem, niet deelbaar door 3, door 2 bij deling

rest 1 of 2

dan $n+2$ deelb. door 3 $n+4$ deelb. door 3

geen priem
44
voldoende getallen 31^2
de even getallen

De 12de Internationale Wiskunde Olympiade

In de zomer van 1970 was de Hongaarse staat gastheer voor de deelnemers aan de Internationale Wiskunde Olympiade. Uit veertien landen waren ploegen van acht jongelui aanwezig in Keszthely aan het Balaton-meer; ze behaalden van het maximale aantal van 320 punten de volgende scores:

Hongarije	233 punten	Tsjechoslowakije	145 punten
Rusland	221 „	Frankrijk	141 „
Oost Duitsland	221 „	Zweden	110 „
Joegoslavië	209 „	Polen	105 „
Roemenië	208 „	Oostenrijk	104 „
Engeland	180 „	Nederland	87 „
Bulgarije	145 „	Mongolië	78 „

Zoals je ziet waren onze Nederlandse jongens nou niet bepaald topfiguren (hoewel een van hen, Piet Eygenraam uit Den Haag, een persoonlijke derde prijs kreeg). Toch was 'ons' resultaat aanmerkelijk beter dan dat van het vorige jaar, toen er voor het eerst een Nederlandse ploeg in dit internationale gezelschap deelnam. Toen werd met ongeveer 50 punten de laatste plaats bezet.

Verwonderlijk is dit verschijnsel niet. Want wij kunnen niet opboksen tegen de bijzonder uitvoerige selectie- en trainingsmethoden van vele andere landen. Een heel gewoon verschijnsel is bijvoorbeeld dat de deelnemers aan de Internationale Wiskunde Olympiade al een paar maanden voor de afsluiting van het schooljaar uit de klas en zelfs uit de school worden weggehaald. In een trainingskamp bereiden zij zich dan uitsluitend op die olympiade voor. Alle andere vakken vervallen. Aan het eindexamen nemen zij niet deel, hun einddiploma krijgen zij gratis.

Er zijn nog twee andere kanten, van waaruit we hetzelfde verschijnsel van het relatief slechte Nederlandse resultaat kunnen bekijken. En die zijn wellicht belangrijker dan het voorgaande.

Wij noemen alle vraagstukken, die op school gemaakt worden, met een voor het Nederlands typisch verkleinwoord 'sometjes'. In het buitenland komen echter allerlei woorden voor, waarvan de Nederlandse equivalenten bijvoorbeeld zouden kunnen luiden: opgaven, oefeningen, vraagstukken, problemen. En met die woorden worden dan ook verschillende soorten, verschillende moeilijkheidsgraden aangegeven. Oefe-

ningen en opgaven zijn het gemakkelijkste. Voor de gewone leerling zijn zij het dagelijkse voer. Een wat betere leerling komt aan de vraagstukken toe. En de talentvolle leerlingen worden al vroeg in hun schoolcarrière uitverkoren en met levensgrote problemen (op)gevoed. Het ontdekken en ontwikkelen van talent is met name in de Oosteuropese landen ingebouwd in het onderwijssysteem en dat is een principieel verschil met onze gewoonten. Daar kan het dan ook gebeuren dat begaafde leerlingen op speciale scholen worden samengebracht en soms zelfs al van de eerste klas tot en met de laatste (vierde), jaar in jaar uit goed genoeg bevonden om in het vertegenwoordigende team op de Internationale Olympiade uit te komen.

Verder zijn wij Nederlanders nog in een ander opzicht een uitzondering en dat niet alleen maar in vergelijking met Oost-Europeanen. Bij ons wordt, in het algemeen gesproken, aan het opschrijven van de oplossing van een vraagstuk lang niet zo veel zorg besteed als in het buitenland.

Vooraf in dit opzicht van presentatie kunnen wij nog wel iets van onze mededingers leren!

Om je in staat te stellen jezelf op internationaal niveau te toetsen delen we hieronder, zonder oplossing, nog de opgegeven vraagstukken mee.

Opgave I, afkomstig uit Polen, maximaal 5 punten.

M is een willekeurig punt van de zijde AB van driehoek ABC , niet samenvallend met een eindpunt van die zijde.

r_1, r_2, r zijn in die volgorde de stralen van de ingeschreven cirkels van de driehoeken AMC, BMC, ABC .

$\varrho_1, \varrho_2, \varrho$ zijn in die volgorde de stralen van die aangeschreven cirkels van die driehoeken, die raken aan de zijden AM, BM, AB en dus binnen hoek ACB liggen.

Bewijs dat

$$\frac{r_1}{\varrho_1} \cdot \frac{r_2}{\varrho_2} = \frac{r}{\varrho}$$

Opgave II, Roemenië, maximaal 7 punten.

De natuurlijke getallen a, b, n , zijn groter dan 1; a en b worden als grondtallen van twee getallenstelsels gebruikt.

$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ zijn cijfers die in beide getallenstelsels gebruikt worden.

Het getal A_n wordt in het a -tallig stelsel net eender geschreven als het getal B_n in het b -tallig stelsel, namelijk als

$x_n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1 x_0$ waarin $x_n \neq 0$

Door het eerste cijfer x_n weg te laten ontstaat hieruit

$x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1 x_0$ waarin $x_{n-1} \neq 0$

en ook dit is weer de gemeenschappelijke notatie van twee getallen: van A_{n-1} in het a -tallig stelsel en van B_{n-1} in het b -tallig stelsel.

Bewijs dat uit

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$$

volgt $a > b$ en omgekeerd.

Opgave III, Zweden, maximaal 8 punten.

$a_0, a_1, a_2, \dots$ is een rij getallen die voldoen aan

$a_0 = 1$ en $a_{n-1} \leq a_n$ voor $n = 1, 2, \dots$

(I)

Uit deze rij wordt een nieuwe rij $b_1, b_2, \dots$ afgeleid en wel zo dat

$$b_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} \text{ voor elke } n.$$

a. Bewijs dat $0 \leq b_n < 2$ voor elke n .

b. Bewijs dat er bij elke willekeurige c waarvoor $0 \leq c < 2$ geldt een rij $a_0, a_1, a_2, \dots$ bestaat die aan (I) voldoet en wiens bijbehorende rij $b_1, b_2, \dots$ bovendien de eigenschap heeft dat $b_n > c$ voor oneindig veel n 's waar is.

Opgave IV, Tsjechoslowakije, maximaal 6 punten.

Welke natuurlijke getallen n hebben de volgende eigenschap: het is mogelijk het zeshalftal getallen $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ zo in twee groepen te verdelen dat het produkt van de getallen in de ene groep gelijk is aan het produkt van de getallen in de andere groep.

Opgave V, Bulgarije, maximaal 6 punten.

In het viervlak $ABCD$ staat DB loodrecht op DC . Het voetpunt van de loodlijn uit D op vlak ABC valt samen met het hoogtepunt van driehoek ABC .

Bewijs dat in het algemeen voor een dergelijk viervlak geldt:

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2).$$

Bij welke dergelijke viervlakken in het bijzonder geldt hier het gelijkteken?

Opgave VI, Rusland, maximaal 8 punten.

In een vlak zijn 100 punten gegeven; geen enkel drietal daarvan is op één lijn gelegen. We beschouwen alle driehoeken waarvan de hoekpunten tot dat gegeven honderdtal behoren. Bewijs dat niet meer dan 70% van die driehoeken scherphoekig is. Tijd voor het oplossen van deze opgaven: 8 uren.

Denkertjes

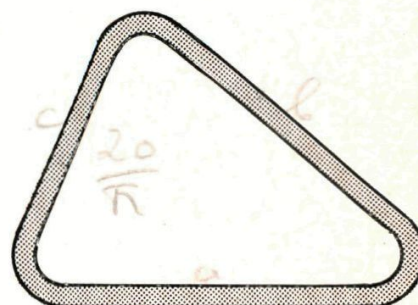
- 17 Voor welke n is de volgende zin waar: elke rechtehoekige driehoek kan verknipt worden in n stukken, die allemaal gelijkbenige (eventueel gelijkzijdige) driehoeken zijn.?

Bewijs dat je antwoord juist is.

- 18 De hiernaast getekende ring is overal even breed, de bochten zijn cirkelvormig (met gelijke stralen), de buitenomtrek is 21 centimeter en de binnenomtrek is 19 centimeter lang. Bereken de oppervlakte van de ring.

- 19 Het punt P is variabel in het binnengebied van het gegeven vierkant $ABCD$. Voor welke P is $PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PD + PD \cdot PA$ minimaal?

- 20 In een kubusvormige doos met ribben van 10 centimeter binnenwerks bevinden zich 2300 vliegjes (die als puntvormig beschouwd mogen worden). Is het mogelijk dat op een of ander ogenblik elk van die vliegjes tenminste 8,5 millimeter verwijderd is van elk van zijn lotgenoten in die doos?



Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 1 januari 1971 worden ingezonden naar het redactiesecretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.

Inhoud

Prenten van Escher 25

Wordt het verkeer onveiliger? ° 26

Zuinige reizigers °° 30

De goedkoopste verpakking ° 36

Wat is er fout aan de perspectivische afbeelding? °° 39

De 12de Internationale Wiskunde Olympiade 45

Denkertjes 29, 44, 48

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Scherpenzeel (Gld.).
A. F. VAN TOOREN, 's-Gravenhage.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 4,00 per jaargang. Voor anderen f 6,00. Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

