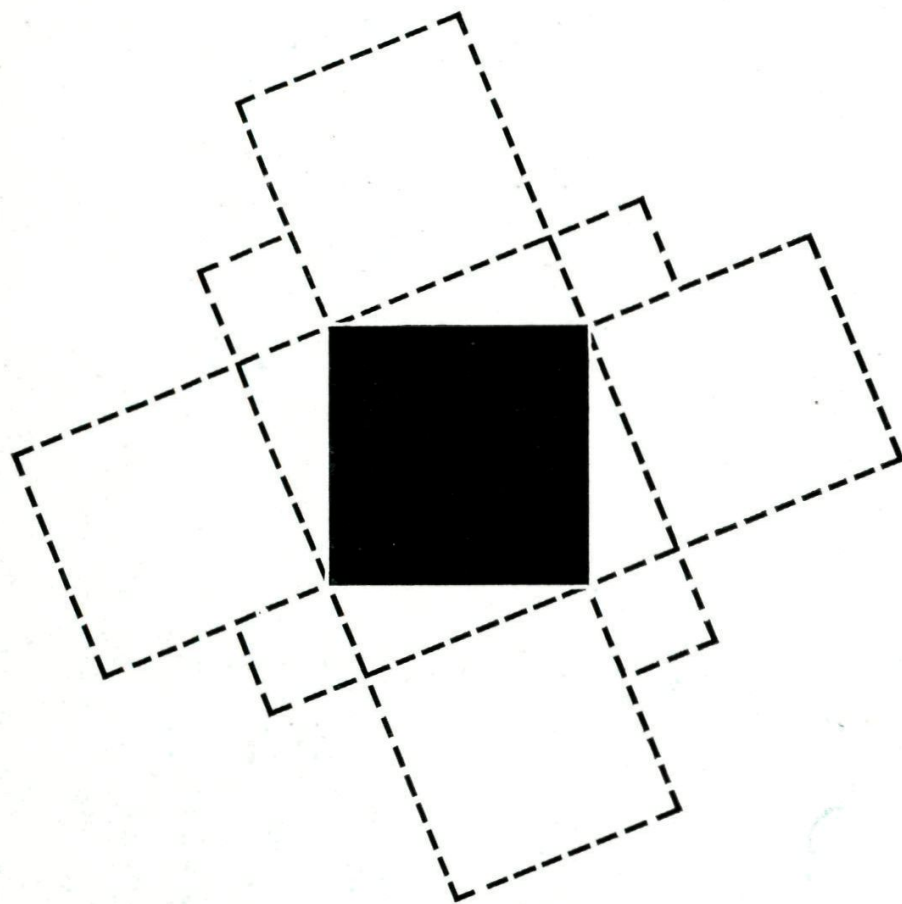
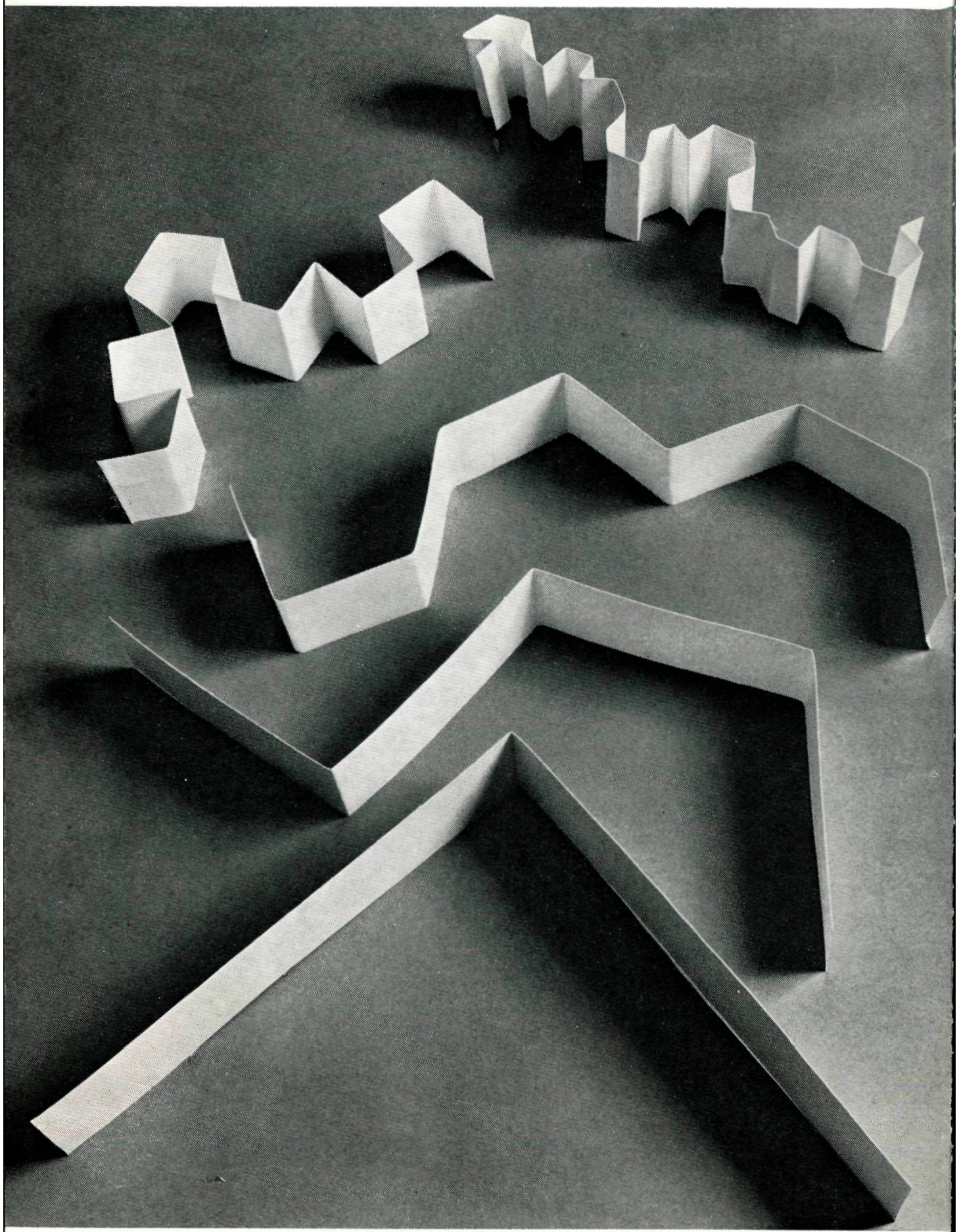


pythagoras

3



wiskundetijdschrift voor jongeren
jaargang 10 1970|1971



De draakkromme°

Leg een smalle strook papier voor je op tafel en zet een merkteken bij het linkeruiteinde op de naar boven gekeerde kant, zodat je naderhand de strook weer net zo kunt neerleggen. Vouw de strook nu dubbel, door het rechteruiteinde op het linkeruiteinde te leggen. Maak in het midden een scherpe vouwlijn.

Vouw nu de strook weer open. Het zal moeilijk zijn om de beide helften weer netjes in elkaars verlengde te krijgen: ze zullen een zekere hoek met elkaar gaan vormen, een stompe hoek als het papier niet al te stug is. (Figuur 1)

Het midden van de strook noemen we A en we zien dat de benen van die hoek iets naar boven gericht zijn. De scherpe vouwlijn bevindt zich aan de onderkant van het papier.

Vouw nu het papier tweemaal dubbel en daarna weer open, dan zie je figuur 2.

Bij C ligt de vouwrand onder, net als bij A , maar bij B ligt de rand boven.

We gaan dit een beetje verwiskundigen en geven een vouwlijn, zoals bij A en C aan met een 1, een vouwlijn zoals bij B met een 0.

Het patroon dat na eenmaal vouwen ontstaat noemen we D_1 en we zien dus $D_1 = 1$ (figuur 1).

Na twee keer krijgen we $D_2 = 1\ 1\ 0$ (één-één-nul).

Hoe wordt het patroon na drie keer vouwen? (Figuur 3).

We zien $D_3 = 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0$ (één-één-nul-één-één-nul-nul).

Het zal je niet moeilijk vallen om D_4 te bepalen met je strook papier.

Als rechtgeaarde wiskundigen werpen we nu de strook echter weg en gaan verder met

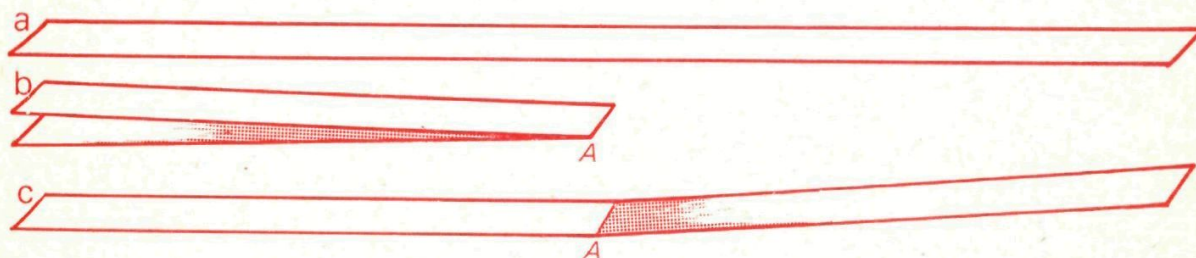


Fig. 1

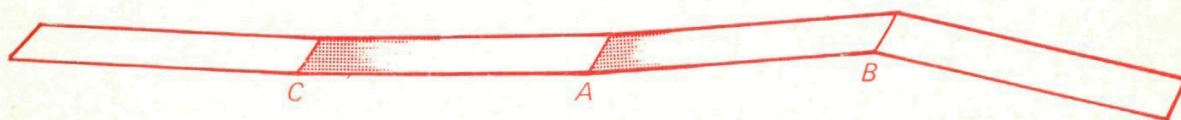


Fig. 2

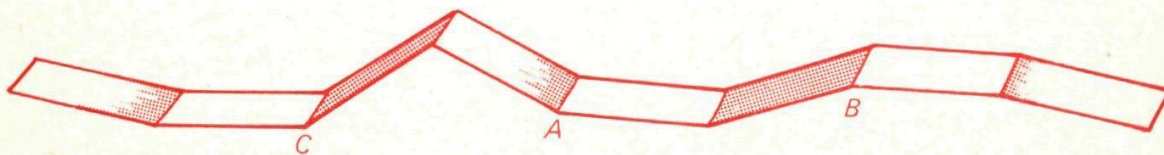


Fig. 3

alleen de hulp van wat we al hebben en ons vermogen om te redeneren. We verzamelen nog even:

$D_1 =$	1	aantal vouwlijnen 1
$D_2 =$	1 1 0	aantal vouwlijnen 3
$D_3 =$	1 1 0 1 1 0 0	aantal vouwlijnen 7
$D_4 =$	??????????	aantal vouwlijnen ?

We beginnen met ook voor D_4 in het midden een 1 te plaatsen:

$$D_4 = \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots$$

Wat komt nu vòòr deze 1 ? D_3 !

$$\text{Dus } D_4 = \underbrace{1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1}_{D_3} \dots\dots\dots$$

Wat komt na de 1? Ook D_3 , maar dan 'gespiegeld', dat wil zeggen 0 in plaats van 1 en omgekeerd. Zo vinden we:

$$D_4 = 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0$$

Nu hebben we een systeem gevonden, waarmee we verder kunnen gaan:

$$D_5 = 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0.$$

De redenering die tot de afleiding van D_4 , $D_5 \dots$ leidt is niet moeilijk en laten we hier weg. Denk er maar eens aan wat je krijgt als je na bijvoorbeeld driemaal vouwen de papierstrook middendoor knipt.

Je zou het resultaat na tienmaal vouwen kunnen opschrijven, als je voldoende ruimte hebt. Je moet daarbij wel bedenken dat het aantal vouwlijnen iedere keer verdubbelt, plus nog één vouwlijn extra.

Anders gezegd: Na elke keer vouwen verdubbelt het aantal delen waaruit de papierstrook bestaat:

- Na eenmaal vouwen (figuur 1c) zie je 2 delen
- Na tweemaal vouwen (figuur 2) zie je 4 delen
- Na driemaal vouwen (figuur 3) zie je 8 delen
- Na tienmaal vouwen komen er 1.024 delen

Het aantal vouwranden is telkens één minder, zodat D_{10} uit 1.023 enen en nullen bestaat!

Misschien wat veel om op te schrijven en bovendien ook moeilijk te controleren, want hoe lang en dun je strook papier ook is, je zult er niet in slagen hem vaker dan zeven maal te vouwen, zoals een merkwaardige ervaring uit de praktijk ons leert.

In theorie zou je zelfs D_{100} kunnen bepalen, om over D_{1000} en $D_{100.000}$ maar niet te spreken.

In figuur 4 is een begin gemaakt met de kromme die dan ontstaat, waarbij deze zo getekend is dat na het 'openvouwen' de verschillende 'segmenten' hoeken van 100° met elkaar maken.

In figuur 5 is een dergelijke kromme lijn getekend, maar dan met hoeken van 90° in plaats van 100° .

In figuur 6 tenslotte is dezelfde kromme getekend, maar dan met de hoeken enigszins afgerond, waardoor een vloeiende, grillige lijn ontstaat, die door zijn ontdekker

Fig. 4. De strook opgevouwen,
met hoeken van 100° bij iedere
vouwlijn

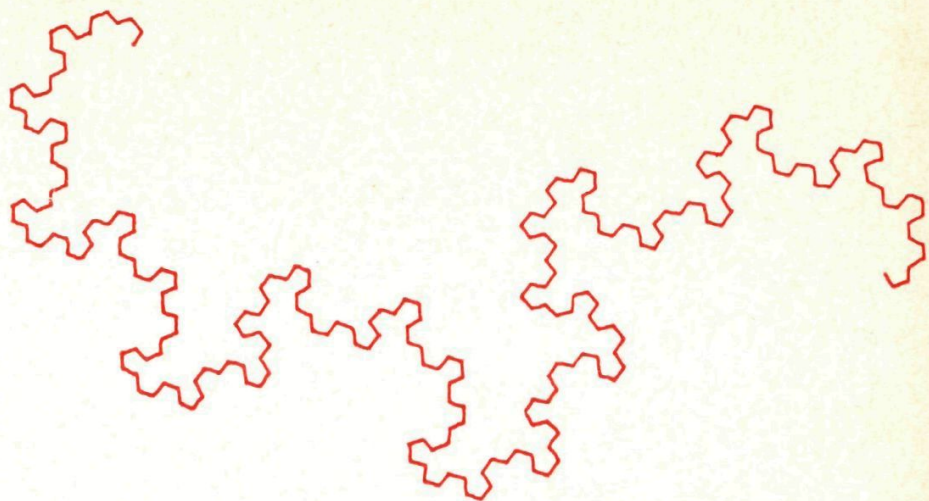
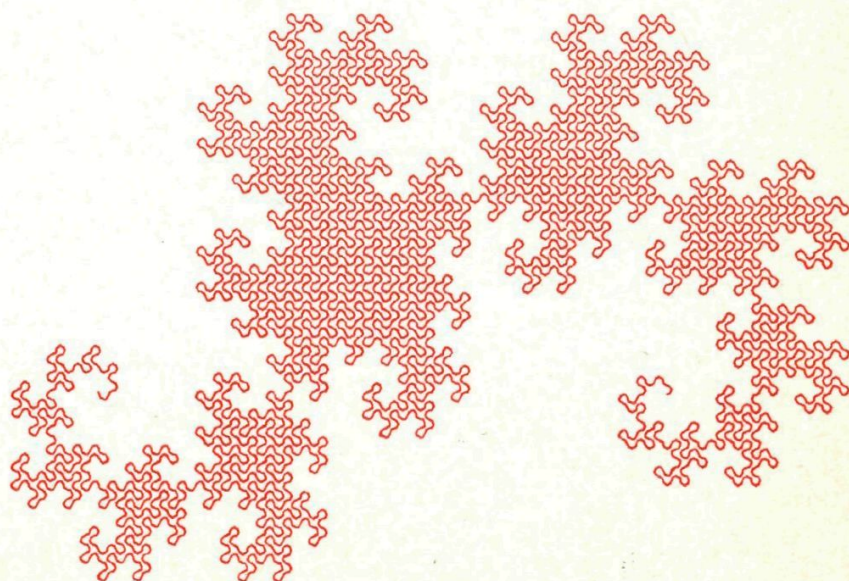


Fig. 5. Met hoeken van 90°
ontstaat een soort borduurpatroon



Fig. 6. Als je de hoeken afrondt,
krijg je de draakkromme



John E. Heighway de *dragon curve* is genoemd, ofwel de *draakkromme*.

Over dit merkwaardige stukje wiskunde zijn nog tal van bijzonderheden te vermelden, waarvan we er nog één willen noemen.

Stel je voor dat je van figuur 5 twee afdrukken hebt en dat je deze langs de buitenrand uitknipt. Je kunt ze dan in elkaar passen als een legpuzzel, waarbij de ene een kwartslag is gedraaid ten opzichte van de andere (figuur 7). Sterker nog als je de in figuur 5 getekende kromme verder zou voortzetten, dan zou je met vier van deze grillige figuren precies het hele vlak kunnen bedekken, waarmee we hebben willen illustreren hoe zelfs uit een eenvoudige strook papier de meest wonderlijke wiskundige resultaten kunnen worden getoverd, zoals een goochelaar uit een hoge hoed de meest uiteenlopende zaken tevoorschijn haalt.

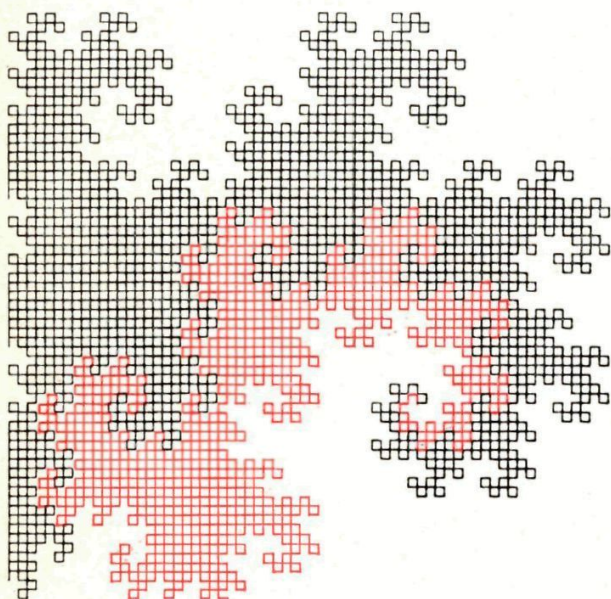


Fig. 7. Het patroon van figuur 5 past als een legpuzzel in zichzelf

Denkertjes

- 21 Onder $n!$ verstaan we het produkt van de natuurlijke getallen van 1 tot en met n . Dus bijvoorbeeld $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Als het kolossale getal $10000!$ geschreven wordt als een produkt van machten van priemgetallen, wat is dan de exponent van de in dat produkt voorkomende macht van 7?

(Ingezonden door A. van Setten, Rotterdam)

- 22 Bepaal alle oplossingen in gehele getallen x, y van de vergelijking $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4\sqrt{6}$.



Backtracking^o

Welke weg leidt door de onderstaande doolhof?

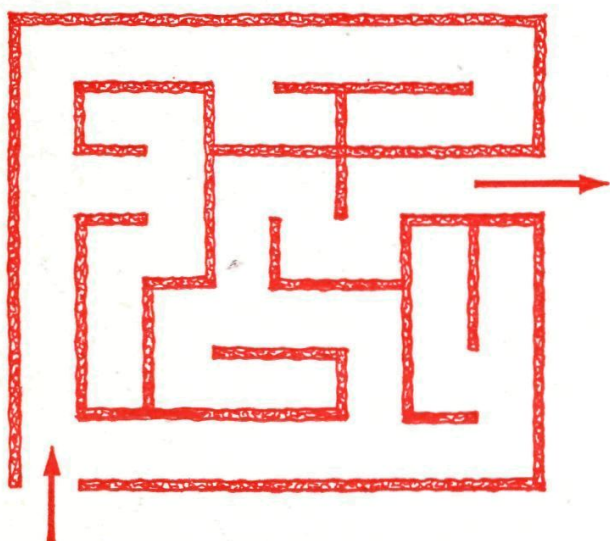


Fig. 8

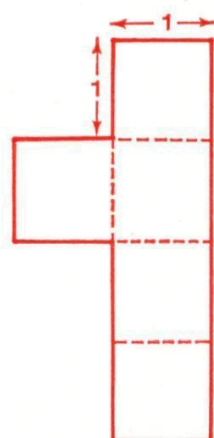


Fig. 9

Welke vierletterige Nederlandse woorden kunnen gevormd worden met geen andere dan de letters *a*, *b*, *d* en *e*?

Hoe kan een rechthoek van 5×10 gevuld worden met congruente stukjes van de vorm van figuur 9?

Drie vragen die op het eerste gezicht weinig met elkaar te maken hebben. Hebben de oplossingen dat wel? De weg door de doolhof is vooral in ons bovenaanzicht in één oogopslag te zien. Met de Nederlandse woorden wordt het moeilijker. Er schieten er ons een paar in gedachte: *baad, daad, bede*. Maar dat zijn ze waarschijnlijk niet allemaal. Het laatste puzzeltje zal je wel enige tijd kosten voordat je een oplossing te pakken hebt. Of er nog meer oplossingen zijn is dan nog niet duidelijk. Pas als we systeem in onze oplossingsmethode brengen, zal ons de overeenkomst in de drie gestelde problemen opvallen.

We kunnen de mogelijke wegen in de doolhof van figuur 10 vereenvoudigd aangeven met figuur 11. Hierin is het juiste aantal wegsplitsingen (U t/m Z) en wegeinden (B t/m I) overgenomen, maar de wegen zijn gestrekt weergegeven. Bij elke splitsing hebben we de keus tussen links of rechts aanhouden. Dit is een vereenvoudiging van de werkelijkheid, want daarin heeft ‘linksaf’ soms de betekenis ‘rechtdoor’. We moeten ‘links af’ daarbij opvatten als ‘niet rechtsaf’. De splitsing A bij de ingang is daarvan een voorbeeld. We hebben nu een figuur waarin we de doolhof nabootsen. Alleen wat

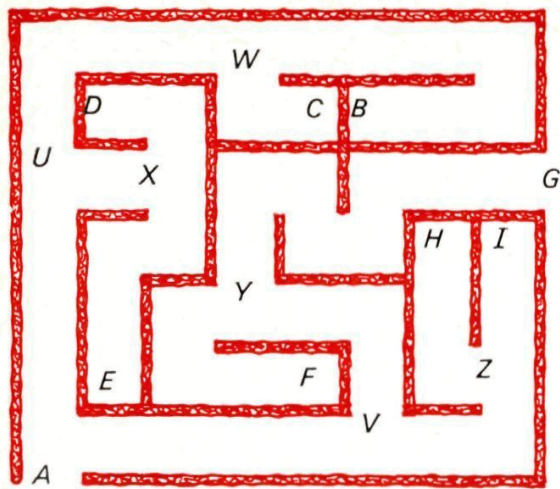


Fig. 10

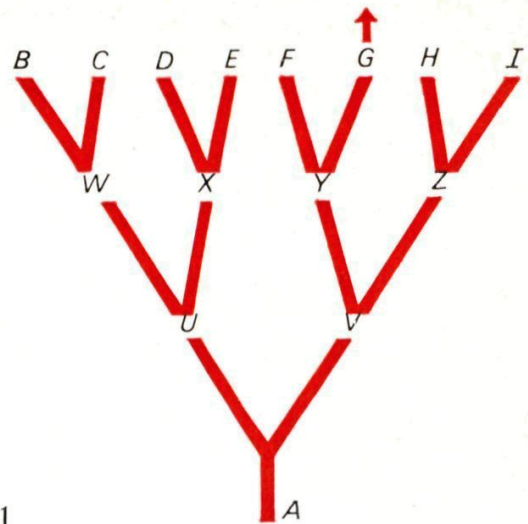


Fig. 11

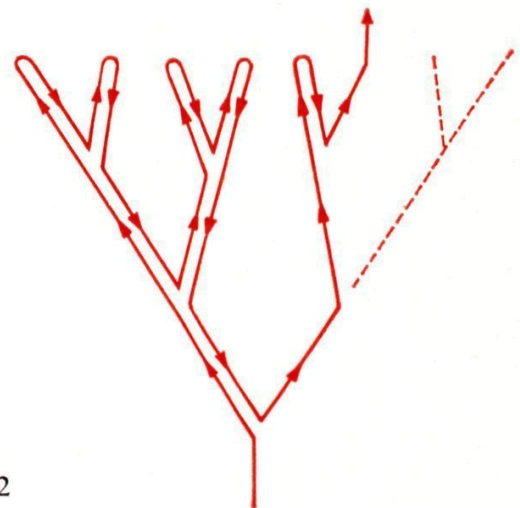


Fig. 12

overzichtelijker. Men noemt dit een *model* van de werkelijkheid. In dit model van de doolhof zijn alleen de voor ons belangrijke aspecten overgenomen, namelijk de splitsingen en het al of niet doodlopen van een gang. Of in een gang wel of geen bochten zitten is voor de oplossing onbelangrijk. Een route door de doolhof kunnen we nu aangeven door voor elke splitsing achtereenvolgens de keuze aan te geven. Zo is de route links-rechts-links (kortweg *lrl*) de weg die bij *D* doodloopt. Het punt *Y* kan bereikt worden met *rl*. Het punt *F* is *rll*.

Stel nu dat iemand stelselmatig alle mogelijkheden van de doolhof wil doorzoeken. Hij begint met bij elke splitsing links te houden (*lll*) en loopt dood. Nu kan hij terug lopen naar de ingang en daarna route *llr* nemen, maar dat is niet handig. Hij kan volstaan met naar de laatste splitsing *W* terug te keren en daar rechtsaf te slaan. Hij keert op zijn schreden terug zover als dat nodig is. Dit op zijn *spoor terug* keren wordt aangeduid met de Engelse term 'backtracking' (*back* = terug, *track* = spoor). Onze spoorzoeker werkt op een wijze die we als volgt kunnen symboliseren:

lll, keert terug naar *ll* en neemt nu
llr, keert terug naar *l* (het punt *U*) en neemt
lrl
lrr, keert naar het uitgangspunt *A* terug en dan
rll
rlr en vindt hierbij de goede uitgang *G*.

In het geval van de doolhof kan dit worden aangegeven als in figuur 12.
 Als onze hofdolaard ook wil onderzoeken of nog een tweede mogelijkheid aanwezig is
 om aan de hof te ontsnappen, dan kan hij zijn onderzoek nog voortzetten met

rrl
rrr.

Nu ons probleem van de vierletterige Nederlandse woorden, die mogen bestaan uit een
 aantal *a*'s, *b*'s, *d*'s, en *e*'s.

Als we niet in het wilde weg gaan zoeken, maar systematisch te werk gaan, verschijnt
 ook hierbij de backtracking. We beginnen met uitsluitend *a*'s. Omdat dit geen woord
 is, breken we de combinatie van achteren af en nemen voor de achterste letter de twee-
 de keus, enz. Als dat nog geen woord heeft opgeleverd breken we de letterverzameling
 af tot en met de tweede letter van achteren

<i>aaaa</i>	<i>aaae</i>	<i>aabd</i>
<i>aaab</i>	<i>aaba</i>	<i>aabe</i>
<i>aaad</i>	<i>aabb</i>	<i>aaada</i> enz.

Net zoals we bij de doolhof vanzelf een keer de goede uitgang (*rlr*) tegenkwamen, zul-
 len in deze lijst de gevraagde woorden verschijnen, zij het dan, dat we hierbij wel eens
 het woordenboek moeten raadplegen. Ook van deze opgave kan een model gemaakt
 worden, op dezelfde wijze als het boom-model van de doolhof. Een gedeelte hiervan
 zie je in figuur 13.

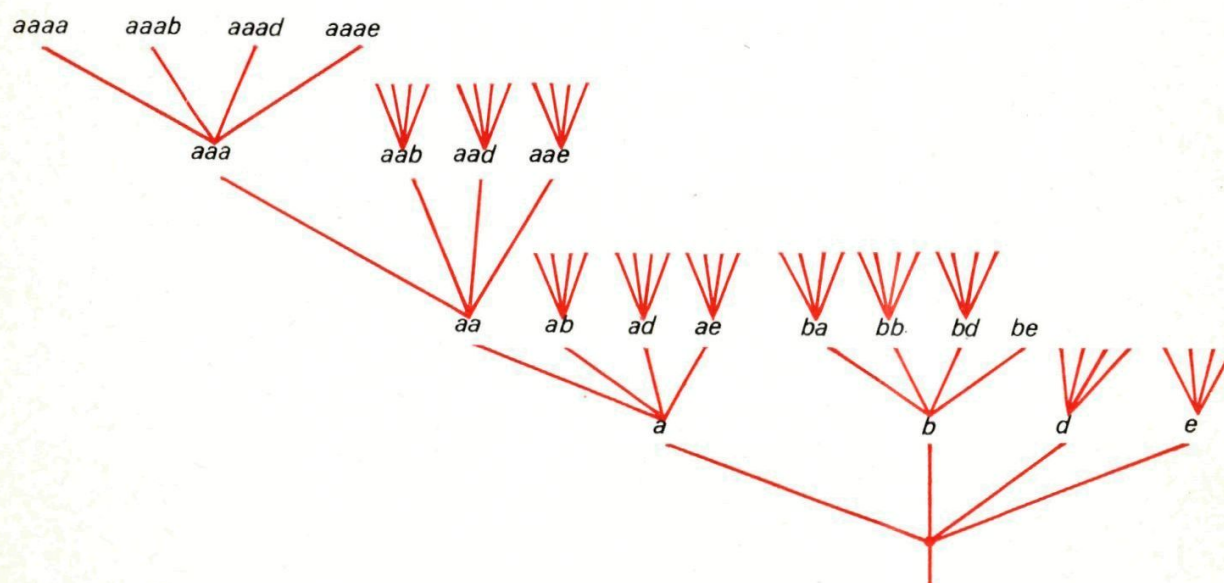


Fig. 13

Het nagaan van alle 256 mogelijkheden is een geestdodend routinewerk. Er zou eigenlijk een machine moeten zijn, die zulk werk voor ons kan doen, maar daarover straks meer.

Nu het laatste probleem. Een dergelijke puzzel is gemakkelijk zelf te maken, maar hij is ook te koop. In dat laatste geval zijn de stukjes van een vorm die samengesteld lijkt uit vijf kubussen. Ze worden daarom Pentacubes (penta = 5) genoemd. Nu zijn er verschillende vormen pentacubes, maar de hier bedoelde wordt, vanwege zijn overeenkomst met de letter *Y*, aangeduid met *Y*-pentacube (figuur 14).

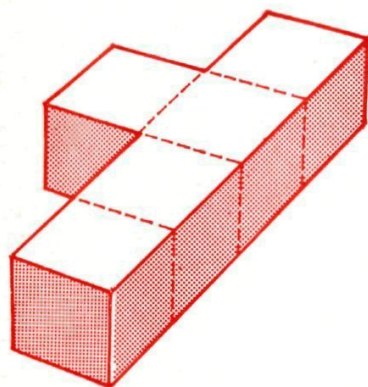


Fig. 14

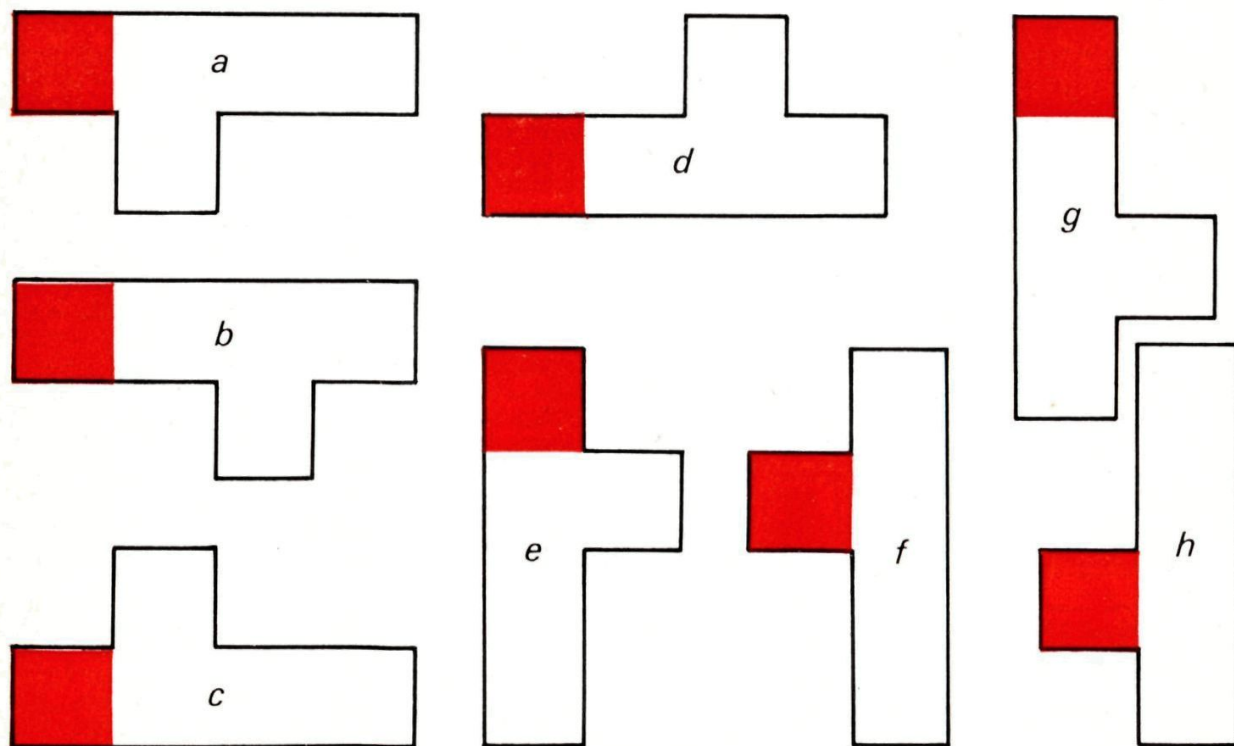


Fig. 15

Bij het vullen van de rechthoek met pentacubes onderscheiden we 8 verschillende liggingen: a t/m h in figuur 15.

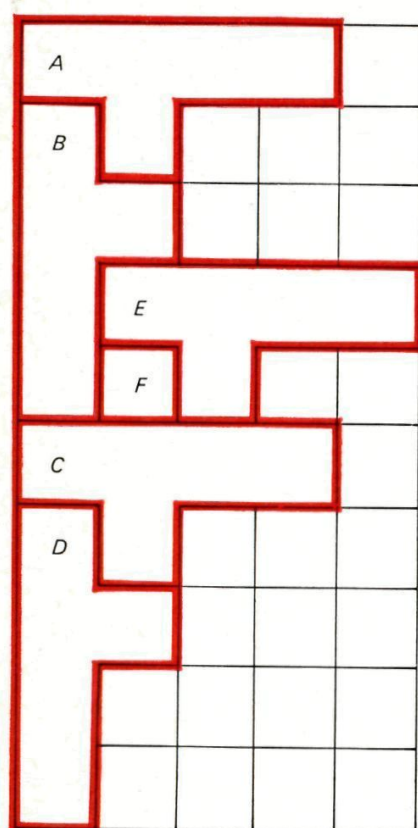


Fig. 16

We beginnen nu linksboven in de rechthoek (A in figuur 16). Als eerste keus de ligging a . Voor het bedekken van plaats B komen de liggingen a t/m d niet in aanmerking (de gekleurde uiteinden van deze liggingen kunnen niet in B geplaatst worden), dus aa , ab , ac en ad lopen dood. De eerstvolgende 'route' om mee verder te werken is ae . Het bedekken van plaats C kan weer op alle 8 manieren. Zo vullen we de rechthoek, eerst de linker kolom van boven naar onderen, dan de tweede kolom van links op dezelfde wijze, enz. Het onderzoek verloopt nu als volgt (+ betekent hierin 'doodlopend', waarna backtracking volgt).

$aa +$	$aeaa +$
$ab +$	$aeab +$
$ac +$	$aeac +$
$ad +$	$aeaea$

alle pogingen om plaats F te vullen lopen nu natuurlijk mis, we keren daarom op ons spoor terug naar $aeae$ en proberen $aeae b$ enz.

Na veel backtracking ontstaat dan eindelijk het eerste 'woord' van 10 letters:
 $ae f g h d e f g h$.

Op deze wijze verdergaand, ontmoeten we zeker alle oplossingen. Bijvoorbeeld ook $eh g c b f g f e h$.

Ook dit is een zeer langdurig werk. We zouden, wanneer we deze oplossing met de hand uitvoeren, natuurlijk veel boomtakken onmiddellijk afkappen, omdat we vroegtijdig aan zien komen dat aan de twijgjes geen oplossingen voorkomen. Backtracking is een zekere maar saaie methode.

Ook nu doet zich de behoefte gevoelen aan een automaat, die het saaie werk zou kunnen overnemen. Omdat in deze legpuzzel alle delen van de oplossing zich in getallen laten uitdrukken, kan een rekenautomaat inderdaad het zoekwerk van ons overnemen. Computers hebben van deze en soortgelijke puzzels het aantal oplossingen berekend. De legpuzzel van figuur 17 heeft pentacubes van verschillende vorm. Van deze (te koop zijnde) puzzel is berekend dat er 2339 verschillende oplossingen bestaan.

Van de Y -pentacubes zijn de opgaven niet beperkt tot het bedekken van rechthoeken.

Ook een rechthoekig blok van bijvoorbeeld $2 \times 5 \times 6$ laat zich vullen (figuur 18). Het vinden van een oplossings-systeem en het instrueren (programmeren) van de

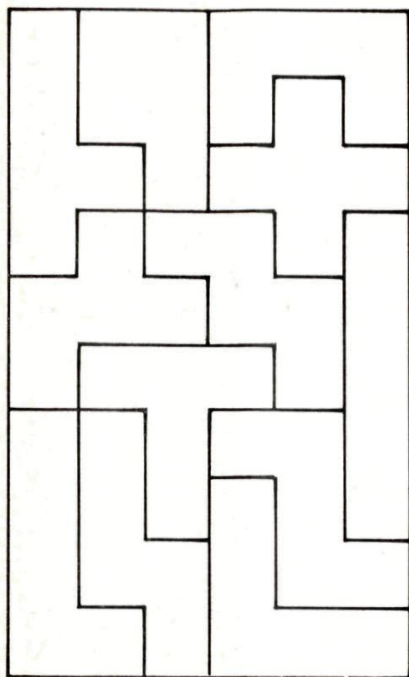


Fig. 17

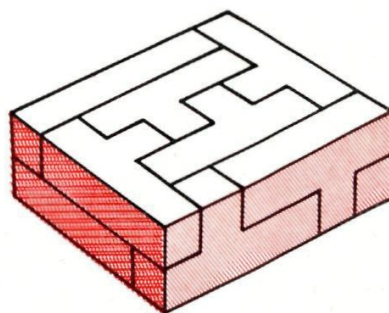


Fig. 18

computer voor dit geval is aanzienlijk moeilijker. Backtracking naar het begin van dit artikelje leert dat ons dit vraagstuk niet is opgegeven, we zullen er daarom maar niet op ingaan.

Denkertjes

- 23 De zijden AD en BC van de vierhoek $ABCD$ zijn niet evenwijdig, M en N zijn opvolgend de middens van de lijnstukken AB en CD .

Kan men uit deze gegevens concluderen tot een van de twee ongelijkheden

$$MN < \frac{1}{2}(AD + BC), \quad MN > \frac{1}{2}(AD + BC)$$

of kan men dat niet?

Toon de juistheid van je antwoord aan.

(Ingezonden door Prof. H. Freudenthal, Utrecht)

- 24 Het getal $3 \cdot 2^{100}$ kan gemakkelijk als som van een aantal opvolgende gehele getallen geschreven worden, namelijk zo:

$$3 \cdot 2^{100} = (2^{100} - 1) + 2^{100} + (2^{100} + 1).$$

Kan het ook nog op andere manieren?





Miniatuur van Jean Fouquet, zie bladzijde 62.

Perspectief, geen rechten, maar krommen!°°

Het afbeelden van de ruimte op een plat vlak is een typisch wiskundig probleem. Het is tegelijkertijd uitermate praktisch. Zo moet bijvoorbeeld een kaartentekenaar een bol (globe) of gedeelte er van op een plat vlak (atlas) afbeelden. Verder zijn het de tekenaar en de schilder die van ouds afbeeldingen van 3-dimensionale dingen op een plat vlak maakten.

Sedert de vroeg-renaissance streefde men ernaar die afbeelding zò te maken, dat de tekening of het schilderij hetzelfde beeld op het netvlies projecteerde als de 3-dimensionale werkelijkheid die afgebeeld werd. Deze wijze van afbeelden heeft de naam *perspectivische* afbeelding gekregen.

In een vorig artikel hebben we de principes van deze afbeelding uiteengezet en daarbij tevens ontdekt, dat ze niet helemaal aan haar doel beantwoordt.

Figuur 19 is de perspectivische weergave van een tegelvloer. In Pythagoras 10/2 vonden we dat de horizontale lijnen (1 t/m 6) in tegenspraak zijn met de meest elementaire wet van de ruimte-afbeelding: een meterlat wordt steeds kleiner gezien (en afgebeeld) naarmate hij verder van ons verwijderd is. Ook de verticale lijnen (hier niet getekend) worden niet juist weergegeven.

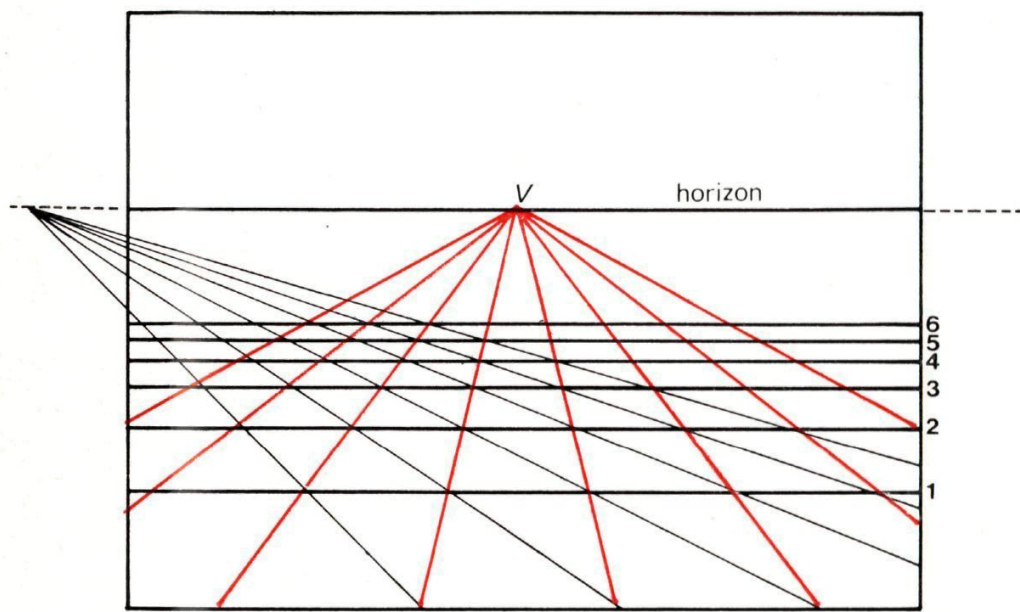


Fig. 19

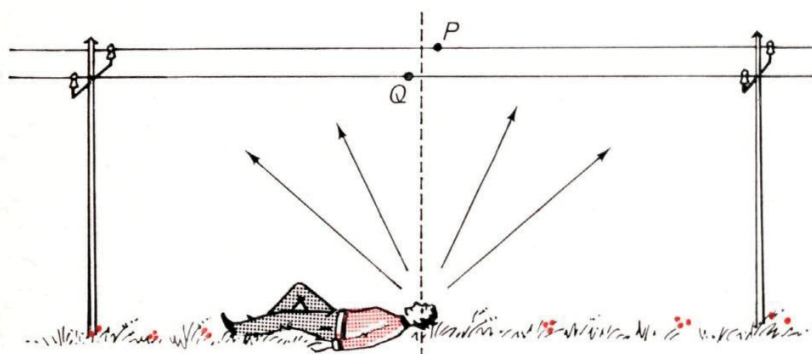


Fig. 20a

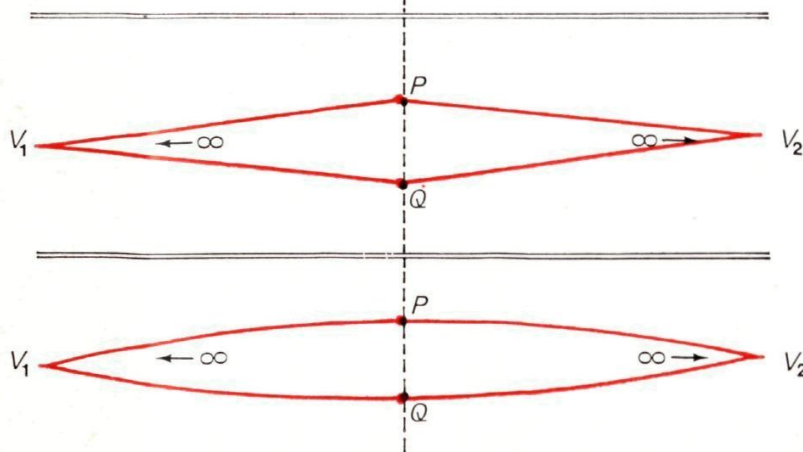


Fig. 20b

Fig. 20c

Alleen de van ons af lopende lijnen (de rode in de figuur) lijken op het eerste gezicht bevredigend. Maar ook hieraan gaan we tornen!

Iemand heeft zich in het gras neergeveild tussen twee telegraafpalen (figuur 20a) en kijkt naar twee evenwijdige draden. De punten P en Q zijn het dichtste bij hem. Kijkt hij voor zich uit dan ziet hij de draden in V_1 samenkomen; kijkt hij 'achterover' dan ziet hij ze in V_2 samenkomen.

De (aan beide zijden onbegrensd doorlopende) telegraafdraden zouden dus afgebeeld

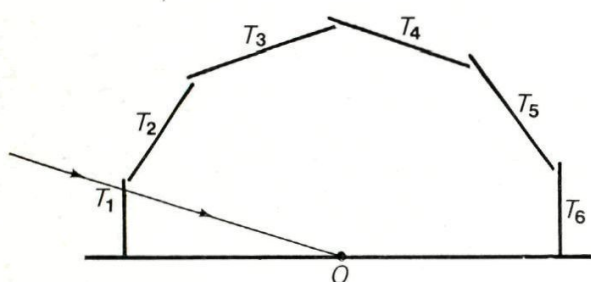


Fig. 21a

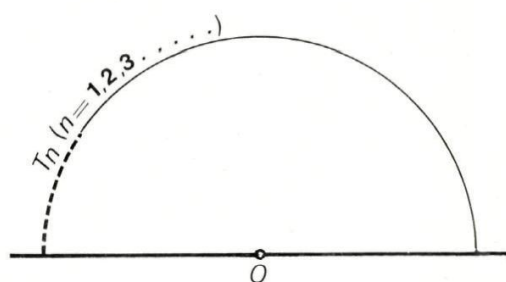


Fig. 21b

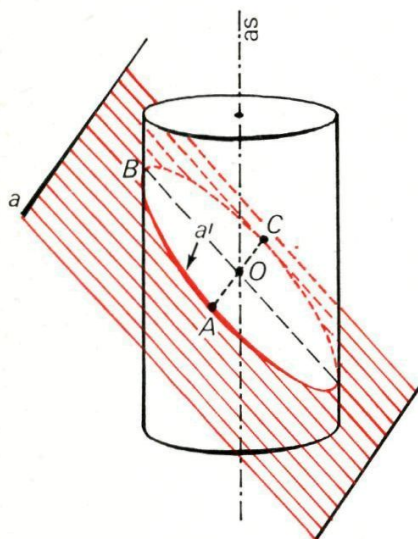
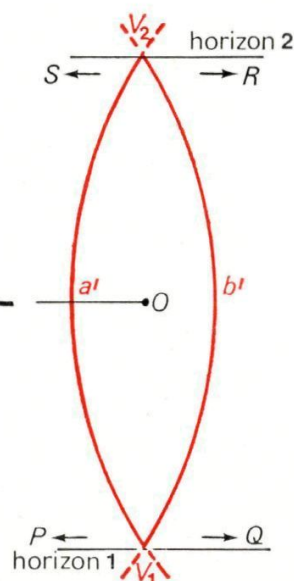
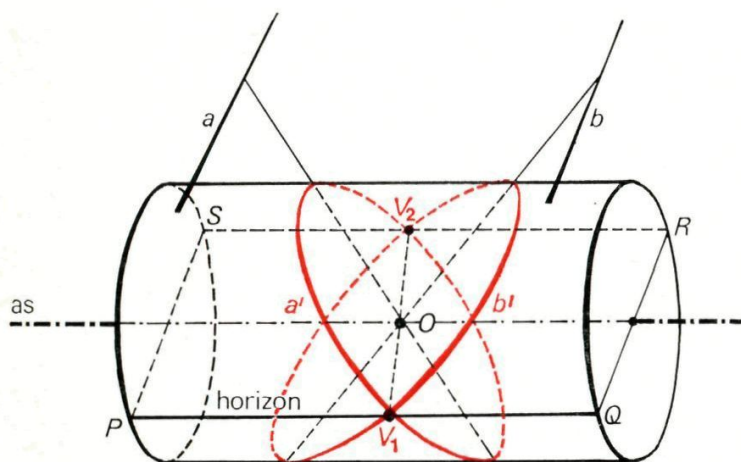


Fig. 22

Fig. 23a

Fig. 23b



worden als de ruit V_1QV_2P (figuur 20b). Maar daar geloven we niet in! Die knik bij P en Q hebben we nog nooit gezien en uit continuïteitsoverwegingen komen we tot gebogen lijnen, zoals in figuur 20c.

Hoezeer deze weergave overeenstemt met wat wij werkelijk waarnemen hebben we een keer opgemerkt toen we een panorama van een rivier fotografeerden. We stonden langs de oever en namen 12 foto's; na elke foto werd de camera ongeveer 18 graden gedraaid. Toen de 10 foto's aan elkaar geplakt werden, leek het beeld van de rivier veel op figuur 20c.

Ook schilders en tekenaars zijn tot deze perspectief met gebogen lijnen gekomen. De miniaturist Jean Fouquet (± 1480) heeft in een aantal afbeeldingen 'rechte wegen krom getekend' en Escher vertelde eens dat hij in een Zuid-Italiaans dorp een kloostertje tekende waarbij hij zowel de horizontaal verlopende kloostermuur als de centrale kerktoren als kromme lijnen afbeeldde, gewoon omdat hij dat zo zag.

We zeiden hierboven: uit continuïteitsoverwegingen komen we tot de gebogen lijnen. Maar hoe zit dat meetkundig? Is het te begrijpen, dat deze lijnen gebogen weergegeven moeten worden? En wat zijn dat dan voor gebogen lijnen? Cirkelbogen, delen van een hyperbool of van een ellips?

Om hierachter te komen bekijken we figuur 21a. O is het oog van de man die onder de telegraafdraden ligt. Kijkt hij voor zich uit, dan ziet hij de telegraafdraden als het ware afgebeeld op een tafereel T_1 . Als hij zijn blik iets naar boven richt dan gaat het tafereel mee (T_2). Het tafereel staat altijd loodrecht op de oogas.

De taferelen 1 tot en met 6 komen overeen met de verschillende foto's van de rivier. Natuurlijk is het aannemen van slechts 6 taferelen kunstmatig. Eigenlijk zijn er oneindig veel (figuur 21b). Het totale tafereel wordt nu cilindrisch en in 21b zien we daarvan een doorsnede getekend.

In figuur 22 is de hele cilinder getekend en a is een lijn die de as van de cilinder loodrecht kruist, juist zoals een telegraafdraad. Wat is nu de afbeelding van a op de cilinder? Om dit te vinden moeten we O verbinden met elk punt van a . Waar deze verbindingslijnen de cilinderwand snijden zijn de beeldpunten van a .

We kunnen ook ineens een vlak aanbrengen door a en het punt O . Dit vlak snijdt de cilinder volgens een ellips en a wordt afgebeeld als het deel ABC daarvan.

In figuur 23a zijn a en b twee telegraafdraden, verder is het cilindervormige tafereel getekend en het oog van de waarnemer in O .

De afbeeldingen van a en b zijn de halve ellipsen a' en b' . We zien nu tevens, dat ze elkaar in de verdwijnpunten V_1 en V_2 snijden.

Tenslotte moeten we het tafereel nog plat zien te krijgen, want we willen onze afbeeldingen op een plat vlak maken. Maar dit is geen moeilijkheid: we knippen de cilindermantel langs PQ en RS door en vouwen het bovenste deel plat (figuur 23b); a' en b' blijven nu echter geen halve ellipsen maar worden sinusoiden (Dit laatste te bewijzen zou ons te ver voeren).

Deze afbeelding op een cilindermantel vinden we reeds beschreven in een manuscript dat uit de tijd van Leonardo da Vinci stamt en dat door onze landgenoot Huygens is aangekocht.

De graficus Escher heeft de cilinderperspectief uitgewerkt en in verschillende van zijn prenten gebruikt. In een volgend nummer vind je daarover meer.

Over tegels en een blokkendoos^{oo}

Een vraagstuk, dat je op de lagere school ongetwijfeld hebt moeten oplossen luidt: Hoeveel tegels van 30 bij 30 centimeter heb je nodig om een pad van 6 bij 9 meter geheel te betegelen?

Een manier van oplossen was dan: De oppervlakte van het pad is 54 m^2 , de oppervlakte van een tegel is $0,09 \text{ m}^2$, met $54 : 0,09 = 600$ tegels ben je dus klaar.

Voor een pad van 7 bij 9 meter kom je op deze manier tot 700 tegels, zonder een ogenblik te merken dat je hele redenering zo scheef loopt als maar enigszins mogelijk is. Het zal je namelijk niet meevallen om een geheel aantal tegels op de breedte van 7 meter kwijt te raken.

Wil je met alle geweld een rechthoek van 7 bij 9 helemaal betegelen met onderling gelijke vierkanten, dan zul je een zodanige lengtemaat voor die vierkanten moeten zoeken, dat deze zowel op 7 als op 9 deelbaar is, bijvoorbeeld 0,25.

En wanneer je nu eens een rechthoek van $\sqrt{50}$ bij 9 zou hebben? Dan lukt het je beslist niet om een dergelijke betegeling voor elkaar te krijgen, omdat $\sqrt{50}$ en 9 onderling onmeetbaar zijn, hun verhouding is irrationaal.

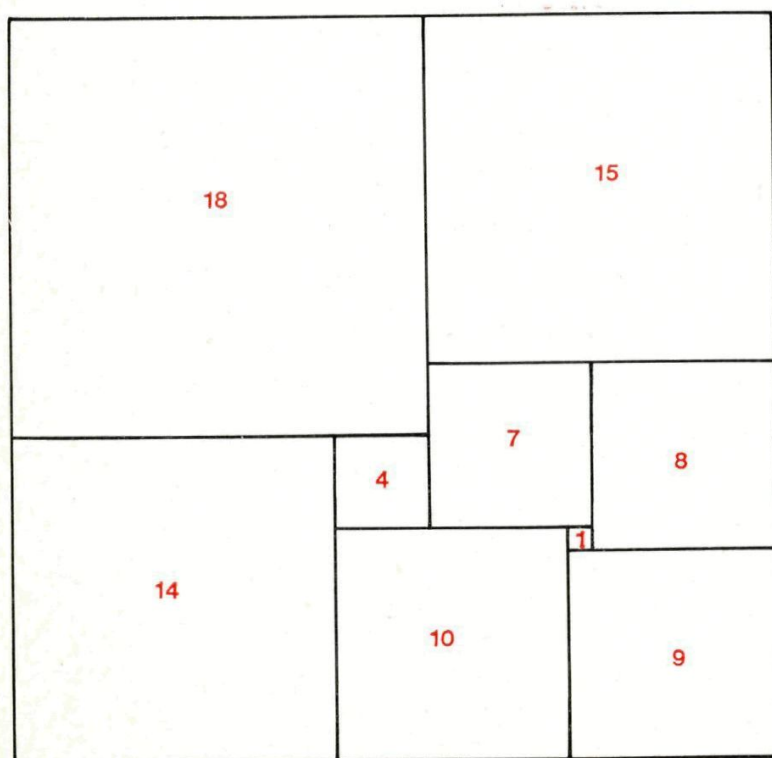


Fig.24

Algemeen kunnen we zeggen:

Je kunt een rechthoek overdekken met een aantal gelijke vierkanten, tenzij de verhouding van lengte en breedte van de rechthoek een irrationaal getal is.

Een andere vraag is of je een rechthoek ook kunt betegelen met uitsluitend *verschillende* vierkanten. Misschien twijfel je er aan of dergelijke betegelingen te vinden zijn. We beginnen daarom met een geruststelling: In figuur 24 zie je een voorbeeld. Het kan dus blijkbaar.

We kunnen ons zelfs afvragen of je een rechthoekige doos zou kunnen vullen met uitsluitend verschillende kubusvormige blokken. Aan het slot van ons verhaal komen we hier op terug.

Eerst gaan we wat verder in op het betegelen van rechthoeken met uitsluitend verschillende vierkanten, aan de hand van een paar eigenschappen.

Eigenschap 1

Als een rechthoek betegeld kan worden met uitsluitend verschillende vierkanten, ligt het kleinste vierkant vrij van de rand van de rechthoek.

Zou het kleinste vierkant K in de hoek liggen, dan (zie figuur 25a) ligt tegen een van de twee vrije zijden een groter vierkant. De overgebleven vrije zijde kan dan alleen nog maar bedekt worden door een of meer vierkanten die kleiner of gelijk zijn aan K . Dit is uitgesloten! In figuur 25b worden twee van de drie vrije zijden van K bedekt door twee verschillende en grotere vierkanten, de derde vrije zijde kan dan niet meer bedekt worden omdat K het kleinste vierkant is.

Eigenschap 2

Als een rechthoek betegeld kan worden met uitsluitend verschillende vierkanten, wordt het kleinste vierkant omringd door precies vier vierkanten.

Met minder dan vier kan geen enkel vierkant omringd worden, vandaar dat de juistheid

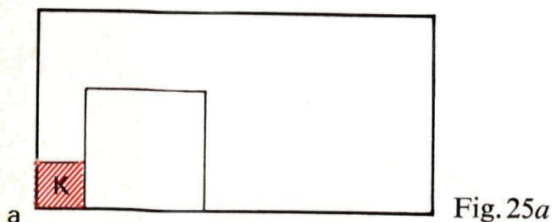


Fig. 25a

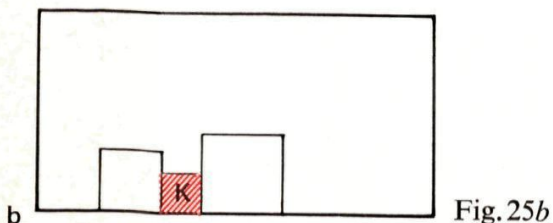


Fig. 25b

Fig. 26a

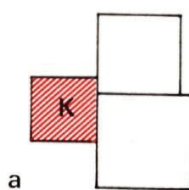


Fig. 26b

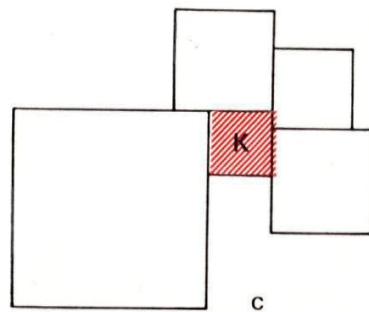
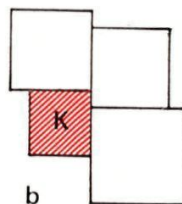


Fig. 26c

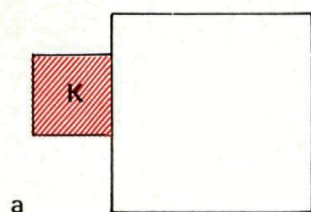
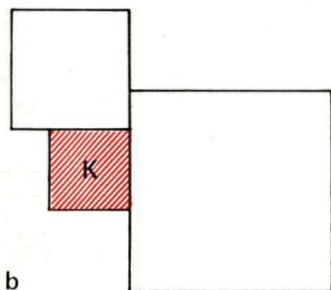


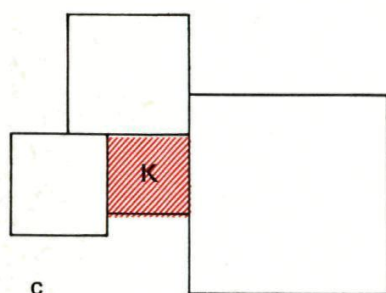
Fig. 27a

a



b

Fig. 27b



c

Fig. 27c

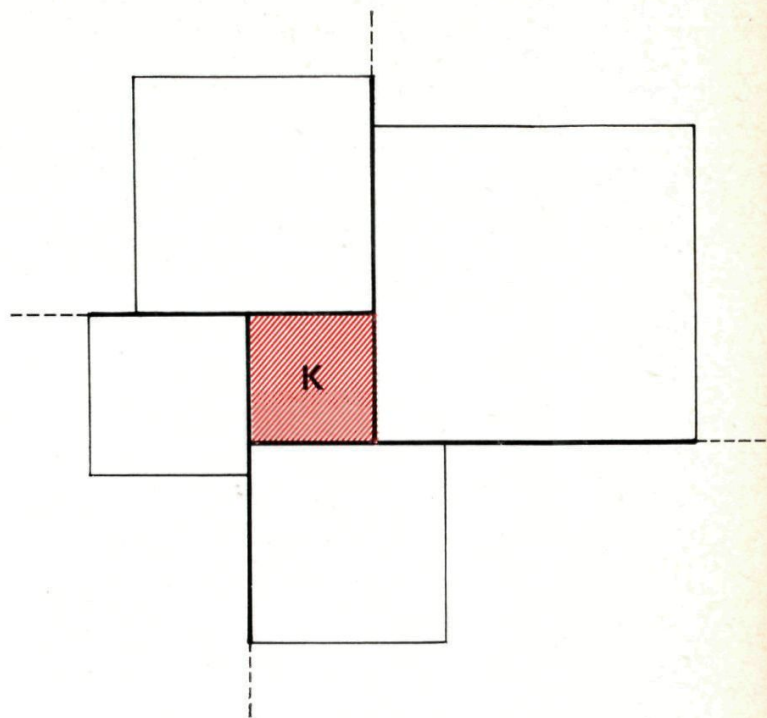


Fig. 28

van de bewering is aangetoond als we laten zien, dat een aantal groter dan vier in strijd is met het gegeven, dat de rechthoek betegeld kan worden met verschillende vierkanten.

In figuur 26a, b en c wordt duidelijk gemaakt waarom een van de zijden van K niet bedekt kan worden door twee vierkanten.

Uit figuur 27a, b, en c blijkt waarom K aan één zijde niet bedekt kan worden door een vierkant, dat aan beide kanten 'uitsteekt'.

In figuur 28 is getoond dat een vierkant K keurig omringd kan worden door precies vier verschillende en grotere vierkanten. Let daarbij eens op het *molenwiek* patroon!! Het is verleidelijk te onderzoeken of een rechthoek door precies vijf verschillende vierkanten is te betegelen. Het resultaat klinkt wat negatief.

Eigenschap 3

Als een rechthoek betegeld kan worden met uitsluitend verschillende vierkanten, is het aantal vierkanten groter dan vijf.

Zou vijf een toereikend aantal zijn, dan moet een *molenwiek*-patroon een rechthoek kunnen opleveren.

In figuur 29 is zo'n patroon getekend, waarbij x de zijde van het kleinste en y de zijde van een begrenzend vierkant is. De afmetingen van de overige drie begrenzende vierkanten zijn dan $(y - x)$, $(y - 2x)$ en z . Als dit patroon een rechthoek vormt, moet gelden:

$$z + (y - 2x) = (y - x) + y$$

d.w.z.

$$z = x + y$$

en bovendien:

$$z + y = (y - 2x) + (y - x)$$

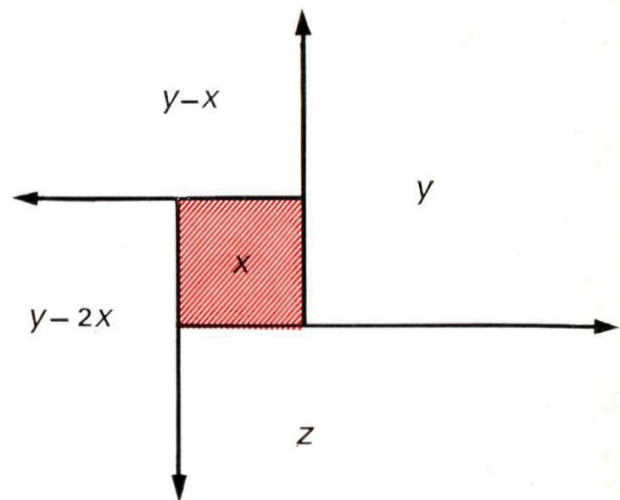
d.w.z.

$$z = y - 3x$$

Hieraan is alleen voldaan als

$$x + y = y - 3x$$

Fig. 29



dit betekent echter $x = 0$. Vijf vierkanten zijn dus ontoereikend.

Hoewel over het minimum aantal nog veel meer te zeggen zou zijn (bijv.: Wat is het kleinste aantal verschillende vierkanten waarmee een rechthoek betegeld kan worden?) eindigen we met een 'blokkendoos'-probleem.

Iemand bezit een aantal verschillende kubussen en vraagt zich af of er een rechthoekige doos is te maken die geheel opgevuld kan worden met deze kubussen.

Deze vraag is helemaal niet zo vreemd als je nog eens bedenkt, dat er rechthoeken bestaan die zich keurig laten betegelen met verschillende vierkanten (zie figuur 24!)

Helaas:

Het is onmogelijk een rechthoekige doos op te vullen met uitsluitend verschillende kubussen.

Veronderstel eens, dat het wél lukt, dan is de bodem van de doos te betegelen met verschillende vierkanten; de kleinste daarvan ligt volgens eigenschap 1 vrij van de rand; dit vierkant is de bodem van een kubus die door een viertal grotere kubussen als door een wal omgeven wordt, het bovenvlak daarvan kan dan alleen nog maar betegeld worden door nog kleinere vierkanten. Onder deze is weer een kleinste, vrij gelegen van de rand en door precies vier grotere omgeven. Opnieuw wordt hierdoor een kubus door een viertal grotere als door een wal omgeven enz. enz. Om de doos op te vullen is dus een eindeloze rij van steeds kleinere maar altijd verschillende kubussen nodig; anders gezegd, het is onmogelijk met een eindig aantal verschillende kubussen een rechthoekige doos geheel op te vullen.

Denkertjes



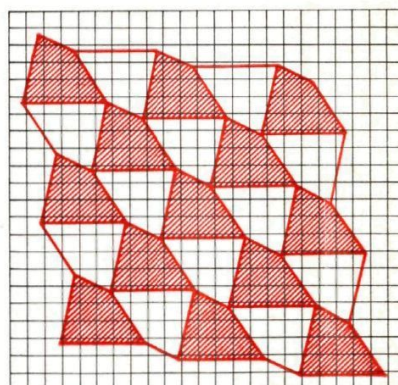
- 25 Teken een zeshoek met al zijn diagonalen. Hoeveel driehoeken staan er nu in je figuur die drie van de hoekpunten van de zeshoek tot hoekpunten hebben?

Bewijs dat er onder die driehoeken altijd ten minste zes niet-scherphoekige zijn, hoe je de figuur ook tekent.

- 26 Van de getallen x , y en z is gegeven dat $x + y + z$ en $yz + zx + xy$ en xyz alle drie positief zijn. Bewijs dat x , y en z alle drie positief zijn of geef een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat er ook negatieve getallen bij dat drietal kunnen zijn.

- 27 Verdeel een gelijkzijdige driehoek in vijf stukken die allemaal dezelfde vorm hebben, zo dat drie van die stukken congruent zijn en de andere twee ook.

- 28 Misschien wist je niet dat vierhoekige tegels, die niet symmetrisch zijn, heel goed gebruikt kunnen worden om er keurig netjes een vloertje mee te beleggen. Nevenstaande figuur laat zien hoe dat gebeuren moet. Verzin nu zelf eens een vijfhoekige niet-symmetrische tegel die ook bruikbaar is.



- 29 Bestaan er drie positieve getallen a , b , c zo, dat de vergelijkingen

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0, & bx^2 + cx + a &= 0, \\ cx^2 + ax + b &= 0 \end{aligned}$$

alle drie twee verschillende reële wortels hebben?

- 30 De vertaling van 'het grootste van de twee getallen x en y ' in algebrataal zou kunnen luiden:

$$\frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

Het zal je niet moeilijk vallen het hiermee eens te worden. Probeer daarna eens op soortgelijke manier te vertalen 'het grootste van de drie getallen x , y en z '.

(uit het Russische tijdschrift *Kwant*)

Een wiskundige kaarttruc^o

Bij zeer veel trucs met gewone speelkaarten berust de verbluffende uitwerking op regelrechte misleiding van de argeloze toeschouwer(s). De hier beschreven truc berust op een snuifje eenvoudige wiskunde, wat voor sommige mensen het beste bewijs is voor de stelling, dat elke kaarttruc bij voorbaat een dubbele bodem bevat! Wat de waarde van een kaarttruc ook is, deze bevat in ieder geval voor de liefhebber van en wiskunde en kaarttrucs alles wat hij maar wensen kan.

Een normaal spel kaarten bevat 52 speelkaarten, elke kaart heeft daarbij een bepaalde waarde bijvoorbeeld elke *aas* telt voor 1, elke *boer* voor 11, elke *vrouw* voor 12 en elke *koning* voor 13; bij de andere kaarten is de waarde gelijk aan het aantal *schoppen*, *harten*, *ruiten* of *klaveren*, dat is afgebeeld.

1. Verdeel de kaarten één voor één en open en bloot, dus met de afbeeldingen zichtbaar voor iedereen, in stapeltjes. Bij elke kaart die je uitdeelt tel je (onhoorbaar) te beginnen met de *waarde* van de eerste kaart dóór t/m 13; dan is het eerste stapeltje klaar. Het tweede en de volgende stapeltjes maak je op de zelfde manier. Zelfs als, toevalligerwijs, elk stapeltje met een 'aas' begint (en dus elk stapeltje uit het maximale aantal van 13 kaarten bestaat) kun je toch nog vier stapeltjes maken. In de regel zul je wel komen tot 5 à 6 stapeltjes en nog wat kaarten overhouden ook.

2. Nodig nu de toeschouwer(s) uit de stapeltjes om te draaien en sta daarbij toe, dat de rangschikking van de stapeltjes door hen zelf nog veranderd wordt.

3. Vraag nu alle stapeltjes op drie na aan jou terug te geven. Ter verhoging van het effect laat je deze opdrachten uitvoeren zonder dat je meekijkt!

4. Tenslotte nodig je de nu spoedig verblufte toeschouwers uit bij twee van de drie verdekt liggende stapeltjes de topkaart om te draaien en kondigt dan aan dat je de verdekt blijvende derde topkaart nu op waarde kunt vaststellen.

5. Om dit te doen verminder je het aantal kaarten, dat je in handen hebt met 10 en vervolgens nog eens met de som van de waarden van de twee getoonde topkaarten. Het aantal kaarten, dat je dan nog in handen hebt is gelijk aan de waarde van de derde, verdeckte topkaart! Uiteraard kun je dit aftellen met veel geheimzinnigheid omgeven.

Nu de verklaring van het mysterie.

Is a de waarde van de getoonde topkaart, dan bevat het stapeltje juist

$$13 - (a - 1)$$

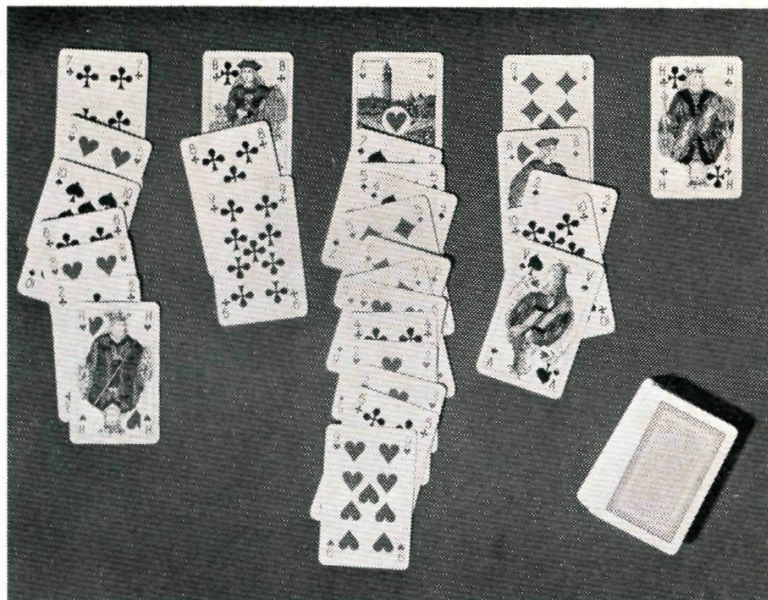
kaarten.

Het stapeltje met de tweede, in waarde bekende topkaart bevat, als we deze bekende waarde b noemen

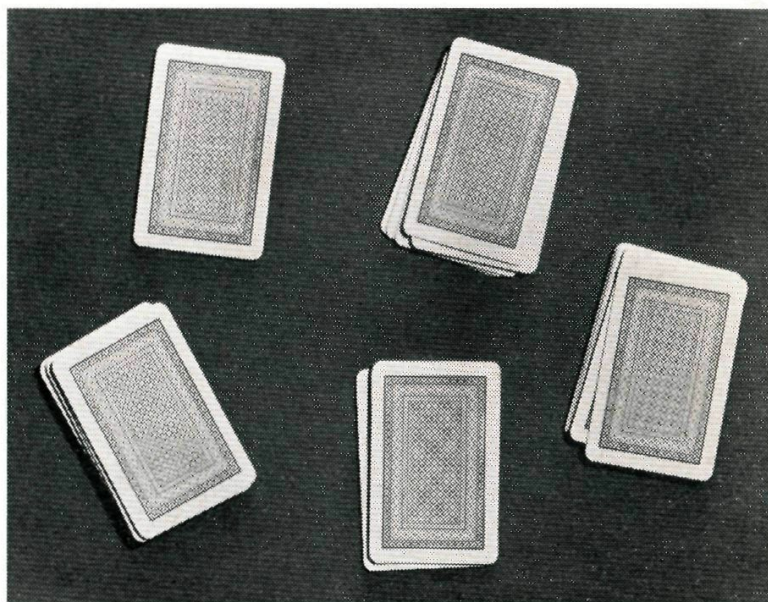
$$13 - (b - 1)$$

kaarten.

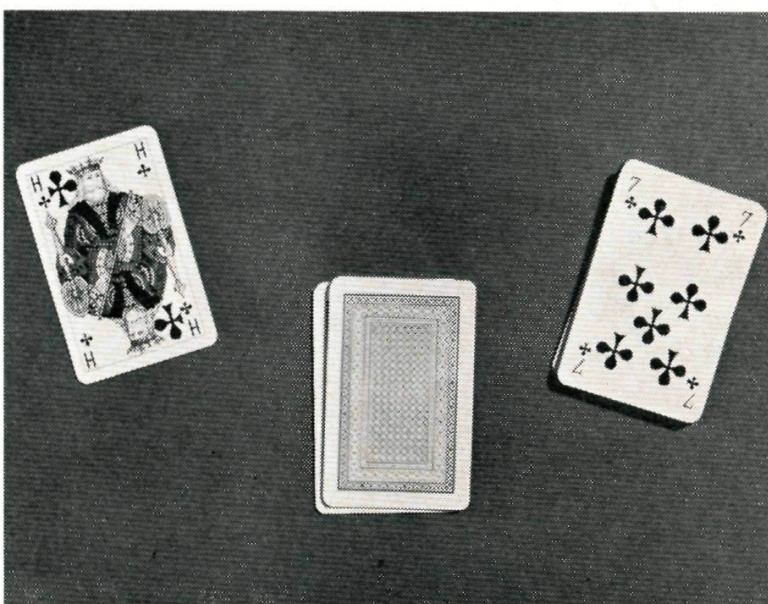
Het uittellen van de stapeltjes. Let op de waarde van de onderste kaarten van de stapeltjes en het aantal kaarten dat daarna komt.



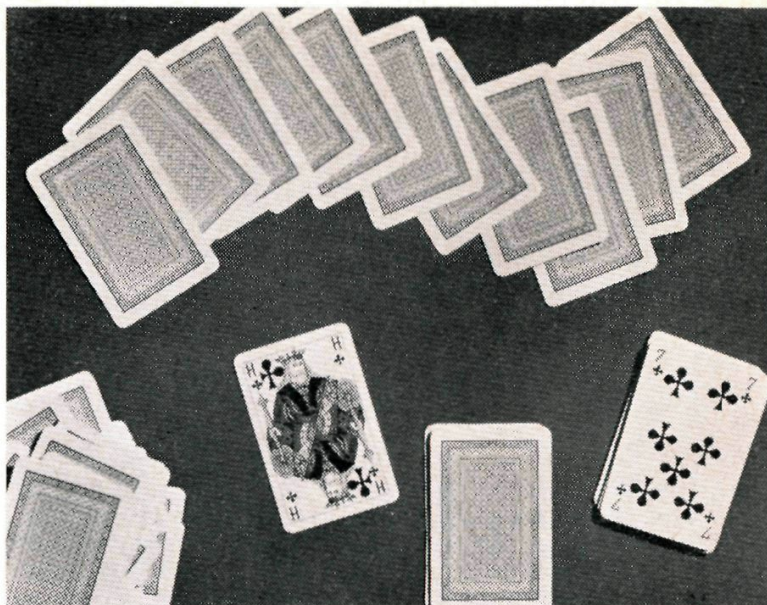
De stapeltjes worden omgedraaid.



Drie stapeltjes blijven over, van twee wordt de bovenste kaart omgedraaid. Wat zal de bovenste kaart van het derde stapeltje zijn?



Tel $10 + 13 + 7$ kaarten uit. Je hebt dan nog 11 in je hand.



De onbekende kaart is dus een boer!



Stellen we de onbekende waarde van de derde topkaart gelijk aan x , dan bevat de derde stapel precies

$$13 - (x - 1)$$

kaarten.

Totaal liggen dus op tafel

$$13 - a + 1 + 13 - b + 1 + 13 - x + 1 = 42 - (a + b + x)$$

kaarten. Als gevolg hiervan beschikt de voorspeller over

$$52 - 42 + a + b + x = 10 + a + b + x$$

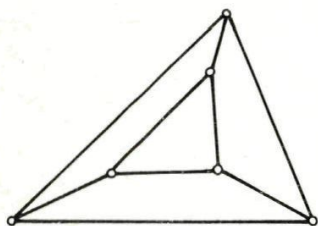
kaarten. Door van dit aantal juist de som van 10, a en b af te nemen houdt hij dus inderdaad de 'Grote Onbekende' over!

Met deze verklaring gewapend, zal het je niet moeilijk vallen een strategie te ontwerpen indien alle stapeltjes op vier na worden teruggegeven of indien bij het vormen van de stapeltjes wordt doorgeteld t/m 12 i.p.v. t/m 13. Voor liefhebbers van kaarttrucs is dit wellicht een aanleiding om de redactie van 'Pythagoras' van hun vondsten op de hoogte te brengen.

Oplossingen Denkertjes

- 1 55 stukken, waarvan 28 vierhoeken. In het algemene geval $\frac{1}{2}n(n+1)$ stukken, waarvan $\frac{1}{2}(n-3)(n-2)$ vierhoeken.
- 2 Na het rondje van Henk is de toestand te beschrijven als (81, 81, 81, 81). Daarvoor, dus na het rondje van Klaas, moeten we dus (54, 54, 54, 162) gehad hebben. Zo verder terug werkende vinden we achtereenvolgens (36, 36, 108, 144) en (24, 72, 96, 132) en (48, 64, 88, 124). Dat laatste is dan de begintoestand. Wie worstelde er met vier vergelijkingen in vier variabelen?

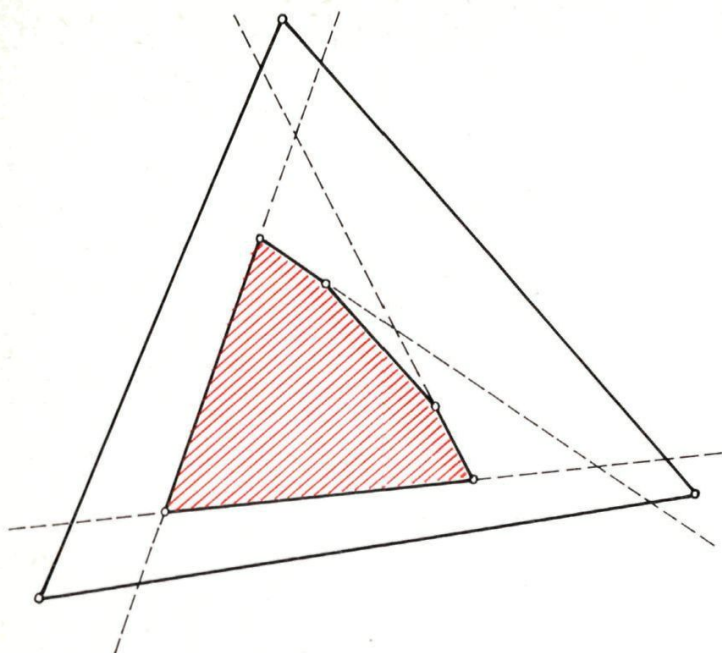
3



- 4 Uit $a = x^2 + 3y^2$ en $b = u^2 + 3v^2$ volgt

$$ab = x^2u^2 + 9y^2v^2 + 3(x^2v^2 + y^2u^2) = (xu + 3yv)^2 + 3(xv - yu)^2$$

$$= (xu - 3yv)^2 + 3(xv + yu)^2.$$
- 5 Er zijn 8 bussen nodig en 10 chauffeurs. Men moet elke bus vijf minuten na aankomst bij een van de eindstations A en B met een andere chauffeur weer laten vertrekken.
- 6 Aan $E(x) + E(x^2) = 100$ wordt voldaan door $\sqrt{91} \leq x < \sqrt{92}$. Slechts een deel van dit interval bevat wortels van $E(x + x^2) = 100$, namelijk het deel $\sqrt{91} \leq x < \frac{1}{2}(9\sqrt{5} - 1)$
- 7 Ja, dat is altijd mogelijk. Dat kan op de volgende manier ingezien worden.
 Kies op de bol een punt P , dat op geen enkele van de cirkels ligt. Elk van de cirkels verdeelt op zijn eentje de boloppervlakte in twee delen; één van die twee delen bevat het punt P en dat deel noemen we het P -deel van die cirkel.
 Neem nu willekeurig een van de te kleuren gebieden en beoordeel ten aanzien van elke cirkel of dat gebied wel of niet tot het P -deel van die cirkel behoort. Behoort dat gebied tot een even aantal P -delen, kleur het dan wit; behoort het tot een oneven aantal P -delen, kleur het dan zwart.
 Bij twee aan elkaar grenzende gebieden levert die beoordeling hetzelfde resultaat bij elk van de cirkels, behalve bij de cirkel die de twee gebieden scheidt. De gevonden aantallen hebben dus een verschil van 1, zodat het ene aantal even en het andere aantal oneven is; de ene kleur wit en de andere kleur zwart wordt.



Blijkens bovenstaande figuur menen wij dat $5 + 5 + 3 = 13$ het maximum is.

9 De punten X , Y en Z moeten voetpunten zijn van de hoogtelijnen van $\triangle ABC$. Alleen wanneer P ligt op een zijde van de voetpuntendriehoek is er een oplossing.

10 De middellijn van de bus wordt

$$3 \cdot \frac{1 + \sin 9^\circ}{1 - \sin 9^\circ}$$

Met de benadering $\sin 9^\circ = 0,1564$ vinden we 4,1124 cm. Omdat de opgegeven 0,1564 betekent 'tussen 0,15635 en 0,15645' ligt de middellijn van de bus tussen 4,1120 cm en 4,1128 cm. Voor een technicus is dit nauwelijks nauwkeurig genoeg.

Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 10 Januari 1971 worden ingezonden naar het redactiesecretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.

Inhoud:

De draakkromme ° 49

Backtracking ° 53

Perspectief, geen rechten maar krommen °° 59

Over tegels en een blokkendoos °° 63

Een wiskundige kaarttruc ° 68

Denkertjes 52, 58, 67

Oplossingen Denkertjes 71

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Scherpenzeel (Gld.).
A. F. VAN TOOREN, 's-Gravenhage.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, f 4,00 per jaargang. Voor anderen f 6,00. Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

