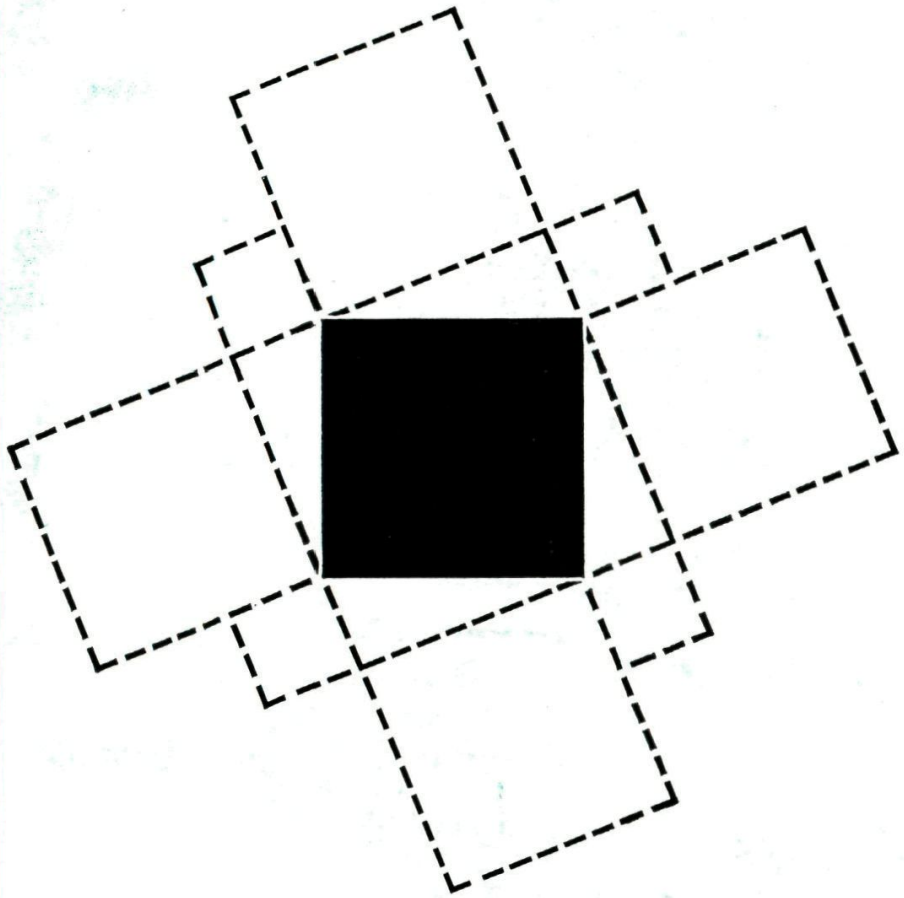
pythagoras 4



wiskundetijdschrift voor jongeren

jaargang 10 1970/1971

Van de redactietafel

Denkertjes

Van de Denkertjes in het eerste nummer is een groot aantal oplossingen binnengekomen, waaronder veel goede. Een aantal abonnees heeft te kampen gehad met moeilijkheden betreffende de sluitingsdatum voor de inzending, doordat ze het nummer erg laat ontvingen. Ieder jaar levert dit problemen op met het eerste nummer, problemen die samenhangen met het werven van abonnees. Elk jaar moet een volledig nieuw abonnementenbestand worden opgebouwd en hiermee kan pas worden begonnen wanneer de scholen na de grote vakantie weer draaien. In de praktijk kost het altijd enkele weken voor dit allemaal administratief verwerkt is, terwijl de inzendtermijn voor het eerste nummer niet langer gemaakt kan worden in verband met het gereedmaken van het nummer waarin de prijswinnaars vermeld staan. Oplossingen van Denkertjes in het eerste nummer, die na de sluitingstermijn zijn binnengekomen, hebben geen kans gemaakt op de lootprijs, maar worden wel meegeteld voor de ladderwedstrijd.

De lootprijs voor de Denkertjes van nummer 1 is gewonnen door Ruud van Damme in Breda.

Ladderstand:

B. de Brock, Groningen	99 punten
G. Renardel de Lavalette, Rotterdam	99 ,,
L. de Wit, Den Bommel	97 ,,
J. Sijbrand, Zaandam	88 ,,
D. Brand, Delft	84 ,,
J. Krijnen, Oosterhout	79 ,,
A. G. Blankestijn, Veenendaal	72 ,,
C. J. Doorenbos, Groningen	70 ,,
R. A. Visscher, IJmuiden	69 ,,
A. Bruitsman, Veenendaal	68 ,,
J. Speelpenning, Middelharnis	68 ,,

Escher-prenten

Van beide series is nog een beperkt aantal verkrijgbaar. Zoals in nummer 2 van deze jaargang is vermeld, zijn we er van uitgegaan dat de prenten door de abonnees individueel zouden worden besteld. De achtergrond hiervan was dat we de scholen niet wilden belasten met de coördinatie van de bestellingen en het innen van de bedragen. Dit heeft de indruk gewekt dat het niet mogelijk was de prenten centraal te bestellen.

Dat was natuurlijk niet de bedoeling. Wanneer een docent of een leerling zich wil belasten met het verzamelen van bestellingen per school of per klas, dan is daar niets op tegen. Op de giro-stortingskaart dient dan te worden vermeld:

Escher-platen

. . . × serie 1 à *f* 6,—
. . . × serie 2 à *f* 6,—
. . . × serie 1 en 2 à *f* 12,—.

Nog even voor de volledigheid:
Serie 1 bestaat uit: Hol en Bol, Dag en Nacht, Prentententoonstelling.
Serie 2 bestaat uit: Boven en Onder, Belvedère, Balkon.
Bestellen door storting of overschrijving op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff, Groningen.

Prijsvraag

Het verheugt de redactie ook dit jaar de abonnees weer een prijsvraag voor te kunnen zetten. Deze keer nodigen we de bezitters van een schaakbord uit tot een voor buitenstaanders wat vreemd spel op de vierenzestig velden. Een dambord mag trouwens ook, we kijken niet op een veld meer of minder.
Voor goede oplossingen zijn een viertal prijzen beschikbaar, waaronder één die beschikbaar is gesteld door de inzender van de prijsvraag, prof. dr. H. Freudenthal.

Denkertjes

31 Er zijn 90 getallen van zes cijfers die volgens het schema *ababab* geschreven worden (zoals 262626 en 343434 bijvoorbeeld). Elk van die getallen is een zevenvoud. Bewijs dat voor alle 90 getallen tegelijk.
(Naar het Russische KWANT)

32 Probeer te ontdekken welke constructie-methode ten grondslag ligt aan het onderstaande rijtje figuurtjes en deel ons dan mee wat het zesde figuurtje uit die rij dan zou moeten zijn.

33 Hoeveel oneven natuurlijke getallen, kleiner dan 10000, zijn er die drievoud, noch vijfvoud, noch zevenvoud zijn?

34 Bereken de grootste natuurlijke n waarvoor geldt dat 28000! een veelvoud is van $(28!)^n$.
(Ingezonden door A. van Setten, Rotterdam)

Een reis per stoomboot° 1

C. van der Linden

Tijdens een congres vertelde de Franse wiskundige E. Lucas na het ontbijt dat hij de aanwezigen (tal van bekende wiskundigen uit verschillende landen) graag een lastige opgave wilde voorleggen.
Ik neem aan, zei Lucas, dat er iedere dag 's middags van Le Havre naar New York een stoomboot vertrekt en tegelijk van dezelfde maatschappij een stoomboot in omgekeerde richting, die dezelfde route volgt.
De overtocht duurt precies zeven dagen (zowel heen als terug).
Hoeveel schepen van dezelfde maatschappij, die in tegengestelde richting varen, ontmoet een stoomboot die vanmiddag uit Le Havre vertrekt?
Vaak denkt men dat het antwoord natuurlijk (?) zeven moet luiden.
Dat komt omdat men alleen let op die boten die nog op reis moeten gaan. Men vergeet dan de schepen die al onderweg zijn.
Een zeer eenvoudige oplossing van dit vraagstuk kun je vinden met behulp van de grafische voorstelling van bladzijde 90.

Combinaties°°

Dick heeft voor een spreekbeurt op school muziek als onderwerp gekozen. Hij kan daarbij via de bandrecorder wat laten horen, praat daar gemakkelijk over en . . . hoeft niet zo lang te praten. Nou zijn er zeven nummers waar hij wel graag wat over zou willen zeggen, maar hij mag er maar drie op de band zetten.

Er zijn heel wat programmas van drie nummers te maken uit het zevental dat hij bezit. Hoeveel eigenlijk? Hiernaast staan ze allemaal; voor het gemak hebben we de zeven favoriete nummers van Dick 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 genoemd.

Het eerste nummer kan Dick op zeven manieren kiezen.
Daarom staan er hiernaast zeven kolommen.
Nadat het eerste nummer gekozen is, zijn er nog zes nummers over die op de tweede plaats kunnen staan. In elke kolom zie je zes blokken staan.
Na de keuze van de eerste twee nummers blijven er nog vijf over voor de derde plaats. Binnen elk blok zie je daarom vijf programma's staan.
Er zijn dus $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ programma's en het zal Dick heel wat gepieker kosten voor hij een programma heeft waar hij tevreden mee is.

123	213	312	412	512	612	712
124	214	314	413	513	613	713
125	215	315	415	514	614	714
126	216	316	416	516	615	715
127	217	317	417	517	617	716
132	231	321	421	521	621	721
134	234	324	423	523	623	723
135	235	325	425	524	624	724
136	236	326	426	526	625	725
137	237	327	427	527	627	726
142	241	341	431	531	631	731
143	243	342	432	532	632	732
145	245	345	435	534	634	734
146	246	346	436	536	635	735
147	247	347	437	537	637	736
152	251	351	451	541	641	741
153	253	352	452	542	642	742
154	254	354	453	543	643	743
156	256	356	456	546	645	745
157	257	357	457	547	647	746
162	261	361	461	561	651	751
163	263	362	462	562	652	752
164	264	364	463	563	653	753
165	265	365	465	564	654	754
167	267	367	467	567	657	756
172	271	371	471	571	671	761
173	273	372	472	572	672	762
174	274	374	473	573	673	763
175	275	375	475	574	674	764
176	276	376	476	576	675	765

Meneer Van der Kruk is vertegenwoordiger. In zijn rayon heeft hij 100 klanten. Per dag kan hij er zeven bezoeken. Op een avond overweegt hij welke zeven klanten morgen een bezoek moeten hebben en in welke volgorde hij er naar toe zal gaan.
Het aantal mogelijke routes voor meneer Van der Kruk bedraagt
$100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 = 80678106432000$, als wij ons niet vergissen. Je vindt het hopelijk niet erg dat we niet al die routes hier afdrukken, net als de programma's van Dick.

De directeur van de firma heeft een nieuwe secretaresse nodig. Er hebben vijf jongedames gesolliciteerd en hij wil met elk van hen even praten. Hoeveel verschillende volgorden zijn er voor die vijf gesprekjes mogelijk?
Het antwoord bedraagt $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. En uit die 120 volgorden moet meneer de directeur er een kiezen.

In elk van de drie hierboven gegeven voorbeelden hadden we met dezelfde situatie te maken. De vraag was telkens: hoeveel geordende k-tallen kun je vormen uit n verschillende objecten?

In het eerste voorbeeld was $k = 3$ en $n = 7$. In het tweede was $k = 7$ en $n = 100$. En in het laatste waren k en n allebei gelijk aan 5.

Het antwoord op de gestelde vraag is na de drie voorbeelden niet zo moeilijk meer: het aantal geordende k-tallen uit n verschillende objecten is gelijk aan het produkt van de gehele getallen van n tot en met $n-k+1$. (Dat zijn k opvolgende gehele getallen.)

Het is niet zo gemakkelijk het antwoord in formuletaal op te schrijven. Een niet al te gek probeersel is $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$. Daar zullen we het maar bij laten.

Combinaties

Chefkok Gourmet heeft een voorraad van 50 recepten voor visgerechten. Op de spijskaart van volgende week wil hij zes visgerechten opnemen.
Het interesseert de heer Gourmet niet in het minst in welke volgorde de door hem te kiezen visgerechten op de spijskaart komen te staan. Hij vraagt dus niet hoeveel geordende zestallen hij kan kiezen uit zijn 50 objecten, maar hoeveel ongeordende zestallen hij daaruit kan kiezen. Eerlijk gezegd vraagt *hij* dat niet, hij kiest er gewoon zes uit. Maar *wij* vragen het nu wel.

Elk ongeordend zestal dat de heer Gourmet kiezen kan, kan door de typiste op $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ manieren geordend worden (denk maar aan de directeur met de vijf sollicitanten). In totaal zijn er $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45$ geordende zestallen mogelijk.

Het aantal ongeordende zestallen bedraagt dus

$$\frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15890700$$

In vakkringen zegt men tegen ongeordende zoveeltallen meestal *combinaties*. Vandaar de volgende uitspraak:
Het aantal combinaties van k objecten, die je kunt kiezen uit n verschillende objecten, bedraagt

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots 1}$$

In teller en noemer van deze formule staan k opvolgende gehele getallen. De uitdrukking is in de praktijk altijd aanmerkelijk te vereenvoudigen, want per slot van rekening stelt hij een geheel getal, een aantal, voor.
Wiskundigen plegen het aantal combinaties van k objecten uit n verschillende objecten kortweg aan te duiden met het symbool $\binom{n}{k}$, uitgesproken als 'n boven k'. Dat betekent dus hetzelfde als de formule hierboven.

Combinaties in veelhoeken

Je zult wel nooit gezien hebben de figuur van een 60-hoek met al zijn diagonalen. Maar kun je nu uitrekenen hoeveel lijnstukken er in zo'n figuur staan?
Elk lijnstuk verbindt 2 punten. De volgorde waarin die twee punten genoemd worden heeft geen betekenis. We hebben dus te maken met ongeordende tweetallen, met combinaties. Er zijn evenveel lijnstukken als er combinaties van 2 punten uit de voorraad van 60 punten zijn. Dat zijn er dus $\binom{60}{2}$ of wel $\frac{60 \cdot 59}{2 \cdot 1} = 1770$. Van die 1770 lijnstukken zijn er 60, die zijde van de 60-hoek zijn. De overige 1710 lijnstukken zijn natuurlijk de diagonalen van de 60-hoek.

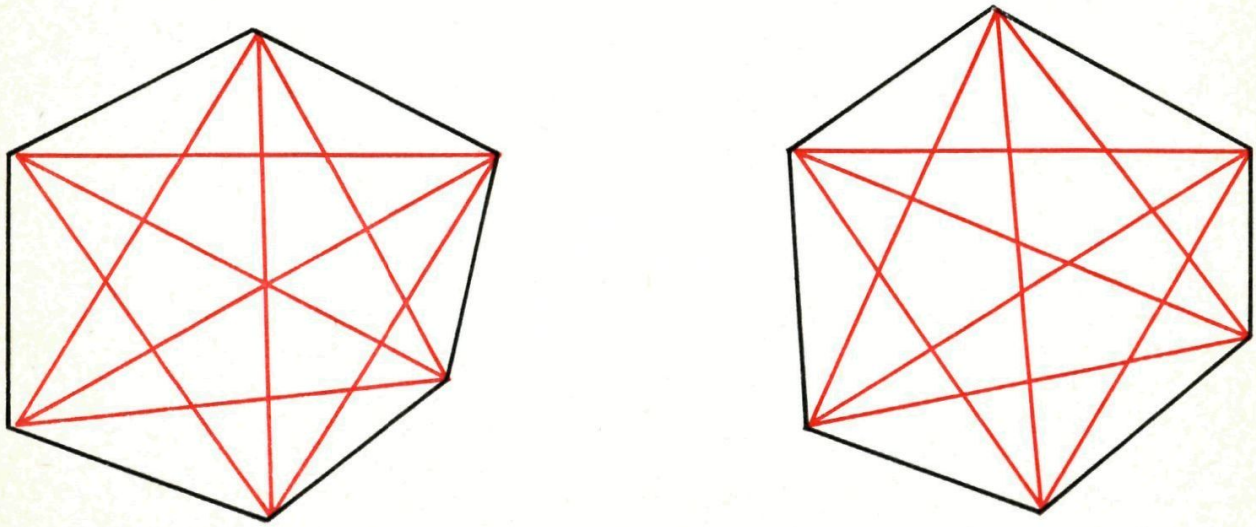
In de figuur van een n-hoek met al zijn diagonalen komen
$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}n \cdot (n-1)$ lijnstukken voor. Daaronder zijn de n zijden van die n-hoek. De overige $\frac{1}{2}n\,(n-1) - n = \frac{1}{2}n\,(n-3)$ lijnstukken zijn zijn diagonalen.

In hoeveel binnen die n-hoek gelegen punten zouden die diagonalen elkaar snijden?

Kijk, dat is nou een vraag die niemand kan beantwoorden. Hieronder zie je twee zeshoeken. Binnen de linker zeshoek tel je 15 snijpunten en binnen de rechter zeshoek tel je er slechts 13.

Natuurlijk heb je al gezien hoe het komt dat de aantallen snijpunten verschillend zijn: in de rechter zeshoek is er een punt waar drie diagonalen doorheen gaan en dat vermindert het aantal snijpunten met 2.
We stellen de vraag nu dus anders. Als door geen enkel punt binnen de n-hoek meer dan twee diagonalen gaan, hoeveel snijpunten hebben de diagonalen dan?
Door elk snijpunt gaan twee diagonalen. Die twee diagonalen verbinden twee maal

Fig. 1



twee hoekpunten van de n-hoek. Diezelfde vier hoekpunten kunnen ook wel op andere manieren twee aan twee verbonden worden, maar dan ontstaat er daardoor geen snijpunt binnen de n-hoek.
Elk viertal hoekpunten van de n-hoek kan precies op één manier zo door twee diagonalen verbonden worden dat er een snijpunt binnen de n-hoek ontstaat.
Het aantal snijpunten is dus gelijk aan het aantal combinaties van 4 uit de n hoekpunten. Het bedraagt dus

$$\binom{n}{4} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

We controleren dit antwoord nog even voor de zeshoek:

$$\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15, \text{ en dat klopt prettig.}$$

Een volgende vraag zou kunnen zijn: in hoeveel stukken wordt een n-hoek door zijn diagonalen verdeeld (alweer onder de veronderstelling dat er niet meer dan twee diagonalen door één punt gaan).
Dat is een heel moeilijke vraag, waarop het antwoord is

$$\binom{n}{4} + \binom{n-1}{2}.$$

Voor de zeshoek van figuur 1 dus $15 + 10 = 25$ stukken. Het bewijs laten we over aan de liefhebber.

Rectificatie van een cirkelboog°°

Het berekenen of construeren van een lijnstuk waarvan de lengte gelijk is aan die van een gegeven boog, noemt men de rectificatie* van die boog. Bij een cirkelboog is de *berekening* van de lengte eenvoudig als de middelpuntshoek en de straal gegeven zijn. De *constructie* van een lijnstuk dat even lang is als die boog is met behulp van passer en liniaal niet uitvoerbaar. We moeten dus volstaan met een benaderingsconstructie. Een eenvoudige en voldoende nauwkeurige benaderingsconstructie van een lijnstuk, waarvan de lengte gelijk is aan die van een gegeven halve cirkel is de constructie van Kochansky.
(Kochansky was een Pools wiskundige uit de 17de eeuw)

Zie figuur 2.

De middellijn $AB = 2r$ en M is het middelpunt van de cirkel. $DB \perp AB$ en $CA \perp AB$
$\angle BMD = 30°$ en $CA = 3r$
$DE \,//\, BA$

Nu is: $DE = 2r$ en $AE = BD = \frac{1}{3}r\sqrt{3}$

In $\triangle DEC$ geldt:

$CD^2 = 4r^2 + (3 - \frac{1}{3}\sqrt{3})^2 r^2 = (13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3})^2$
$CD = r\sqrt{(13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3})} = r\sqrt{9{,}869232} = 3{,}14153\, r$

Van π is bekend: $\pi = 3{,}14159 \ldots\ldots$

Hieruit volgt: CD verschilt slechts ongeveer $0{,}00006\, r$ van πr.
Bij een cirkel met een straal van 1 meter is de fout slechts ongeveer 0,06 mm.

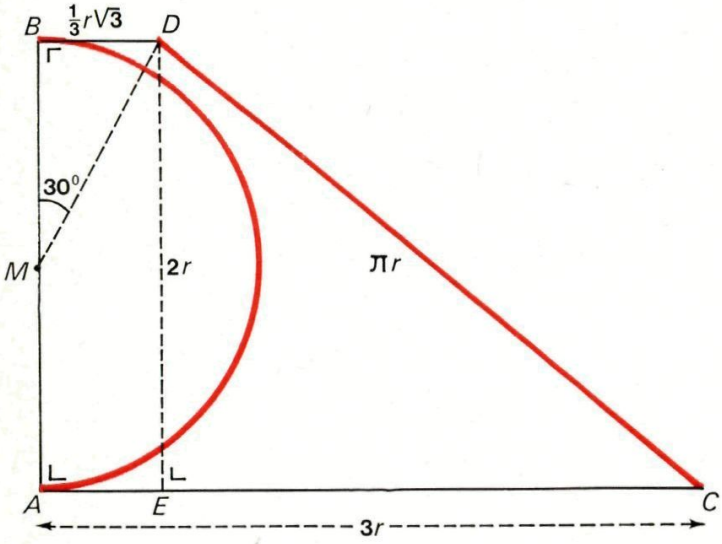


Fig. 2

* Rectificatie stamt uit het Latijn, *rectus* = *recht*, *facere* = *maken*. Letterlijk dus: recht maken.

Een minimaliseringsprobleem°

Tj. Braaksma

Een buizenfabriek moet wekelijks buizen leveren in de volgende aantallen en lengten: 2 van 8 m, 3 van 9 m, 4 van 10 m, 5 van 11 m, 6 van 12 m en 7 van 13 m. Wanneer we hier een tabel van maken ziet die er zo uit:

lengte in meters: l	8	9	10	11	12	13
aantal buizen: n	2	3	4	5	6	7

Als staafdiagram krijgen we (het aantal is afgezet links boven de lengte):

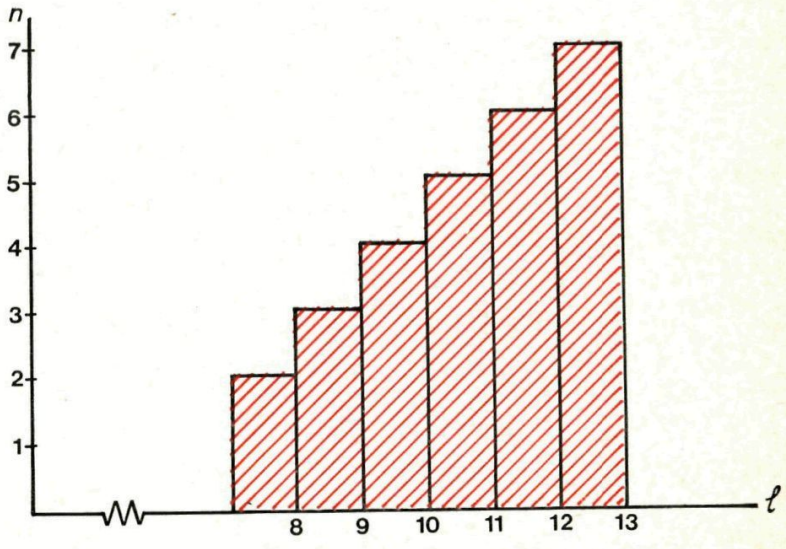


Fig. 3

Men beschikt over één machine, die alleen buizen van 13 m maakt. Daar moet men dus, om de andere lengten te krijgen, een stuk afhalen (zagen, branden of iets dergelijks). Dit betekent, afgezien van tijd en energie, een flink materiaalverlies, immers men levert

$2 \times 8 + 3 \times 9 + 4 \times 10 + 5 \times 11 + 6 \times 12 + 7 \times 13 = 301$ m buis en gebruikt daarvoor $(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \times 13 = 351$ meter.

(Let er even op dat de vorm tussen haakjes overeenkomt met de oppervlakte van het staafdiagram in figuur 3.)

Op zeker ogenblik besluit men een tweede machine aan te schaffen. De vraag is dan: welke buislengte zal men deze machine laten maken opdat de te gebruiken hoeveelheid materiaal *zo klein mogelijk is*. We noemen dit een *minimaliserings*probleem.

Op het eerste gezicht zul je misschien zeggen: gebruik elke machine voor drie lengtes, dus stel de nieuwe af op 10 m. Laten we eens kijken hoeveel meter buis je dan nodig hebt:

$(2 + 3 + 4) \times 10 + (5 + 6 + 7) \times 13 = 324$

Maar bij een afstelling op 11 meter:

$(2 + 3 + 4 + 5) \times 11 + (6 + 7) \times 13 = 323$, dus net iets minder.

Met het staafdiagram kunnen we dat zo illustreren:

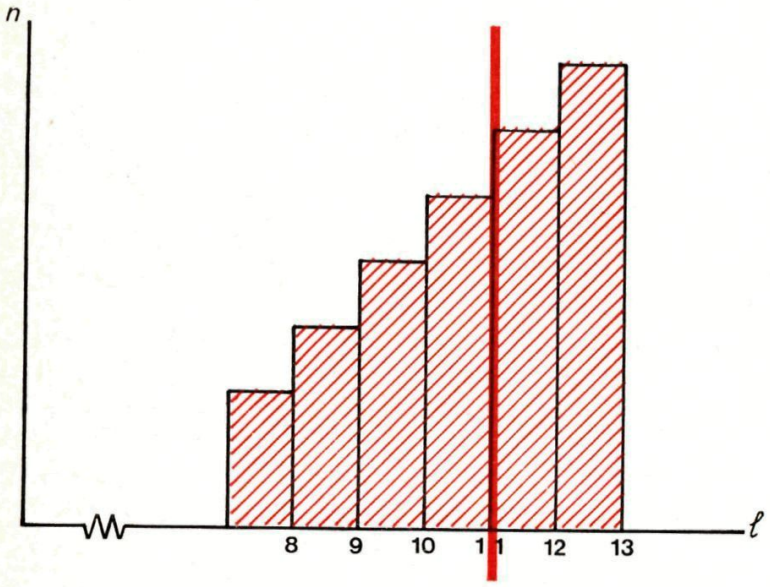


Fig. 4

Stel dat men de machine afstelt op het maken van buizen van x m, waarbij $x \in \mathbb{N}$ en $8 \leqq x \leqq 12$.
Trek in het staafdiagram de lijn door $l = x$ en loodlijnrecht op de l-as (in figuur 4 is dat gedaan voor $x = 11$).
De hoeveelheid buis die men wekelijks gebruikt is dan:

$H =$ (de oppervlakte links van die lijn) $\times x +$
(de oppervlakte rechts van die lijn) $\times$ 13.
Voor $x = 10$ is de uitkomst $H = 324$ (zie boven).

$x = 11 \Rightarrow H = 323$
$x = 12 \Rightarrow H = 331$

Dit laatste kun je gemakkelijk controleren evenals het feit dat, voor $x = 8$ of 9, H groter is dan 324.

Hieruit blijkt dat voor $x = 11$ het materiaalgebruik (en dus ook het -verlies) *minimaal* is.

OPMERKINGEN

1 Het heeft geen zin de machine af te stellen op b.v. 10,5 m. Voor de buizen van 11 m of langer maakt het geen verschil maar voor alle buizen van 10 m of korter moet dan 0,5 m meer gebruikt worden dan bij afstelling op 10 m.
Afstelling vindt dus altijd plaats op een werkelijk gebruikte lengte.

2 Als het aantal af te leveren buizen voor alle lengten b.v. tienmaal zo groot wordt, blijft afstelling op 11 m toch het voordeligste.
Immers alle waarden van H worden dan ook tienmaal zo groot dus voor $x = 11$ is H weer minimaal. Dit heeft tot gevolg dat we bij problemen van dit type niet behoeven te letten op de werkelijke aantallen maar dat we ook mogen kijken naar hun verhouding.

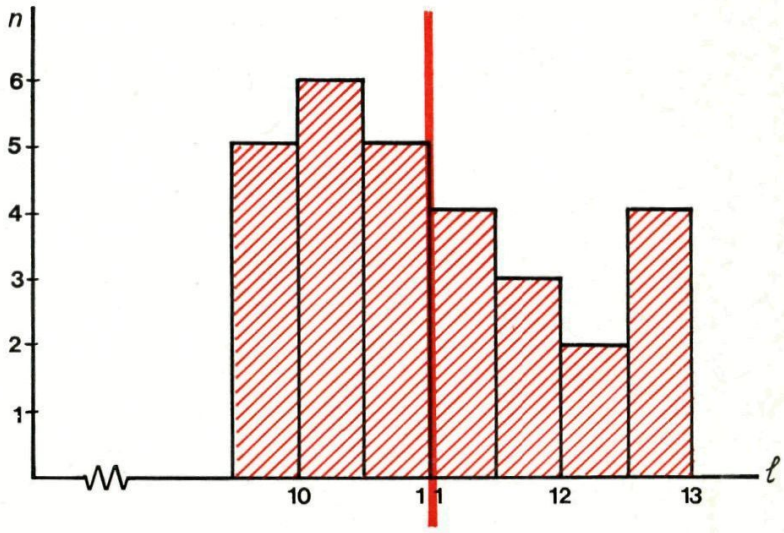


Fig. 5

Laten we het probleem nu eens bekijken voor de volgende tabel:

l	10	$10\frac{1}{2}$	11	$11\frac{1}{2}$	12	$12\frac{1}{2}$	13
n	5	6	5	4	3	2	4

$H =$ (opp. van 10 tot x) $\times\ x +$ (opp. van x tot 13) $\times$ 13.

$x = 10\frac{1}{2}$ $\quad H = 11 \times 10\frac{1}{2} + 18 \times 13 = 349\frac{1}{2}$
$x = 11$ $\quad H = 16 \times 11 + 13 \times 13 = 345$
$x = 11\frac{1}{2}$ $\quad H = 20 \times 11 + 9 \times 13 = 347$

Voor $x = 10$, 12 of $12\frac{1}{2}$ is H groter dan 345.
Dus voor $x = 11$ is H minimaal.

Wanneer we hier een staafdiagram maken is de basis van elke staaf $\frac{1}{2}$ in plaats van 1. Om elke keer een oppervlakte te krijgen die gelijk is aan het aantal (n) zouden we dus de hoogte tweemaal zo groot moeten maken. Maar omdat we alleen behoeven te letten op de onderlinge verhouding van de aantallen (en dus ook van de oppervlakten) is dat niet nodig. We krijgen dus de volgende figuur (figuur 5).

°°Veronderstel nu eens dat men niet alle buizen levert met lengten in hele en halve meters, maar dat alle mogelijke lengten tot 13 m voorkomen (bijv. 6,3746 m).
In dat geval probeert men een functie te krijgen die het verband tussen lengte en aantal (eventueel bij benadering) weergeeft. Van deze functie tekent men de grafiek en gaat dan als van ouds te werk.
Bijvoorbeeld tussen n en l bestaat de betrekking: $n = 2l - 2$
d.w.z. als $l = 3{,}63$ dan is $n = 2 \times 3{,}63 - 2 = 5{,}26$
en als $l = 6{,}26$ dan is $n = 2 \times 6{,}26 - 2 = 10{,}52$.

Dit betekent niet dat er 5,26 buizen van 3,63 m worden gemaakt (het aantal buizen is altijd geheel), maar dat er tweemaal zo veel buizen van 6,26 m als van 3,63 m nodig zijn; dus alweer: het gaat om de verhouding van de aantallen.
De grafiek ziet er zo uit (figuur 6):

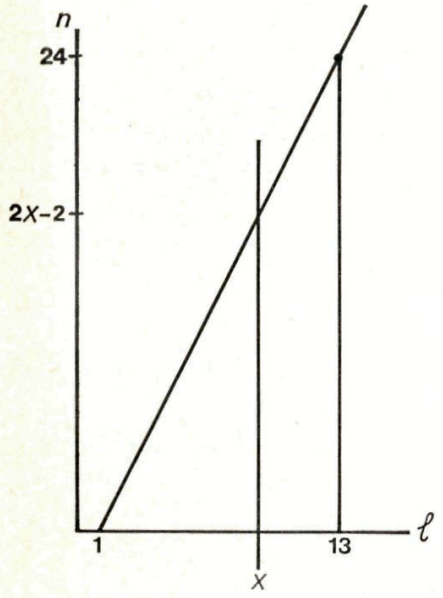
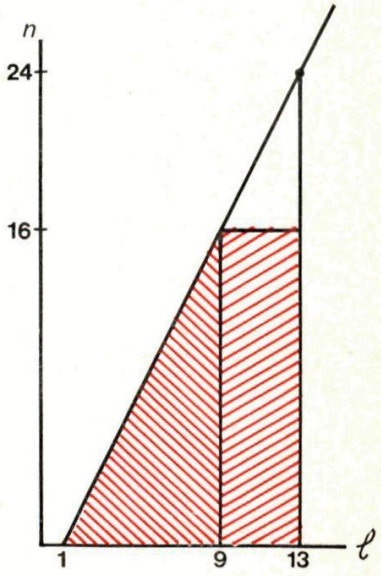


Fig. 6

Fig. 7



$H(x)$ = (oppervlakte van 1 tot x) $\cdot\, x$ + (oppervlakte van x tot 13) $\cdot$ 13 moet minimaal zijn.

Opp. van 1 tot x is $\frac{1}{2}(x-1)(2x-2) = x^2 - 2x + 1$ $\Big\}\rightarrow$
Opp. van 1 tot 13 is $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 24 = 144$ $\Big\}\rightarrow$
Opp. van 13 tot x is $144 - x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2x + 143$
$H(x) = (x^2 - 2x + 1)\,x + (-x^2 + 2x + 143)\,13 =$
$x^3 - 2x^2 + x - 13x^2 + 26x + 1859 =$
$x^3 - 15x^2 + 27x + 1859.$

Met differentiaalrekening kan men berekenen dat deze functie minimaal wordt voor $x = 9$.
In de practijk maakt men gebruik van de volgende regel (die we maar niet zullen bewijzen), die geldt als de betrekking tussen l en n niet al te abnormaal is:

De oppervlakte tussen 1 en x moet gelijk zijn aan: de hoogte bij x maal de afstand tussen x en 13.

In figuur 7 laten we dat zien door het vorige probleem waar de oplossing was: $x = 9$.
Oppervlakte van 1 tot 9 is $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$
Hoogte bij 9 is 16
Afstand van 9 tot 13 is 4
} opp. rechthoek is 64

Denkertjes

35 In een plat vlak zijn de punten A en B gegeven. Bepaal nu alle punten C in dat vlak die voldoen aan $AB \cdot (AC + BC - AB) = 2 \cdot AC \cdot BC$.

36 Een zware last wordt over een afstand van 200 meter vervoerd op een plank, die over drie palen rolt (zie figuur 8). Hoeveel meter wordt al lopende afgelegd door de man wiens taak het is telkens de aan de achterkant vrijkomende paal naar de voorkant van de plank te brengen?

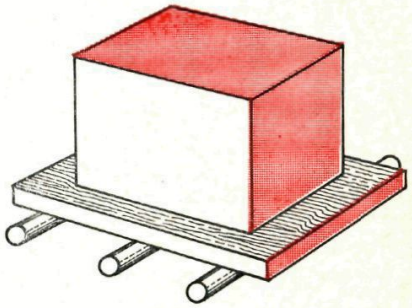


Fig. 8

37 In de rechthoekige strook papier van figuur 9 wordt een vouw gelegd langs de lijn AB, zodat de situatie van de figuur daaronder ontstaat. De oppervlakte van driehoek ABC is 16 cm^2 en die van driehoek ACD is 6 cm^2. Bereken de breedte AC van de strook.

38 Het getal 1971 kan geschreven worden met tien tweeën:
$\sqrt{(2^{22})} - 2^2 \cdot 22 + \frac{22}{2}$
Schrijf het getal 1971 nu ook eens met zeven zevens (plus een aantal op school gebruikelijke wiskundige symbolen).

39 Een vierkant is in 64 congruente vierkantjes verdeeld, zoals dat bij een schaakbord het geval is. Elk van die 64 vierkantjes moet van een kleur voorzien worden. Er zijn drie verschillende kleuren beschikbaar. Elk van de vierkantjes moet contact hebben met precies één ander vierkantje, dat dezelfde kleur heeft als hij zelf; we zeggen dat twee vierkantjes contact met elkaar hebben indien ze één of twee hoekpunten gemeenschappelijk hebben.

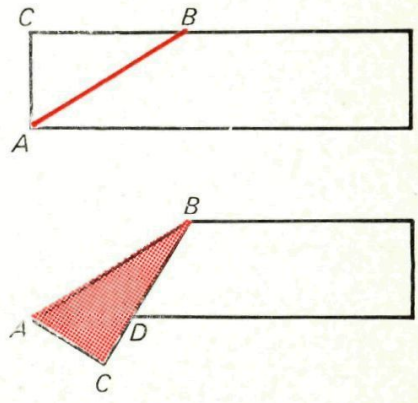


Fig. 9

Prijsvraag°

We nemen aan dat je een schaakbord tot je beschikking hebt. De velden hiervan zijn vierkanten en het is de bedoeling dat je een kubus vervaardigt van karton, zodanig dat de zijvlakken even groot zijn als de velden van het schaakbord.
Zet op de kubus de letters A tot en met H alsvolgt bij de hoekpunten:

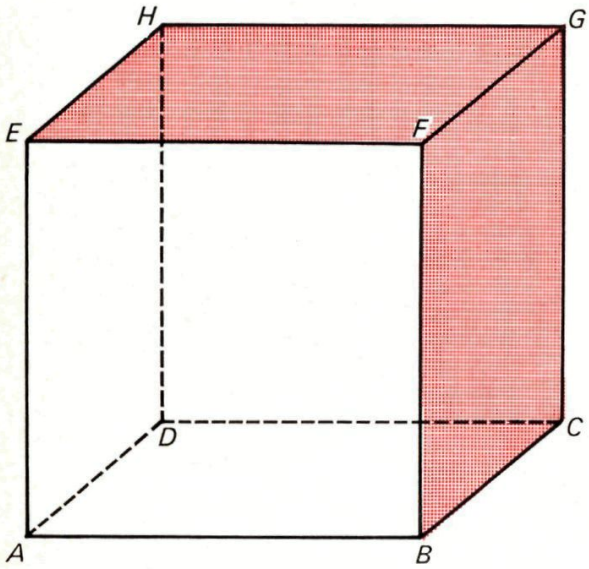


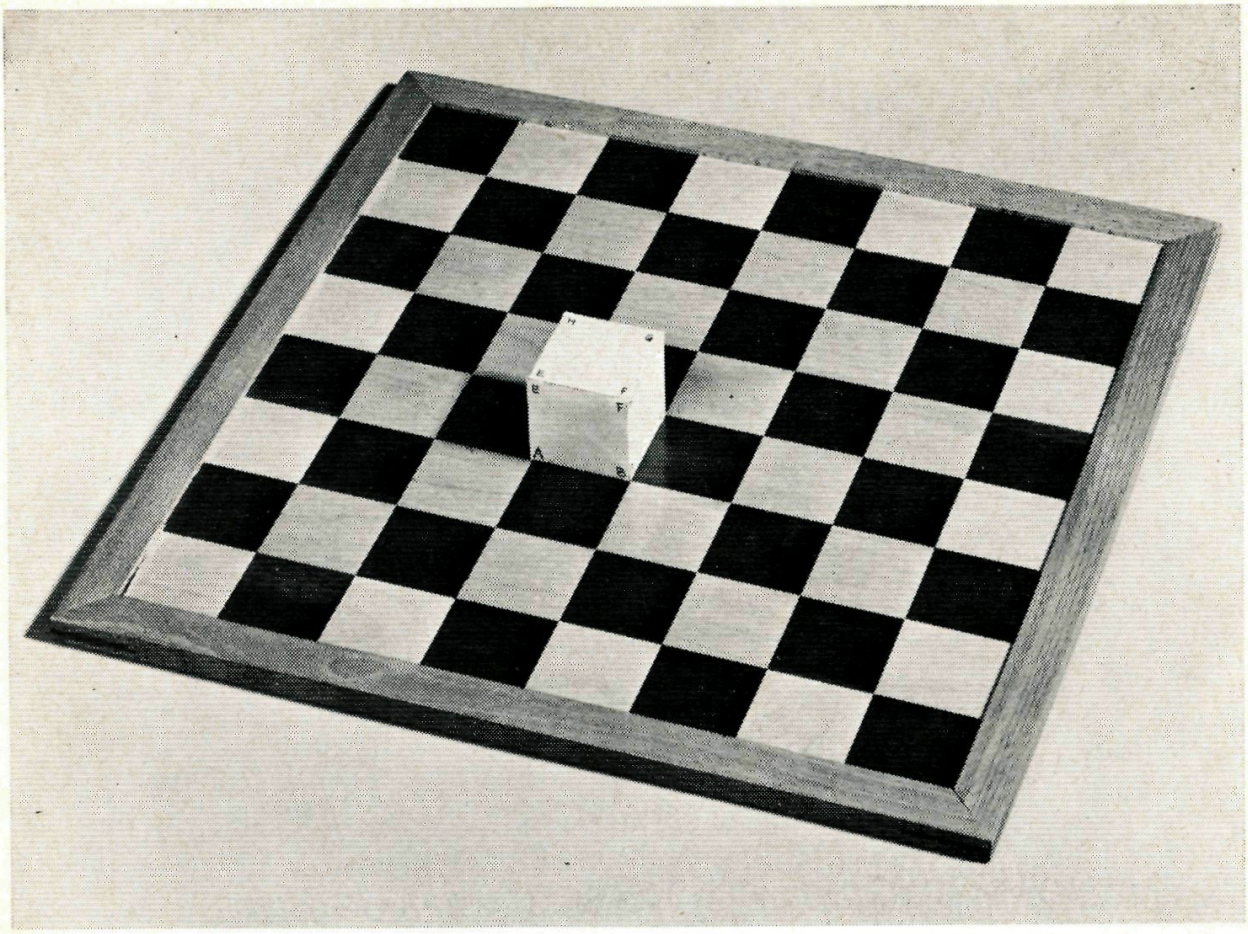
Fig. 10

Plaats de kubus op één van de velden midden op het schaakbord. Je kunt de kubus nu kantelen om een ribbe, zodat hij komt te rusten op een veld naast het oorspronkelijke. Door achtereenvolgende kantelingen kun je elk veld van het bord bereiken.

Vragen

1 Zet een kruis op een bepaald veld van het schaakbord. Kun je de kubus met elk gewenst zijvlak op het aangekruiste veld krijgen, door op verschillende manieren te kantelen vanuit dezelfde uitgangssituatie?

   Plaats de kubus bijvoorbeeld met het zijvlak $ABFE$ op een veld. Zet je vinger bij hoekpunt A. Door de kubus om zijn as te draaien kun je ook de andere hoekpunten op de plaats van de vinger krijgen. De kubus kan dus met één van zijn zijvlakken op één bepaald veld van het schaakbord vier verschillende standen innemen.
2 Zijn deze standen alle vier door kantelen vanuit dezelfde beginsituatie te verkrijgen?
3 Wat is in elk van de gevallen waarin vraag 2 positief beantwoord kan worden, het minimale aantal kantelingen dat je moet uitvoeren?
4 Neem de uitgangssituatie. Hoeveel verschillende standen kan de kubus na kantelen innemen, zodanig dat hoekpunt A weer zijn oorspronkelijke plaats inneemt?
5 Hoeveel standen van de kubus zijn door kantelen bereikbaar, zodanig dat hoekpunt A in het geheel niet van zijn plaats komt?



Voor deze prijsvraag zijn vier prijzen beschikbaar:

1 Een complete serie Escher-prenten (zie nummer 2 van deze jaargang), te verloten onder alle inzenders die minstens één vraag goed beantwoord hebben.
2 Een boekenbon van *f* 10,— voor de beste oplossing van inzenders onder de 16 jaar.
3 Een boekenbon van *f* 25,— voor een groep inzenders (bijvoorbeeld een klas), waarvan de gemiddelde leeftijd niet boven de 15 jaar ligt.
4 Een prijs, beschikbaar gesteld door de inzender van de prijsvraag, professor dr. H. Freudenthal, voor de beste oplossing. Hierbij wordt gelet op volledigheid, nauwkeurigheid en beknoptheid van de beantwoording. Je mag de probleemstelling uitbreiden door in te gaan op het kantelen van andere regelmatige veelvlakken. Ook groepen kunnen meedingen naar deze prijs.

Oplossingen, voorzien van naam, adres, leeftijd en leerjaar, kunnen tot 1 april 1971 worden ingestuurd naar het redactiesecretariaat van Pythagoras, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Op de enveloppe vermelden: *Prijsvraag tiende jaargang.*

Een reis per stoomboot° 2

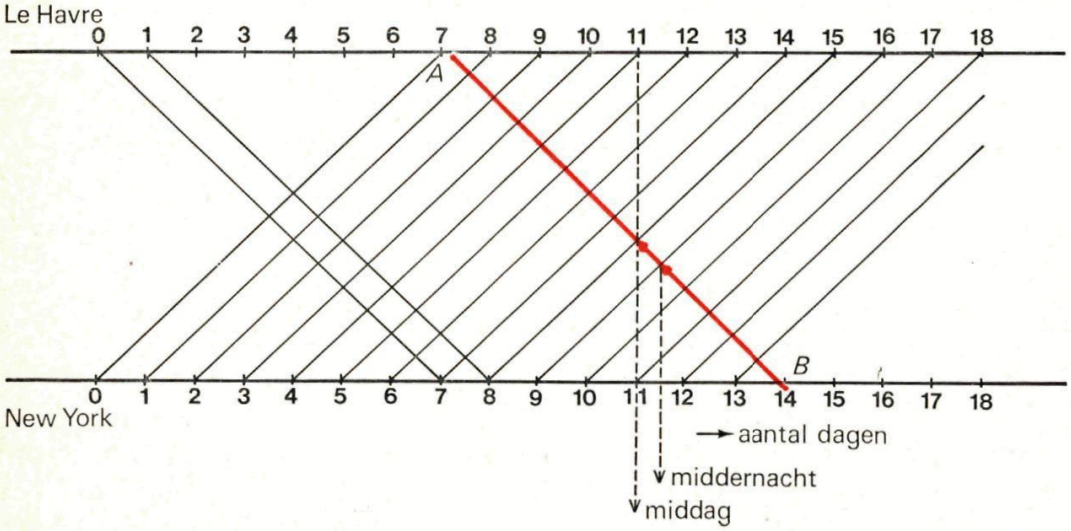


Fig. 11

Aan het voorbeeld van de boot die in de grafiek bij het lijnstuk AB behoort kun je zien dat een schip op de tocht van Le Havre naar New York dertien collega's ontmoet (op zee) en bovendien nog twee, één op het moment van vertrek en één bij aankomst in New York. Totaal dus vijftien schepen.
Uit de grafiek kun je ook nog aflezen dat de ontmoetingen dagelijks 's middags en bij middernacht plaatsvinden.

Denkertjes

40 Teken een parallellogram en noem de hoekpunten daarvan, in een of andere zin rondgaande,
$A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots$
(A_4 valt samen met A_0, A_5 met A_1, enzovoorts).
Construeer nu een rij punten
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$
met behulp van het volgende recept:
(a) P_1 wordt willekeurig gekozen op de lijn A_1A_2, maar valt noch met A_1 noch met A_2 samen.
(b) Voor elke k geldt dat P_k op de lijn A_kA_{k+1} ligt.
(c) Voor elke k geldt dat A_{k-1} op de lijn P_kP_{k+1} ligt.
Als je nauwkeurig construeert, dan gebeurt er iets merkwaardigs. Wat gebeurt er en waarom moet het gebeuren?
(Naar een Joegoslavische Olympiade-opgave.)

Het vierkleurenprobleem°°

In de voor ons liggende – al wat bejaarde – uitgave van de Bosatlas staat op bladzijde 12 een overzichtskaart van Nederland. De voornaamste plaatsen, rivieren, wegen en spoorlijnen zijn er op aangegeven, maar het meest opvallend is de indeling in provincies. Opvallend omdat aan elkaar grenzende provincies verschillend gekleurd zijn.
Groningen, de Noordoostpolder, Utrecht en Limburg vertonen een wat paarsige tint;
Friesland en Zuid-Holland zijn van een fijn oudrose;
Drente, Noord-Holland en Noord-Brabant zijn zachtgroen;
Overijssel en Zeeland zijn geel en Gelderland is bruin.

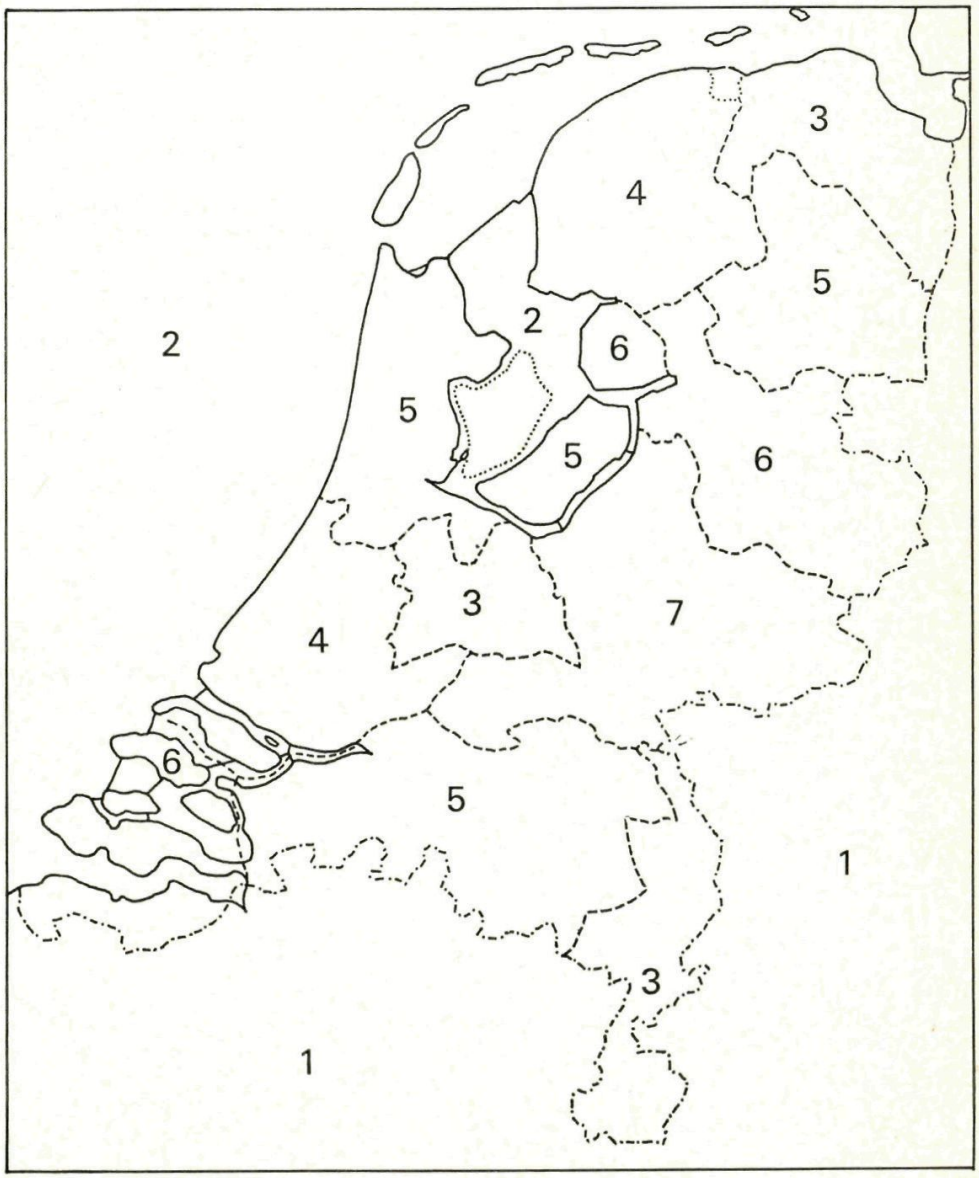


Fig. 12*a*

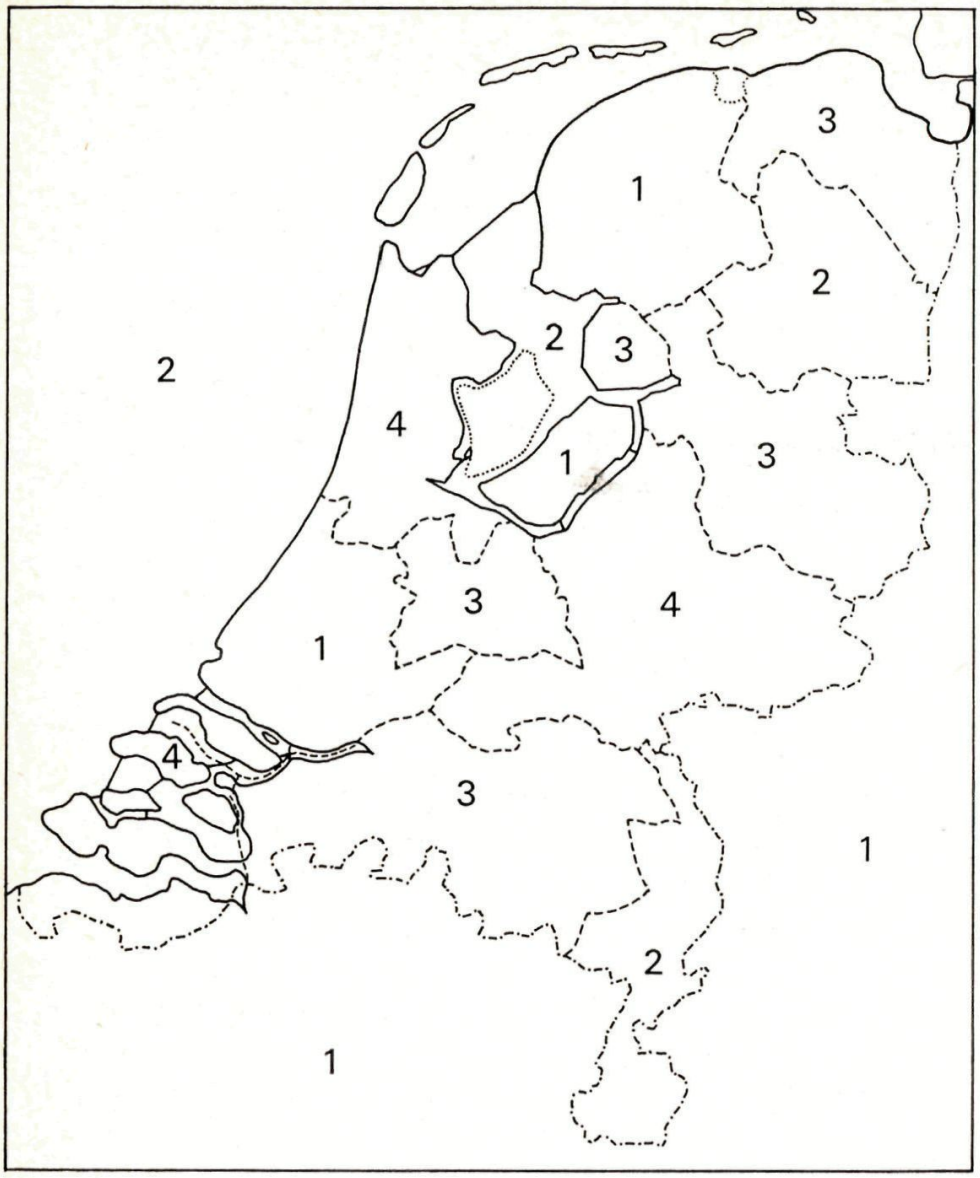


Fig. 12*b*

De ons omringende landen België en Duitsland zijn maagdelijk wit en het ons omringende water is blauw.
We treffen op de kaart dus de kleuren wit, blauw, paars, rose, groen, geel en bruin aan, op de kaart van figuur 12*a* zijn deze kleuren achtereenvolgens aangeduid met de getallen 1 tot en met 7, waarbij we de kaart meteen maar wat gemoderniseerd hebben.

De vraag die we ons stellen is: Zou je met minder kleuren kunnen volstaan om een dergelijke overzichtskaart van Nederland te maken? We handhaven daarbij natuurlijk de eis dat twee provincies die een grenslijn hebben verschillend gekleurd moeten zijn. (Theoretisch zouden twee provincies ook één of enkele grens*punten* kunnen hebben, in dat geval zouden die twee provincies wel dezelfde kleur mogen hebben, zonder aanleiding te geven tot verwarring; op de kaart van Nederland komt deze situatie niet voor.)

Om te beginnen laten we België en Duitsland *wit* en het zeewater *blauw*. Hiermee zijn dan direct al twee kleuren opgesoupeerd!
Groningen grenst zowel aan het water als aan Duitsland, kan dus niet wit of blauw zijn, we laten daarom Groningen *paars*. Dat zijn dan drie gebruikte kleuren.
Friesland grenst niet aan het buitenland, kunnen we dus wit kleuren en Drente grenst niet aan de zee, kunnen we dus blauw kleuren! Een voordelige ronde: twee provincies, zonder een nieuwe kleur aan te spreken.
De Noordoostpolder hoort tegenwoordig bij Overijssel, dit gebied kunnen we in z'n geheel paars kleuren.
Nu wordt het lastig. Gelderland grenst aan Duitsland, aan Overijssel en aan het Veluwemeer, we moeten dus een nieuwe kleur gebruiken en nemen daarvoor geel.
Utrecht maken we paars, Noord-Holland geel, Zuid-Holland wit, Noord-Brabant paars, Zeeland geel en Limburg blauw.
We hebben het dus voor elkaar gekregen met vier kleuren: blauw, wit, paars en geel.

Je kunt er natuurlijk zekere bezwaren tegen aanvoeren om Friesland te kleuren als buitenland en Drente en Limburg als zee, maar dat zouden we willen aanmerken als kortzichtigheid. Wanneer je denkt aan de vreemde taal die in Friesland wordt gesproken en aan de zee van ellende, die je ook in Drente en Limburg wel ergens kunt tegenkomen, dan lijkt ons de gekleurde weergave die we schetsten alleszins verdedigbaar.
Bovendien hebben we weer een schoon wiskundig streven getoond: werken met zo eenvoudig mogelijke middelen.

We zouden de lezer nu twee opdrachten kunnen geven:

Teken zelf eens een kaart waarbij je maar drie kleuren nodig hebt;

en:

Teken eens een kaart waarbij je beslist vijf kleuren nodig hebt.

De eerste opdracht is erg eenvoudig, zo eenvoudig dat we maar direct een oplossing geven. Teken een gesloten kromme en verdeel het binnengebied in twee delen. Beide gebieden krijgen een kleur en het buitengebied krijgt de derde kleur.

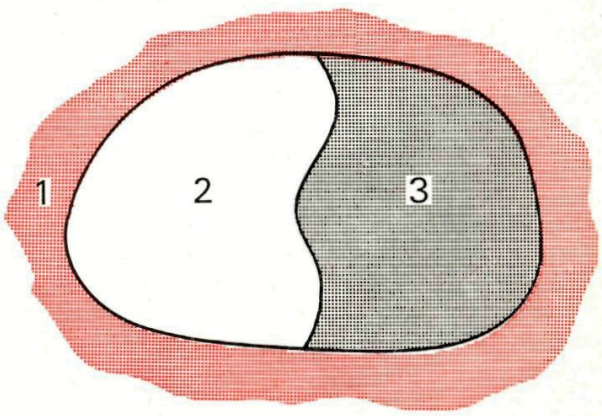


Fig. 13

De tweede opdracht is minder onschuldig dan hij er uitziet. De lezer die dit voor elkaar krijgt valt zelfs wereldberoemdheid ten deel, er is namelijk nog niemand geweest die het is gelukt.
In feite is de situatie zo:

De kaart van Nederland toont ons aan dat er kaarten zijn waarbij vier kleuren beslist *nodig* zijn. Het vermoeden bestaat dat vier kleuren ook altijd *voldoende* zijn, maar dit is niet bewezen.

Het is dus theoretisch denkbaar dat er kaarten bestaan waarbij meer dan vier kleuren nodig zijn (bewezen is echter ook dat nooit meer dan vijf nodig zouden kunnen zijn).

Dit is het vierkleurenprobleem, een typisch topologisch probleem omdat het gaat over gebieden (in dit geval in het platte vlak), waarbij de vorm van die gebieden niet belangrijk is, alleen de ligging ten opzichte van elkaar.

Van Adriaan Dijkhuizen uit Nijkerk ontvingen we een bewijs van de stelling dat vier kleuren voor iedere kaart voldoende zijn. Het bewijs komt hierop neer.

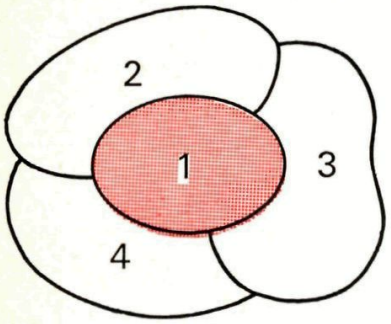


Fig. 14

a Bij iedere verzameling van vier gebieden, waarvan elk gebied met elk ander een grenslijn heeft, wordt in ieder geval één gebied door de drie andere omsloten. (Hij bewijst dit niet.)
b Er bestaat geen verzameling van vijf of meer gebieden waarbij elk gebied met elk ander een grenslijn heeft. (Dit volgt direct uit *a*. Het gebied G kan niet aan een vijfde gebied grenzen.)
c Een kaart die p kleuren nodig heeft bevat in ieder geval p gebieden met die p kleuren. (Dit is vanzelfsprekend.)
d Van die p gebieden heeft elk gebied een grenslijn met elk ander gebied. (Anders was het aantal van p kleuren te verminderen.)
e Uit *a* en *b* volgt dat $p = 4$.

Dit zou inderdaad een waterdicht bewijs zijn, wanneer tenminste de bewering *a* ook aangetoond zou zijn.
In feite is het onder *b* gestelde niet anders dan een andere formulering van de stelling, die helaas berust op de onbewezen uitspraak *a*.

Oplossingen van Denkertjes uit het tweede nummer

11 Vijf grepen heb je nodig: twee om de delen 1, 3, 5 op hun plaats te krijgen, twee voor 2, 6, 8 en één voor 4, 7.

12 Zie figuur 15.

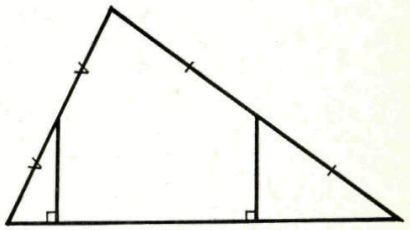


Fig.15

13 In het diagram van figuur 16 stelt de rechthoek de verzameling van de vakantiedagen voor en de twee 'aardappels' de verzamelingen van de dagen waarop het 's ochtends, resp. 's middags regende. De letters a, b, c, d zijn aantallen elementen van de verschillende deelverzamelingen. De gegevens uit de opgave kunnen nu zo vertaald worden: $a+b+c+d = 21$, $a+b = 14$, $b+c = 10$, $d = a+c$. We lossen daaruit op $b = 9$.

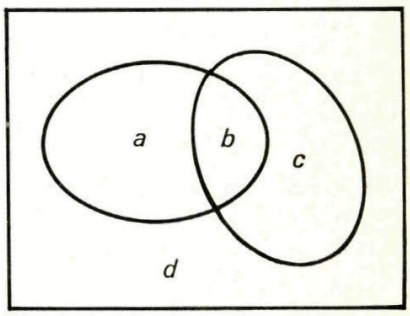


Fig.16

14 Die vergelijking heeft geen enkele wortel, hij is vals. Als

$0 \leqq x < 1$, dan is $\sqrt{x} < 1$ en $\dfrac{1}{x-1} < 0$, dus $\sqrt{x} + \dfrac{1}{x-1} < 1$

Als $x > 1$, dan is $\sqrt{x} > 1$ en $\dfrac{1}{x-1} > 0$, dus $\sqrt{x} + \dfrac{1}{x-1} > 1$.

Voor andere waarden van x is het linkerlid van de vergelijking zinloos.

15 Voor elke natuurlijke n geldt dat één van de drie getallen n, $n+2$, $n+4$ een drievoud is. Van de drievouden is alleen 3 zelf een priemgetal. Hieruit blijkt dat alleen voor $n = 3$ geldt dat n, $n+2$, $n+4$ priem zijn. Helaas is $n+6$ dan deelbaar.

16 Elk natuurlijk getal n is te schrijven in de vorm $2^k \cdot m$, waarin k niet-negatief geheel en m oneven natuurlijk is. Elke oneven deler van n is dan tevens deler van m en omgekeerd. De som van de delers van n is dan en slechts dan oneven indien er zich onder die delers een oneven aantal oneven delers bevinden, dus indien m een oneven aantal delers heeft, dus indien m een kwadraat is.
We zoeken dus oneven kwadraten tussen 900 en 1000, tussen 450 en 500, tussen 225 en 250, enzovoorts, om die voor m te gebruiken. Zo vinden we snel dat er twee getallen aan de eisen voldoen: $961 = 31^2$ en $968 = 2^3 \cdot 11^2$.

17 De zin is waar voor elke natuurlijke n groter dan 1. De eerste van de drie nevenstaande figuren toont hoe je elke rechthoekige driehoek in twee gelijkbenige kunt verknippen. De andere twee tonen respectievelijk voor een ongelijkbenige en voor een gelijkbenige rechthoekige driehoek, hoe je een verdeling in drie gelijkbenige driehoeken tot stand brengt.
Verder maken we gebruik van het volgende: Als een verdeling in p gelijkbenige driehoeken altijd mogelijk is, dan is een verdeling in $p + 2$ gelijkbenige driehoeken ook altijd mogelijk (trek eerst de hoogtelijn op de schuine zijde, verdeel een van de twee kleine rechthoekige driehoekjes in twee gelijkbenige en de andere in p gelijkbenige).
Herhaalde toepassing hiervan levert: omdat n gelijk kan zijn aan 2, kan n ook gelijk zijn aan 4, 6, 8, ... en omdat n gelijk kan zijn aan 3 kan n ook gelijk zijn aan 5, 7, 9, ...

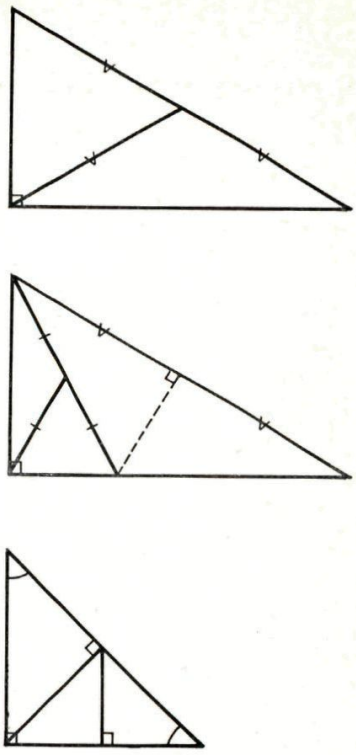


Fig. 17

18 Noem de totale lengte van de rechte stukken L, de buitenstraal van de bochten R en de binnenstraal r. Dan is de buitenomtrek $B = L + 2\pi R$ en de binnenomtrek $b = L + 2\pi r$ en de oppervlakte $A = L(R - r) + \pi(R^2 - r^2) = \frac{1}{2}(R - r)(2L + 2\pi R + 2\pi r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{B - b}{2\pi} \cdot (B + b)$. In dit geval is de oppervlakte dus $\frac{20}{\pi}$ vierkante centimeters.

19 $PA \cdot PB \cdot \sin APB$ is gelijk aan de dubbele oppervlakte van driehoek APB. Hieruit blijkt dat $PA \cdot PB$ tenminste gelijk is aan die dubbele oppervlakte van driehoek APB; hij is er precies gelijk aan indien hoek APB recht is. Behandel de drie andere termen net eender en tel de resultaten op.
We vinden dat $PA \cdot PB + PB \cdot PC + PC \cdot PD + PD \cdot PA$ tenminste gelijk is aan de dubbele oppervlakte van het vierkant $ABCD$ en daar precies aan gelijk is indien alle vier de hoeken bij P recht zijn. Het minimum wordt dus bereikt door P in het snijpunt van de diagonalen te kiezen.

20 Ja, het is mogelijk. Denk je de doos verdeeld in 1000 kubusjes met ribben van 1 centimeter. Plaats elk vliegje òf in een hoekpunt òf in een middelpunt van zo'n klein kubusje; dat kan omdat er 11^3 hoekpunten en 10^3 middelpunten, dus 2331 plaatsen beschikbaar zijn. Nu is de afstand van twee hoekpunten evenals de afstand van twee middelpunten tenminste 1 centimeter. En de afstand van een hoekpunt tot een middelpunt is tenminste $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ centimeter en dat is meer dan 8,5 millimeter. Er is bij deze plaatsing dus ruimschoots aan de eisen voldaan.

Oplossingen van de Denkertjes en de prijsvraag in dit nummer kunnen tot 1 april 1971 worden ingezonden naar het redactiesecretariaat, met vermelding van naam, adres, school en leerjaar.

Inhoud:

Van de redactietafel 73

Een reis per stoomboot ° 75, 90

Combinaties °° 76

Rectificatie van een cirkelboog °° 81

Een minimaliseringsprobleem ° 83

Denkertjes 74, 87, 90

Prijsvraag ° 88

Het vierkleurenprobleem °° 91

Oplossingen van Denkertjes uit het tweede nummer 95

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. Elsenaar, Harderwijk.
Bruno Ernst, Amersfoort.
A. F. van Tooren, 's-Gravenhage.
R. H. Plugge, Amstelveen.
G. A. Vonk, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. Oosten, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, ƒ 4,00 per jaargang. Voor anderen ƒ 6,00.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.