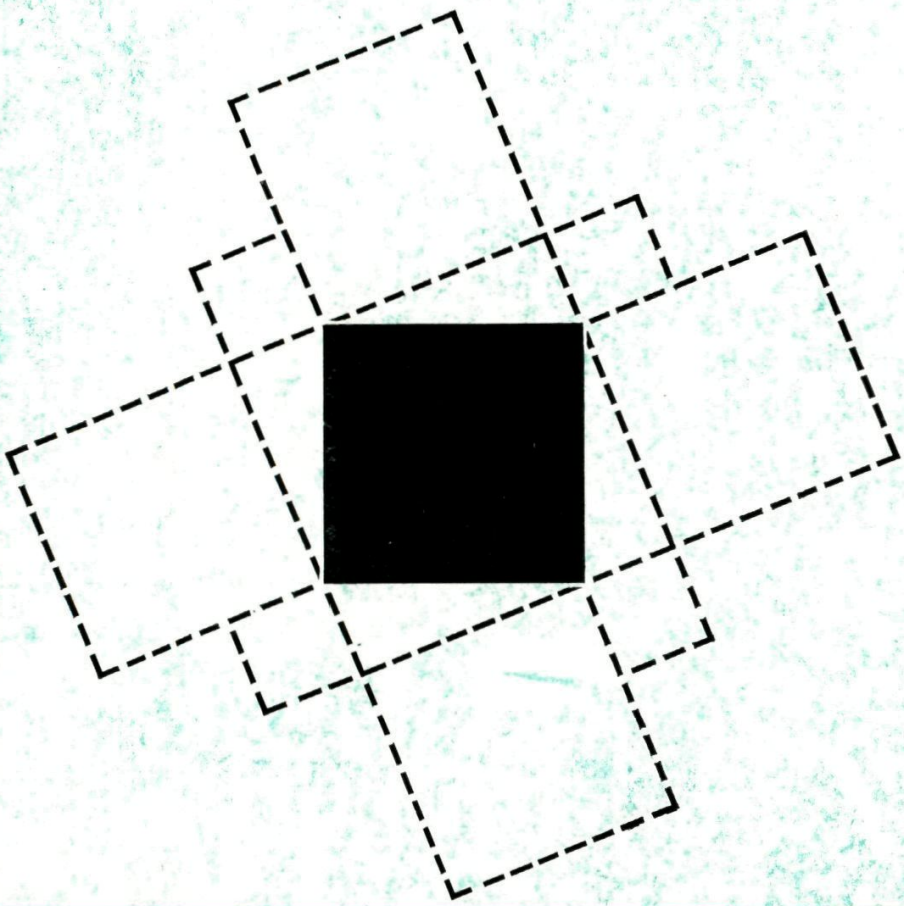
pythagoras 5



wiskundetijdschrift voor jongeren

jaargang 10 1970/1971

Het oneindige

Oneigenlijk, oneindig, oneindigheid zijn drie woorden die in Van Dale, Groot Woordenboek der Nederlandse Taal achtereenvolgens worden besproken.

Achter oneigenlijk staat als tweede betekenis 'niet datgene zijnde wat de naam aanduidt:
een oneigenlijke breuk, waarbij de teller een veelvoud is van de noemer; – *oneigenlijk punt*, oneindig punt'.

Achter oneindig staat als eerste betekenis: geen einde hebbende, hetzij met betrekking tot uitgestrektheid of tot veelvuldigheid: *het heelal is volgens de moderne natuurkunde niet oneindig;* (–) *het oneindige*, de onbegrensde ruimte (van het heelal); ook zonder gedachte aan ruimte: *de wiskunde is wel gedefinieerd als de wetenschap van het oneindige, die dit met eindige middelen tracht te beheersen.*

Zo gaat het nog even door, maar het hier geciteerde is al wel voldoende om duidelijk te maken, dat de begrippen wiskunde en oneindig iets met elkaar te maken hebben.

Oneindig is een woord dat iets beschrijft wat er niet is, eigenlijk is het begrip oneindig een oneigenlijk begrip.
Bovendien: oneindig, zo maar op zich zelf bestaat niet. Het is altijd
oneindig groot
lang
vaak
ver
dik
klein, enzovoort

Zo vertoont het oneindige een groot aantal aspecten, misschien wel oneindig veel. Op een aantal van die aspecten willen we in dit nummer ingaan.

St. Patricks cathedral te New York. Op zichzelf een machtige kathedraal, maar toch bijna nietig tussen de gigantische wolkenkrabbers, met hun ontelbare ramen. Het lijkt alsof de evenwijdige verticale lijnen samenkomen in één punt, een oneigenlijk punt. *(Zie bladzijde 108).*

Oneindig veel°

Van de natuurlijke getallen, rationale getallen, punten op een lijn, lijnen in een vlak, kunnen we zeggen dat er *oneindig veel* zijn, maar is dat ook het enige wat er over te zeggen valt? Het lijkt vanzelfsprekend dat er 'meer' rationale getallen zijn dan natuurlijke getallen, immers, tussen de getallen 1, 2, 3, 4, 5, ... liggen op de getallenlijn zeer veel (oneindig veel!) breuken. Zo liggen alleen al tussen 0 en 1 alle breuken met als teller 1 en als noemer 2, 3, 4, 5, 6 ..., om over breuken als $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, enzovoort dan nog maar te zwijgen.
Je zou zeggen: Als er oneindig veel natuurlijke getallen zijn, dan zijn er oneindig keer oneindig veel rationale getallen. Maar door dit te zeggen behandelen we het begrip oneindig zoals we het begrip honderd of duizend behandelen en daarmee maken we een fout. Wat bedoelen we trouwens met de uitspraak: 'Er zijn oneindig veel natuurlijke getallen?

We zullen wat nader ingaan op het voorgaande en treden daarmee in het voetspoor van de Duitse wiskundige Georg Cantor, die zo'n honderd jaar geleden belangrijk werk op dit gebied heeft verricht.

Georg Cantor

We beginnen met de begrippen verzameling en element en nemen aan dat bekend is wat hiermee wordt bedoeld. Wat ons hier en nu interesseert is het *aantal* elementen van een verzameling. De verzameling vingers aan je rechterhand bevat (hopelijk) vijf elementen, de verzameling letters van het alfabet bevat zesentwintig elementen.
Het zal duidelijk zijn dat van elke *eindige* verzameling het aantal elementen bepaald kan worden door ze te tellen. Maar het zijn niet die eindige verzamelingen waar we op af willen, ons doel ligt verder.

Als je van twee verzamelingen wilt vaststellen welke de meeste elementen heeft, hoe kom je daar dan achter? Je kunt zeggen: 'Door van beide verzamelingen de elementen te tellen'. Maar stel je nu eens voor dat je een zak centen en een zak dubbeltjes hebt en je er toe veroordeeld bent te bepalen of er meer dubbeltjes dan centen zijn of omgekeerd. Het beste wat je dan kunt doen is: Telkens met je ene hand een cent pakken en met je andere hand een dubbeltje en die twee samen ergens deponeren. Je brengt dus een *koppeling* aan tussen de centen en de dubbeltjes: bij elke cent hoort een dubbeltje en omgekeerd. Anders gezegd: Je vormt *paren* van de centen en de dubbeltjes. Op deze wijze zal uiteindelijk blijken welke van de twee verzamelingen de meeste elementen bezit. Het kan ook zijn dat je precies 'uitkomt', dat je precies aan elke cent een dubbeltje kunt *toevoegen*, zonder een cent of een dubbeltje over te houden. In dat geval bevatten de verzamelingen evenveel elementen. We noemen de verzamelingen dan *gelijkmachtig*.

Het voorbeeld van de centen en de dubbeltjes is aanzienlijk minder kinderachtig dan je misschien denkt. De methode van het aan elkaar toevoegen van de elementen van twee verzamelingen is namelijk een machtig wapen in onze strijd tegen het oneindige.
Een eenvoudig voorbeeld:
De rij oneven getallen 1, 3, 5, 7, 9 ... (A)
en de rij even getallen 2, 4, 6, 8, 10 ... (*B*)
bevatten 'evenveel' elementen.
Je ziet dit direct in als je de elementen van beide verzamelingen koppelt:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots \end{array}$$

We kunnen dit resultaat als volgt netter zeggen:

De verzameling A van de oneven getallen is gelijkmachtig met de verzameling B van de even getallen.

Uit dit voorbeeld blijkt dat wie niet sterk is slim moet zijn: We kunnen niet zeggen *hoeveel* even of oneven getallen er zijn, maar we kunnen wel beide verzamelingen met elkaar vergelijken. Het resultaat verrast ons niet, maar de volgende stelling wel:

De verzameling natuurlijke getallen is gelijkmachtig met de verzameling rationale getallen!

Dit is een heel merkwaardige uitspraak. De natuurlijke getallen vormen immers een *deel* van de rationale getallen, er staat dus dat een verzameling gelijkmachtig kan zijn met een deel van zichzelf. Om te laten zien dat de stelling juist is bekijken we het volgende getallen schema:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} & \frac{13}{2} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & \frac{11}{4} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} & \frac{8}{5} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & &
\end{array}
$$

In de bovenste rij staan breuken met noemer 1, in de tweede rij met noemer 2, in de derde rij met noemer 3, enzovoort.
Alle vereenvoudigbare breuken zijn weggelaten.
Linksboven beginnend leggen we nu een slingerweg aan door dit schema, waarbij we achtereenvolgens tegenkomen

(I) $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, 3, 4, \frac{5}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$

We koppelen deze rij met

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$

en zien dat de verzameling getallen in het schema gelijkmachtig is met de verzameling natuurlijke getallen. Nu komen in rij (I) niet alle rationale getallen aan bod, maar het is nu niet moeilijk meer een rij te construeren waarbij dit wel het geval is. In Denkertje 2 wordt je uitgenodigd het bewijs te voltooien.
Het voorgaande komt er op neer dat het mogelijk is de rationale getallen keurig op een rij te zetten. Het is een *aftelbaar oneindige* verzameling en alle aftelbaar oneindige verzamelingen zijn gelijkmachtig.
We zouden nu overmoedig kunnen worden en veronderstellen dat alle getalverzamelingen aftelbaar zijn. Dit is echter niet het geval. Je kunt bewijzen dat de verzameling van reële getallen niet aftelbaar is en dus niet gelijkmachtig met de verzameling natuurlijke getallen.
Wel is de verzameling reële getallen gelijkmachtig met de verzameling punten op een lijn en zelfs met de verzameling punten in een vlak en met de verzameling punten in de ruimte.
De reële getallen vormen dus wel een zeer 'machtige' verzameling. Toch zijn er verzamelingen denkbaar die nog 'machtiger' zijn, Cantor heeft een weg aangegeven om

tot steeds 'machtiger' verzamelingen te geraken. We moeten echter opmerken dat dit bouwwerk niet helemaal hecht is gebleken en we kunnen ook aanduiden waarom. Op bladzijde 99 hebben we geschreven: 'We beginnen met de begrippen verzameling en element en nemen aan dat bekend is wat hiermee wordt bedoeld.' Zolang we ons beperken tot eindige verzamelingen levert deze zin geen problemen op. Voor oneindige verzamelingen moet je echter duidelijk aangeven wat je nu precies verstaat onder verzamelingen en elementen anders loop je kans dat je de mist ingaat.
Het wordt ons echter te machtig hier verder op in te gaan. We hebben gezien dat het mogelijk is enige structuur aan te brengen in verzamelingen met oneindig veel elementen en zullen het daarbij laten.

Denkertjes

1 Schrijft men het gebroken getal $\frac{1}{7}$ als oneindige decimale breuk, dan komt er 0,142857142 ..., waarin de groep 142857 repeteert. Nu wordt het eerste cijfer achter de komma geschrapt, waardoor 0,42857142 ontstaat, waarin de groep 428571 repeteert. Dit nieuw gevormde getal is nu in gesloten vorm (zonder stippeltjes) te schrijven als $\frac{3}{7}$. Handel je net zo met $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ dan ontstaat 1,14213... Gevraagd wordt ook dit nieuwe getal in gesloten vorm te schrijven.

2 Bewijs, dat de verzameling rationale getallen gelijkmachtig is met de verzameling natuurlijke getallen.

3 Onder de machtigheid of het cardinaalgetal van een eindige verzameling verstaan we het aantal elementen van die verzameling.
Hoe groot is het cardinaalgetal van de verzameling van alle deelverzamelingen van een verzameling met 10 elementen?

4 Het cardinaalgetal van de verzameling natuurlijke getallen is $\boldsymbol{a}$. Wat is het cardinaalgetal van de verzameling even getallen?
Wat kun je in dit verband zeggen van $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}$?

5 Is de som van alle tussen 0 en 1 gelegen onvereenvoudigbare breuken, waarvan de noemer hoogstens gelijk is aan 100 een geheel getal of een gebroken getal?

Oneindig groot$^{\infty}$

Lijn en cirkel

Denk je in het platte vlak eens een groot aantal concentrische cirkels, waarvan de stralen achtereenvolgens de lengte 1, 2, 3, ... hebben.
Naarmate de straal van een cirkel groter is, wordt die cirkel 'rechter'. Je zou kunnen zeggen: 'Als de straal *oneindig groot* is geworden, is de cirkel overgegaan in een rechte lijn'. Een dergelijke bewering heeft wiskundig geen betekenis, toch is het de weergave van een gedachtenspel dat ieder op zijn tijd wel eens speelt. Ook de wiskundige, maar die bedenkt dan een vorm waarin het spel ook voor hem acceptabel is: hij maakt een theorie.

We weten dat een lijn in het platte vlak wordt bepaald door *twee* punten. Een cirkel daarentegen wordt bepaald door *drie* punten, Als je nu eens zou kunnen zeggen: Behalve alle gewone punten bevat het platte vlak nog één bijzonder punt, een oneigenlijk punt, dat op elke rechte lijn ligt, en op geen enkele cirkel, dan zou je de 'discriminatie' opheffen. Zo ontstaat de theorie van het *inversieve* vlak, waarin andere wetten gelden dan in het gewone, *euclidische* vlak.
Dat het werken met het inversieve vlak (ook wel Möbius-vlak genoemd) in bepaalde gevallen voordelen heeft zien we in het volgende.

De zes-cirkel-stelling

Teken een cirkel en kies daarop vier punten A_1, A_2, A_3 en A_4 in de een of andere volgorde. Maak nu vier nieuwe cirkels C_1, C_2, C_3, en C_4 opvolgend door A_4 en A_1, door A_1 en A_2, door A_2 en A_3, door A_3 en A_4. De grootte van die cirkels is onbelangrijk. De cirkels C_1 en C_2 snijden elkaar behalve in A_1 nog in een tweede punt en dat noemen we B_1. Evenzo wordt B_2 het tweede snijpunt van C_2 en C_3, B_3 dat van C_3 en C_4, B_4 dat van C_4 en C_1. Tot je verbazing kun je nu constateren dat de vier punten B_1, B_2, B_3 en B_4 ook op een cirkel liggen (en dat is dan de zesde cirkel uit dit verhaal.)

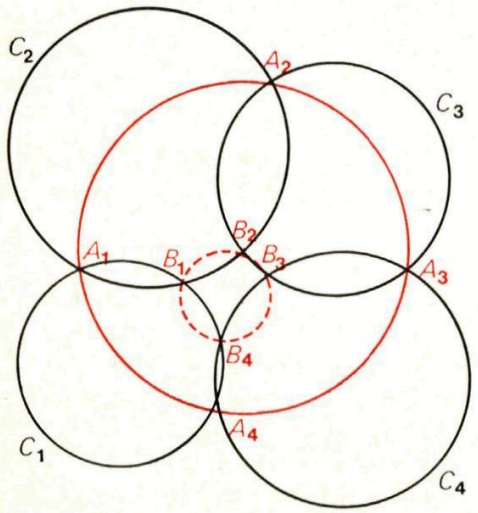


Fig. 1

Het bewijs van deze zes-cirkel-stelling laten we voor wat het is. In plaats daarvan gaan we wat experimenteren.
In figuur 2 staat het eerste experiment. Daar is in plaats van een cirkel C_2 door A_1 en A_2 een rechte lijn C_2 door A_1 en A_2 getekend; de rest van de figuur is volkomen volgens de voorschriften gebouwd. Er zijn dus ook weer vier punten B_1, B_2, B_3 en B_4 ontstaan.
En, o wonder, die liggen net zo keurig netjes met z'n vieren op een cirkel als in figuur 1.

Het tweede experiment is in figuur 3 afgebeeld. Daar zijn twee van de cirkels C_1, C_2, C_3, C_4 tot rechte lijnen geworden en nog steeds liggen B_1, B_2, B_3 en B_4 op een cirkel.

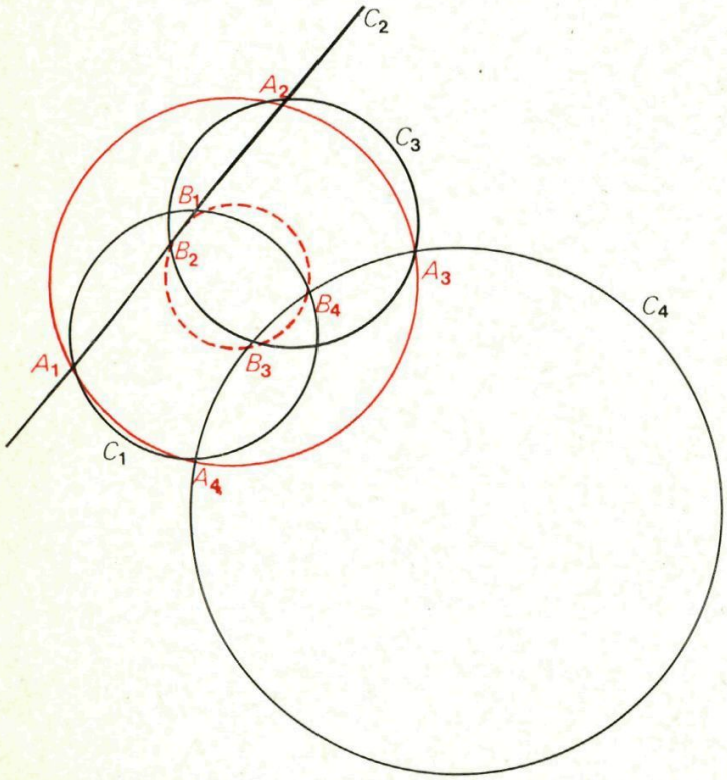


Fig. 2

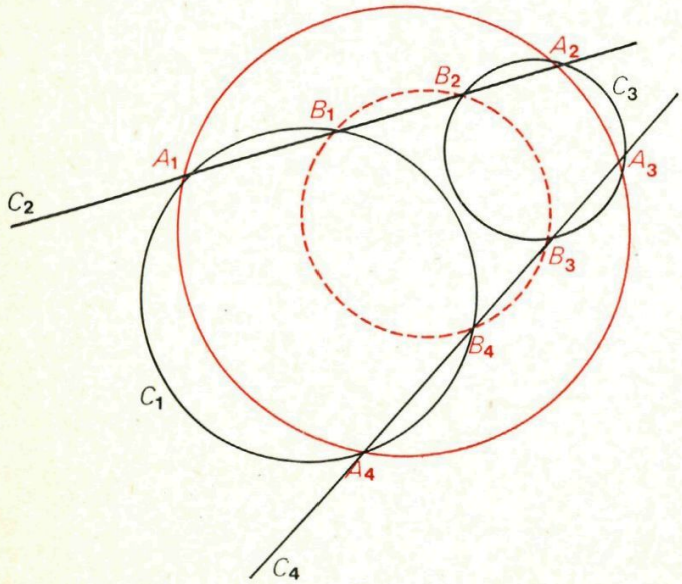


Fig. 3

In figuur 4 begint de toestand min of meer uit de hand te lopen. Daar zijn C_2 en C_3 rechte lijnen. Als gevolg daarvan is er geen punt aanwezig dat recht heeft op de naam B_2. De andere B's zijn wel aanwezig; in plaats van op een cirkel te liggen hebben ze zich echter op een rechte lijn geschaard.

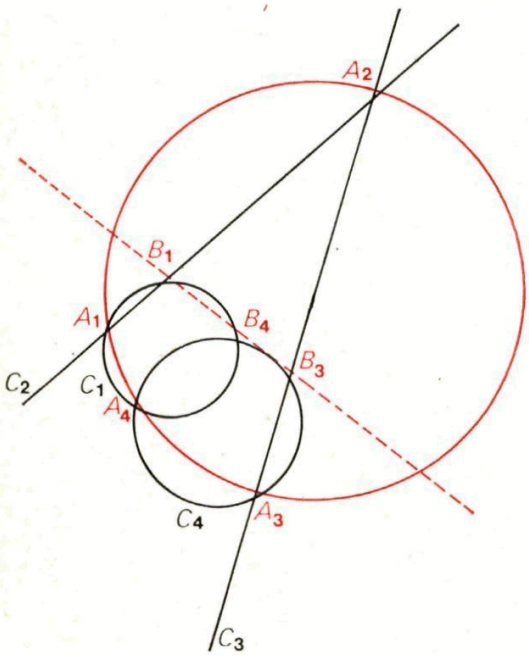


Fig. 4

Uit deze experimenten blijkt toch wel duidelijk dat in de zes-cirkel-stelling de rol van sommige cirkels met aardig succes ook door rechte lijnen vervuld kan worden. Dat geeft ons de gedachte om ook eens te proberen of we de vier punten A_1, A_2, A_3 en A_4 in plaats van op een cirkel ook op een rechte lijn kunnen kiezen.
Neem figuur 2 of figuur 3 eens over op doorschijnend papier, maar dan zonder de letters. Geef de punten die oorspronkelijk A_1 en A_2 heetten weer diezelfde namen. Schrijf echter A_3 bij het punt, dat eerst B_2 was. En doop net zo B_1 om in A_4. Ziezo, nu heb je de A-punten op een lijn gekregen.
De cirkel C_1 moet door A_1 en A_4 gaan en dat zou nu dus weer de cirkel kunnen zijn, die eerst ook al C_1 heette. Ook C_3 houdt zijn oude naam. De oude A-cirkel mag nu C_2 worden en de oude B-cirkel wordt C_4.
Volgens de voorschriften is nu B_1 het oude punt A_4, B_2 het oude punt A_3, terwijl B_3 en B_4 hun oude namen houden.
Het resultaat staat nu in alle glans voor je. Ben je uitgegaan van 2, dan heb je vier B-punten op een cirkel. En heb je 3 gekozen, dan liggen je B-punten met z'n vieren op een rechte lijn.
Een bevattelijk bewijs van de stelling bij figuur 1 hadden we gemakkelijk kunnen geven. We zouden daarin gebruik gemaakt hebben van het feit dat $A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, $A_3A_4B_4B_3$ en $A_4A_1B_1B_4$ koordenvierhoeken zijn. Met behulp van de bekende eigenschap van de overstaande hoeken van een koordenvierhoek zouden we dan aangetoond hebben dat ook $B_1B_2B_3B_4$ een koordenvierhoek is, zodat de B-punten op een cirkel moeten liggen.

We hebben dat bewijs maar niet opgeschreven omdat het ons toch niet geholpen zou hebben bij het bewijzen van al die wetmatigheden die we al experimenterende ontdekt hebben. En we hebben nu eenmaal een sterk vermoeden dat al die verschillende situaties toch met één enkele redenering tot klaarheid te brengen zijn. En dat zouden we veel liever zien gebeuren.
Als we nou eens net doen alsof het vlak behalve alle punten die wij kennen nog één extra punt bevat? En als we nou eens net doen alsof dat extra punt op *elke* rechte lijn van het vlak ligt en op geen enkele cirkel van het vlak ligt?
Dan zouden we voortaan elke rechte lijn ook wel cirkel kunnen noemen, dan hebben we de woorden 'rechte lijn' in onze meetkundetaal helemaal niet meer nodig. En dan kunnen we inderdaad de rechte lijnen en de cirkels in allerlei opzichten over één kam scheren. Kijk maar:
Nu kunnen we zeggen: door drie verschillende punten van het vlak wordt een cirkel bepaald. Deze uitspraak dekt een aantal gevallen, die *vroeger* apart vermeld moesten worden. We moesten bijvoorbeeld onderscheid maken tussen de twee gevallen waarin die drie punten wel of niet op een rechte lijn lagen. Maar dat onderscheid is vervallen nu we de rechte lijn ook cirkel noemen. Onder onze uitspraak valt ook bovendien nog het geval van twee 'gewone' punten plus dat ene extra punt. De rechte lijn door die twee gewone punten wordt geacht ook het extra punt te bevatten en bovendien wordt hij voortaan cirkel genoemd.

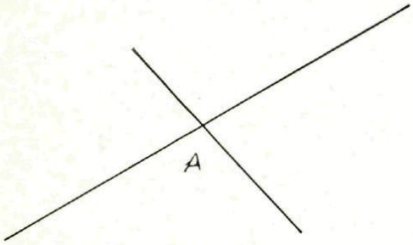


Fig. 5

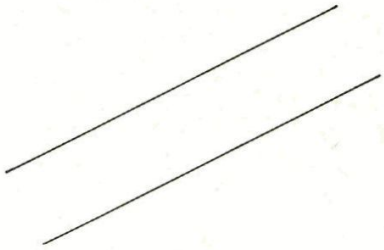


Fig. 6

Een ander voorbeeld: twee cirkels hebben twee, één of nul punten gemeenschappelijk. Ook dit is een uitspraak die in ons nieuwe taalgebruik een ruimere inhoud heeft gekregen. Nu immers kan één van die twee cirkels zo'n ding zijn dat we vroeger rechte lijn noemden; en nog is de uitspraak dan volkomen goed. Ze kunnen zelfs wel allebei rechte lijnen zijn. De rechte lijnen van figuur 5 hebben A en het extra punt gemeenschappelijk en worden dus voortaan snijdende cirkels genoemd. Die van figuur 6 hebben alleen maar het extra punt gemeenschappelijk en worden dus voortaan rakende cirkels genoemd.
Ons extra punt wordt ook wel genoemd 'het oneigenlijke punt van het vlak' of 'het oneindig verre punt van het vlak'.
Ter onderscheiding wordt het oude vlak ook wel genoemd het euclidische vlak, terwijl het vlak met het extra punt wordt aangeduid als het *inversieve* vlak of Möbius-vlak.
Het doel is nu bereikt. We hebben een formulering, die alle experimenteergevallen tegelijk beschrijft. Hij luidt als volgt:

Vier cirkels C_1, C_2, C_3, C_4 liggen in het vlak. C_1 en C_2 snijden elkaar in A_1 en B_1, C_2 en C_3 in A_2 en B_2, C_3 en C_4 in A_3 en B_3, C_4 en C_1 in A_4 en B_4. Als de punten A_1, A_2, A_3, A_4 op een cirkel liggen, dan is dat ook het geval met de punten B_1, B_2, B_3, B_4.

In deze formulering betekent het woord 'vlak' ons oude vlak plus het oneigenlijke punt. En het woord 'cirkel' moeten we opvatten als cirkel of als rechte lijn al naar gelang hij niet of wel dat oneigenlijke punt bevat.

Er bestaat een aardige manier om het oneigenlijke punt van het inversieve vlak zichtbaar te maken.

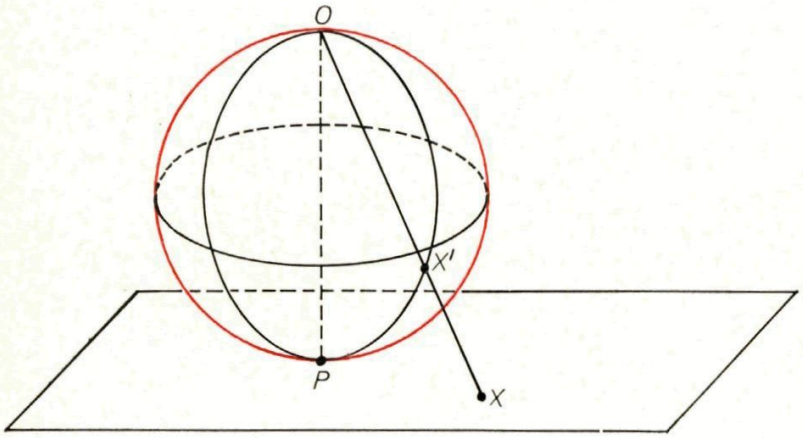


Fig. 7

In figuur 7 raakt de bol in het (eigenlijke) punt P aan het inversieve vlak. Op die bol ligt het punt O diametraal tegenover het raakpunt P. Het vlak wordt op de bol geprojecteerd van uit het centrum O. Als projectie van het eigenlijke punt X beschouwen we het van O verschillende snijpunt van de lijn OX met de bol. Verschillende eigenlijke punten hebben verschillende projecties. Er is één punt op de bol, dat niet projectie van een eigenlijk punt is, namelijk O zelf. We beschouwen O als projectie van het oneigenlijke punt.

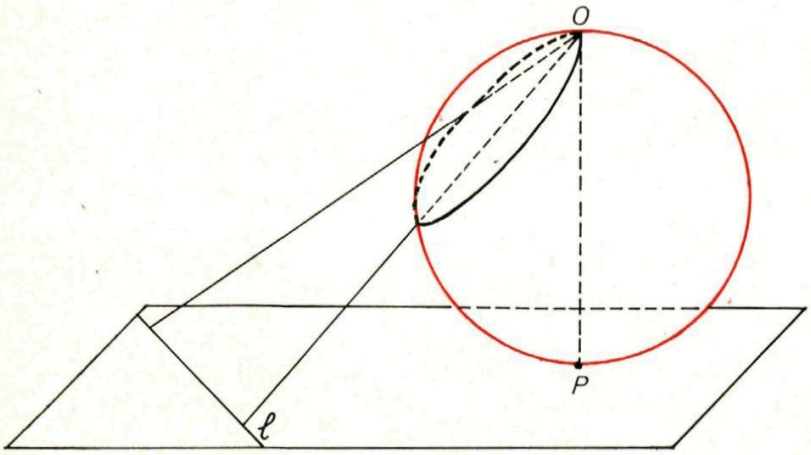


Fig. 8

Deze projectiemethode (de stereografische projectie geheten) wordt bij het vervaardigen van landkaarten in de omgekeerde richting gebruikt. Daar wordt de bol, in dat geval de aardbol, op het vlak geprojecteerd.

Wat gebeurt er nu, wanneer we een cirkel van het inversieve vlak op de bol projecteren? Als het een cirkel door het oneigenlijke punt is, dan liggen alle projecterende lijnen in een vlak en dat vlak snijdt de bol volgens een cirkel door O. De projectie van een cirkel door het oneigenlijke punt is dus een cirkel door O op de bol. Zie voor illustratie hiervan figuur 8.
Ook een cirkel die niet door het oneigenlijke punt gaat heeft als projectie op de bol een cirkel en dat wordt in figuur 9 toegelicht.

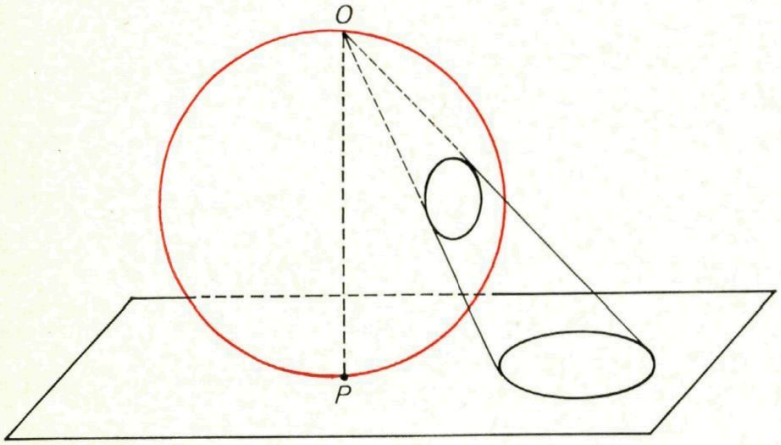


Fig. 9

Het voorgaande betekent dat de zes-cirkel-stelling in het inversieve vlak precies hetzelfde luidt als de zes-cirkel-stelling op de bol. Als we hem op de bol kunnen bewijzen, dan zijn we in het inversieve vlak meteen ook klaar. En als we de ruimtelijke figuur die in de laatste tekening afgebeeld is vanuit allerlei punten van de bol terug projecteren op het raakvlak in het diametraal daartegenover gelegen punt, dan zien we alle varianten van de vlakke zes-cirkel-stelling voor de dag komen.

Oneindig ver$^{\infty}$

Projectieve meetkunde

In het voorgaande hebben we gezien hoe je in gedachten het gewone (euclidische) platte vlak kunt uitbreiden met één oneigenlijk punt, waarmee je het inversieve vlak krijgt. In dit vlak is het verschil tussen lijn en cirkel opgeheven, wat bij bepaalde stellingen uit de vlakke meetkunde voordelen oplevert, doordat je ze algemener kunt formuleren.

Ook evenwijdige lijnen geven vaak aanleiding tot allerlei vervelende uitzonderingsgevallen, waarvan het prettig zou zijn om ze kwijt te raken. Een heel eenvoudig voorbeeld:
Twee lijnen snijden elkaar in een punt, *behalve als ze evenwijdig zijn.*

In de vorige nummers van deze jaargang heb je in de artikelen over perspectief kunnen lezen dat het afbeelden op een plat vlak van lijnen, die in de ruimte evenwijdig lopen, speciale problemen met zich meebrengt. In de schilderkunst zijn deze problemen opgelost door de perspectiefleer. Wil je bijvoorbeeld een vlak landschap schilderen met daarop een kaarsrechte spoorbaan, dan breng je eerst een horizon aan en laat dan de evenwijdige spoorrails elkaar op de horizon snijden. Alle horizontale lijnen die in werkelijkheid dezelfde richting hebben gaan bij perspectivische afbeelding naar eenzelfde punt op de horizon.

De perspectiefleer heeft in de wiskunde het ontstaan van de *projectieve meetkunde* tot gevolg gehad.
We breiden hiertoe het platte vlak uit met oneigenlijke punten en wel zó, dat bij elke *richting* (en zijn tegengestelde) een dergelijk punt hoort. Twee evenwijdige lijnen 'snijden' elkaar in één oneigenlijk punt.
Alle oneigenlijke punten (ook wel *oneindig verre* punten of ideale punten genoemd) vormen samen de oneigenlijke rechte (of ideale rechte).
Elk tweetal lijnen in het platte vlak snijdt elkaar nu ofwel in een gewoon punt, ofwel in een oneigenlijk punt.
De oneigenlijke punten kunnen we net zo behandelen als gewone punten en de oneigenlijke rechte als gewone lijn. Maar dit betekent dat we het woord oneigenlijk ook wel weg kunnen laten!
Het resultaat van dit gedachtenspelletje is dat we het terrein van de projectieve meetkunde zijn binnengetreden, een terrein waar aan de ingang staat: Verboden voor evenwijdige lijnen.

Door het uitbannen van de evenwijdigheid komt een bijzonder mooie eigenschap naar voren, de belangrijkste bijzonderheid van de projectieve meetkunde: De begrippen *punt* en *lijn* zijn volledig verwisselbaar.

Zo kun je de eenvoudigste grondstelling: Elk tweetal punten bepaalt een lijn, veranderen in: Elk tweetal lijnen bepaalt een punt.

De verwisselbaarheid van punt en lijn heet het beginsel van de *dualiteit*. Elke stelling in de projectieve meetkunde brengt een duale stelling met zich mee, die je niet apart hoeft te bewijzen. Is de stelling juist, dan de duale stelling evenzeer.

De stelling van Desargues

Een beroemde stelling waaraan we het dualiteitsbeginsel kunnen laten zien is de stelling van Desargues.
We gaan uit van de driehoeken ABC en $A'B'C'$ (figuur 10):
De stelling zegt:
Als de verbindingslijnen van de overeenkomstige hoekpunten van de driehoeken door één punt P gaan, dan liggen de snijpunten van de overeenkomstige zijlijnen op één lijn p. (Figuur 11.)

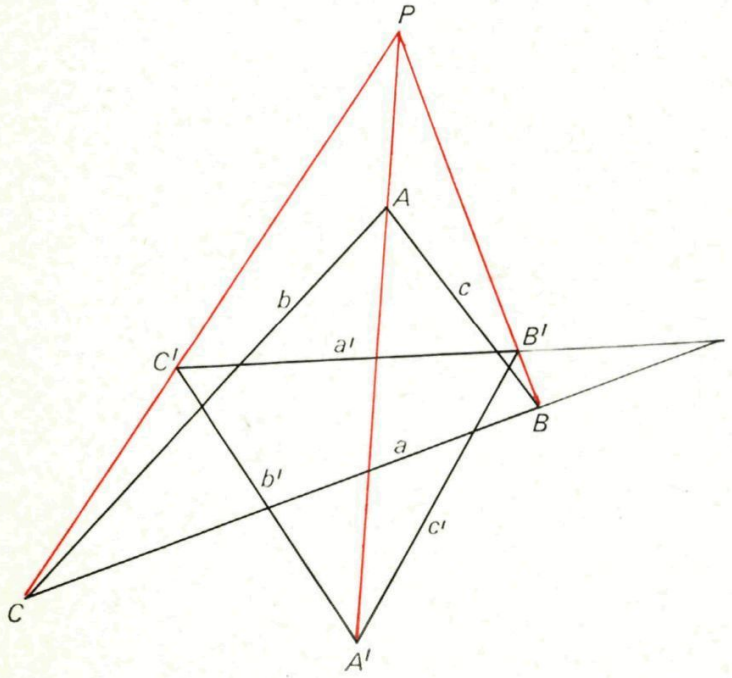


Fig. 10

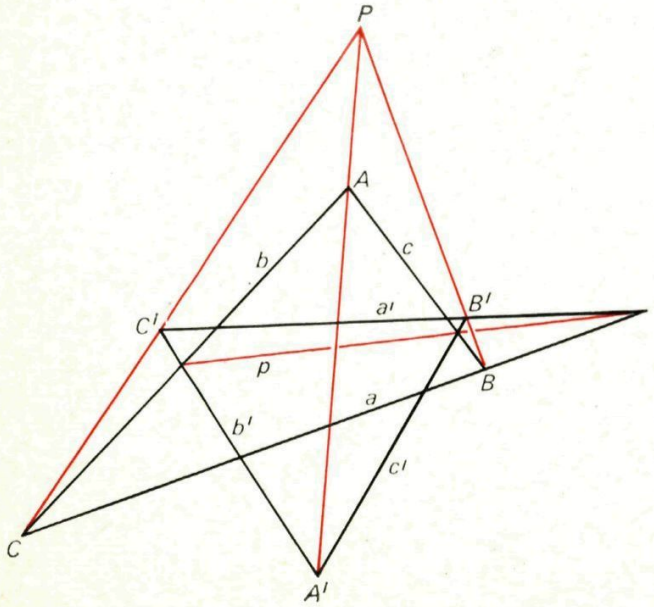


Fig. 11

Het duale van 'verbindingslijn van twee punten' is 'snijpunt van twee lijnen'.
Het hoekpunt A van een driehoek is het snijpunt van de zijden b en c. Duaal wordt dit:
De zijde a van een driehoek is de verbindingslijn van de hoekpunten B en C.
Het duale van de stelling van Desargues wordt nu:
Als de snijpunten van de overeenkomstige zijlijnen van de driehoeken op één lijn p liggen, dan gaan de verbindingslijnen van de overeenkomstige hoekpunten door één punt P.

Het duale van de stelling van Desargues is precies zijn omgekeerde!

Het is niet de bedoeling om verder op de projectieve meetkunde in te gaan en zeker niet om de genoemde stelling te bewijzen.

We volgen liever het spoor terug.
Wat gebeurt er bijvoorbeeld als je het punt P tot oneigenlijk punt gaat verklaren? Dan zou P dus op de 'horizon' liggen, zodat alle lijnen die elkaar 'snijden' in P in werkelijkheid evenwijdige lijnen zijn. Een tekening van deze situatie zie je in figuur 12. Je ziet dat de snijlijn p ook in dit geval aanwezig is en je kunt dit dus als een bijzonder geval van de stelling van Desargues beschouwen.

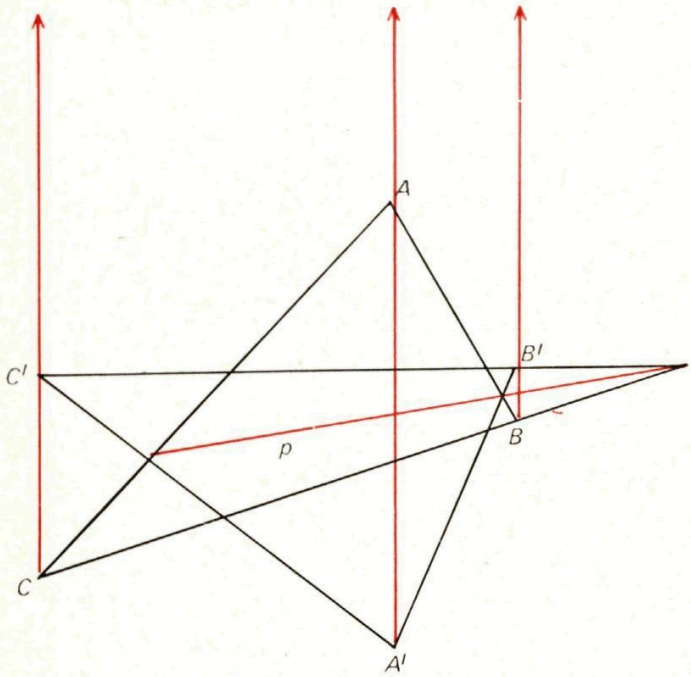


Fig. 12

Zo kun je ook andere punten in de figuur als oneigenlijke punten gaan beschouwen, of bijvoorbeeld de lijn p als oneigenlijke rechte.
Al deze gevallen leiden in de euclidische meetkunde tot stellingen die je afzonderlijk moet bewijzen, terwijl je in de projectieve meetkunde direct klaar bent, door het ontbreken van evenwijdige lijnen.

Oneindig en onbegrensd?°

Enige tijd geleden is een boek verschenen van Prof. Dr. J.H. van den Berg met als titel: Metabletica van de materie. Meetkundige beschouwingen.
Metabletica is de leer van de veranderingen, zodat je verwacht iets te lezen over steeds weer nieuwe meetkundige vormen.

Bij nadere kennismaking met de inhoud blijkt, dat allerlei onderwerpen ter sprake komen, die ogenschijnlijk niets met wiskunde hebben te maken. De schrijver wijst er echter op – en dat is o.a. het aparte van het boek – dat op verschillende terreinen gebeurtenissen plaats vinden, die, hoe uiteenlopend ze ook zijn, wel degelijk een gemeenschappelijk verband hebben.

Het is de schrijver opgevallen dat in een betrekkelijk korte periode in de achttiende eeuw op allerlei terreinen grote veranderingen plaats vonden, onder andere in de architectuur.
Een architect bij wie dit bijvoorbeeld kan worden opgemerkt is de Italiaan Piranesi.
Als bouwmeester heeft hij nauwelijks betekenis, maar zijn roem ligt in zijn etsen, waarvan het aantal de duizend overtreft. In 1744 verscheen zijn etsenbundel *Invenzione capri di carceri.* Dat is: Grillige verzinsels van kerkers.
Carceri betekent kerkers, gevangenissen.
Waarom deze benaming?
'Wanneer men mij vroeg', heeft Piranesi eens gezegd, 'een plattegrond te maken voor een nieuw heelal, ik was dwaas genoeg het te doen'.
Dat wil zeggen, Piranesi tekent wel ruïnes en kerkers, maar hij heeft, zou men zeggen, een nieuwe wereld op het oog. Op de plaat van pagina 112 ziet men een wild geheel van bruggen, trappen, poorten, overkoepelingen, ondersteuningen, materialen en toestellen, waarin geen weg te vinden is. Niets lijkt tot iets te voeren. De wirwar van bouwsels en overbruggingen is aan geen van de zijden van de plaat begrensd.
Een *gebouw zonder grenzen*, wat vreemd is als men bedenkt, dat de etser een *kerker* heeft willen afbeelden. En dan de mensen die op talrijke plaatsen zijn te vinden. Wat doen ze?
Het is een raadsel. Ze zijn onderweg: bruggen over, trappen af. Rusteloos in hun labyrint, dat ook daardoor een kerkerachtig aspect krijgt.
Wat stond Piranesi voor ogen?
Een criticus oordeelt:
'He imagined scenes that would startle geometry'.
Waarin precies zou indertijd de meetkunde door Piranesi geschokt kunnen zijn geweest?
Iemand wijst er op:
'De ruimte is geometrisch niet te verantwoorden. Voor deze ruimte is de *euclidische meetkunde ontoereikend*'.

Op de etsen van Piranesi wordt een ruimte uitgebeeld, die niet euclidisch van aard is. De plaat toont een kerker zonder muren, een begrensde ruimte zonder grenzen. Of moet gezegd worden, dat de kunstenaar de *eindige, tegelijk onbegrensde* ruimte heeft getekend?

Wat wordt bedoeld met een eindige onbegrensde ruimte?

We beginnen met een eenvoudig model, dat één dimensie aanduidt. In figuur 13 is een lijnstuk getekend, waarlangs zich een insekt beweegt. Het beestje kan naar links en rechts, maar in beide richtingen komt er een moment, dat omkeren noodzakelijk is. De ruimte is eindig en begrensd.

Figuur 13

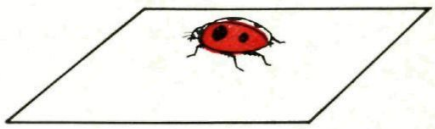
In figuur 14 tippelt het insekt in een cirkelvormige ruimte, die eindig is omdat de omtrek van de cirkel eindig lang is. Er zijn echter geen uiteinden, die hem tegenhouden. De ruimte heet nu eindig en onbegrensd.

Figuur 14

Volgens figuur 15 kan het dier oneindig ver in beide richtingen gaan zonder ooit terug te moeten. Er zijn geen grenzen. Het model stelt een oneindig en onbegrensd ééndimensionale ruimte voor.

Figuur 15

In figuur 16 zijn we overgestapt naar een twee-dimensionale ruimte: een vlakke rechthoek. De zijden roepen in iedere richting een halt toe. De ruimte is eindig en begrensd.

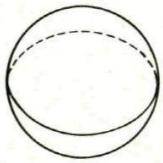


Figuur 16

De bol in figuur 17 is eindig, want de oppervlakte is eindig, maar in elke richting kan het insekt onbeperkt doorlopen: een eindige en onbegrensde ruimte.
Bedenk wel, dat het twee-dimensionale insekt geen flauwe notie heeft van de gebogen aard van zijn leefwereld. Het kan geen derde dimensie waarnemen en weet niets af van de ruimte buiten zijn vlak.

Figuur 17

Naarmate het aantal dimensies stijgt wordt het moeilijker een eenvoudige voorstelling te geven. Het lukt nog met figuur 18, dat een eindig en begrensd driedimensionaal heelal aanduidt. Het insekt zit opgesloten in een holle bol, waarin het heen en weer kan vliegen. Zijn heelal is eindig omdat de inhoud van de bol eindig is en begrensd omdat in elke richting een dwingend stopgebod geldt.



Figuur 18

Hoe ziet ons heelal er uit? Is het een eindige, maar onbegrensde ruimte? Of is het heelal oneindig uitgebreid? We weten het niet. De vraag is meer van natuurkundige dan van wiskundige aard en voor de beantwoording worden steeds grotere telescopen en steeds verfijndere technieken toegepast. Maar voorlopig moeten we het antwoord schuldig blijven.

Bekijk de ets van Piranesi nog maar eens. Zou dit het beeld zijn van een eindige en tegelijk onbegrensde ruimte?

Denkertjes

6 De oneindige rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ heeft een somlimiet $S = 2$. Heeft ook de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots$ een somlimiet?

7 Formuleer de stelling van Desargues voor het geval van figuur 12.

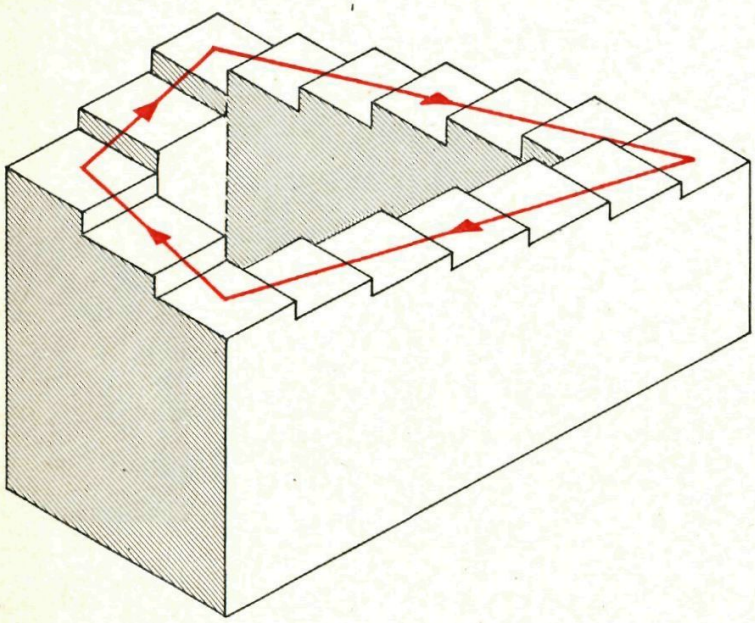
8 Maak een figuur voor de stelling van Desargues voor het geval de lijn p in figuur 11 de oneigenlijke rechte is.

9 Is het mogelijk dat het punt P van figuur 11 op de lijn p ligt?

10 Verdeel een lijnstuk met passer en liniaal in drie gelijke delen, zonder gebruik te maken van evenwijdige lijnen.

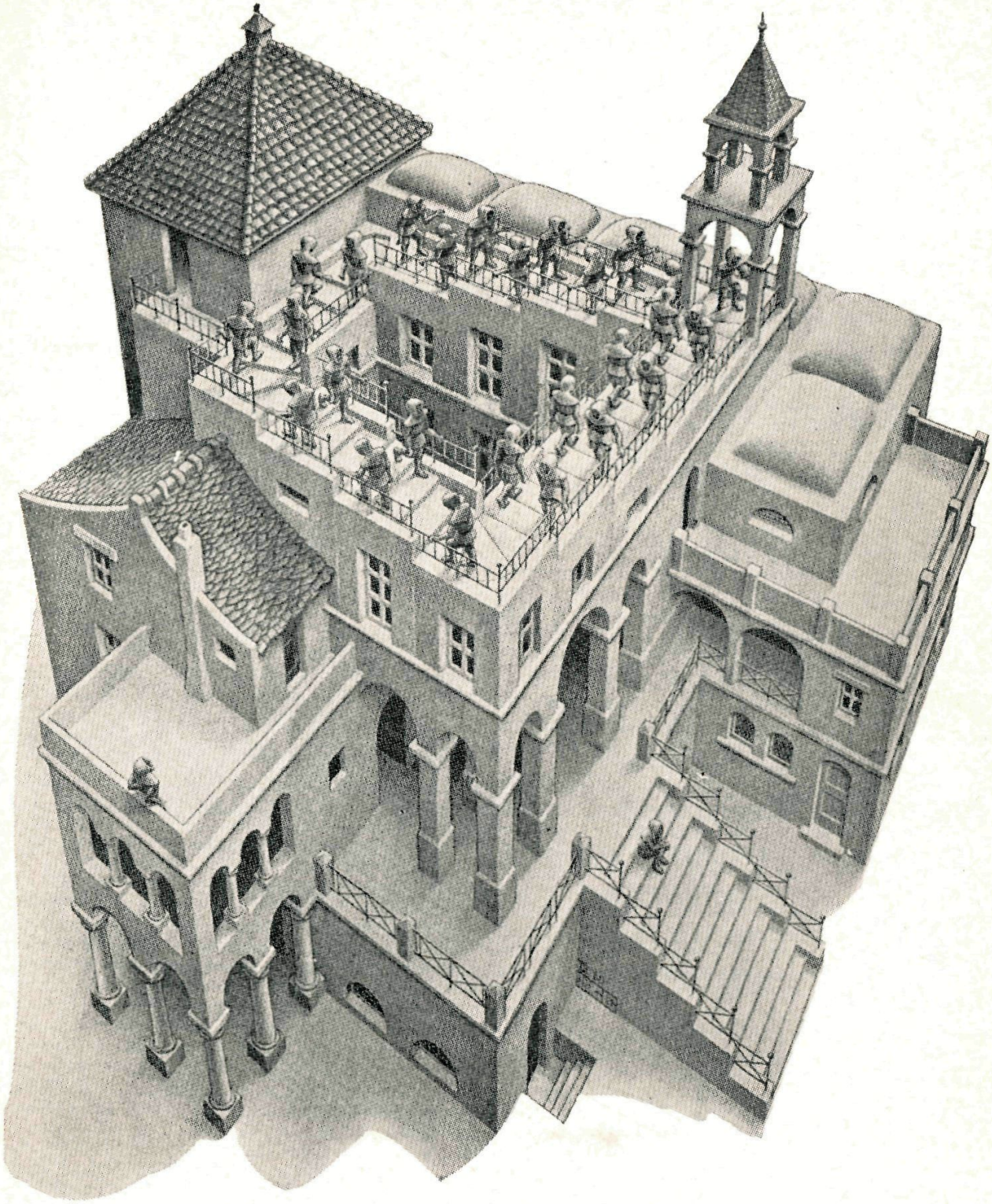
Het kwasi-eindeloze°

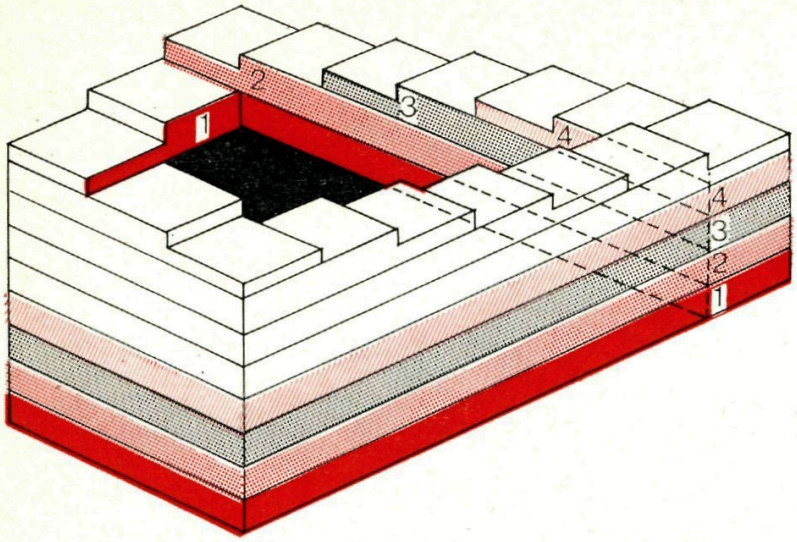
Net als de Italiaanse kunstenaar Piranesi in de achttiende eeuw is ook de Nederlandse graficus M. C. Escher gebiologeerd door het oneindige, het eindeloze, het onbegrensde. Maar dan natuurlijk op zijn eigen manier, met zijn eigen fantasie.
In de prent *Klimmen en Dalen*, een litho uit 1960, worden wij geconfronteerd met een trap die 'alsmaar naar boven gaat' (of naar beneden) gaat, zonder hoger te komen. Bekijken we de prent en volgen we de monniken stap voor stap, dan is er geen twijfel mogelijk: elke trede voert hen een trapje hoger. Maar na één rondgang merken we, dat we weer bij het beginpunt gekomen zijn en dus, ondanks al ons stijgen, geen centimeter hoger. Het idee van dit kwasi eindeloze stijgen (of dalen) vond Escher in een artikel van L. S. Penrose (figuur 19). Het bedrog komt duidelijk aan het licht, als we het bouwwerk in plakken proberen te snijden: plak 1 (links boven) vinden we dan aan de onderkant (rechts voor) weer terug op een veel lager niveau (figuur 20) De plakken liggen dus niet in horizontale vlakken maar lopen spiraalsgewijs naar boven (of naar beneden). Schijnbaar horizontaal is dus in werkelijkheid spiraalsgewijs naar boven lopend, en de trap zelf ligt juist wel in een horizontaal vlak.



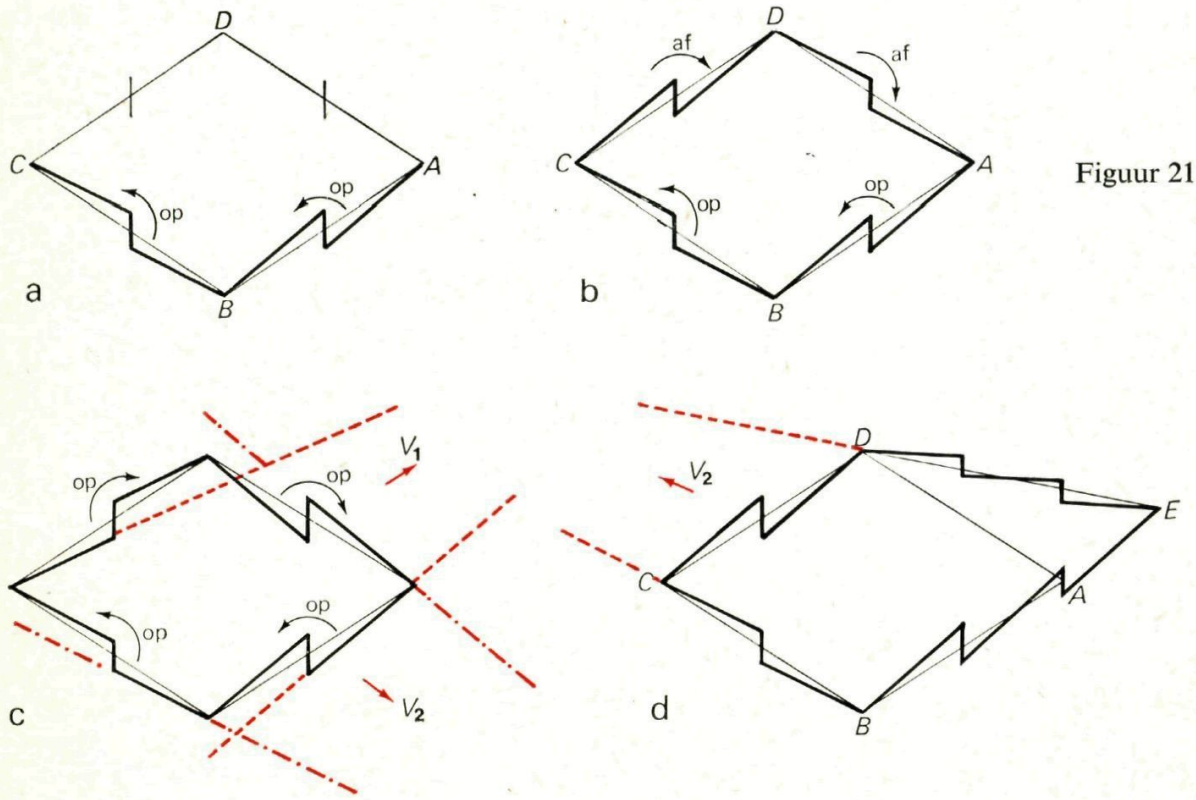
Figuur 19

Om duidelijk te maken, dat het mogelijk is in een horizontaal vlak een doorlopende trap te tekenen proberen we er zelf een te construeren (figuur 21a, b, c, d). *ABCD* stelt een horizontaal liggend vierkant voor. In de middens der zijden tekenen we vertikale lijntjes. Het is nu gemakkelijk treden te tekenen die van *A*, over *B* naar *C* een stijgende trap moeten voorstellen (figuur 21a).
De moeilijkheid begint als we verder willen gaan van *C* over *D* terug naar *A*.



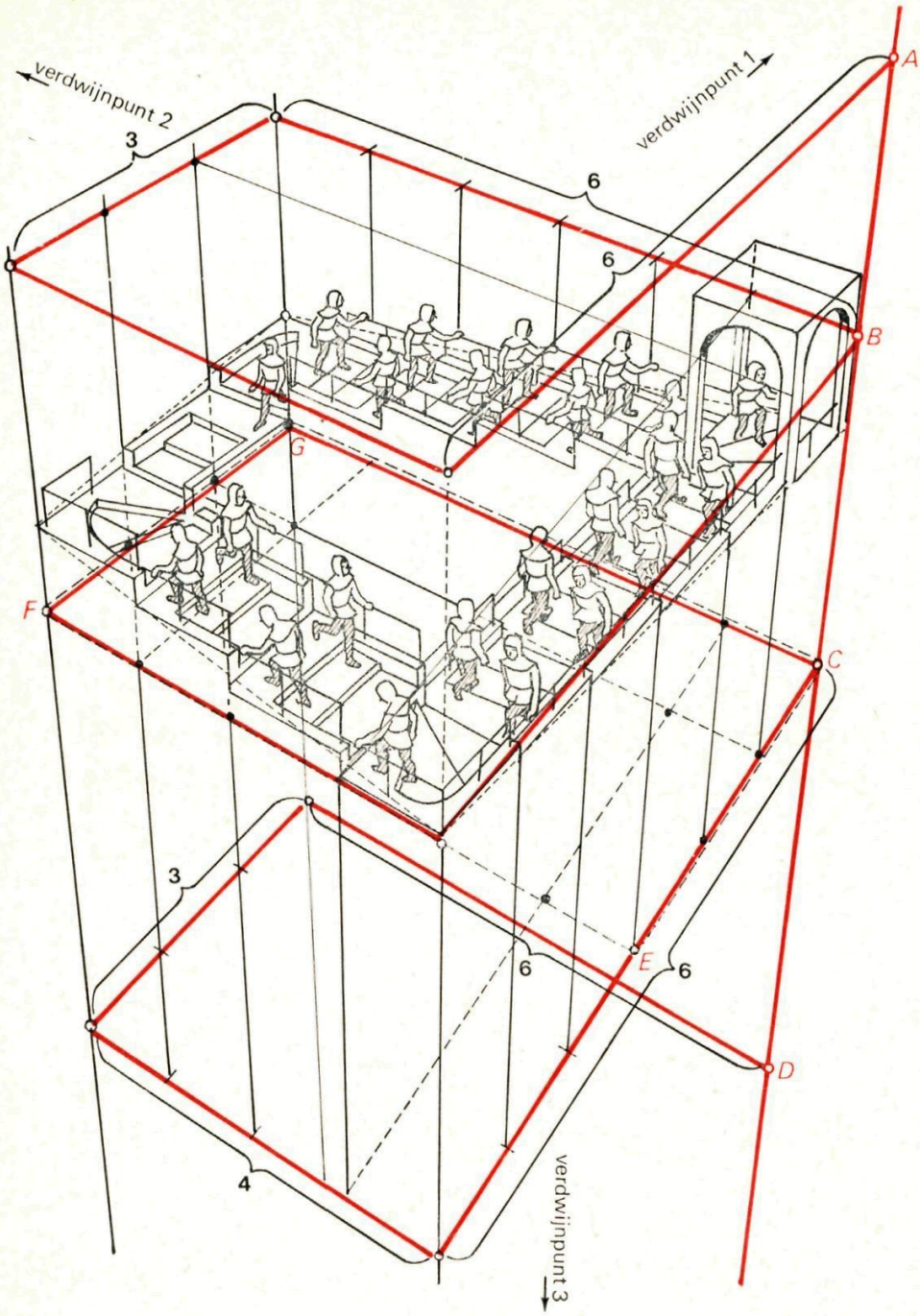


Figuur 20



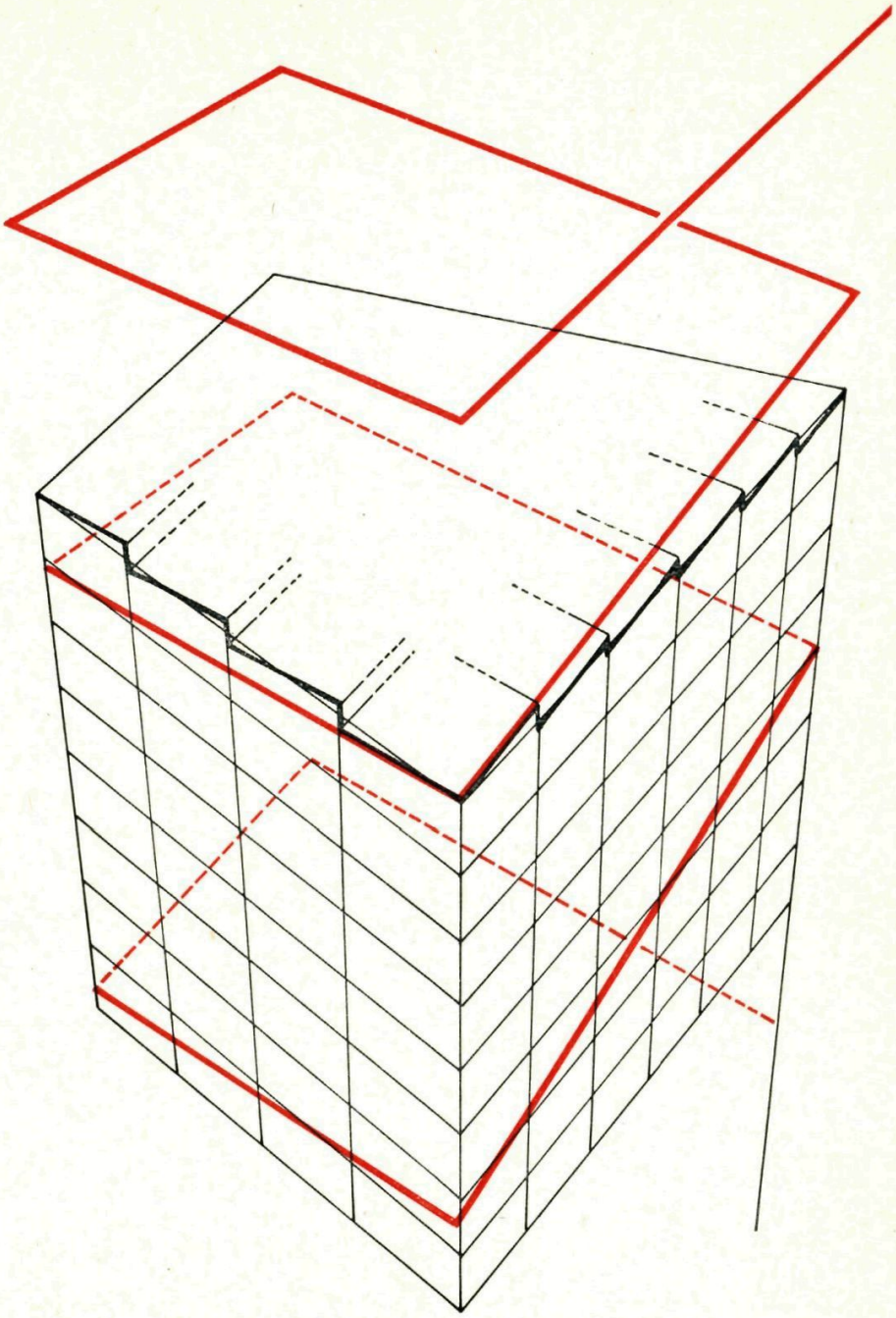
Figuur 21

In figuur 21*b* is dat zo gedaan dat de treden ons naar beneden voeren. Daarmee is de hele aardigheid verdwenen: we lopen twee treden op en twee treden af en het verwondert ons niet dat we dan op het uitgangspunt terugkomen. Doen we het echter wat anders (figuur 21*c*), dan blijft de trap inderdaad naar boven lopen en we zouden met het schema van figuur 21c genoegen kunnen nemen. Het gebouw, dat om dit schema heen getekend zou kunnen worden heeft dan echter een onaangename tekortkoming. De gestippelde rode lijnen die de richting van twee zijmuren aangeven lopen rechts boven naar elkaar toe; dat is geen bezwaar ze passen (met het verdwijnpunt V_1) in de perspectivische afbeelding van zo'n gebouw). De beide andere punt-streeplijnen



Figuur 22

komen echter samen in een punt V_2, rechts onder en dat verstoort de suggestie van een behoorlijk perspectivisch getekende prent.
We kunnen V_2 wel links boven krijgen, als we de zijden *BA* en *DA* langer maken bijvoorbeeld zoals in figuur 21*d*. Twee zijden zijn dan elk een trede langer geworden. Dat deze oplossing tot een natuurgetrouw lijkende afbeelding leidt toont ons Escher's prent.
We hebben nu gevonden waar de prent ons misleidt: de trap ligt in een volkomen horizontaal vlak; de details van de rest van het gebouw zoals de voetpunten der zuilen, de raamkozijnen etc. die eigenlijk in horizontale vlakken zouden moeten liggen lopen



Figuur 23

spiraalsgewijs naar boven. De voorkant ziet er dus heel acceptabel uit, maar zou Escher op een andere prent de achterzijde getekend hebben, dan zouden we zien dat het hele gebouw in de vernieling zit. We bekijken nu nog eens de trap uit de prent (figuur 22). Door vertikale lijnen langs elke grote trede te trekken merken we dat deze een prismatisch lichaam begrenzen waarvan de zijvlakken breedten hebben die zich verhouden als 6:6:3:4. Wat op de prent even hoog lijkt vormt een spiraal (rood). Figuur 23 vat deze prent nog eens schematisch samen. De zwarte lijnen geven echte horizontale vlakken (dus evenwijdig met de trap) de rode spiraal geeft de kwasi horizontale lijnen van het gebouw weer.

Oplossingen Denkertjes in dit nummer

1 $1{,}14213\ldots = \{1{,}414213\ldots - 1{,}4\}\,10 + 1 = 10\sqrt{2} - 14 + 1 = 10\sqrt{2} - 13.$

2 In de rij (I) van bladzijde 00 ontbreken 0 en de negatieve getallen. Wanneer 0 aan de rij wordt toegevoegd en met elk getal ook zijn tegengestelde:
$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$
ontstaat een rij, waarin alle rationale getallen aan de beurt komen.

3 Een verzameling van 10 elementen bevat 2^{10} deelverzamelingen.

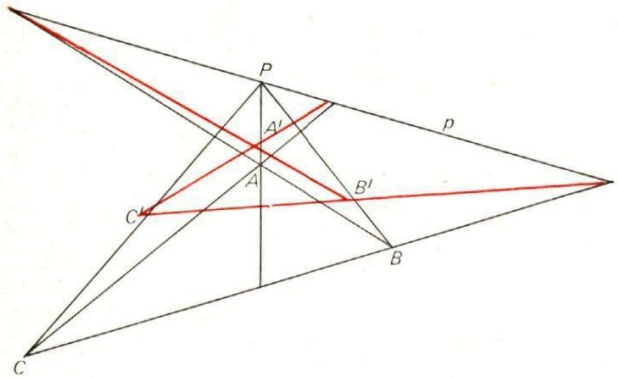
4 Het cardinaalgetal van de verzameling even getallen is $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

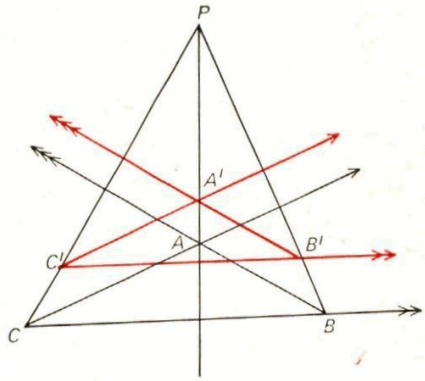
5 De som is gebroken. Men kan de breuken, die van $\frac{1}{2}$ verschillen paarsgewijze samennemen zodat de som van de breuken van elk paar gelijk is aan 1. Voorbeeld:
$\frac{1}{7} + \frac{6}{7}, \frac{2}{7} + \frac{5}{7}, \frac{3}{7} + \frac{4}{7}, \frac{1}{8} + \frac{7}{8}, \frac{3}{8} + \frac{5}{8}.$
Het 'totaal generaal' wordt dus een geheel getal plus $\frac{1}{2}$.

6 Neen. De rij is te schrijven als
$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} \ldots \frac{1}{10}) + \ldots$
waarbij de som van de termen tussen haakjes groter is dan $\frac{1}{2}$. De som van de eerste $2n$ termen van de rij is daarom groter dan $n \times \frac{1}{2}$. Als n onbeperkt toeneemt, is dit ook het geval met de som.

7 Als de verbindingslijnen van de overeenkomstige hoekpunten van $\triangle ABC$ en $\triangle A'B'C'$ evenwijdig zijn, liggen de snijpunten van de zijlijnen op een lijn.

8 en 9 Zie figuren.





10 Teken een driehoek waarvan het gegeven lijnstuk een zwaartelijn is. Construeer het zwaartepunt van de driehoek.

Inhoud:

Het oneindige 97

Oneindig veel ° 98

Oneindig groot °° 102

Oneindig ver °° 108

Oneindig en onbegrensd? ° 111

Het kwasi eindeloze ° 115

Denkertjes 101, 114

Oplossingen Denkertjes in dit nummer

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. Elsenaar, Harderwijk.
Bruno Ernst, Amersfoort.
A. F. van Tooren, 's-Gravenhage.
R. H. Plugge, Amstelveen.
G. A. Vonk, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. Oosten, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, *f* 4,00 per jaargang. Voor anderen *f* 6,00.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.