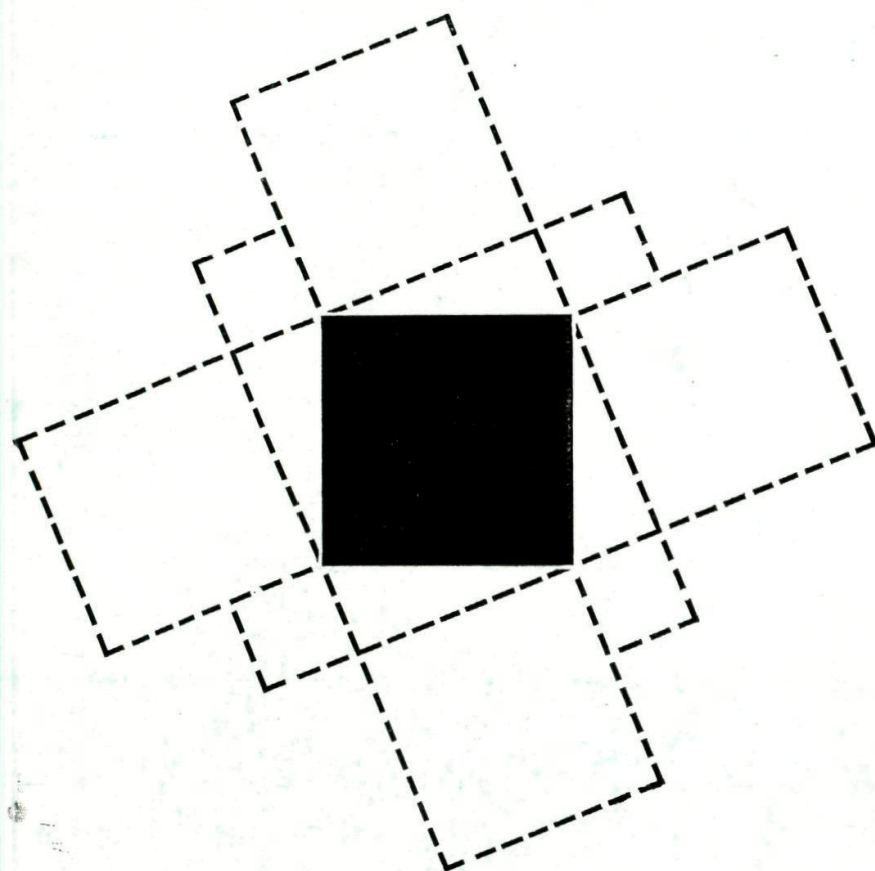
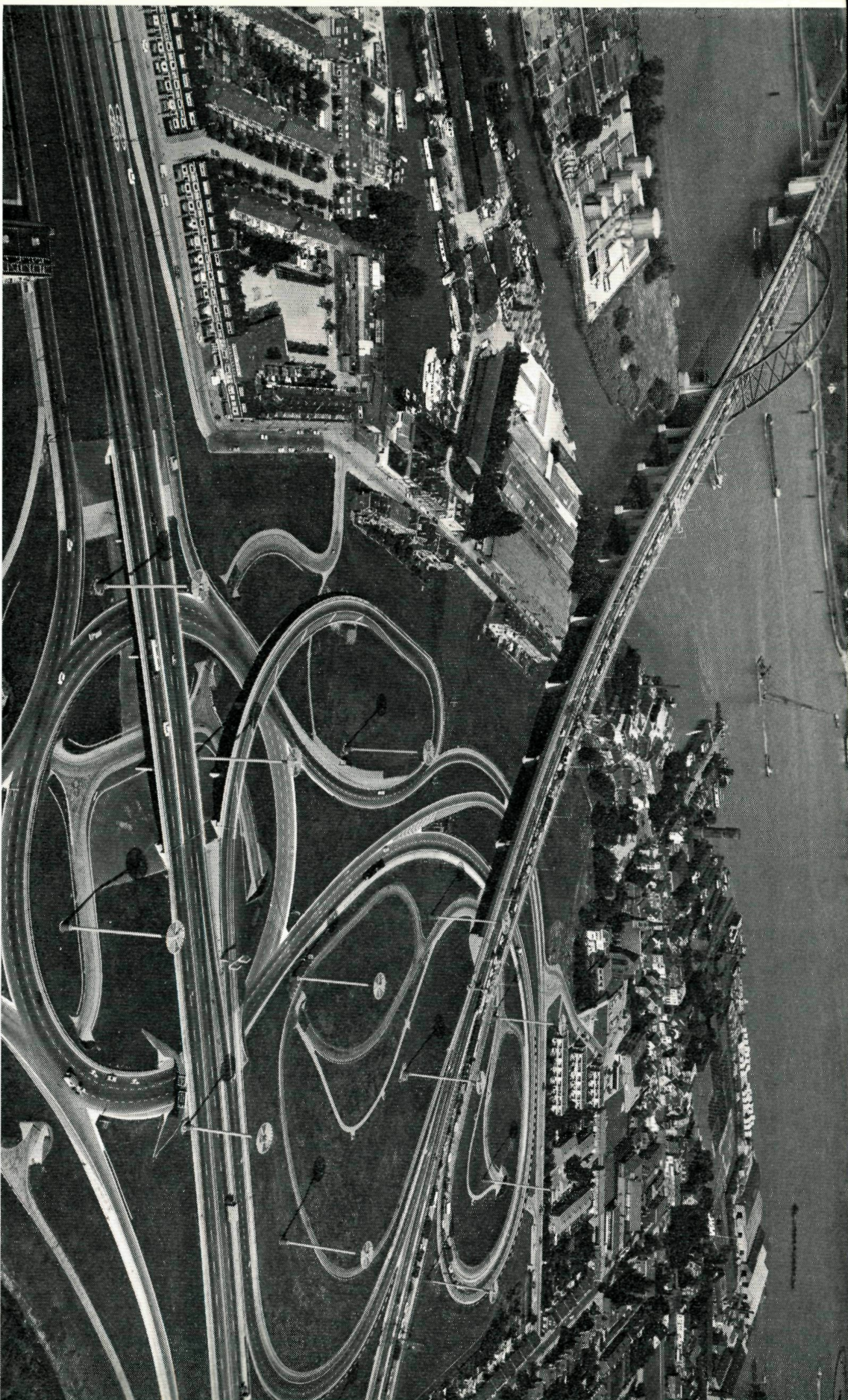


pythagoras

6



wiskundetijdschrift voor jongeren
jaargang 10 1970|1971



Van Brienenoordbrug met verkeerscircuit, zie ook bladzijde 123

foto Bart Hofmeester

Van de redactietafel

Denkertjes

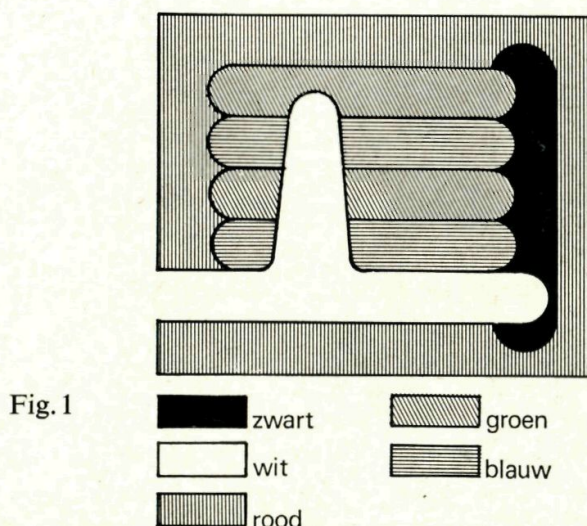
De Denkertjes die in dit nummer zijn opgenomen behoren tot de opgaven die dit jaar in de voorronde van de Wiskunde-olympiade aan de deelnemers zijn voorgelegd. Zoals gebruikelijk bij het laatste nummer kunnen de oplossingen niet worden ingezonden; de antwoorden vind je achter in dit nummer.

De lootprijs voor de Denkertjes in het tweede nummer van deze jaargang is gewonnen door Joost Stam, Amsterdam, voor die in het derde nummer door Kasanmoentalib, Hoogvliet. De eindstand van de ladderwedstrijd was bij het ter perse gaan van dit nummer nog niet bekend. Na de derde ronde lagen G. Renardel de Lavalette uit Rotterdam met 284 en B. de Brock uit Groningen met 273 punten aan de kop van het peloton.

Het vierkleurenprobleem

Het verhaaltje over het vierkleurenprobleem in het vierde nummer van deze jaargang heeft nogal wat reacties uitgelokt. Het ging hierbij om de vraag of je een kaart kunt tekenen, die zodanig in een aantal samenhangende gebieden is verdeeld, dat je beslist vijf kleuren nodig hebt, als geen twee gebieden die een grenslijn bezitten dezelfde kleur hebben.

Een lezer dacht dat hij het probleem binnen de minuut had opgelost. Hij stuurde de volgende figuur:



Jammer genoeg kunnen we deze lezer niet de wereldberoemdheid offeren, die we in het vooruitzicht hadden gesteld, omdat de blauwe kleur gemist kan worden. Links van de witte 'vinger' kan blauw worden vervangen door zwart, rechts van de vinger door rood. Zo voldeden ook andere inzendingen niet aan de eisen.

Van twee kanten werden we er op gewezen dat de fout in de redenering op bladzijde 96 niet in punt a , maar in de overgang van punt c op punt d zit. Het is bewijsbaar dat in elke verzameling van vier gebieden één van die gebieden wordt omsloten door de andere drie. Niet bewijsbaar (althans tot nu toe niet bewezen) is echter dat een kaart die p kleuren nodig heeft ook p gebieden moet bevatten, waarvan elk gebied met elk van de andere een grenslijn heeft.

Tenslotte

Tenslotte wensen we iedereen die een m.a.v.o., h.a.v.o., v.w.o., u.l.o., h.b.s., gymnasium, h.t.s., m.t.s., h.e.a.o., m.e.a.o., zwem- of rijexamen moet afleggen veel succes. We hopen alle lezers de volgende cursus weer tot onze abonnees te mogen rekenen. Tot de volgende jaargang.

Denkertjes

- 1 Als ${}^{10}\text{Log } 2 = a$ en ${}^{10}\text{Log } 3 = b$, dan is bijvoorbeeld ${}^{10}\text{Log } 6 = a + b$ en ${}^{10}\text{Log } \frac{2}{9} = a - 2b$.

Druk in a en b uit:

${}^{10}\text{Log } 18$; ${}^{10}\text{Log } 5$; ${}^{10}\text{Log } 0,4$; ${}^2\text{Log } 3$; $\frac{1}{2}\text{Log } 9$.

Waardering:

5 goede antwoorden: 2 punten,

3 of 4 goede antwoorden: 1 punt.

minder goede antwoorden: geen punten.

- 2 Een vierkant is (als bij een schaakbord) verdeeld in kleinere vierkantjes (congruent met vierkantje I) met zijde ter lengte 1.

Iemand trekt in ieder vierkantje de diagonalen. Hierdoor ontstaan vierkantjes congruent met vierkantje II. De verhouding van het aantal vierkantjes congruent met vierkantje I en het aantal vierkantjes congruent met vierkantje II is 25 : 49.

Wat is de lengte van de zijden van het grote vierkant?

Waardering: 2 punten.

- 3 In driehoek ABC ligt E op BC , zodat $BE : EC = 2 : 1$ en D op AB , zodat $AD : DB = 2 : 1$.

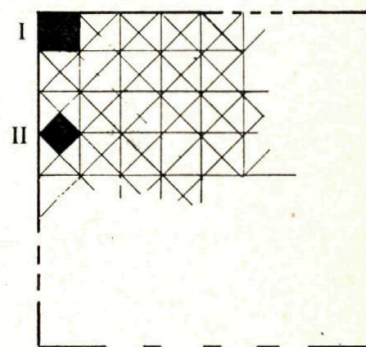
AE en CD snijden elkaar in P .

Bereken $CP : PD$.

Waardering: 2 punten

- 4 Vereenvoudig: $x \frac{1}{{}^{10}\text{Log } x}$ ($x > 1$)

Waardering: 3 punten.



Cirkelvormige bochten?°

Ir. H. M. Mulder

Als je met een fiets of auto ergens links- of rechtsaf wilt slaan, kun je natuurlijk geen 'haakse bocht' maken.

Volgens de boekjes voor verkeersregels en weggebruik moet je dan een kwart cirkel rijden.

Bij een scherpe bocht is de straal van deze cirkel klein, bij een flauwe bocht is de straal groot.

Verder zegt het wegenverkeersreglement:

Als je rechtsaf wilt, moet je die kwart cirkel keurig rijden, dus niet zo'n uithaal maken als die auto in figuur 2.

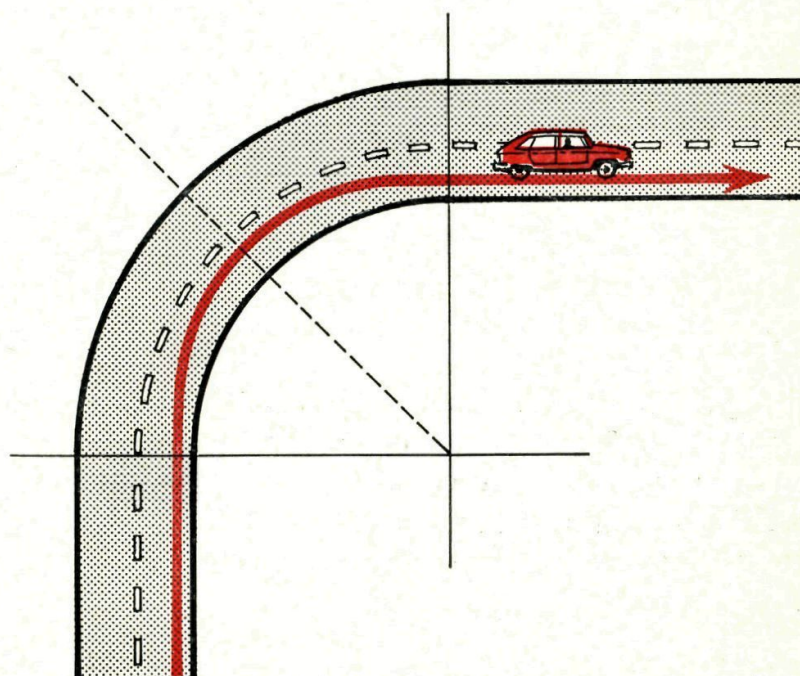


Fig. 2

Stel je de situatie eens goed voor.

Op het rechte weggedeelte staat het stuur recht, maar tijdens het rijden van de kwart cirkel in een zekere gedraaide stand. Maar er zijn toch ook nog overgangsstanden. Als je de bocht ingaat begin je toch het stuur te verdraaien tot halverwege de bocht en dan draai je weer terug tot de wielen weer recht staan. De wielen staan dus het meest gedraaid halverwege de bocht.

Maar dan krijg je ook een baan, zoals de auto in figuur 2 maakt.

Stel dat je werkelijk een kwart cirkel zou willen rijden, dan moest je stoppen bij het begin van de bocht, het stuur draaien in de juiste stand (moeilijk te voorspellen), gas geven, aan het eind van de bocht weer stoppen, stuur terugdraaien en rechtlijnig verder.

Wat zou onveiliger zijn: deze manoeuvre of de 'foutieve' bocht van de auto in figuur 2?

Laten we de bedoelde kromme eens nader bestuderen.

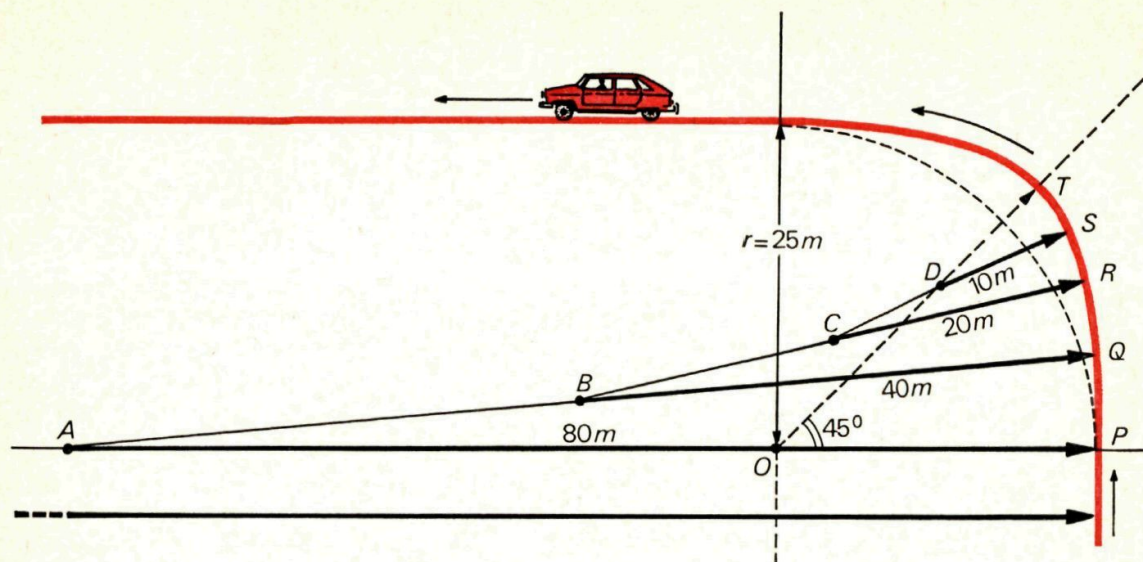


Fig. 3

Een auto nadert punt P en moet een bocht gaan maken met een straal 25 meter. De baan was tot dusver recht, wat je kunt opvatten als een bocht met onbeperkt grote straal.

In P aangekomen, stopt de auto niet, maar rijdt door en de chauffeur begint aan het stuur te draaien.

De straal wordt minder, steeds minder.

In figuur 3 zijn slechts een paar standen aangegeven. Rijdend naar Q is de straal bijvoorbeeld 80 m met middelpunt A , van Q naar R 40 m met middelpunt B , dan 20 m met middelpunt C , dan van S naar T tenslotte 10 m met middelpunt D .

Bij T beginnen we het stuur weer terug te draaien zodat het bij het eind van de bocht weer recht staat. Het tweede deel van de bocht verloopt dus precies omgekeerd als het eerste deel.

In werkelijkheid neemt de straal van de draaicirkel regelmatig af tot bijvoorbeeld 10 m, om daarna weer toe te nemen. De kromme die de auto daarbij doorloopt hangt dan nog af van de verhouding tussen de snelheid van de auto en de snelheid waarmee het stuur wordt gedraaid. We weten niet hoe een dergelijke kromme er precies uit ziet, maar we weten in elk geval wel zeker dat het geen cirkel is!

We kunnen daarom concluderen:

cirkelvormige stoepranden zijn onjuist;

bij ongelijkvloerse kruisingen, zoals een klaverblad, mogen geen cirkelvormige delen voorkomen;

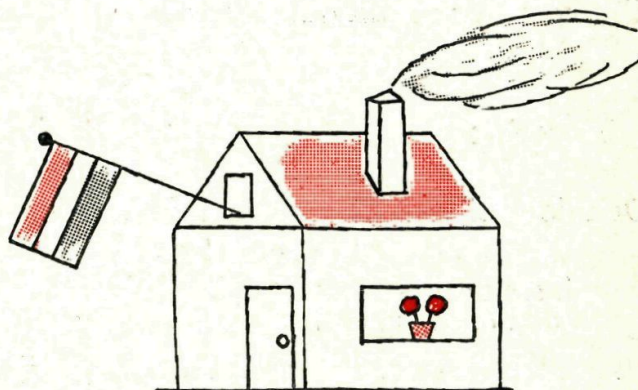
cirkelvormige bochten in racecircuit zijn levensgevaarlijk.

Boeiend 'bedrog'

Voor een baby lijken in het prille begin het hoofd van moeder en het schilderij aan de muur even ver weg, maar al grijpend komt de ervaring, dat het één dichterbij is dan het ander.

Jan-op-de-kleuterschool is trots op zijn echte huis van figuur 4. Enkele jaren later zegt hij: Dat lijkt nergens op.

Fig.4



Wanneer je iemand nakijkt in de verte, wordt die persoon steeds kleiner. Je weet echter, dat het slechts schijn is.

Niet alleen in het dagelijks leven, maar ook in de wiskunde moeten we oppassen voor gezichtsbedrog. Welke leerling op de middelbare school zal AG met BE laten snijden in figuur 5? Wie dat doet, maakt het wel erg bont.

Hoewel we allen voorzichtig zijn, kunnen we ongemerkt toch slachtoffer worden van dergelijk optisch bedrog. Het kan ook interessant zijn, dat opzettelijk te maken.

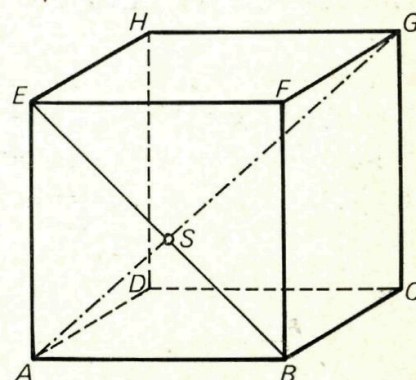


Fig.5

Lengte en breedte

Een eenvoudig voorbeeld levert de hoge hoed van figuur 6. Voor velen is het een verrassing, als de liniaal bewijst, dat hoogte en breedte gelijk zijn.

Wie uit de vrije hand, dus zonder passer of ander gereedschap, een voor het oog bevredigend vierkant tekent, kan bij nameten toch ontdekken, dat de opstaande zijden korter zijn dan de horizontale. Je overschat heel gauw de lengte van een vertikaal lijnstuk.

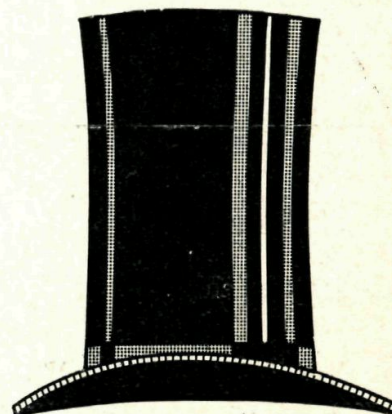


Fig.6



Fig. 7

Soms zie je dat verschijnsel in levende lijve voorbij wandelen in de vorm van een gezette dame, die zich heeft gehuld in een horizontaal gestreepte japon. Ze lijkt korter en maakt daardoor een dikke indruk.

Beïnvloeding

Ook door bijtekenen kan een geheel ander beeld ontstaan. In figuur 7 verlengen of verkorten de vogeltjes een lijnstuk al naar hun stand.

De gelijke bogen in figuur 8 worden schijnbaar ongelijk door de snorharen, die er aan toegevoegd zijn. Een onbewuste beïnvloeding treedt op in figuur 9. Waar ligt het punt op de hoogtelijn? De grotere ruimte tussen punt en basis veroorzaakt een schijnverplaatsing naar boven. De onpartijdige liniaal stelt weer de waarheid vast: dat punt is het midden.

In figuur 10 werkt het grotere linker parallellogramvlak verlengend en het kleinere rechter verkortend.

$AB > AC$? Welnee, $AB = AC$.

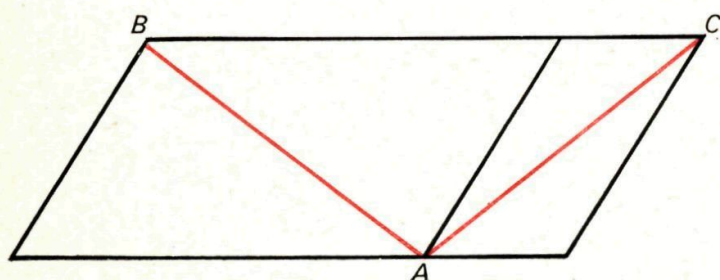


Fig. 10



Fig. 8



Fig. 9

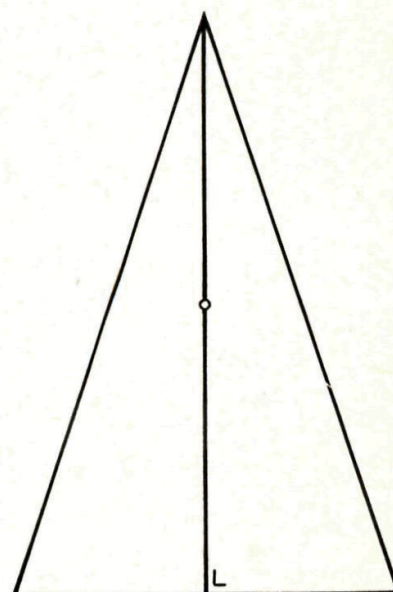
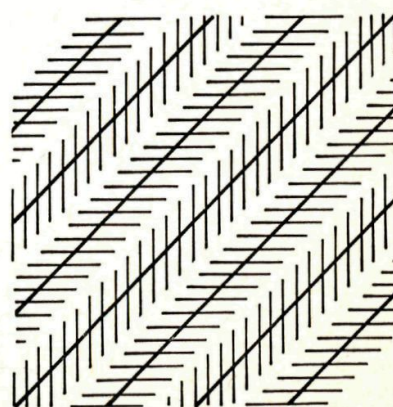


Fig. 11



Evenwijdigheid

De rechten in figuur 11 verspringen zo dartel voor onze ogen, dat ze de indruk wekken los op het papier te zitten en hun evenwijdig verloop geheel kwijt te zijn. De

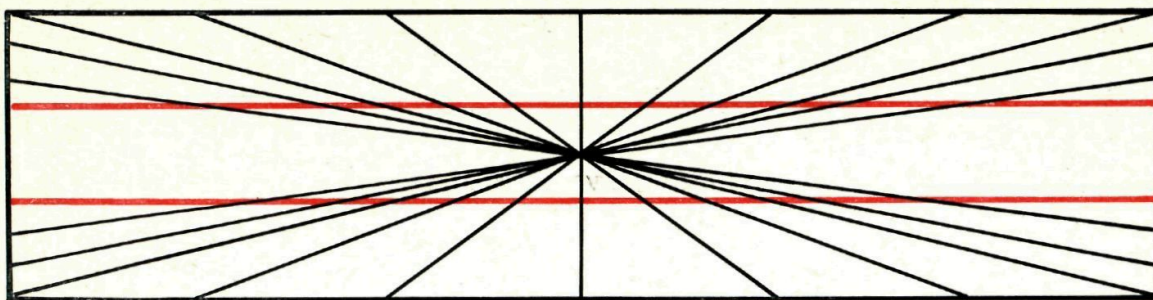


Fig. 12

lijnenbundel in figuur 12 buigt de twee evenwijdige (?) rechten zichtbaar uit naar buiten. De concentrische cirkelbundel in figuur 13 oefent een merkwaardige centripetale kracht uit op de zijden van het vierkant. Een tegengestelde werking ondergaan de zijden van het vierkant in figuur 14.

Als je lineaal meepraat, blijkt in alle gevallen: schijn bedriegt.

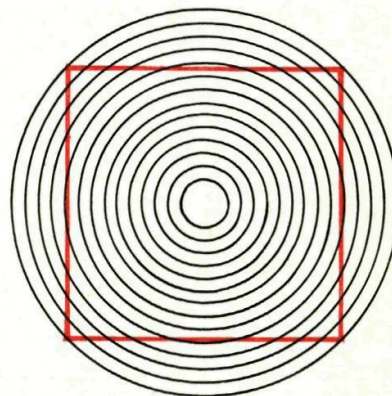


Fig. 13

Ruimte

Ook in de ruimte ontmoeten we verrassende effecten. Wijzen de beide snijdende vlakken in figuur 15 naar ons toe of van ons af?

Liggen of hangen de treden in figuur 16?

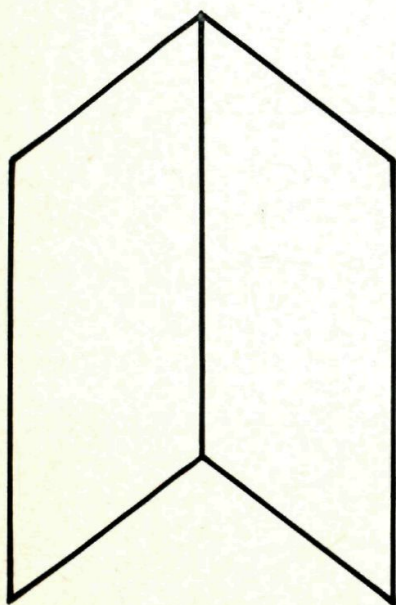


Fig. 15

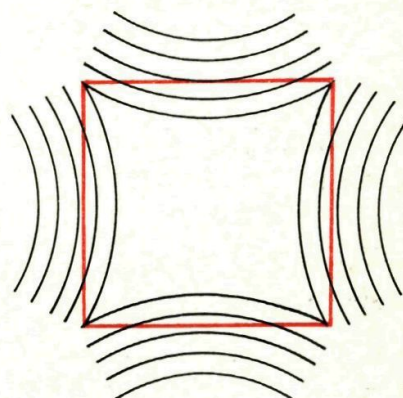


Fig. 14

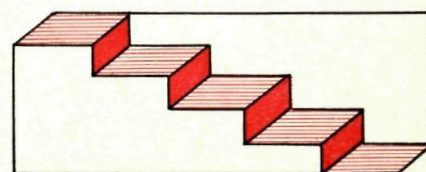


Fig. 16

In de kubus van figuur 17 willen voor- en achtervlak steeds stuivertje wisselen.

Laat je ogen met de rode ruiten in figuur 18 eens zo spelen, dat ze boven- of onderkanten van kubussen worden. En figuur 19 stelt de vraag welke van de gelijkzijdige driehoeken voor of achter is.

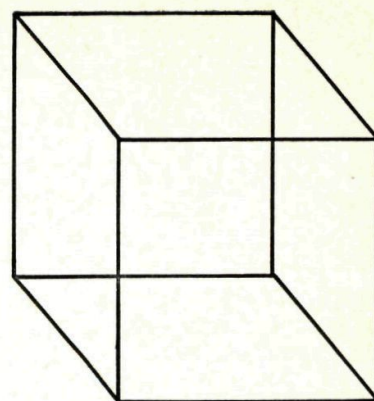


Fig. 17

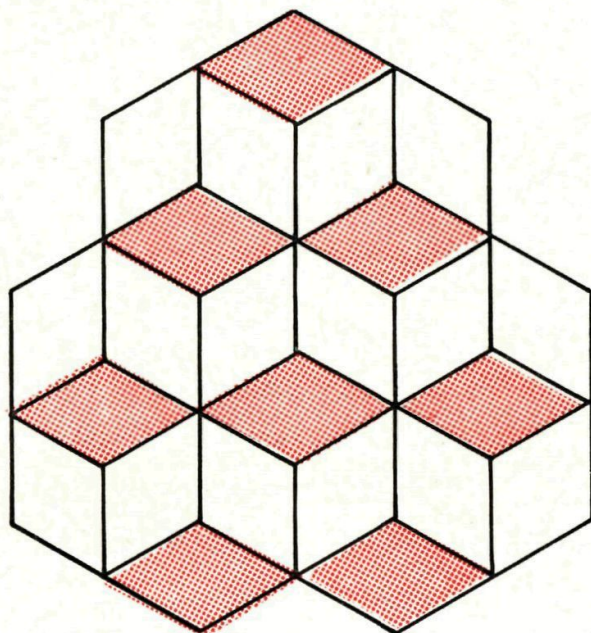


Fig. 18

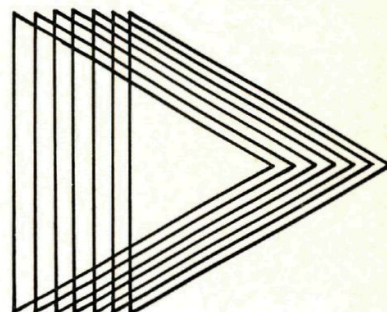


Fig. 19

Doe het zelf

Dat de schijn bedriegt kun je frappant aantonen met twee eenvoudige hulpmiddelen.
Neem:

- a Een vel ondoorzichtig wit papier.
- b Een vel goed doorschijnend papier.

Teken nauwkeurig op de beide vellen zoals in de figuren 20 t/m 23 is aangegeven. Vel a toont de werkelijkheid en door vel b op vel a te leggen ontstaat het gezichtsbedrog.

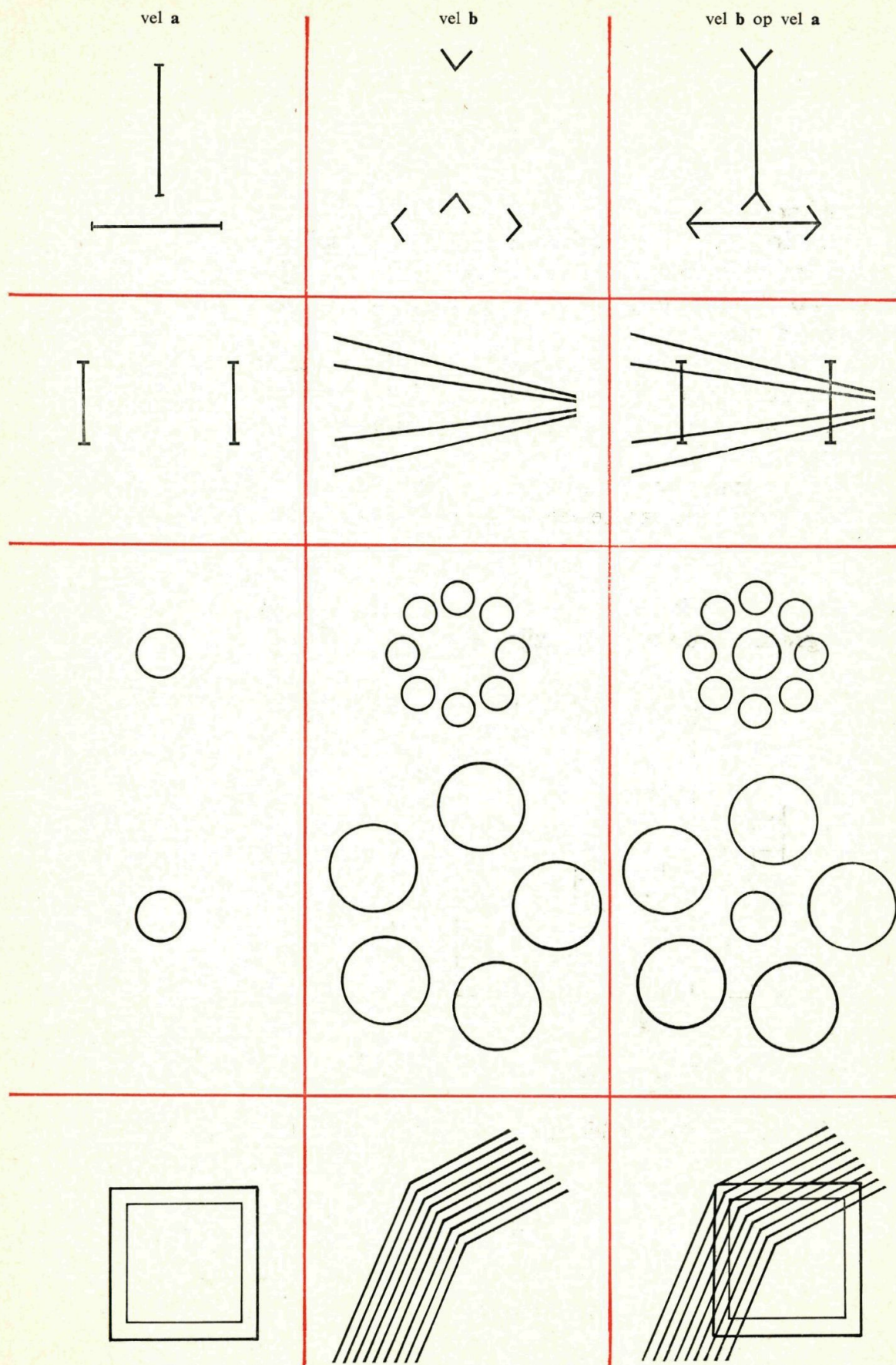


Fig. 20 t.e.m. 23

De ossehuidformule^{oo}

Ir. H. M. Mulder

Voor een bontbewerker een huid kan verwerken, dient deze eerst te worden opgespannen om te drogen. Men doet dit door de huid met spijkertjes langs de rand vast te zetten op een ondergrond. De vorm die dan ontstaat is altijd tamelijk grillig, zodat het moeilijk wordt om de oppervlakte te bepalen. Toch is dat erg belangrijk in verband met de verkoopwaarde.

Hoe kun je de oppervlakte van zo'n opgespannen huid berekenen? We zullen hiervoor in het volgende een benadering geven, waarbij we er van uitgaan dat de oppervlakte van de huid wordt benaderd door de oppervlakte van de veelhoek, die de spijkertjes als hoekpunten heeft.

We kunnen het probleem dan als volgt stellen:

Bepaal de oppervlakte van de veelhoek als de coördinaten van de hoekpunten gegeven zijn.

We beginnen eenvoudig. In figuur 24 is een $\triangle ABC$ getekend, waarvan de hoekpunten voor het gemak in roosterpunten zijn gekozen.

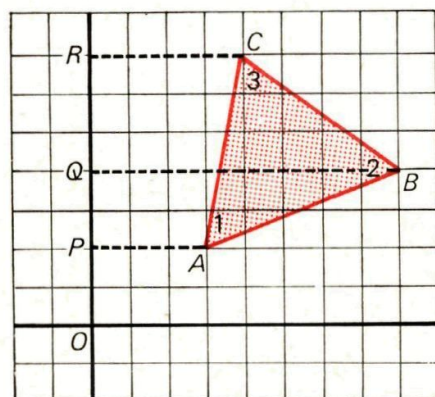


Fig. 24

We noemen de coördinaten van $A(x_1, y_1)$ van $B(x_2, y_2)$ en van $C(x_3, y_3)$. Wat is de oppervlakte van $\triangle ABC$?

We berekenen deze door te letten op de trapezia $PABQ$, $QBCR$ en $PACR$.

$$\begin{aligned}
 \text{Opp. } \triangle ABC &= \text{opp. } PABQ + \text{opp. } QBCR - \text{opp. } PACR \\
 &= \frac{1}{2} PQ \{AP + BQ\} + \frac{1}{2} QR \{BQ + CR\} - \frac{1}{2} PR \{AP + CR\} \\
 &= \frac{1}{2}(y_2 - y_1)(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(y_3 - y_2)(x_2 + x_3) - \frac{1}{2}(y_3 - y_1)(x_1 + x_3) \\
 &= \frac{1}{2}[x_1y_2 + x_2y_2 - x_1y_1 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_3 - x_2y_2 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_3y_3 + x_1y_1 + x_3y_1] \\
 &= \frac{1}{2}[x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2] \\
 &= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].
 \end{aligned}$$

Deze formule is op zichzelf niet erg interessant, maar: hij is zonder meer uit te breiden voor de oppervlakte van een vierhoek, een vijfhoek, enzovoort.

Wanneer je de oppervlakte van vierhoek $ABCD$ in figuur 25 uitrekent op dezelfde manier als zojuist van $\triangle ABC$ is gedaan, dan zul je vinden:

$$\text{opp. } ABCD = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)]$$

In beide gevallen kunnen we de oppervlakte van $\triangle ABC$ respectievelijk vierhoek $ABCD$ schrijven als:

$$\frac{1}{2} \sum x_i(y_{i+1} - y_{i-1})$$

Deze formule blijkt algemene geldigheid te hebben voor elke veelhoek:

Nummer de hoekpunten $ABCDE \dots$ van een veelhoek achtereenvolgens 1, 2, 3, $\dots$ n , zoals in figuur 24 en figuur 25. In de formule is nu x_i de x -coördinaat van het hoekpunt met nummer i ; y_{i+1} en y_{i-1} zijn de y -coördinaten van het voorafgaande en het volgende hoekpunt. We moeten hierbij afspreken dat $y_0 = y_n$ en $y_1 = y_{n+1}$.

Het teken Σ is de Griekse letter sigma en duidt aan dat je voor i achtereenvolgens 1, 2, 3, $\dots$ n moet invullen en de resultaten sommeren.

De formule geldt ook als er negatieve coördinaten in het spel zijn.

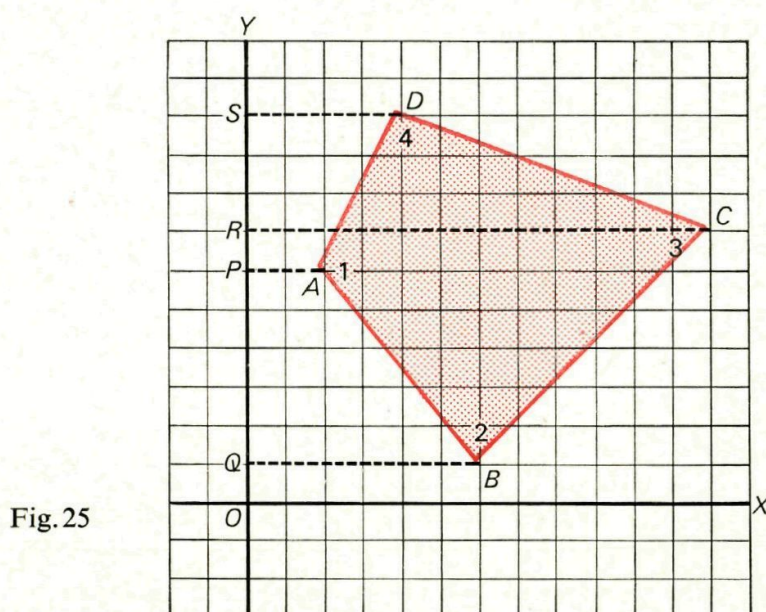


Fig. 25

De werkmethode heeft een herhalingskarakter zodat de berekening speciaal bij zeer veel hoekpunten geschikt is voor een computer. Daar is dan gemakkelijk een programma voor te ontwerpen.

Nu de oppervlakte van de in figuur 26 getekende huid, met behulp van de formule. De huid is getekend met de erbij behorende spijkertjes en hun coördinaten. Verder is de berekening in een geordend schema weergegeven.

Hoekpunt 1 bevindt zich links onder, hoekpunt 2 rechts daarvan en zo verder.

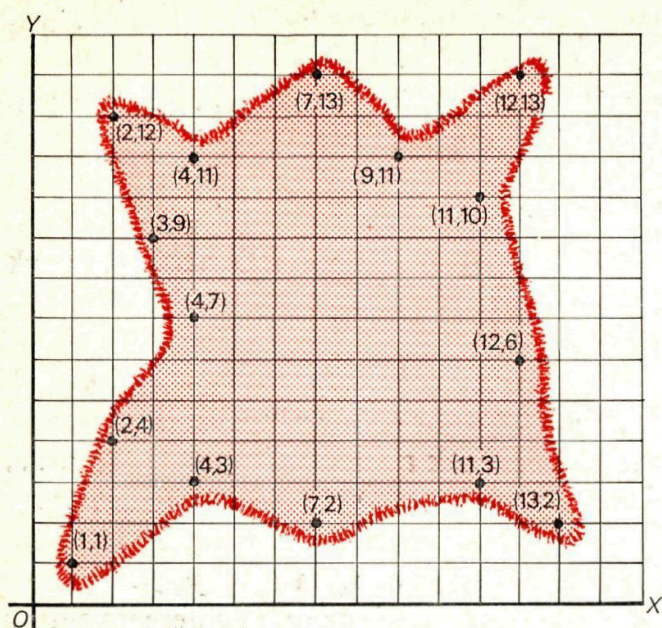


Fig. 26

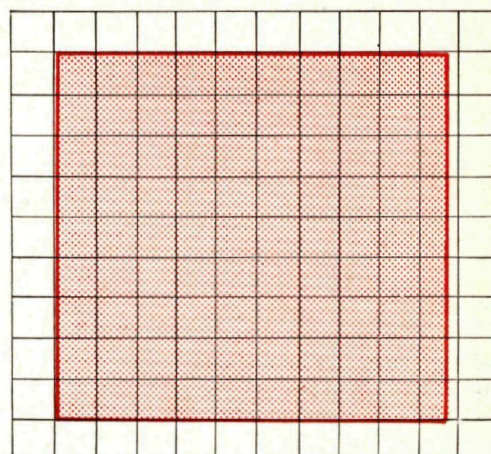


Fig. 27

Totaal heeft deze veelhoek 15 hoekpunten.

$x_i y_{i+1}$	x_i	y_i	$x_i y_{i-1}$
	(2)	(4)	
3	1	1	4
8	4	3	4
21	7	2	21
22	11	3	22
78	13	2	39
120	12	6	24
143	11	10	66
132	12	13	120
117	9	11	117
77	7	13	77
48	4	11	52
18	2	12	22
21	3	9	36
16	4	7	36
2	2	4	14
	(1)	(1)	
+			+
826			654

Het verschil van 826 en 654 is 172, dus de oppervlakte van de huid is de helft van 172 of 86.

Ter vergelijking is nog een rechthoek getekend met dezelfde oppervlakte (figuur 27).

Wat is er fout aan de perspectivische afbeelding? Niets! Echt niets?°°

We kregen enige reacties op het artikel: 'Wat is er fout aan de perspectivische afbeelding', uit Pythagoras 2, jaargang 10.

In dat artikel werd gesteld: Een afbeelding die recht doet aan onze ruimtewaarneming moet een meterlat die verder van ons verwijderd is kleiner afbeelden, dan één die dichterbij ons is.

Daarna werd aangetoond (figuur 18 op blz. 41) dat de klassieke perspectivische afbeelding hieraan niet voldoet.

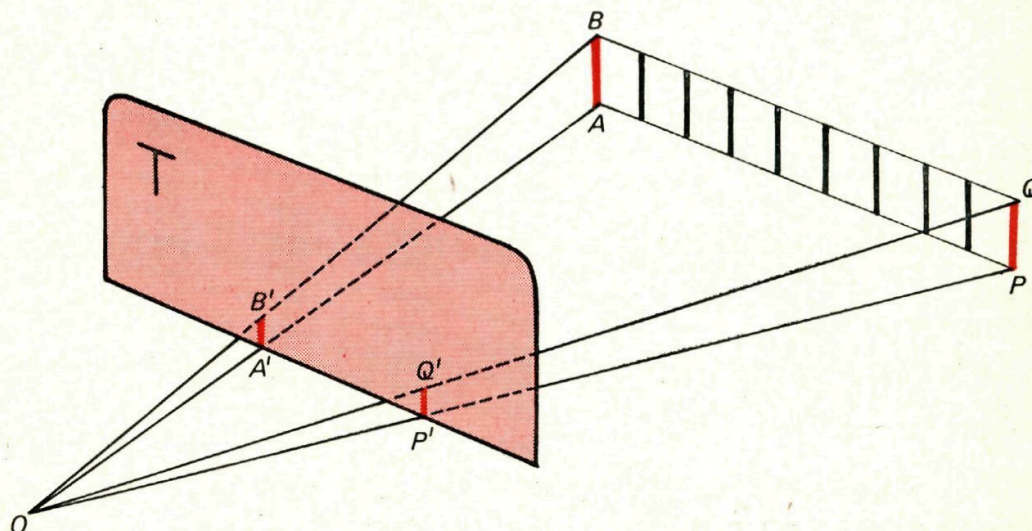


Fig. 28

We zullen het nog eens aan de hand van figuur 28 bekijken. $ABQP$ is een hekje dat evenwijdig loopt aan het tafereel T . We denken het oog O voor het gemak in het grondvlak. De afbeeldingen van AB en PQ zijn $A'B'$ en $P'Q'$. We kunnen met behulp van deze figuur gemakkelijk bewijzen dat $A'B' = P'Q'$ als $AB = PQ$. En daarmee zijn we al in strijd met het gestelde. PQ ligt namelijk verder van O dan AB en dus zou PQ kleiner afgebeeld moeten worden dan AB .

Terecht wijzen echter de briefschrijvers erop, dat het er alleen maar op aankomt onder welke hoek we de afbeelding $A'B'$ en $P'Q'$ zien. Nu zien we (met één oog kijken vanuit O) $P'Q'$ onder een kleinere hoek dan $A'B'$, omdat ook op het tafereel P' verder van ons verwijderd is dan A' . Er is dus niets fout aan de perspectivische afbeelding.

We moeten dan ook een correctie aanbrengen op het gestelde, want dat is niet zonder meer waar. Het gestelde wordt: een meterlat die verder van ons afstaat moet kleiner worden afgebeeld dan een meterlat dichterbij, op een tafereel dat overal even ver van ons oog verwijderd is. We komen dan tot een gebogen tafereel (zie Pythagoras 3/10).

In figuur 29 vinden we figuur 28 terug, maar nu is er een gebogen tafereel bijgetekend, dat (slechts in één vlak) overal even ver van ons oog verwijderd is. Hierop wordt PQ afgebeeld als $P''Q''$ en dit is kleiner dan $P'Q'$ en $A'B'$.

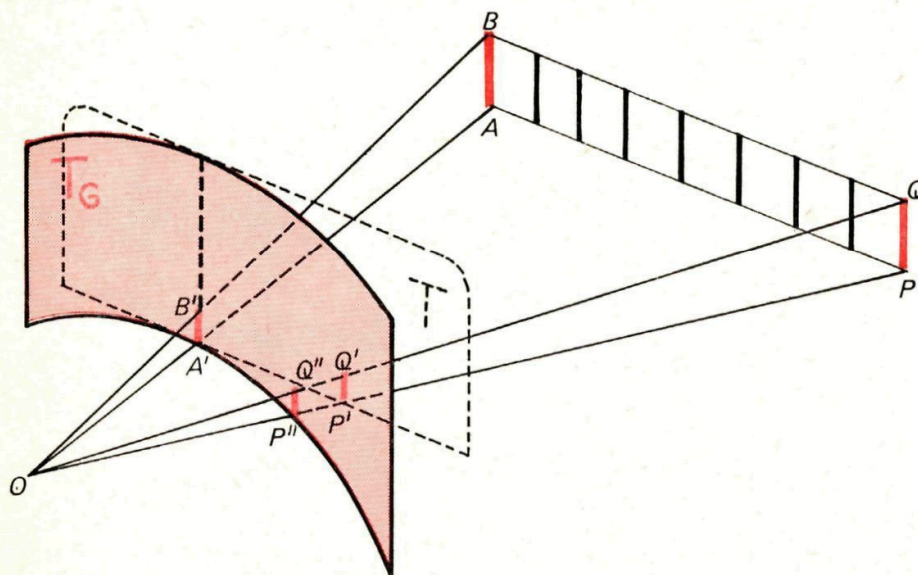


Fig. 29

Moeten we nu zeggen: er is *niets* fout aan de traditionele perspectief? Ja, en nee. De traditionele perspectief beeldt af op een *vlak* tafereel, dat een *vaste stand* heeft ten opzichte van de af te beelden realiteit. En hiermee komt ze in strijd met onze ruimte-waarneming. Het telegraafdraden-effect uit figuur 20c, blz. 60 (Pythagoras 3/10) is immers geen fictie! De traditionele perspectief schotelt ons daar evenwijdige lijnen op de afbeelding voor. Bij de keuze van het vlakke tafereel is dit wiskundig volkomen correct. Het vlakke tafereel moet echter wijken voor het gekromde, omdat dit beter beantwoordt aan wat wij menen te zien. En bij het gekromde tafereel komen (ook volkomen in overeenstemming met de meetkunde) de sinusoiden te voorschijn die we in Pythagoras 3/10 afgeleid hebben.

Het cilindervormige tafereel is echter ook nog maar een halve oplossing, zoals we op het einde van het volgende artikel zullen zien.



De cilinderperspectief in prenten van M. C. Escher^{ooo}

Zuivere cilinderperspectief

Bekijken we figuur 30, dan zien we alle vertikale lijnen convergeren naar het nadir, dat op het midden van de onderkant van de tekening ligt. Dat deze vertikale lijnen gebogen zijn en niet recht, zoals de traditionele perspectiefleer eist, doet ons helemaal niet onnatuurlijk aan. In Pythagoras 3 hebben we gezien hoe deze gebogen lijnen ontstonden als projecties op een cilindervormig tafereel.

Dit is een van de belangrijkste vondsten van Escher op het gebied van de perspectiefleer: deze gebogen lijnen komen beter overeen met onze ruimtewaarneming dan rechte lijnen. Escher heeft deze vondst echter nooit gebruikt voor een gewone prent, maar is

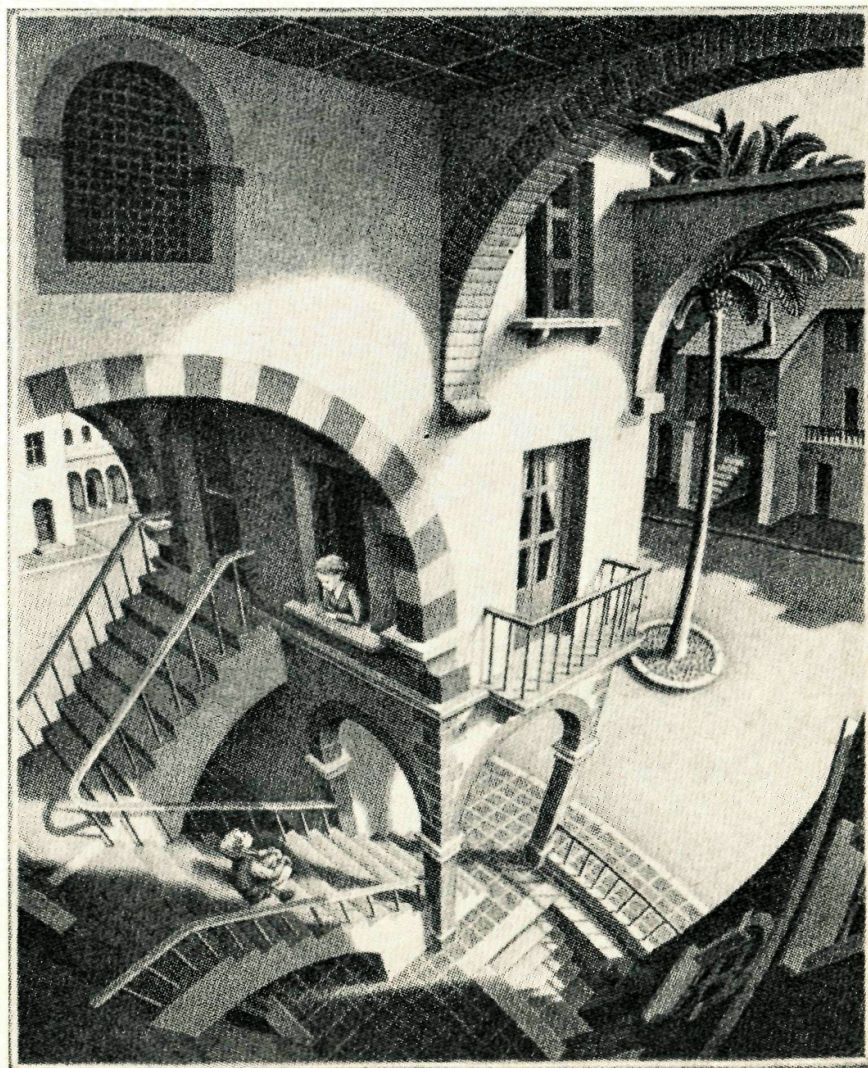


Fig. 30

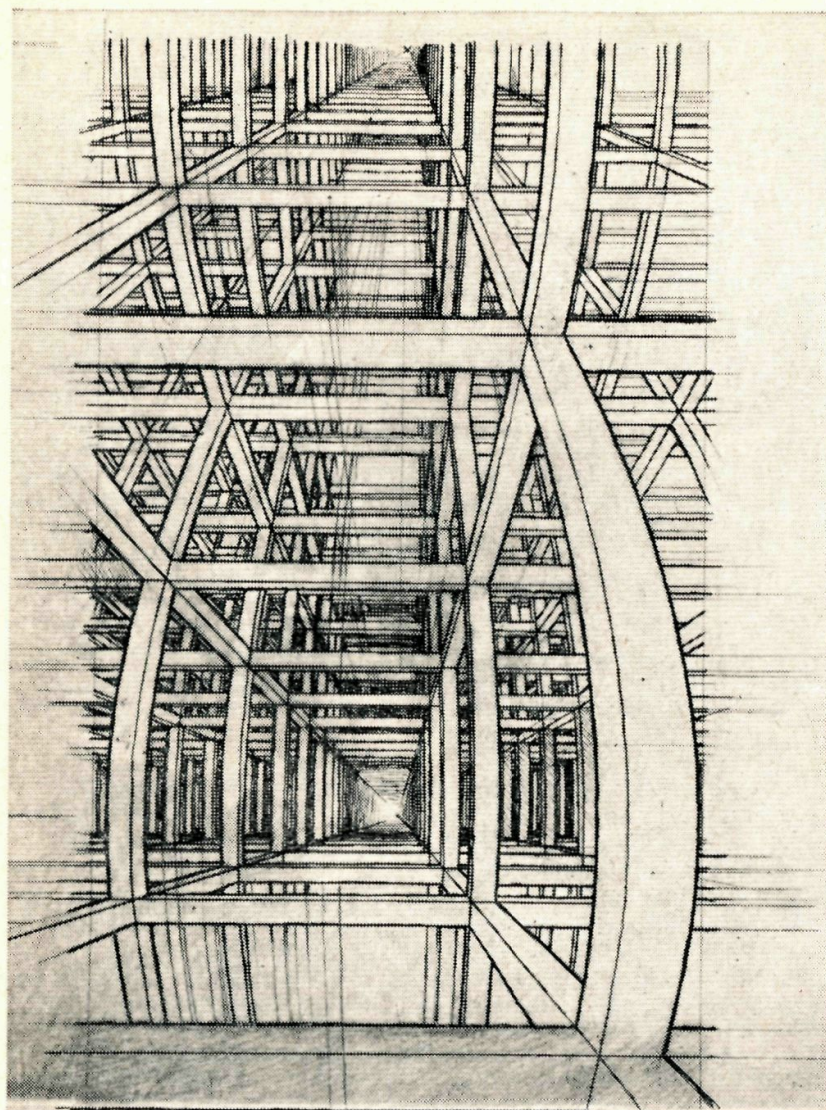


Fig. 31

er direct mee gaan spelen. Om een indruk te geven van de uitwerking van dit nieuwe principe in een normale afbeelding, hebben we daarom in figuur 30 slechts de helft van de prent *Boven en onder* gereproduceerd.

De vrij abstracte tekening (figuur 31) kan men beschouwen als een voorbereiding op de litho *Trappenhuis* uit 1951, die je aan het slot van dit artikel gereproduceerd ziet (figuur 33). Hij wijkt daar echter zoveel van af, dat we hem willen behandelen als een geheel zelfstandige prent. We zullen het perspectivische netwerk, dat aan deze tekening ten grondslag ligt stap voor stap construeren.

In figuur 32a is O de plaats van het oog van de waarnemer en we denken ons een cilindervormig tafereel. Hoe wordt de lijn c op de cilindermantel afgebeeld? Brengen we een vlak aan door c en O , dan snijdt dit de cilindermantel volgens de ellips c' (waarvan slechts de voorkant getekend is).

In figuur 32b zien we dat de evenwijdige verticale lijnen c en d afgebeeld worden als de ellipsen c' en d' , het bovenste snijpunt van de ellipsen is het zenith en het onderste nadir. Bij het openknippen en uitvouwen van de cilindermantel krijgen we figuur 32c,

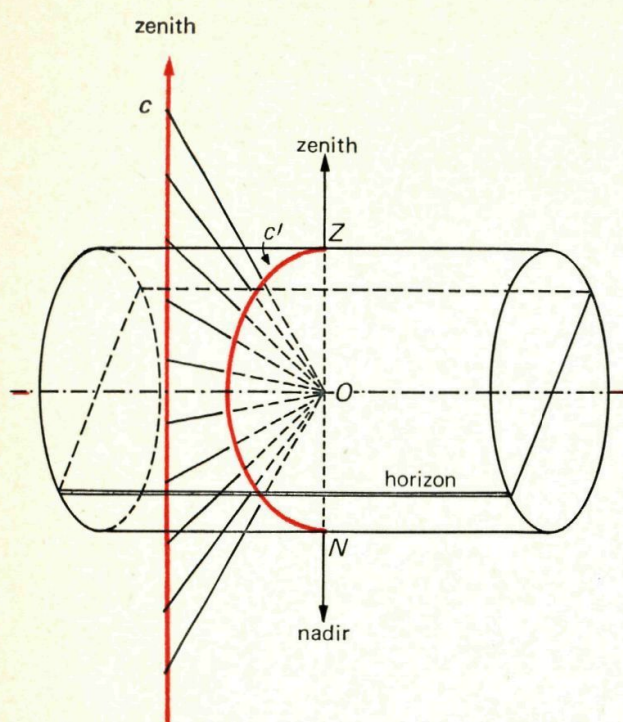


Fig. 32a

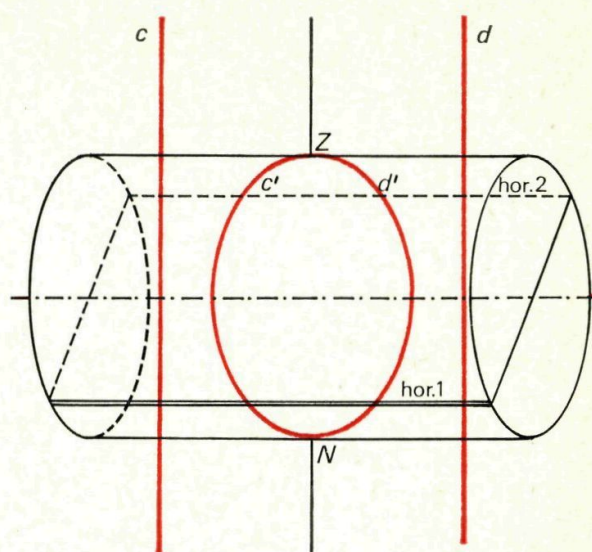


Fig. 32b

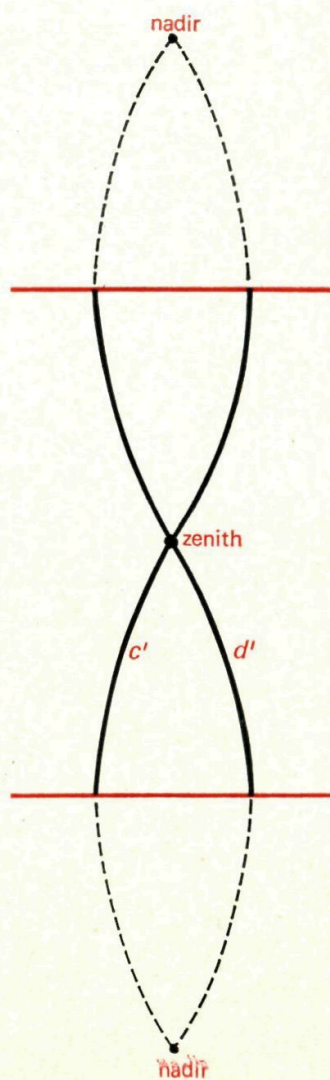


Fig. 32c

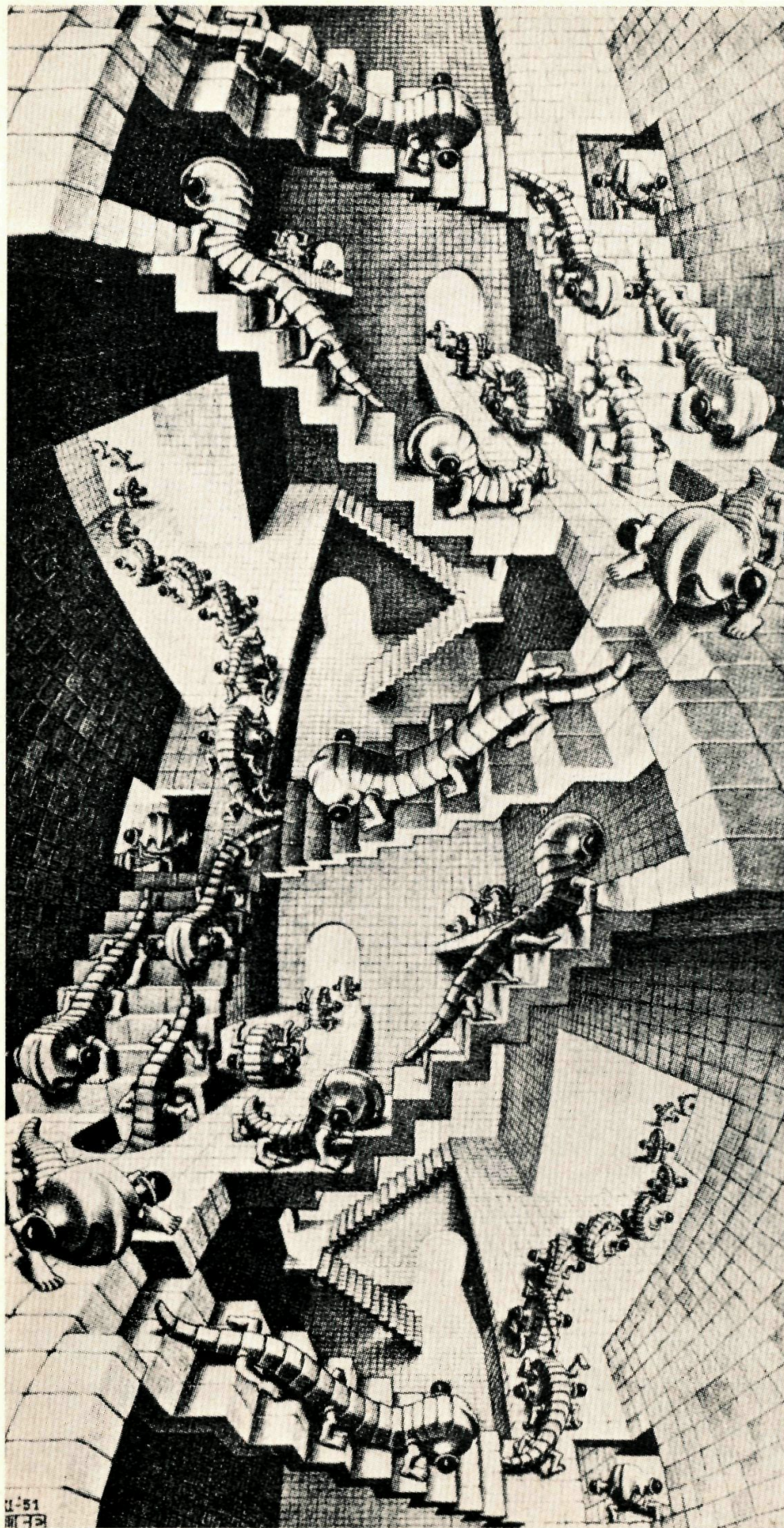


Fig. 33
Trappenhuis, litho
 van M. C. Escher.

waarop de sinusoiden elkaar in het zenith snijden en nog eens in het nadir (het bovenste nadirpunt viel op de cilinder samen met het onderste).

We gaan nu na, wat we op de cilinderuitslag te zien krijgen, als zowel horizontale lijnen als vertikale afgebeeld worden. Figuur 34a geeft de afbeeldingen van de (reeds in een vorig artikel behandelde) horizontale lijnen a en b (nl. a' en b') en tevens van de vertikale lijnen c en d , namelijk c' en d' . Van deze laatste is slechts de voorste helft getekend om de figuur overzichtelijk te houden.

Fig. 34a

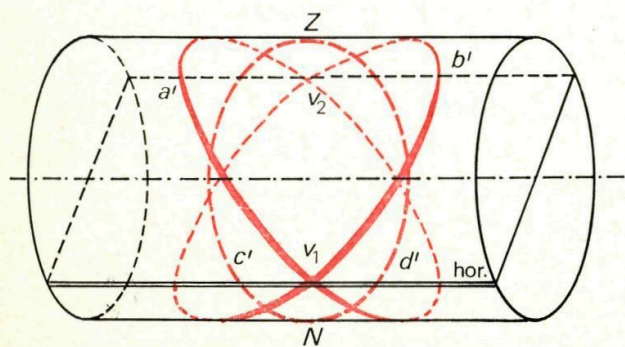
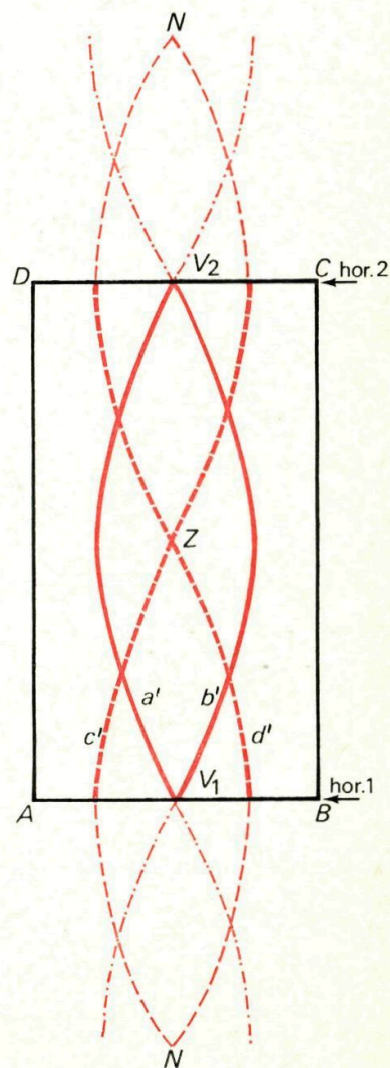


Fig. 34b



Figuur 34b geeft de cilinderuitslag. Het gedeelte tussen horizon 1 en horizon 2 komt vrijwel overeen met het netwerk, dat Escher voor *Boven en onder* gebruikte. Maar nu komt de abstractie: De herkomst van het netwerk doet er niet meer toe. We kunnen ons de sinusoiden onbepaald naar boven en naar onder doorlopend, voorstellen. Elke lijn door een snijpunt op de verticale as kan een horizon voorstellen en elk snijpunt kan naar believen zenith, nadir of vertepunt zijn.

Op de hem eigen manier heeft Escher dit principe verwerkt in de prent *Trappenhuis* van figuur 33.

Denkertjes

- 5 Hoeveel getallen van vier cijfers (dus de getallen van 1000 tot en met 9999) bestaan uit 4 verschillende cijfers?

Waardering: 3 punten.

- 6 $|x^2 - 6x| = a$. Voor welke waarden van a is de som van de verschillende wortels van deze vergelijking gelijk aan 6? (Alleen reële wortels worden beschouwd.)

Waardering: 3 punten.

- 7 Bepaal alle reële oplossingen van:

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x) = (2 - \cos^2 x)(1 + x^2)$$

Waardering: 3 punten.

- 8 Van een rij $t_1, t_2, \dots$ is gegeven:

$$t_1 = \sqrt{6}, t_2 = \sqrt{6 + t_1}, t_3 = \sqrt{6 + t_2}, \text{ enz.}$$

Algemeen:

$$t_{n+1} = \sqrt{6 + t_n} \quad (n \text{ is een positief geheel getal}).$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ bestaat.

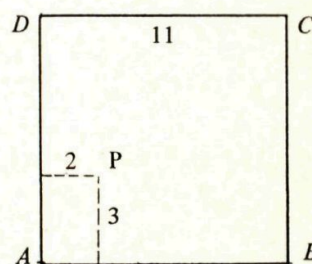
Bereken deze limiet.

Waardering: 4 punten.

- 9 Binnen een vierkant $ABCD$ met zijde 11 ligt een punt P op afstand 3 van AB en afstand 2 van AD . M is het middelpunt van de cirkel met maximale straal, die door P gaat en waarvan géén punt buiten het vierkant ligt.

Bepaal de afstand van M tot AB en AD .

Waardering: 4 punten.



- 10 Een rechthoekig stuk kanaal $ABCD$ is 10 meter breed en 80 meter lang ($AB = 80$).

Een zwemmer moet van AD naar BC zwemmen en daarbij beurtelings AB en CD aantikken, in totaal driemaal AB en tweemaal CD . Bovendien moet hij door een punt midden op het kanaal (op de middellloodlijn van AD) en op 20 meter afstand van AD gaan. Hoe lang is de kortste route, die aan deze eisen voldoet?

Waardering: 4 punten.

Oplossingen van Denkertjes uit het derde nummer

- 21 Laat uit het produkt van de natuurlijke getallen van 1 tot en met 10000 alle getallen weg die geen zevenvoud zijn, want daar heb je toch niks aan. Je houdt dan over het produkt van 1428 opvolgende zevenvouden:

$$7 \cdot 14 \cdot 21 \dots\dots\dots 9989 \cdot 9996$$

Dit is gelijk aan

$$7^{1428} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots\dots 1427 \cdot 1428.$$

Herhaal dit proces met de 1428! die je al gereed hebt staan, herhaal nog eens en nog eens, en zo verder.

Achtereenvolgens vind je

$$7^{1428} \cdot 7^{204} \cdot 204!$$

$$7^{1428} \cdot 7^{204} \cdot 7^{29} \cdot 29!$$

$$7^{1428} \cdot 7^{204} \cdot 7^{29} \cdot 7^4 \cdot 4!$$

De gevraagde exponent is dus $1428 + 204 + 29 + 4 = 1665$.

- 22 Uit $\sqrt{y} = 4\sqrt{6} - \sqrt{x}$ leiden we af $y = 96 - 8\sqrt{6x} + x$ en $8\sqrt{6x} = 96 + x - y$. Omdat $96 + x - y$ geheel moet zijn, zal $\sqrt{6x}$ geheel of gebroken moeten zijn. Omdat $6x$ geheel moet zijn, zal $\sqrt{6x}$ geheel of irrationaal moeten zijn. In aanmerking komt dus alleen dat $\sqrt{6x}$ geheel is, dus dat x het zesvoud van een kwadraat is.

Een snelle stelselmatige zoekpartij levert nu alle gewenste oplossingen: (0, 96) en (6, 54) en (24, 24) en (54, 6) en (96, 0).

- 23 Construeer de parallelogrammen $ADNP$ en $BCNQ$. Ook $APBQ$ is dan een parallelogram (waarom?), zodat het midden van PQ met M samenvalt.

Construeer nu het parallelogram $PNQR$. Het midden van NR valt met dat van PQ , dus met M samen.

Uit je figuur lees je nu af dat

$$NR = 2 \cdot MN < NQ + QR = AD + BC.$$

De eerste ongelijkheid is dus een logisch gevolg van de gegevens. Zie figuur *a*.

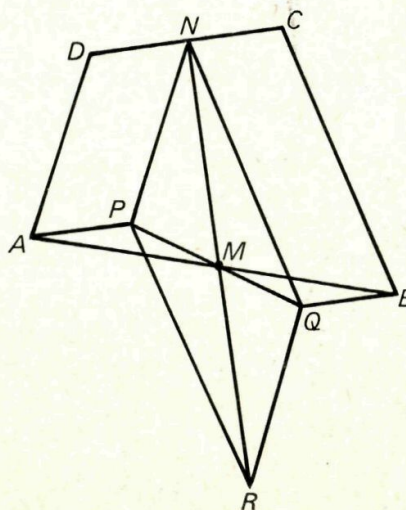


Fig. *a*

- 24 Een oneven aantal, zeg $2k + 1$, opvolgende gehele getallen met m als middelste getal heeft $(2k + 1)m$ tot som. Omdat $3 \cdot 2^{100}$ geen andere oneven factoren heeft dan 1 en 3 leidt dit tot de getoonde oplossing $2k + 1 = 3$ en $m = 2^{100}$.

Nemen we het grootste van die getallen (dat is $m + k$) weg, dan ontstaat een som van $2k$ opvolgende gehele getallen en die bedraagt $(2k + 1)m, (m + k) = (2m - 1)k$. Hierin is $2m - 1$ oneven. $2m - 1 = 1$ en $k = 3 \cdot 2^{100}$ leidt tot de som van de gehele getallen van $-(3 \cdot 2^{100} - 1)$ tot en met $+3 \cdot 2^{100}$.

$2m - 1 = 3$ en $k = 2^{100}$ leidt tot de som van de gehele getallen van $-(2^{100} - 2)$ tot en met $2^{100} + 1$.

- 25 Ten eerste merken we op dat ten minste drie van de hoeken van een zeshoek niet-scherp (dus recht of stomp) zijn.

Verder letten we op de vierhoeken die tot zijden hebben twee overstaande zijden en twee diagonalen van de zeshoek. Er zijn drie zulke vierhoeken. Zij hebben geen hoeken met elkaar gemeenschappelijk en ook geen hoeken met de zeshoek gemeenschappelijk. Omdat elke vierhoek ten minste een niet-scherpe hoek heeft hebben we buiten de drie genoemde dus nog ten minste drie andere niet-scherpe hoeken nodig.

Dit brengt het totaal op ten minste zes en daaruit volgt het gestelde onmiddellijk.

Figuur *b* toont dat een aantal van zes niet-scherpe hoeken een haalbare kaart is; van de 20 driehoeken zijn er zes stomphoekig en 14 scherphoekig.

- 26 Omdat $xyz \neq 0$ kan geen van de drie getallen 0 zijn.

Omdat xyz positief is zijn twee van de getallen negatief of geen enkele.

Neem aan dat er twee negatief zijn en dat dat y en z zijn (dit houdt geen beperking in).

Uit $x + y + z > 0$ leiden we af $x + y > -z$, dus $x + y > 0$.

Uit $yz + zx + xy > 0$ leiden we af $xy > -z(x + y)$. Rechts staan twee positieve factoren, dus xy is positief. Hiermee is een tegenspraak verkregen.

Conclusie: x, y en z zijn allemaal positief.

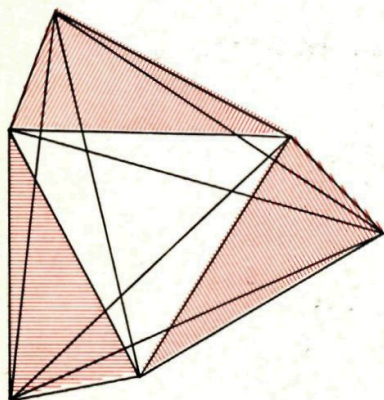


Fig. *b*

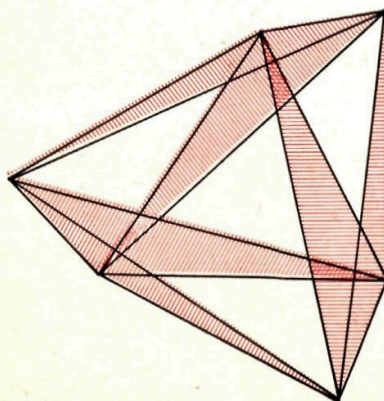


Fig. *c*

- 27 Zie figuur *d*. De zijden van de oorspronkelijke gelijkzijdige driehoek worden in de verhouding 1 : 2 verdeeld.

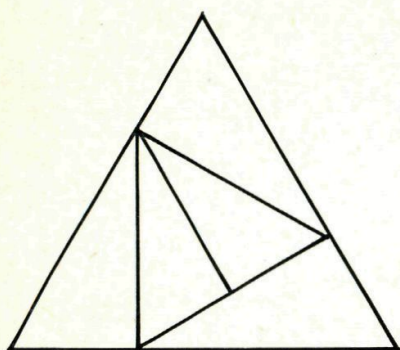


Fig. *d*

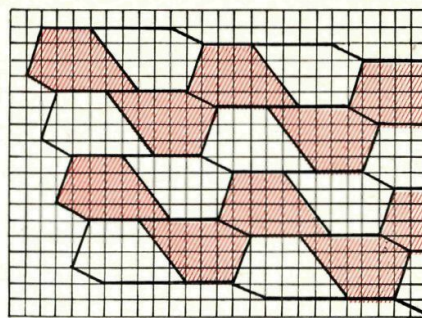


Fig. *e*

- 28 Zie figuur *e*.

- 29 Nee, zulk een drietal a, b, c bestaat niet. Er zou voldaan moeten zijn aan

$$a^2 > 4bc \text{ en aan } b^2 > 4ac \text{ en aan } c^2 > 4ab,$$

$$\text{dus aan } a^2b^2c^2 > 4bc \cdot 4ac \cdot 4ab \text{ of } a^2b^2c^2 > 64 a^2b^2c^2.$$

Dat is kennelijk onmogelijk.

- 30 Er zijn verschillende antwoorden mogelijk. Ga je uit van $\text{MAX}(x, y, z) = \text{MAX}(\text{MAX}(x, y), z)$ dan kom je tot de volgende vertaling:

$$\frac{1}{4}(x + y + 2z + |x - y| + |x + y - 2z + |x - y||)$$

Oplossingen van Denkertjes uit het vierde nummer

31 $ababab = 10a \cdot 10101 + b \cdot 10101 = (10a + b) \cdot 10101 = (10a + b) \cdot 7 \cdot 1443.$

- 32 De vijf gegeven figuurtjes zijn de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5 met hun spiegelbeelden ten opzichte van een verticale spiegelas.

- 33 Van de 5000 oneven natuurlijke getallen kleiner dan 10000 zijn er

1667 drievoud

1000 vijfvoud

714 zevenvoud

333 drievoud en vijfvoud

238 drievoud en zevenvoud

143 vijfvoud en zevenvoud

48 drievoud en vijfvoud en zevenvoud.

Het gevraagde aantal is

$$5000 - 1667 - 1000 - 714 + 333 + 238 + 143 - 48 = 2285.$$

34 $28000! = 2^{27993} \cdot 3^{13996} \cdot 5^{6997} \cdot 7^{4664} \cdot 11^{2798} \cdot 13^{2330} \cdot 17^{1748} \cdot 19^{1554} \cdot 23^{1271} \cdot x$, waarin x alleen priemfactoren bevat, die niet in $28!$ voorkomen.

$$28! = 2^{25} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23.$$

Hieruit vinden we dat de gevraagde grootste exponent 1076 is.

35 We zoeken eerst punten C , die samen met A en B de hoekpunten van een driehoek vormen. Voor die driehoek geldt dan met de gebruikelijke notatie

$$c(b + a - c) = 2ab$$

waaruit volgt

$$b = \frac{c(a - c)}{2a - c}.$$

Hieruit zien we dat voor een positieve b nodig is dat $a > c$ of $a < \frac{1}{2}c$. In het eerste geval blijkt dan uit $a - c = b \cdot \frac{2a - c}{c}$ dat $a - c > b$ moet zijn en dat is in een driehoek onmogelijk. In het

tweede geval leiden we af $b - c = a \cdot \frac{c}{c - 2a}$ en dus $b - c > a$ en ook dat is onmogelijk.

Punten C met de genoemde eigenschap kunnen dus alleen op de rechte AB liggen. Het is eenvoudig na te gaan dat dan C moet samenvallen met A of met B .

36 400 meter. Elke wandeling van de man is dubbel zo lang als de afstand waarover de last verrold wordt tussen twee van zijn wandelingen in.

37 De oppervlakten van de driehoeken ACD en ABD verhouden zich als 3 : 5. Noem dus $CD = 3k$ en $BD = AD = 5k$ (zoek de hoeken BAD en ABD in de figuur op en je zult merken dat ze gelijk zijn). In overeenstemming met de stelling van Pythagoras is dan $AC = 4k$. Die oppervlakte van driehoek ACD is dan $6k^2 = 6$, zodat $k = 1$ en $AC = 4$ cm.

$$38 1971 = (\sqrt[7]{\log 7})^{77:7} - 77$$

39 Zie figuur f .

40 P_{13} valt samen met P_1 , P_{14} met P_2 , en zo verder.

$$\text{Noem } P_1A_1 : P_1A_2 = k, \text{ dan is } P_2A_2 : P_2A_3 = \frac{1}{1 + k}$$

$$\text{en } P_3A_3 : P_3A_4 = \frac{1 + k}{k} \text{ en } P_4A_4 : P_4A_5 = k, \text{ en zo verder.}$$

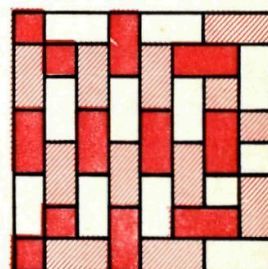


Fig. f

Antwoorden van Denkertjes in dit nummer

- | | |
|--------------------------------------|----------------------|
| 1 $a + 2b, 1 - a,$ | 5 4536 |
| $2a - 1, \frac{b}{a}, -\frac{2b}{a}$ | 6 $a = 0$ en $a > 9$ |
| 2 50 | 7 $x = 0$ |
| 3 3 : 4 | 8 3 |
| 4 10 | 9 6 en 6 |
| | 10 90 meter |

Rectificatie

Bij het opnemen van het portret op bladzijde 98 van het vijfde nummer van deze jaargang is een vergissing gemaakt. De afgebeelde persoon is niet Georg Cantor, maar Karl Friedrich Gauss.

Inhoud:

Van de redactietafel 121

Cirkelvormige bochten? ° 123

Boeiend 'bedrog' ° 125

De ossehuidformule °° 130

Wat is er fout aan de perspectivische afbeelding? Niets! Echt niets? °° 133

De cilinderperspectief in prenten van M.C. Escher °°° 135

Denkertjes 122, 140

Oplossingen van Denkertjes uit het derde nummer 141

Oplossingen van Denkertjes uit het vierde nummer 143

Antwoorden van Denkertjes in dit nummer 144

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.

BRUNO ERNST, Amersfoort.

A. F. VAN TOOREN, 's-Gravenhage.

R. H. PLUGGE, Amstelveen.

G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, besteld via een der docenten, / 4,00 per jaargang. Voor anderen / 6,00.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

