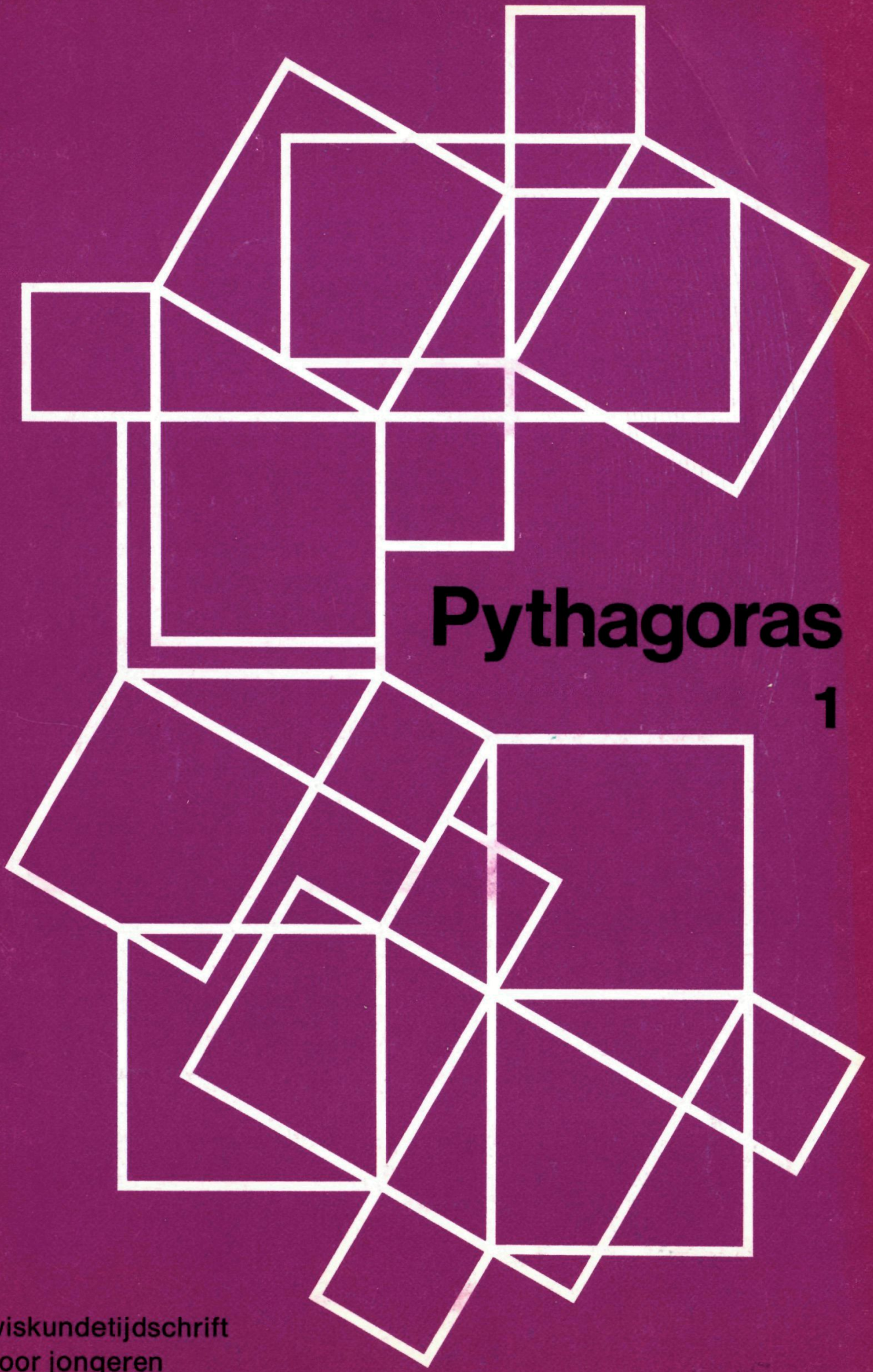
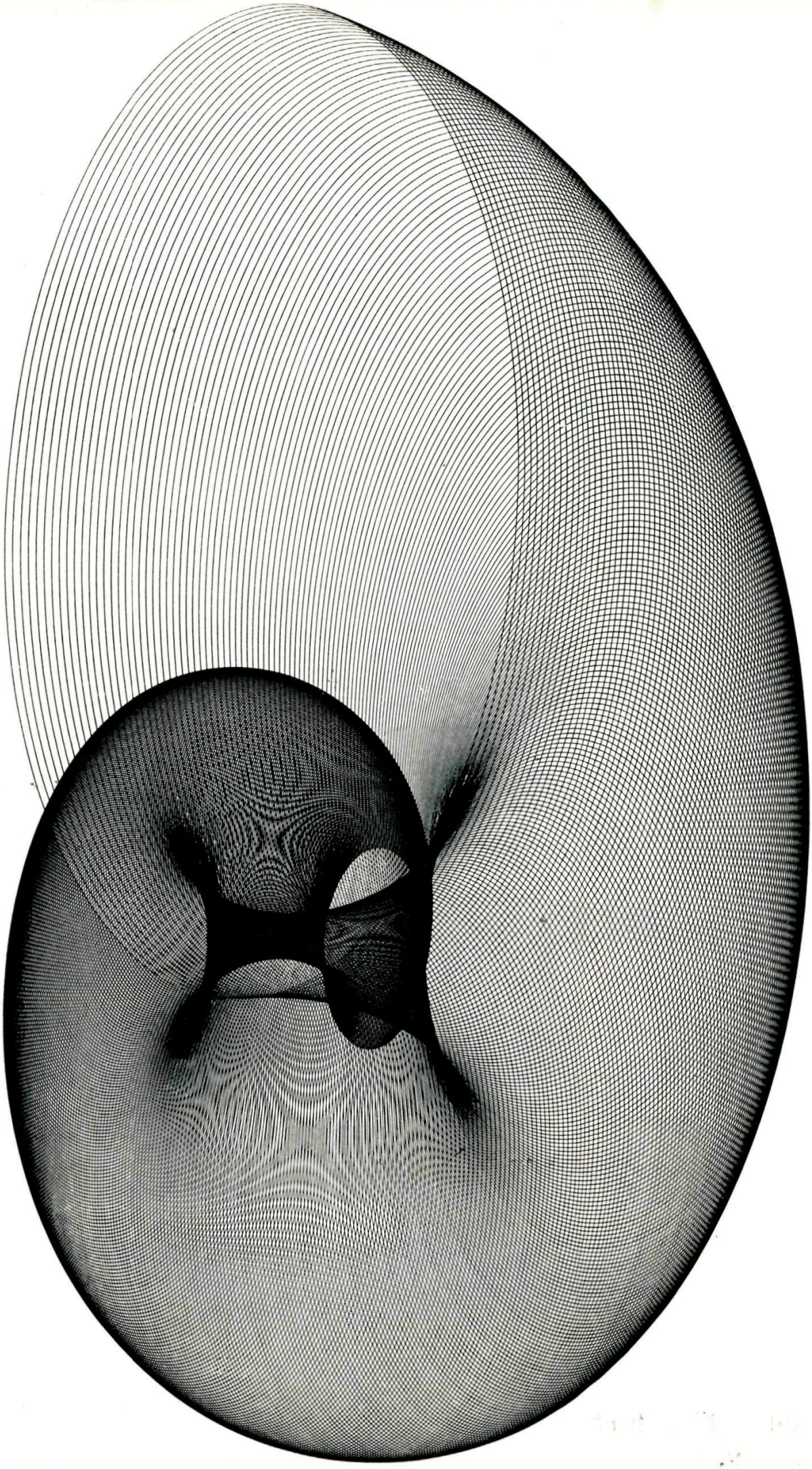
jaargang 11 1971/1972



# Pythagoras

1

wiskundetijdschrift
voor jongeren



# Van de redactie

Graag beginnen we deze nieuwe jaargang, die als volgnummer het getal draagt, dat van oudsher als het gekkengetal bekend staat, met een woord van welkom tot de nieuwe lezers.
De leerlingen van de grote wiskundige Pythagoras, zo'n vijfentwintighonderd jaar geleden, werden Pythagoreërs genoemd. Door je te abonneren op dit tijdschrift ben je een soort moderne Pythagoreër geworden. In de oudheid moest een eed worden afgelegd als je werd opgenomen in de club van Pythagoreërs, tegenwoordig hoeft dat niet meer. Je moet wel je abonnementsgeld betalen.

Welke eigenschappen moet je bezitten om een goed Pythagoreër te kunnen worden? Is een welgevormde wiskundeknobbel een vereiste? Wel, hierover is in de reglementen weinig te vinden. Dat is trouwens geen wonder, want er zijn geen reglementen. Goedbeschouwd wordt er niet anders verwacht dan enige belangstelling voor de wiskunde. Als je het leuk vindt om te puzzelen, om een probleempje uit te knobbelen, of te lezen over allerlei onderwerpen die tot het rijke gebied van de wiskunde behoren, dan zul je in elke aflevering van Pythagoras vast iets van je gading vinden.

Natuurlijk zijn niet alle artikelen even gemakkelijk, we moeten tenslotte 'elk wat wils' bieden. Maar om het de lezers gemakkelijk te maken zijn overal seintjes bij geplaatst die de moeilijkheidsgraad aangeven. Hoe meer seintjes, hoe moeilijker, het eenvoudigst zijn dus de artikelen met de aanduiding °, het minst eenvoudig die met de aanduiding °°°.

# Denkertjes

In elk nummer vind je een aantal Denkertjes. De oplossingen van de Denkertjes uit de eerste vier nummers kun je inzenden naar het redactiesecretariaat:
Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.
Onder de goede inzenders wordt een boekenbon verloot. Je dingt al mee naar die boekenbon wanneer je één Denkertje goed hebt opgelost, het is dus niet nodig om alle oplossingen te vinden. Wel is nodig dat de oplossingen in duidelijk leesbaar handschrift geschreven zijn. (Typen mag ook.) Behalve de oplossing dient ook de redenering, die tot die oplossing leidt, te worden vermeld. We ontvangen je oplossingen graag op bloknootvellen, met links bovenaan op elk blad je *naam*, *adres*, *woonplaats*, *leeftijd*, *leerjaar* en *school*.
*De oplossingen van de Denkertjes in dit nummer inzenden voor 15 november 1971.*

← *De computer tekent: De snail (huisjesslak). Ontwerp van Kerry Strand (California Computer Products, Anaheim). De tekening is in 1967 vervaardigd op een Calcomp 770 tape system, in combinatie met een Model 207 Flat bed plotter.*
© *Motif editions, London.* *Zie ook bladzijde 8.*

**Ladderwedstrijd**

Voor elke ingestuurde oplossing van een Denkertje krijg je een bepaald aantal punten. Hierdoor ding je mee naar een ereplaats in de ladderwedstrijd, die verbonden is aan de eerste vier nummers van deze jaargang. De hoogst geplaatsten op de ladder krijgen na afloop van de wedstrijd een boekenbon thuis gestuurd.

**Oude nummers en jaargangen**

Voor zover de voorraad strekt zijn oude nummers en oude jaargangen bij de uitgever verkrijgbaar, de prijs bedraagt *f* 1,50 per nummer en *f* 7,— per jaargang.
Uit de eerste acht jaargangen is een selectie samengesteld en in boekvorm verschenen onder de titel *Pythagoras-festival*. De prijs van deze uitgave, die verkrijgbaar is bij de uitgever en de boekhandel, bedraagt *f* 10,50.

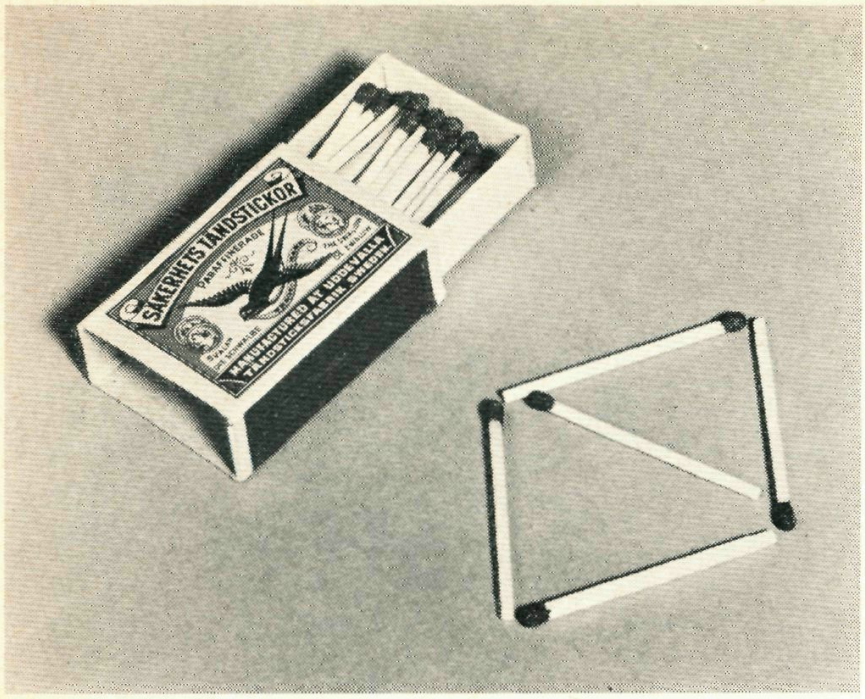
**Bijdragen**

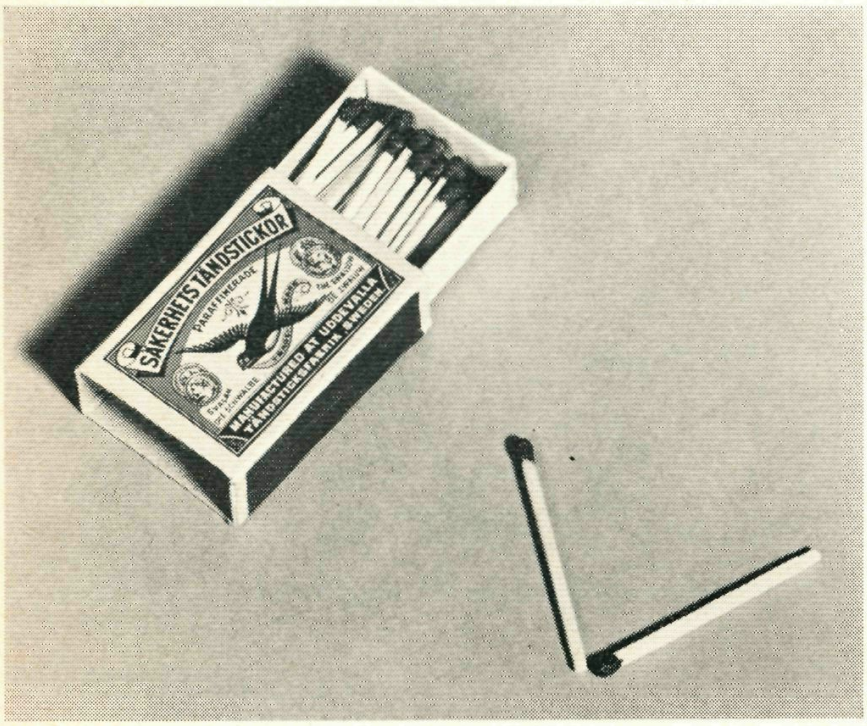
De redactie ontvangt graag bijdragen in de vorm van artikelen of Denkertjes ter beoordeling. Ook op- of aanmerkingen over de inhoud worden op prijs gesteld. Zoveel mogelijk wordt geprobeerd om alle briefschrijvers te antwoorden, helaas lukt dit niet in honderd procent van de gevallen.
Laat eens wat van je horen!

# Denkertjes

*Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 15 november 1971 worden ingezonden naar het redactie-secretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.*

1 Hoe moet je de vier kubussen van bladzijde 11 aan elkaar leggen tot een balk, zodat op elk van de vier lange zijden van de balk de cijfers 1, 2, 3 en 4 voorkomen?
De volgorde van de cijfers doet er niet toe, evenmin als de stand.
2 In een kiosk worden vijf verschillende dagbladen verkocht. Vijf klanten kopen elk een willekeurige krant. Hoe groot is de kans dat ze alle vijf verschillende kranten kopen?




*Luciferprobleem*

Leg vijf lucifers neer in de vorm van een ruit met korte diagonaal (zie foto boven).
Neem drie lucifers weg (zie foto onder).
Leg nu twee lucifers neer zodat weer dezelfde figuur ontstaat.
Opmerking: De lucifers mogen niet gebroken worden.
De ervaring leert dat heel wat mensen zich voorlopig suf piekeren. Probeer zelf de oplossing te vinden.
Zie ook Denkertje 4

# Speelse poolcöordinaten°° (1)

**Het begrip poolcoördinaat**

Figuur 1 is wel heel bekend. Daarin is een punt aangeduid met *coördinaten*. $A(3, 3)$ betekent: Ga vanuit de oorsprong $O$ drie eenheden naar rechts en dan drie omhoog. Omdat de $x$-as en de $y$-as loodrecht op elkaar staan spreken we van *rechthoekige coördinaten*.
Een punt kan ook worden vastgelegd met *poolcoördinaten*.
We meten dan de lengte van lijnstuk $OA$ en de grootte van $\angle O_1$. Zie figuur 2. Om verwarring met rechthoekige coördinaten te voorkomen maken we een nieuwe tekening en voeren andere namen in. Op de plaats van de $x$-as staat in figuur 3 een rechte $p$, die *poolas* heet. De oorsprong ondergaat ook een naamsverandering en heet *pool*. Lijnstuk $OP$ is 4 cm lang. De hoek tussen $OP$ en de poolas is 40°. Punt $P$ wordt met poolcoördinaten aangeduid als $P(4, 40°)$,$OP$ heet de *voerstraal*.
In de figuren 4*a*, *b* en *c* zijn nog enkele punten getekend.
Let vooral op punt $S$, waarvan de bijbehorende voerstraal lengte nul heeft.

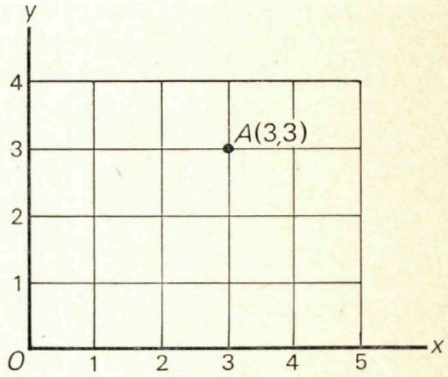


Fig. 1

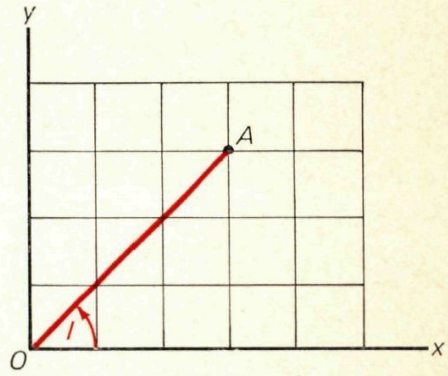


Fig. 2

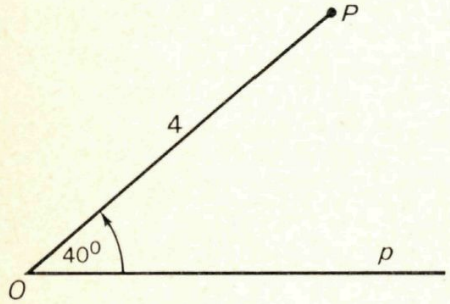


Fig. 3

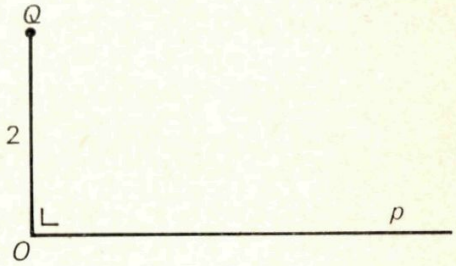


Fig. 4*a*

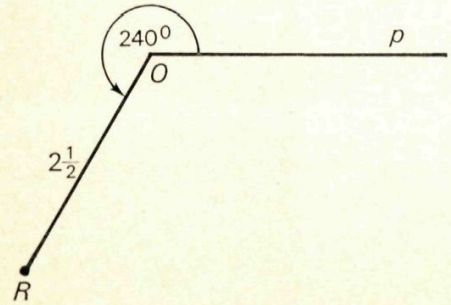


Fig. 4*b*

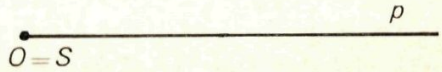


Fig. 4*c*

**Constante voerstralen.**

VERZAMELINGEN PUNTEN

Vooral voor cirkelvormige figuren zijn poolcoördinaten heel gemakkelijk. In figuur 5 is de lengte van alle voerstralen 3 cm. Omdat de afstanden van de punten $P$ tot $O$ constant 3 cm zijn, liggen de punten $P$ op de cirkel met $O$ als middelpunt en straal 3 cm. Alle punten van de cirkel kunnen worden aangeduid met $P(3, x°)$. Alleen de hoekcoördinaten zijn verschillend.

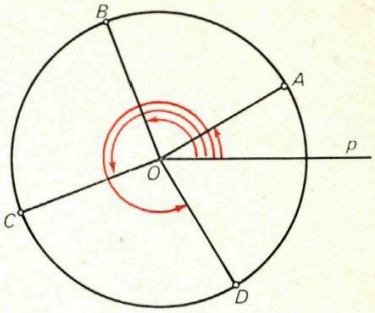


Fig. 5

De punten van figuur 6 liggen op eenzelfde cirkel.
We schrijven die punten nog eens op:

$P_0(3, 0°)$ of $P_0(3, 0 \times 60°)$
$P_1(3, 60°)$ of $P_1(3, 1 \times 60°)$
$P_2(3, 120°)$ of $P_2(3, 2 \times 60°)$
$P_3(3, 180°)$ of $P_3(3, 3 \times 60°)$
$P_4(3, 240°)$ of $P_4(3, 4 \times 60°)$
$P_5(3, 300°)$ of $P_5(3, 5 \times 60°)$

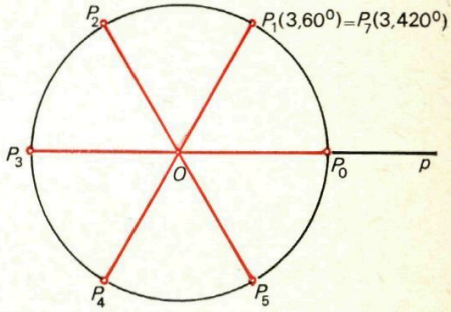


Fig. 6

Hier zijn opgeschreven de punten $P_k(3, k \cdot 60°)$, waarin $k = 0, 1, 2, 3, 4$ of 5. Dat wordt meer modern opgeschreven in de vorm van een verzameling:

$P = \{P_k(3, k \cdot 60°) \mid k \in A\} \quad A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
Opmerking: We kunnen nemen $k = 6$ en $k = 7$ enz.
$P_6(3, 6 \cdot 60°) = P_6(3, 360°) = P_0(3, 0°)$
$P_7(3, 7 \cdot 60°) = P_7(3, 420°) = P_1(3, 60°)$
enz.
De verzameling $P$ kan daarom ook geschreven worden als
$P = \{P_k(3, k \cdot 60°) \mid k \in N\}$
Figuur 7 is de afbeelding van de verzameling punten $P = \{P_k(2, k \cdot 10°) \mid k \in N\}$. Dat zijn dus de punten $P_0(2, 0°)$ $P_1(2, 10°)$, $P_2(2, 20°)$ enz. De voerstralen zijn ditmaal niet getekend.

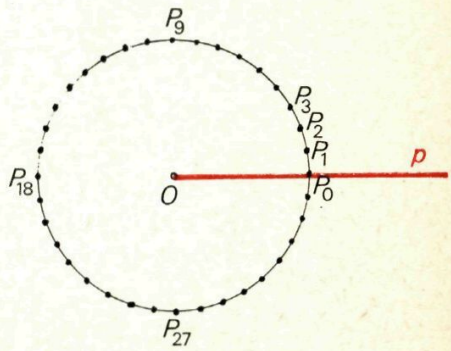


Fig. 7

VERZAMELINGEN CIRKELS

In figuur 8 liggen temidden van de cirkels de punten $P_0$, $P_1$, $P_2$ en $P_3$. Ze vormen de verzameling
$P = \{P_k(2, k \cdot 90°) \mid k \in N\}$
Cirkel $C_0$ heeft als middelpunt $P_0$ en als straal 2 cm.
Dat is cirkel $C_0(P_0, 2) \cdot C_1(P_1, 2)$ is de cirkel met naam $C_1$, met middelpunt $P_1$ en met straal 2 cm. Zie verder de volgende tabel:

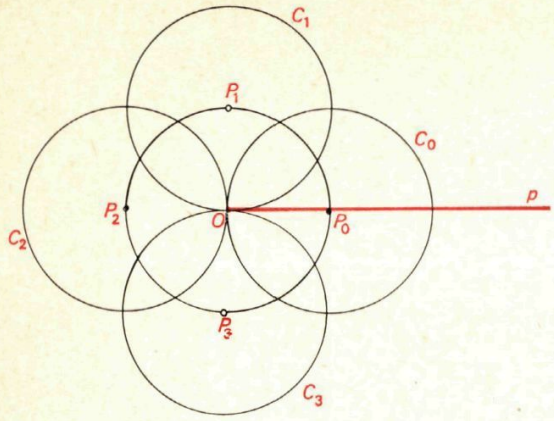



Fig. 8

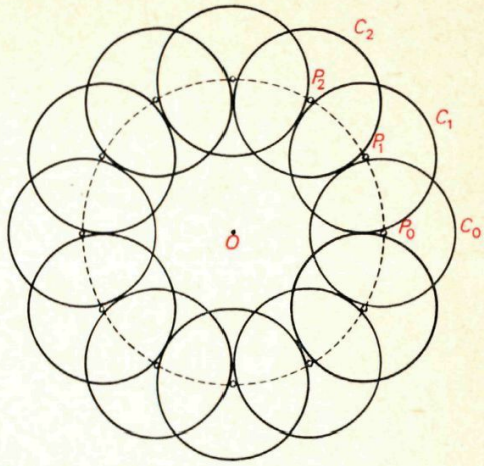



Fig. 9

| cirkel | naam | middelpunt | straal |
|---|---|---|---|
| $C_0(P_0, 2)$ | $C_0$ | $P_0$ | 2 |
| $C_1(P_1, 2)$ | $C_1$ | $P_1$ | 2 |
| $C_2(P_2, 2)$ | $C_2$ | $P_2$ | 2 |
| $C_3(P_3, 2)$ | $C_3$ | $P_3$ | 2 |

Alle cirkels gaan door de pool. In figuur 9 daarentegen gaan de cirkels niet door de pool. De enigszins verscholen middelpunten zijn $P = \{P_k(3, k \cdot 30°) \mid k \in N\}$
De verzameling cirkels is $C = \{C_k(P_k, 1\frac{1}{2}) \mid k \in N\}$

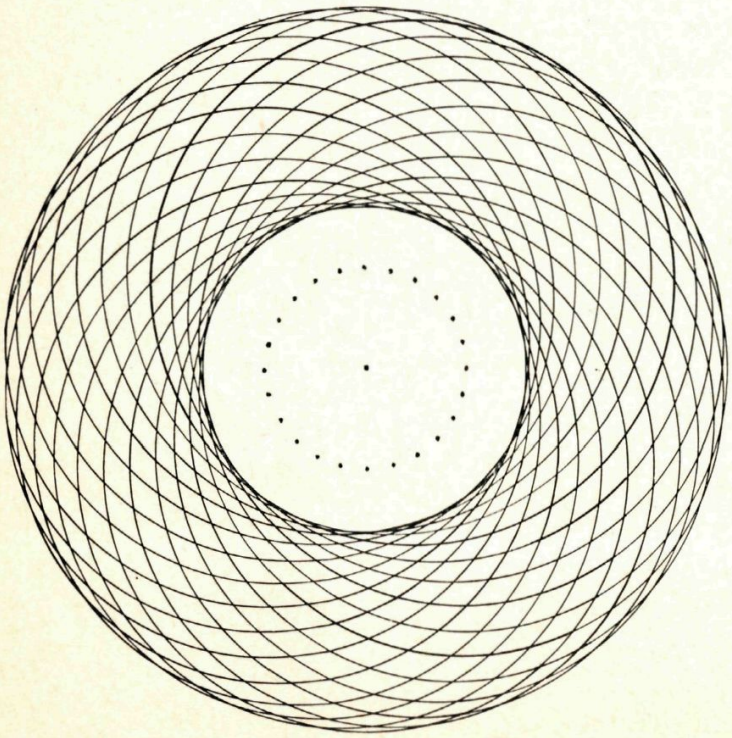


Fig. 10

Het fijne weefsel van figuur 10 vindt zijn ontstaan in:

1. De verzameling punten $P = \{P_k(1\frac{1}{2}, k \cdot 15°) \mid k \in N\}$
2. De verzameling cirkels $C = \{C_k(P_k, 4) \mid k \in N\}$

De webachtige verzameling cirkels van figuur 11 is opgebouwd uit de drie onderdelen:

1. Verzameling punten $P = \{P_k(2, k \cdot 10°) \mid k \in N\}$
2. Punt $Q(3, 90°)$
3. Verzameling cirkels $C = \{C_k(P_k, P_kQ) \mid k \in N\}$

De cirkels zijn dus:

| cirkel | naam | middelpunt | straal |
|---|---|---|---|
| $C_0(P_0, P_0Q)$ | $C_0$ | $P_0$ | $P_0Q$ |
| $C_1(P_1, P_1Q)$ | $C_1$ | $P_1$ | $P_1Q$ |
| $C_2(P_2, P_2Q)$ | $C_2$ | $P_2$ | $P_2Q$ |
| enz. | | | |

Het aardige kluwende effect is ontstaan, doordat alle exemplaren van de verzameling door één punt $Q$ gaan. Meer modern genoteerd: $C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_k = \{Q\}$

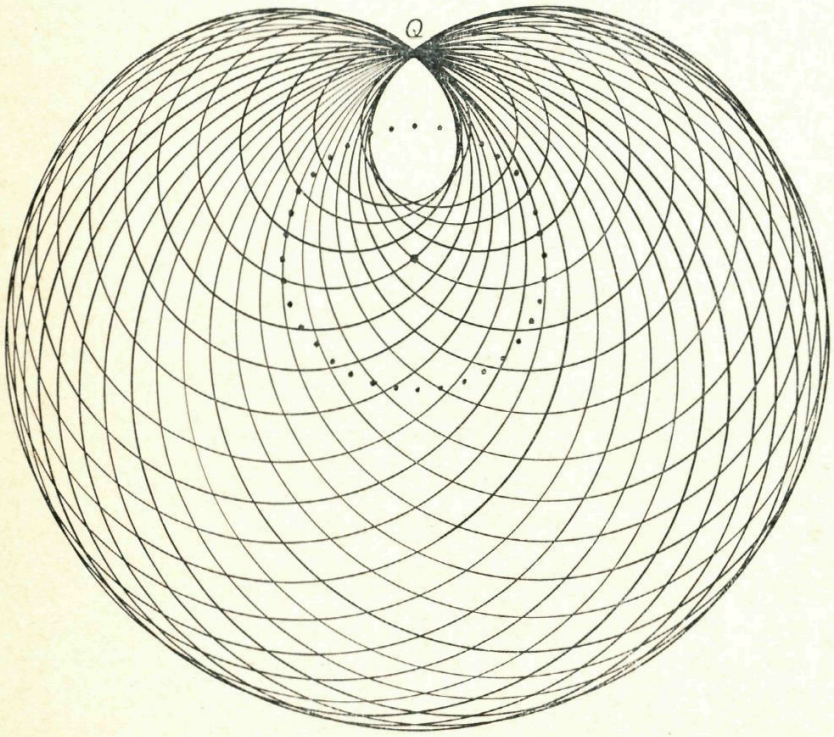
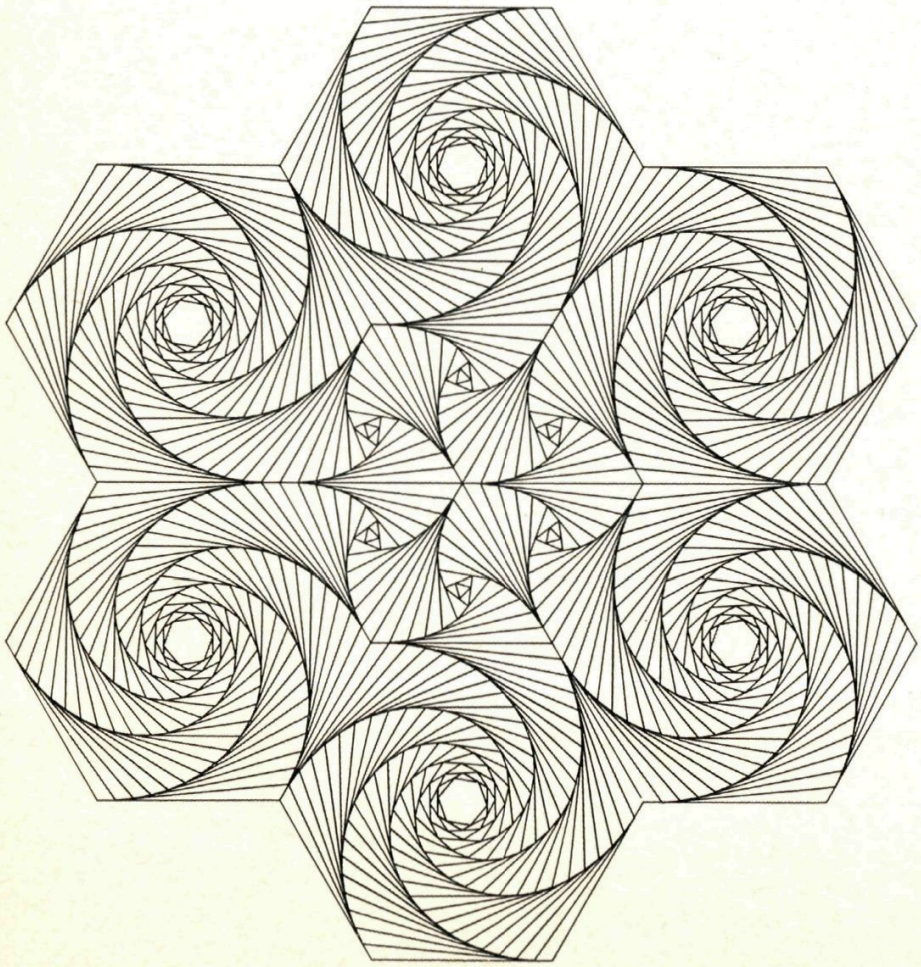



Fig. 11

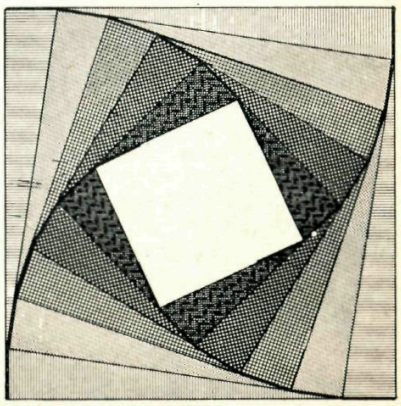
In het volgende nummer zullen we zien hoe je poolcoördinaten kunt gebruiken voor het maken van fraaie figuren.

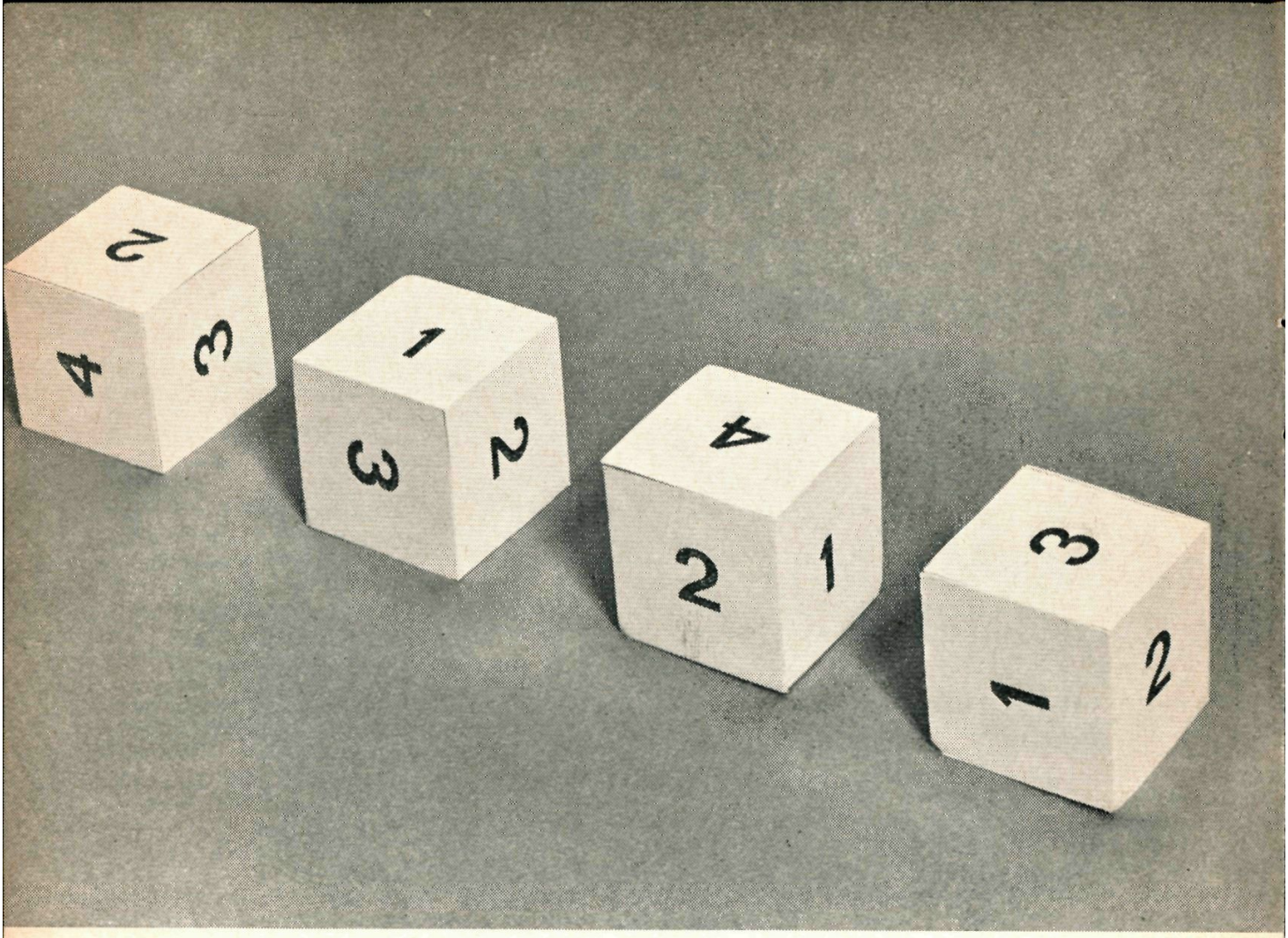
# De computer tekent°

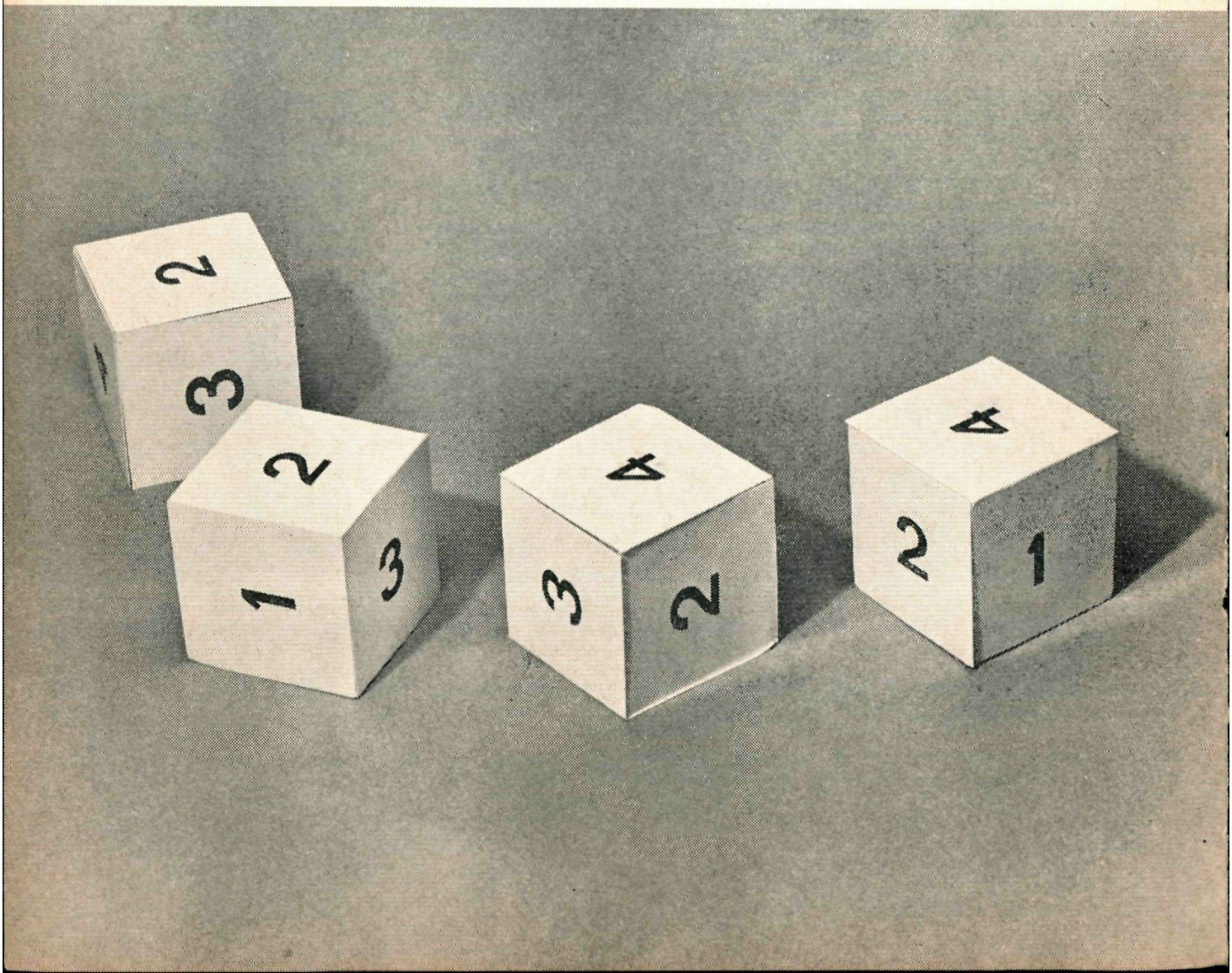
Computers kunnen tegenwoordig niet alleen rekenen, maar ook tekenen. Voor dit doel wordt de rekenautomaat verbonden met de zogenaamde *plotter* (zie foto bovenaan bladzijde 9). De inktstift op het apparaat kan bliksemsnel van links naar rechts bewegen langs de op de foto zichtbare glijstangen. Het papier wordt door de plotter, onder de stift langs getransporteerd. Telkens wanneer de inktstift het papier raakt, ontstaat een horizontaal streepje. De lengte hiervan kan variëren van vrijwel een stip tot een lijn ter breedte van het papier.
De tekening onderaan bladzijde 8 is ontstaan naar aanleiding van de artikelen 'Van saai tot fraai., in de negende jaargang van Pythagoras. Een student, waarvan we de naam niet mogen noemen, maakte naar aanleiding van die artikelen een programma voor de X 8 computer van het Electronisch Rekencentrum te Utrecht met dit fraaie resultaat.



Inmiddels is het maken van tekeningen door computers uitgegroeid tot een nieuwe vorm van kunst, waaraan dit jaar in Nederland zelfs een tentoonstelling is gewijd. Een drietal computer-kunstprodukten vind je in dit nummer: op de binnenzijde van het omslag, en op de bladzijden 13 en 14. Twee hiervan (The snail en 3D Checkerboard Pattern) zijn opgenomen in een serie van zeven reprodukties die door Algemeen Handelsblad/N.R.C. in Nederland in de handel zijn gebracht. De prijs van deze zeven reprodukties bedraagt *f* 35,— Het schaakbordenpatroon van bladzijde 13 sluit prachtig aan bij onze serie 'Van saai tot fraai' figuren. Op drie zijvlakken van een groot aantal kubussen is het patroon van nevenstaande figuur aangebracht. Vervolgens zijn deze kubussen als het ware op een schaakbord geplaatst en vanuit een bepaalde gezichtshoek 'gefotografeerd'. Knap gedaan van de computer om dit zo te tekenen, maar nog knapper gedaan door Donald K. Robbins uit Albuquerque om de computer zo te programmeren!




2
4 3
1
3 2
4
2 1
3
1 2


2
3
2
1 3
4
3 2
4
2 1

# Een spel met vier kubussen°

Voor dit spel heb je vier, liefst even grote kubussen nodig. Voor een paar dubbeltjes zal elke houthandelaar je graag zo'n viertal leveren, maar als je met een zaag overweg kan maak je ze natuurlijk zelf even uit een blokje hout en dat is wel zo aardig omdat wiskundigen toch al de naam hebben verschrikkelijk onhandig te zijn! We nodigen je uit de zijvlakken van elke kubus te *nummeren*, maar dan niet, zoals bij een dobbelsteen, waarbij de cijfers 1 t/m 6 worden gebruikt, maar met de cijfers 1, 2, 3 en 4. Omdat een kubus 6 zijvlakken heeft betekent dit, dat op elke kubus minstens twee zijvlakken hetzelfde nummer krijgen. In figuur 12 kun je aflezen hoe je de zijvlakken van de vier kubussen moet nummeren.

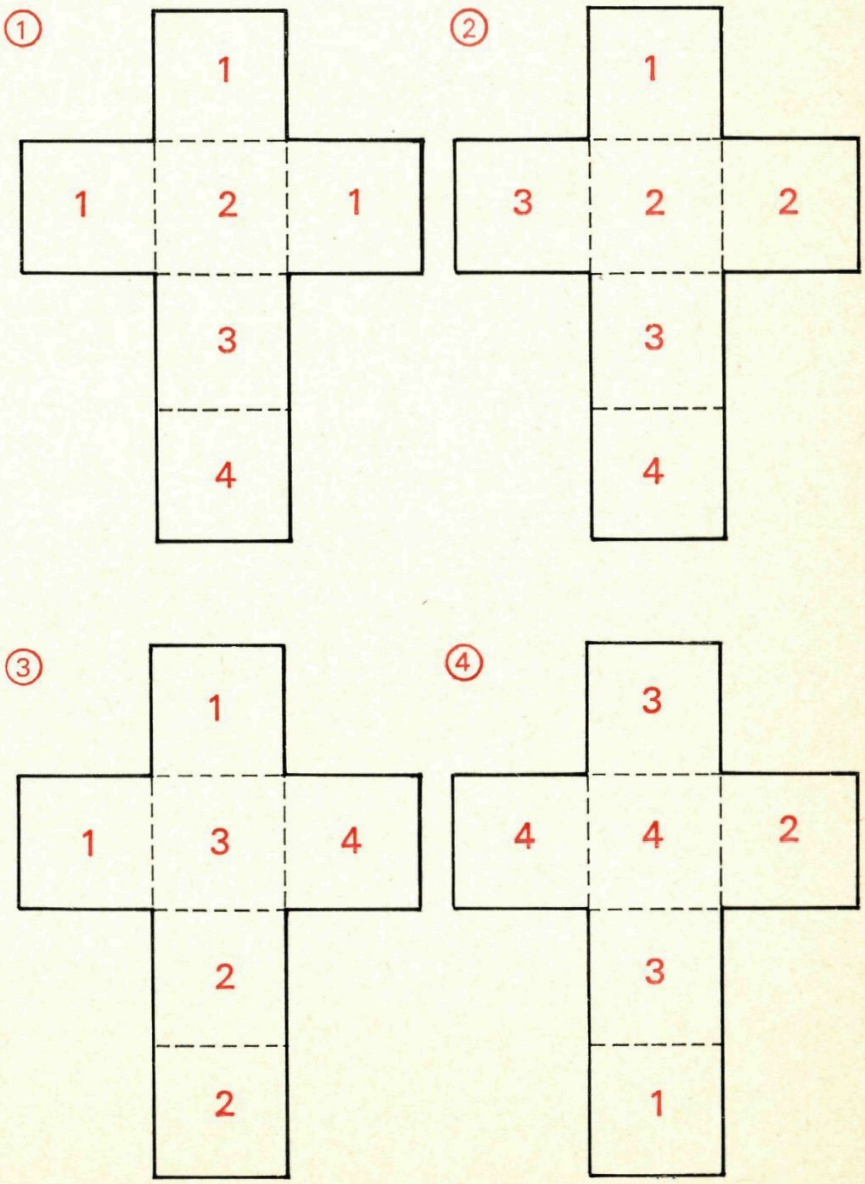



Fig. 12

Zet nu eens je vier genummerde kubussen op goed geluk op een rijtje tegen elkaar. In figuur 13 vind je het resultaat van een van onze eigen pogingen.
Hoogstwaarschijnlijk doe je dan dezelfde ontdekking als wij: op minstens één lange zijde van de balk ontbreekt minstens één van de cijfers 1, 2, 3 of 4, of, wat op het zelfde neerkomt, minstens één van de cijfers 1, 2, 3 of 4 komt meer dan één keer voor op minstens één lange zijde van de balk! Zelfs bij wel honderd willekeurig uitgevoerde pogingen kwam het niet éénmaal voor, dat we op elke lange zijde van de balk elk van de cijfers 1, 2, 3 en 4 juist éénmaal tegenkwamen.
Natuurlijk zouden wij dit negatieve resultaat niet als *spel* aan je hebben durven aanbieden, als we er niet in geslaagd waren door logisch nadenken en met een tikkeltje proberen de vier genummerde kubussen zó op een rijtje te zetten, dat op alle vier de lange zijden van de balk elk van de cijfers 1, 2, 3 en 4 juist éénmaal voorkomen!
Aan jou nu deze vraag: zet de vier op de voorgeschreven wijze genummerde kubussen zó in een rijtje tegen elkaar, dat op elke lange zijde van de balk de cijfers 1, 2, 3 en 4 juist éénmaal voorkomen. In Denkertje 1 word je uitgenodigd je oplossing in te sturen.
In een volgend nummer zullen we uitzoeken hoe dit spel tot het gewenste resultaat voert. Vanzelfsprekend zullen daarbij reacties van lezers graag worden ingebouwd!
Overigens: je kunt dit spel ook met gekleurde kubussen spelen door bijvoorbeeld elk van de zijvlakken in plaats van met de cijfers 1, 2, 3 en 4 te nummeren met de vier kleuren *rood*, *wit*, *blauw* en *oranje* te versieren.

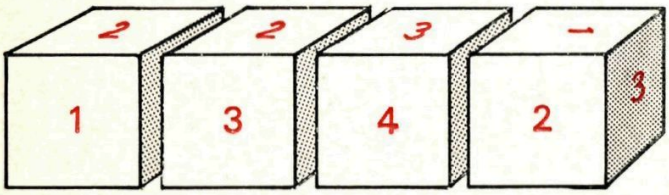
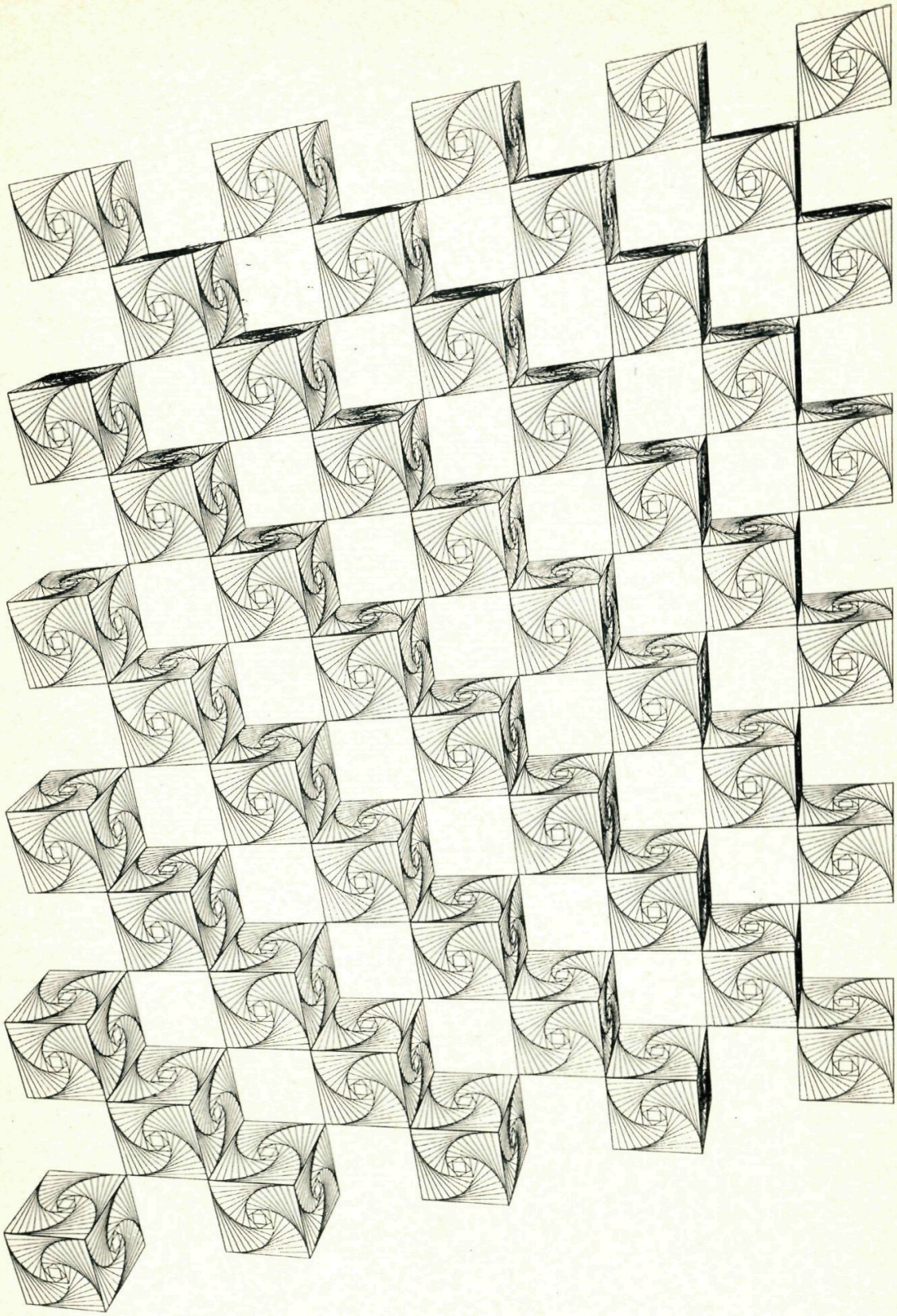


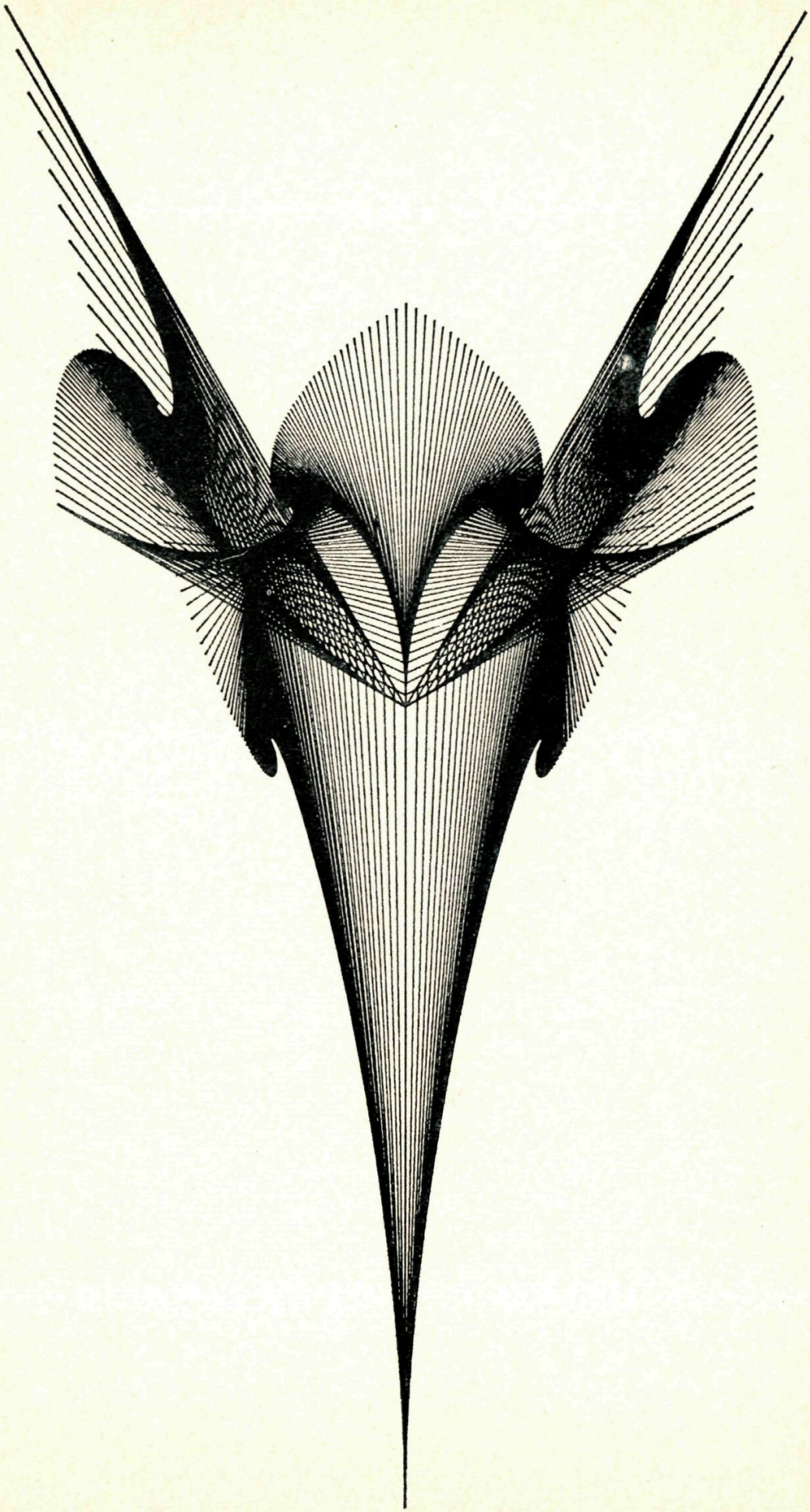
Fig. 13



*De computer tekent*

*3 D Checkerboardpattern. Ontwerp van Donald K. Robbins. (Sandia Corporation, Albuquerque).*

© *Motif editions, London*



# Samenvallende verjaardagen°°

De kans dat in een klas van 30 leerlingen er twee op dezelfde dag jarig zijn lijkt niet groot. Hoe groot deze kans precies is kun je berekenen door de dagen van het jaar te vergelijken met de laatjes van een kast en de leerlingen met voorwerpen, die in de laatjes gestopt kunnen worden.

Een spijskaart in een restaurant bevat 4 soorten soep, 7 verschillende hoofdgerechten en 5 nagerechten.
Hoeveel verschillende volledige maaltijden kun je hiermee samenstellen? Elk van de 4 soorten soep kun je combineren met 7 hoofdgerechten. Dit levert 28 combinaties. Elk van deze combinaties kun je laten volgen door 5 verschillende nagerechten. Dus $4 \cdot 7 \cdot 5 = 140$ verschillende maaltijden.
Uit de 140 maaltijden putten we moed voor het volgende *verdelingsprobleem:*
Iemand wil 3 verschillende voorwerpen opbergen in een kast met 4 laatjes. Op hoeveel manieren kan dat, aangenomen, dat elk laatje groot genoeg is om desnoods alle voorwerpen te bevatten? Het antwoord is 64. Waarom?
Welnu, telkens wanneer een voorwerp wordt opgeborgen – en die situatie doet zich 3 keer voor – kan gekozen worden uit precies 4 mogelijkheden. In totaal beschikt hij dus over $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ verdelingsmogelijkheden.
Stellen we nu het aantal verschillende voorwerpen op $v$ en het aantal laatjes op $l$, dan kan telkens (en dat is $v$ keer in totaal) elk voorwerp in één van de $l$ beschikbare laatjes worden opgeborgen.
In totaal zijn er dus

$$l \cdot l \cdot l \cdot \ldots \cdot l = l^v$$

verdelingen van $v$ verschillende voorwerpen over $l$ laatjes. Elk van deze mogelijkheden heeft hetzelfde recht van bestaan, of, in de taal van de *kansrekening*, heeft dezelfde *kans*.

<- *De computer tekent*

*Hummingbird (kolibrie). Met een driekleurige versie van deze tekening werd de eerste prijs gewonnen op zesde jaarlijkse computerkunst prijsvraag van het tijdschrift Computers en Automation.*
© *California Computer Products, Anaheim.*

Deze *kans* wordt uitgedrukt door het getal $\frac{1}{l^v}$

of door het percentage $\frac{100}{l^v}$

In fig.14 vind je alle $3^2 = 9$ verdelingen van 2 verschillende voorwerpen (aangeduid met $x$ en 0) over 3 laatjes $A$, $B$ en $C$ afgebeeld.
Een korte inspectie van figuur 14 toont aan, dat in 6 van de 9 gevallen de 2 voorwerpen elk hun 'eigen' laatje hebben gekregen, d.w.z. niet bij elkaar zijn opgesloten.

We vragen ons nu af hoeveel van de in totaal $8^5 =$ $= 32768$ verdelingen van 5 verschillende voorwerpen over 8 laatjes vertonen dezelfde bijzonderheid n.l. *alle voorwerpen komen in verschillende laatjes terecht*!?
Gelet op het reusachtig aantal verdelingen is het oplossen met een figuur niet doenlijk. Hoe dan wel?
Het eerste voorwerp kan op 8 manieren opgeborgen worden; er zijn daarna nog 7 laatjes onbezet, voor het tweede voorwerp beschikken we dus over 7 plaatsingsmogelijkheden; het derde voorwerp kan dan nog op 6, het vierde nog op 5 en het vijfde en laatste voorwerp nog op 4 manieren aan een 'eigen' laatje worden gehol-

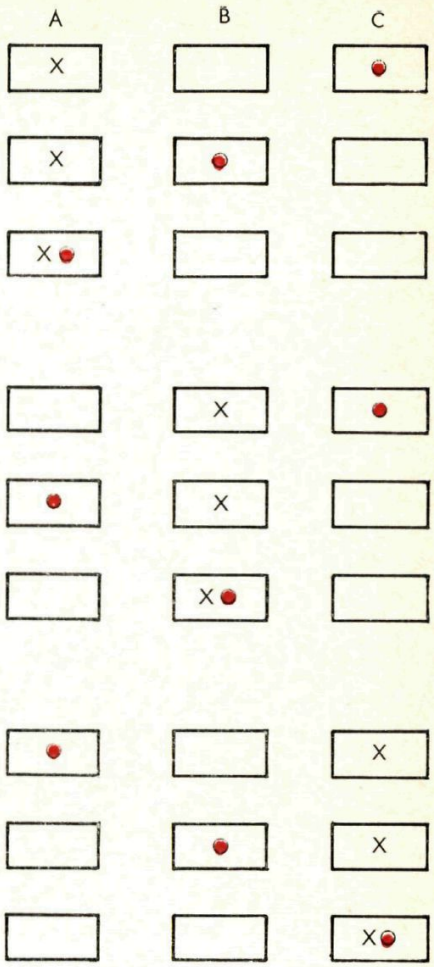
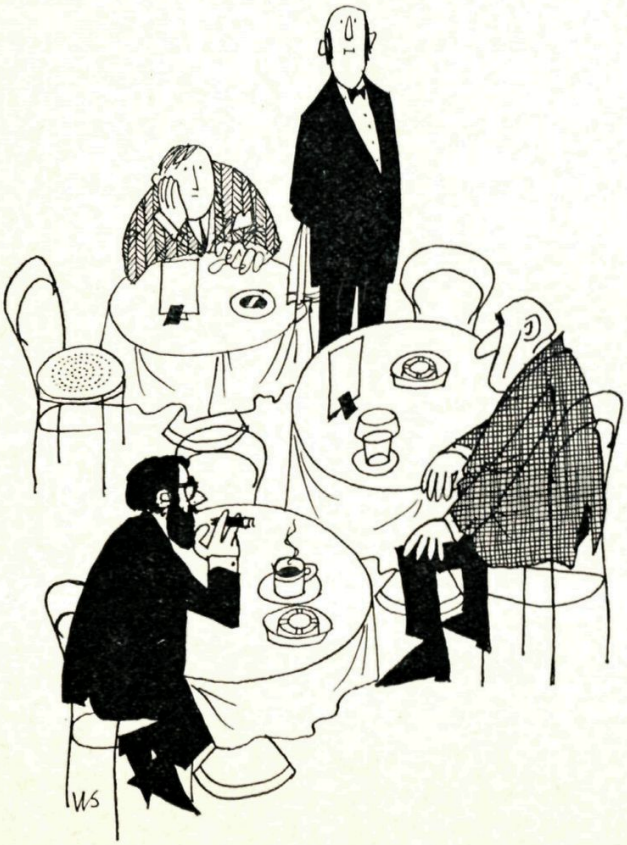


Fig. 14



pen. Het gevraagde aantal is dus

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$$

Dit betekent óók, dat in alle resterende 32768 − 6720 = 26048 verdelingen minstens 1 laatje meer dan één voorwerp bevat!

De kansrekening drukt dit als volgt uit:

De kans, dat bij een verdeling van 5 verschillende voorwerpen over 8 laatjes alle voorwerpen in verschillende laatjes terecht komen bedraagt

$$\frac{6720}{32768} \cdot 100\ \% \approx 20{,}5\ \%$$

Het feit, dat 5 elkaar onbekende mensen in een café met 8 tafeltjes, bijna altijd aan verschillende tafeltjes plaatsnemen is niet in strijd met onze berekeningen; het toont wel aan, dat ons gedrag op *voorkeur* voor bepaalde mogelijkheden berust, waardoor de onderlinge gelijkwaardigheid van alle mogelijkheden verloren gaat! Zouden we deze 5 dorstigen volgens het toeval een tafeltje toewijzen, dan zal in bijna 80 % van de gevallen aan één tafeltje meer dan 1 bezoeker zitten. En dat is wel zo gezellig.

Trekken we ons niets aan van schrikkeljaren, dan heeft elk jaar 365 dagen. In een gezelschap van meer dan 365 mensen *moeten* dan minstens 2 personen op dezelfde dag jarig zijn! Het samenvallen van 2 of meer verjaardagen is dus alleen in een kleiner gezelschap een bijzonderheid, een toevalligheid zo je wilt.

Laten we eerst eens de kans berekenen, dat in een gezelschap van $n$ personen ($n \leqq 365$) geen twee dezelfde verjaardag hebben. Ook dit is een verdelingsprobleem waarbij de dagen van het jaar de laatjes zijn en de personen in het gezelschap de $n$ verschillende voorwerpen.

De vraag is dus: in hoeveel van de $365^n$ gevallen zijn de $n$ voorwerpen alle in verschillende laatjes terecht gekomen?

Voor het eerste voorwerp hebben we de keus uit 365 mogelijkheden die alle dezelfde waarschijnlijkheid hebben; voor het tweede, het derde en de volgende voorwerpen neemt het aantal 'vrije' laatjes telkens met één af, zodat we het $n$-de en laatste voorwerp nog op $365 - n + 1$ manieren kunnen opbergen.

Er zijn dus

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$$

verdelingen waarbij ieder voorwerp zijn eigen laatje heeft.

Dit betekent ook, dat in alle andere verdelingen, en dat zijn er

$$365^n - 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$$

minstens één laatje meer dan één voorwerp bevat. Hiermee is het 'verjaardagsprobleem' opgelost. De kans $K_n$ dat in een gezelschap van $n$ personen twee of meer verjaardagen samenvallen bedraagt

$$\frac{365^n - 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} \times 100\,\%$$

We hebben voor enkele waarden van $n$ de kans $K_n$ eens uitgerekend en kwamen tot de verbluffende ontdekking, dat in een gezelschap van 50 personen het bijna zeker is, dat twee of meer personen samen jarig zijn, terwijl het luttele aantal van 23 personen al een kans boven de 50 % geeft (zie tabel).

| $n$ | $K_n$ |
|---|---|
| 3 | $< 1$ |
| 10 | 12 |
| 20 | 41 |
| 22 | 48 |
| *23* | *51* |
| 24 | 54 |
| 30 | 71 |
| 50 | 97 |

# Denkertjes

3 Leg uit waarom de slager uit Zonderveen van bladzijde 19 geen patent is verleend op zijn methode om uit worst meer worst te halen.

4 Geef de oplossing van het Luciferprobleem van bladzijde 3.

5 Bekijk het nevenstaande blok getallen.
Kies één van de getallen, schrijf dit getal op en streep daarna de rij en de kolom, waarin dit getal staat, door.
Kies een tweede getal (niet doorgestreept), schrijf het op en schrap de rij en kolom waarin dit getal staat. Zo kun je nog tweemaal een getal opschrijven.
Tel de vier getallen die je nu hebt op. Wat valt je op?
Hoe kun je zelf een dergelijk blok getallen maken?

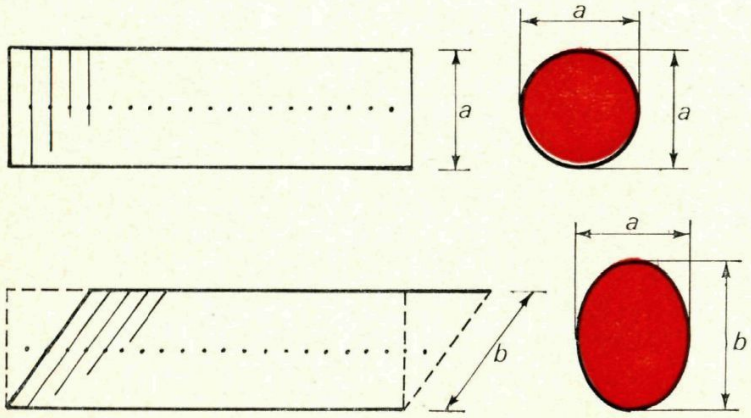
| | | | |
|---|---|---|---|
| 459 | 487 | 512 | 311 |
| 345 | 373 | 398 | 197 |
| 653 | 681 | 706 | 505 |
| 581 | 609 | 634 | 433 |

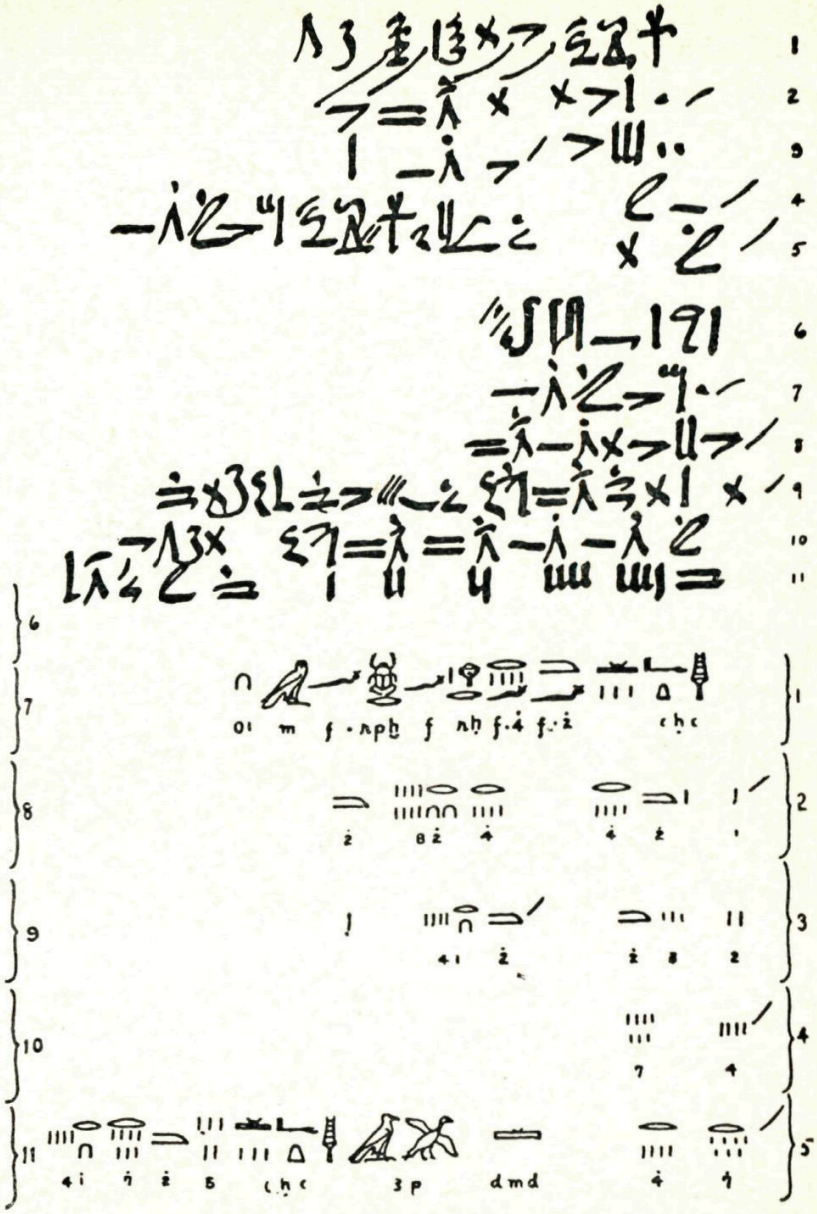
# Uit worst meer worst°

Ir. H. M. Mulder

Op de laatste landelijke vergadering van het algemeen slagers vakverbond is een ware paniek uitgebroken. Een slager uit Zonderveen beklom het spreekgestoelte onder de revolutionaire leuze 'uit worst meer worst'.
Hier volgt een deel van zijn rede:

'We nemen een cilindrische worst en tekenen er stippen op, telkens op 5 millimeter afstand.
We snijden de worst in cirkelvormige plakjes volgens sneden door de punten.
Nu gaan we uit de worst meer worst halen.
We snijden daartoe schuin door dezelfde punten.
Er komt nu links een hoek vrij, die we rechts bijleggen om evenveel plakjes uit de worst te kunnen halen.
Het aantal plakjes is nu dus gelijk, maar elke plak is nu elliptisch van vorm en groter van oppervlakte.
Zo is uit de worst meer worst gehaald.'
Uit de zaal steeg een heftig protest op tegen deze vondst. 'Het gehele prijsbeleid staat op de tocht,' riep de voorzitter.
Enkele jongere vakbondsleden grepen de schuinsnijder en werkten hem de zaal uit.
De slager uit Zonderveen heeft zich inmiddels naar de octrooiraad in Den Haag begeven en patent op zijn vondst aangevraagd.
Zie ook Denkertje 3.





*Onze kennis van de Egyptische wiskunde is grotendeels van twee papyrusrollen afgeleid: De Rhind papyrus en de Moskou papyrus. De figuur boven is een gedeelte van de hiëroglyfen op de Rhind papyrus, de figuur onder is een onderdeel van de Moskou papyrus, waarop een inhoudsberekening van een afgeknotte piramide voorkomt.*

# Over $\pi$ en nog wat°

T. G. Lim

Wij zullen enige fragmenten vertellen uit de meer dan 3 duizend jaar oude geschiedenis van het getal $\pi$. Van een enkel cijfer heeft $\pi$ zich na duizenden jaren laten presenteren als een monsterachtig getal met meer dan tienduizend decimalen. De exacte waarde blijft onberekenbaar.

**De notatie $\pi$**

De verhouding van de omtrek van een cirkel tot zijn diameter duiden wij aan met de griekse letter $\pi$, maar dit is niet altijd zo geweest. Deze notatie is een paar honderd jaar oud en is afkomstig van de Engelsman William Jones, die het teken $\pi$ voor de verhouding cirkelomtrek: middellijn in 1706 introduceerde. Het is echter te danken geweest aan het boek 'Introductio in analysin infinitorum' van de beroemde wiskundige Leonhard Euler, waarin hij de notatie van Jones gebruikte, dat dit teken algemeen wordt geaccepteerd. In ons verhaal zullen wij $\pi$ steeds in die betekenis gebruiken, ook wanneer het tijden betreft vóór 1706.

**Oude waarde van $\pi$**

Allereerst zullen wij het hebben over een zeer oud Egyptisch document, dat bewaard wordt in het British Museum. Wij bedoelen de RHIND papyrus, genoemd naar A. Henry Rhind, die de papyrus in 1858 kocht. De hiëroglyfen werden later door Eisenlohr ontcijferd. Daarbij kwam aan het licht, dat het bewuste document geschreven was door A'hmosè en dat het (volgens de schrijver zelf) een kopie was van een nog ouder werk. Dit oudere manuscript is volgens onze kalenderberekening terug te voeren tot omstreeks 1850 v. Chr. De Rhind papyrus of ook genoemd de A'hmosè (Ahmes) papyrus is een praktisch handboek en bevat ook wiskundige problemen. Men vindt onder andere een voorschrift hoe men een cirkeloppervlak moest berekenen. Berekend volgens het voorschrift van de oude Egyptenaren zou het oppervlak bedragen: $(\frac{8}{9}\,d)^2$ met $d$ als diameter en volgens ons is het $\pi\,(\frac{d}{2})^2$. Door beide resultaten aan elkaar gelijk te stellen, kunnen wij er uit afleiden, dat $\pi = (\frac{16}{9})^2 \approx 3{,}16$. Deze experimentele waarde voldeed aan de praktische behoeften.

De waarde $\pi = 3$ kunnen wij uit de Bijbel halen:
In het oude testament (I Koningen 7 : 23 en II Kronieken 4 : 2) lezen wij in verband met de bouw van de tempel van Salomo, dat het waterreservoir rond was, 'vijf el hoog, tien el van rand tot rand, terwijl een meetsnoer van dertig el haar rondom kon omspannen'. Dit houdt in, dat de verhouding van cirkelomtrek (30 el) tot zijn dia-

meter (10 el) gelijk is aan 3. Ook in de Talmud van het Joodse geloof kan men deze waarde 3 terugvinden.
De waarde $\pi = 3$ komt eveneens voor in een klassiek Chinees boek, getiteld 'Wiskunde in Negen hoofdstukken'.

**Variaties in de waarde van $\pi$**

$\pi$ *uit Sicilië.* De naam Archimedes is overbekend. Hij was één der grootste geleerden aller tijden: wiskundige, natuurkundige, architect en werktuigbouwkundige en leefde van 278 tot 212 v. Chr. Zijn woonplaats was Syracuse.
Archimedes benaderde de cirkelomtrek met behulp van in- en omgeschreven veelhoek. Wij zien in, dat de cirkelomtrek des te beter wordt benaderd naar gelang men meer zijden neemt voor de regelmatige veelhoek. Archimedes nam een regelmatige veelhoek met 96 zijden en vond voor $\pi$ een waarde tussen $3\frac{1}{7}$ en $3\frac{10}{71}$, waarvan wij vaak de eerstgenoemde waarde gebruiken.
Het moet wel erbij gezegd worden, dat het voor die tijd een hele prestatie was om bovengenoemde zijde uit te rekenen. Vooral omdat men zich moest bedienen van een moeilijk Grieks rekensysteem.

$\pi$ *uit China.* In de annalen van de Sui dynastie vermeldde de werktuigkundige Tsoe (430–501), dat hij twee waarden voor $\pi$ had gevonden, namelijk een 'nauwkeurige' ($\frac{355}{113}$) en een 'onnauwkeurige' ($\frac{22}{7}$). De laatstgenoemde waarde werd eerder door Archimedes berekend, maar de waarde $\frac{355}{113}$ was nergens eerder vermeld. In decimaalvorm is deze nauwkeurige waarde van $\pi = 3{,}1415929$ en dit is juist tot 6 decimalen.

$\pi$ *uit India.* In India waren de geleerden ook geïnteresseerd in de berekening van de waarde van $\pi$. In ongeveer 500 bijvoorbeeld vond de wiskundige Aryabhatta, dat $\pi$ een waarde had van $\frac{62832}{20000}$ (= 3,1416). Meer dan 6 eeuwen later gaf een heel prominente wiskundige, namelijk Bhaskara (1114–ca. 1185) verschillende waarden voor $\pi$: een 'nauwkeurige' waarde ($\frac{3927}{1250}$), een 'onnauwkeurige' ($\frac{22}{7}$) en $\sqrt{10}$ voor 'gewoon' werk. Deze laatste waarde was eerder ergens berekend en werd in diverse landen gebruikt.

$\pi$ *uit Duitsland.* Valenthin Otho van Maagdenburg vond $\pi = \frac{355}{113}$ in 1573, dus de waarde van Tsoe van 1000 jaren vroeger.

$\pi$ *uit Holland.* Adriaen Anthoniszoon (1543–1620), burgemeester van Alkmaar en vestingbouwkundige vond de eerder gevonden waarde van Tsoe eveneens. Deze waarde werd door zijn zoon, die zich Adriaen Metius noemde, gepubliceerd en dit getal wordt daarom soms ook het getal van Metius genoemd wat eigenlijk niet helemaal juist is.

**Decimalen, decimalen en decimalen**

*Dertigtal decimalen.* In Holland publiceerde in 1596 Ludolph van Ceulen $\pi$ in 20 decimalen in zijn boek 'Van den Circkel' en later verbeterde hij zijn eigen record en

kwam tot 35 decimalen. Deze waarde van $\pi$ in 35 decimalen kon men op zijn grafsteen in de St. Pieterskerk in Leiden zien (nu niet meer).

*Een paar honderd decimalen.* Ongeveer 3 eeuwen laten was men niet meer tevreden met slechts tientallen decimalen voor de waarde van $\pi$. William Shanks uit Engeland publiceerde in 1873 $\pi$ tot 707 decimalen! Ja, daarvoor had hij 15 jaren er aan moeten rekenen. Later ging D. F. Ferguson, ook uit Engeland, het resultaat van Shanks verifiëren en vond in 1946 een fout vanaf de 528ste decimaal. Jammer! In het jaar daarop werd door Ferguson $\pi$ in 710 decimalen gepubliceerd. Weer een paar decimalen erbij.
Ongeveer tegelijkertijd publiceerde J. W. Wrench Jr. in Amerika $\pi$ in 808 decimalen. Het was echter weer Ferguson, die de vreugde bedierf, want hij vond in de berekening van Wrench een fout in de 723ste decimaal. Daarna gingen Ferguson en Wrench samen verifiëren en publiceerden ze samen de gecorrigeerde waarde tot 808 decimalen.

*Meer decimalen alstublieft!* Als men denkt, dat 808 decimalen iedereen zou bevredigen dan moet men maar verder lezen. In 1949 liet men in het research laboratorium van het Amerikaanse leger in Aberdeen, Maryland de elektronische rekenmachine 70 uren lang de waarde van $\pi$ uitrekenen. Vergeleken met de 15 jaren van Shanks mag men over 70 uren niet klagen en bovendien kreeg men $\pi$ in .... 2035 decimalen! Men wilde namelijk met heel veel decimalen experimenteren en tegelijk het resultaat van Ferguson-Wrench controleren.

*Nog meer decimalen!!* Nu is het echt welletjes met $\pi$ in 2000 decimalen, denken wij. Niet voor de Fransman François Genuys te Parijs! Hij gebruikte een IBM-rekenmachine en liet de machine tot 16167 decimalen de waarde van $\pi$ uitrekenen in 1959. En hiermee zullen wij maar stoppen met het volgen van de decimaal wedloop.

**Iets over benaderingsmethoden** °°°

Archimedes berekende $\pi$ door middel van in- en omgeschreven veelhoeken in een cirkel. We hebben gezien dat hij hiermee kon bepalen dat de waarde van $\pi$ tussen $3\frac{1}{7}$ en $3\frac{10}{71}$ ligt.
Later zijn andere benaderingsmethoden ontwikkeld, zoals bijvoorbeeld door John Wallis: $\pi = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \ldots$
Deze benaderingswijze heeft als bezwaar dat je veel factoren moet nemen om een nauwkeurige benadering te krijgen.
Beter is de kettingbreuk

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{\ldots}}}}}$$

van de wiskundige Lambert (1728–1777).
Je ziet hierin dat de eerste benadering is $\pi = 3$, daarna $\pi = 3 + \frac{1}{7} = 3\frac{1}{7} = 3{,}142\ldots$.

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{15}} = 3\tfrac{15}{106} = 3{,}141\,50\ldots.$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \tfrac{16}{113} = \tfrac{355}{113} = 3{,}141\,592$$

Bij computerberekeningen wordt gebruik gemaakt van nog andere benaderingsmethoden.
Tenslotte: Tel je het aantal letters in elk woord van de volgende zin, dan heb je een benadering van $\pi$ in 12 decimalen nauwkeurig.

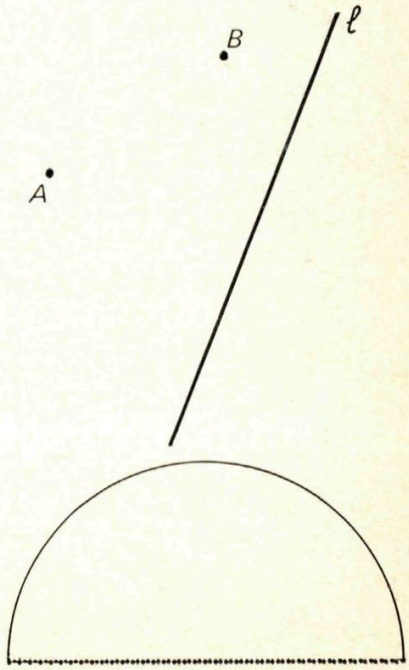
'Wie u kent, o getal, belangrijk en gepast,
Leert ook andre waarheên ankervast.'

# Denkertjes

6 Hoeveel opeenvolgende nullen heeft het getal, dat je krijgt door $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \ldots \times 100$ te berekenen, vanaf het rechter einde gerekend?

7 Arthur zegt: 'Bas liegt altijd', Bas zegt: 'Cor liegt altijd' en Cor zegt: 'Arthur spreekt altijd de waarheid'.
Kunnen alle drie de uitspraken waar zijn?

8 $A$ en $B$ zijn twee gegeven punten en $l$ is een gegeven lijn. Hoe construeer je een punt $P$ op $AB$, zodat de som van de lengten van $AP$ en $BP$ zo klein mogelijk is?




9 Guus was van plan om een bepaalde afstand met een bepaalde snelheid af te leggen. Hij legde de helft van de afstand af met de helft van de voorgenomen snelheid.
Hoe snel moest hij de tweede helft afleggen om aan zijn voornemen te voldoen?

10 De bovenste helft van de omtrek van de figuur is een halve cirkel, de onderste bestaat uit honderd gelijke halve cirkeltjes. Welk deel van de omtrek is het grootst?

*Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 15 november 1971 worden ingezonden naar het redactie-secretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.*

**Inhoud:**


Van de redactie 1

Luciferprobleem ° 3

Speelse poolcoördinaten °°(1) 4

De computer tekent ° 8

Een spel met vier kubussen ° 11

Samenvallende verjaardagen °° 15

Uit worst meer worst ° 19

Over $\pi$ en nog wat ° 21

Denkertjes 2, 18, 24

## Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Amersfoort.
A. F. VAN TOOREN, 's-Gravenhage.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via één der docenten, *f* 4,50 per jaargang. Voor anderen *f* 7,00.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.