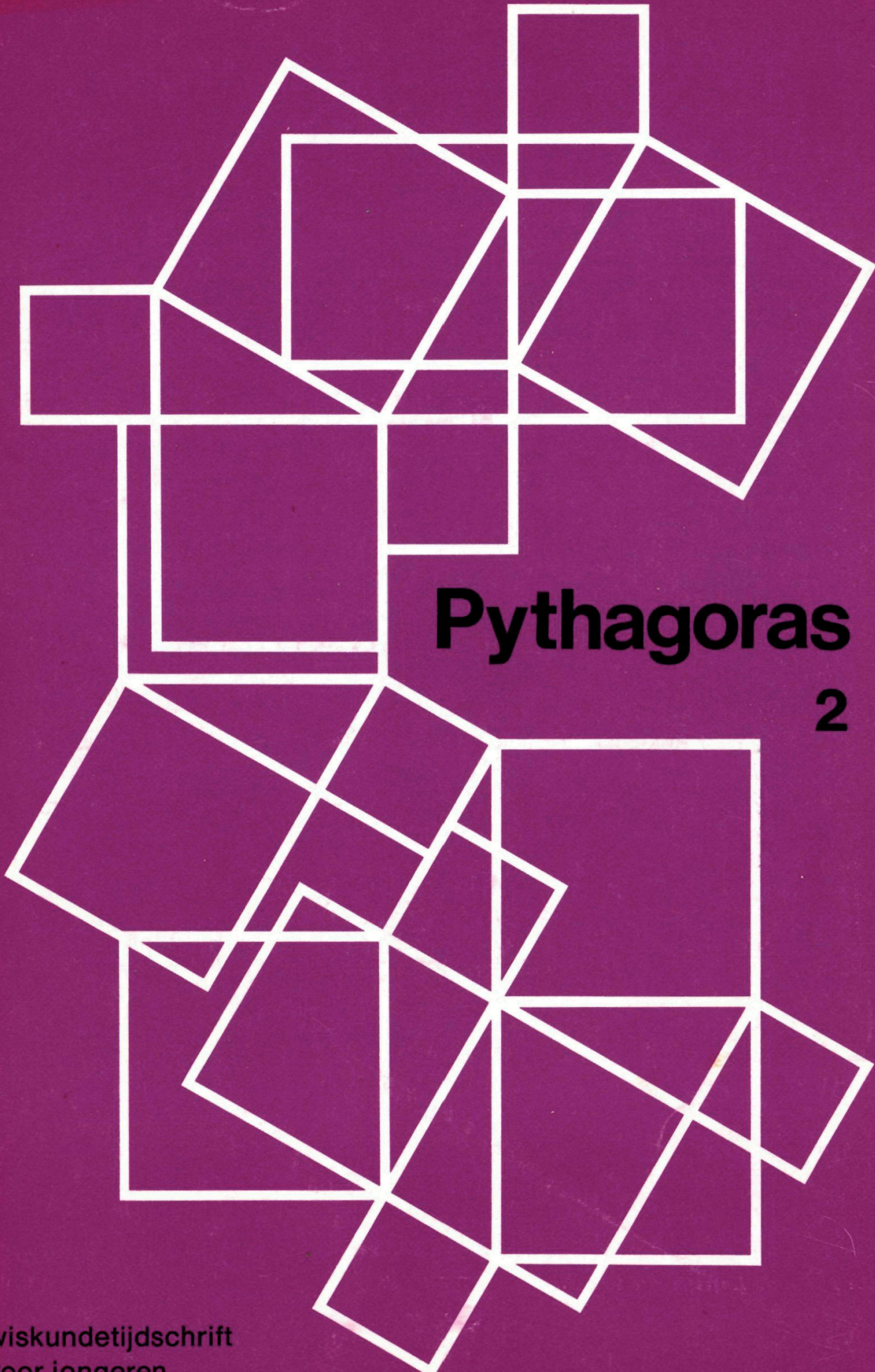


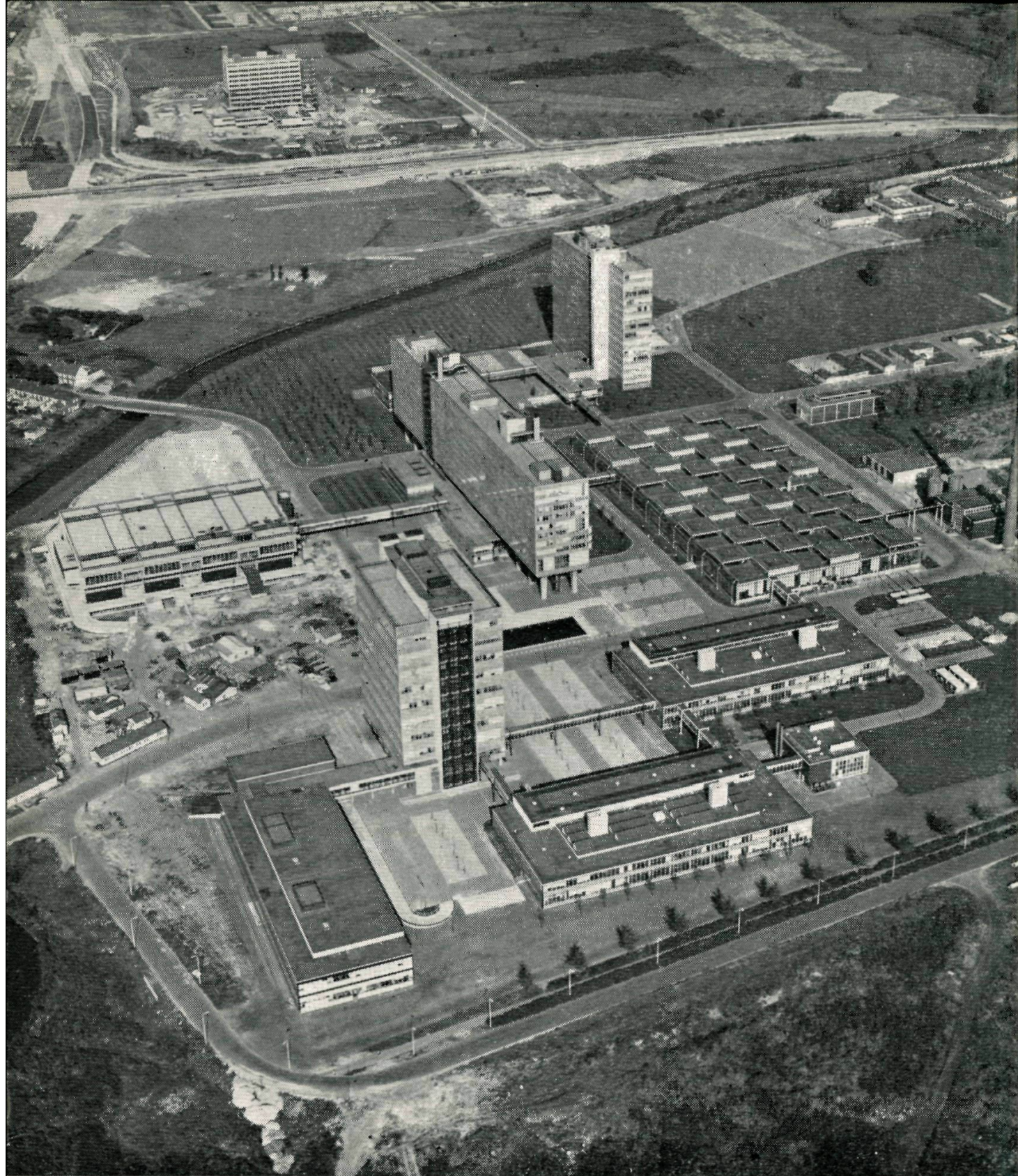
jaargang 11 1971/1972



Pythagoras

2

wiskundetijdschrift
voor jongeren



De Technische Hogeschool te Eindhoven

Wiskunde studeren°

Wij spreken vaak jongelui, die zeggen dat ze wiskunde een leuk schoolvak vinden. Belangstellend vragen we dan of ze wel eens overwogen hebben om na de school wiskunde te gaan studeren. Het gebeurt nog al eens, dat er dan het volgende antwoord komt: 'Ja zeker, daar heb ik wel aan gedacht. Maar die gedachte heb ik toch maar opgegeven, omdat ik het beroep van leraar niet zo leuk vind.'

We vinden het triest het te moeten zeggen, maar . . . iemand, die zo'n antwoord geeft, loopt een jaar of tien achter.

Voor 1960 was het inderdaad wel waar dat bijna alle afgestudeerde wiskundigen leraar werden. Er waren eigenlijk maar twee andere mogelijkheden. Je kon aan de universiteit verbonden blijven en dan misschien op de lange duur zelfs professor worden. En je kon als statisticus in het bedrijfsleven terecht komen, of op een of ander instituut van de overheid. Geen van die twee 'uitwijkmogelijkheden' bood ruim plaats aan afgestudeerde wiskundigen.

In die tijd begonnen de wiskundigen echter een steeds toenemende stroom van verzoeken om hulp te ontvangen. In allerlei gebieden van de zich snel ontwikkelende maatschappij kreeg men behoefte aan hun vakkennis en deskundigheid. Ze hebben bijvoorbeeld geholpen bij het bestrijden van de trillingen in treinwagons, die immers sneller en sneller gingen rijden. Ze hebben natuurlijk ook bijgedragen aan de vormgeving van schepen en vliegtuigen. Ze hebben meegewerkt aan de ontwikkeling van de kobaltbom voor de kankerbestrijding. Ze hebben, zittend achter hun schrijftafel, de voorraden drinkwater onder onze duingebieden gemeten. Ze hebben een belangrijke rol gespeeld in het wereldberoemde Deltaplan. Ze hebben nieuwe weggennetten voor overstroomde gebieden ontworpen. Ze hebben meegeholpen bij het standaardiseren van geneesmiddelen, zoals insuline. En zo kunnen we haast eindeloos doorgaan.

Rond 1960 zijn er als reactie op die ervaringen nieuwe wiskundige opleidingen ontstaan aan de technische hogescholen in Delft en in Eindhoven. Later werd in Twente een derde T.H. gesticht, waar men al meteen plannen van dezelfde soort begon te maken. Aan de universiteit in Groningen kwam er zoiets als een technische faculteit, waarbinnen ook wiskunde kan worden gestudeerd. Aan alle universiteiten werden groepen van beperkte omvang voor de toegepaste wiskunde opgericht.

Binnen deze nieuwe wiskundige opleidingen, vergis je daarin niet, wordt 'echte' wiskunde gestudeerd. Heb je zo'n opleiding voltooid, dan kun je leraar worden als je dat wilt. Maar je hebt dan ook nog vele andere mogelijkheden binnen de rijk geschakeerde maatschappij van vandaag.

Denk daar eens aan, als je wiskunde een leuk schoolvak vindt.

Van de redactie

In dit nummer tref je twee 'journalistieke' artikelen aan. Namens de hoogleraren De Bruijn en Seidel van de T.H. Eindhoven richten we ons tot je met een artikel over wiskunde studeren. Verder is er een verslag van de 13e Internationale Wiskunde Olympiade (met de daar gestelde opgaven).

Bij dat laatste artikel staat één enkel seintje. Het is dus gemakkelijk te lezen. Maar . . . bij de oplossing van opgave 6 zouden wel twee seintjes mogen staan.

Voor de rekenaars is er een merkwaardig verhaal over een merkwaardige tafel van vermenigvuldiging. De wiskunde van de kantelende kubus is iets moeilijker. En het allermoeilijkst is misschien wel die rare Duitse puzzel over studenten met hun hobbies. Een nieuwe prijsvraag en de gebruikelijke Denkertjes maken dan hopelijk, dat je weer een maandje vooruit kunt.

De oplossingen van de Denkertjes kun je tot 15 januari 1972 inzenden. De termijn is dus wat ruimer dan vorige keer. Dat is om je de kans te geven iets lekkers te bewaren voor de kerstvakantie.

Denkertjes

- 11 Welke veelvouden van 17 eindigen op . . . 1? Welke veelvouden van 17 eindigen op . . . 11? Zijn er veelvouden van 17, die met louter cijfers 1 geschreven worden?
- 12 Bedenk een honderdtal positieve, gehele getallen zo, dat de som van die getallen gelijk is aan hun produkt.
- 13 Zo'n zwart-wit schaakbord is eigenlijk maar een saai ding. Maak er eens een, waarvan de velden vijf verschillende kleuren hebben in plaats van twee. Doe dat zo, dat geen enkel tweetal gelijkgekleurde velden een hoekpunt gemeenschappelijk heeft.
- 14 Reken eens na, dat $(8^3 + 5^3) : (8^3 + 3^3)$ gelijk is aan $(8 + 5) : (8 + 3)$. Kun je nog meer voorbeelden maken van gelijkheden van de vorm $(a^3 + b^3) : (a^3 + c^3) = (a + b) : (a + c)$? Het mooiste is natuurlijk een algemene regel, waarmee je zulke voorbeelden kunt maken.



De tafel van 142857°

$$\begin{aligned} 1 \times 142857 &= 142857 \\ 2 \times 142857 &= 285714 \\ 3 \times 142857 &= 428571 \\ 4 \times 142857 &= 571428 \\ 5 \times 142857 &= 714285 \\ 6 \times 142857 &= 857142 \end{aligned}$$

Bestudeer deze zes produkten eens goed. Je kunt ze allemaal verkrijgen door de nevenstaande ring ergens, tussen twee cijfers in, door te knippen, en daarna die ring te strekken.

Er zijn zes plaatsen waar je de ring door kunt knippen. En de getallen, die zo ontstaan, hebben we allemaal al gehad. Als we dus verder gaan met het opschrijven van de tafel van 142857, dan moet er wel iets nieuws gebeuren.

Kijk maar:

$$7 \times 142857 = 999999$$

Schrijf je een getal van n cijfers op een ring, dan zijn er ook n plaatsen om die ring door te knippen. Door te knippen en te strekken ontstaan er dus n getallen, waarvan er natuurlijk een het getal is dat je oorspronkelijk gekozen hebt om op de ring te schrijven.

We noemen die n getallen 'kringverwisselingen' of 'cyclische permutaties' van dat oorspronkelijke getal van n cijfers. De tafel van 142857 begint dus met de 6 cyclische permutaties van 142857.

Er bestaat geen getal van minder dan zes cijfers, dat de eigenschap heeft dat zijn kleinste veelvouden precies zijn cyclische permutaties zijn. Er zijn wel getallen van meer dan zes cijfers met die eigenschap. Het kleinste daarvan heeft maar liefst 18 cijfers:

$$\begin{aligned} 1 \times 052631578947368421 &= 052631578947368421 \\ 2 \times 052631578947368421 &= 105263157894736842 \\ 3 \times 052631578947368421 &= 157894736842105263 \\ &\vdots \\ 18 \times 052631578947368421 &= 947368421052631578 \\ 19 \times 052631578947368421 &= 999999999999999999 \end{aligned}$$

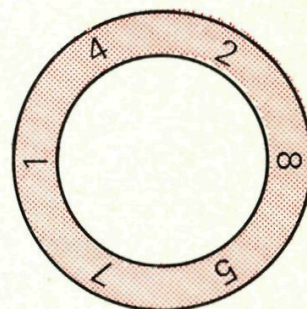


Fig. 1

De twee getallen, die we je nu getoond hebben, zijn natuurlijk heel gekke rariteiten. En Pythagoras is een hoogstaand blad, geen rariteitenkabinet. Je kunt er dus op rekenen, dat er iets wiskundigs achter deze vertoning zit. Wat er achter zit, dat komt voor de dag als we de repetente decimale breuk

$$x = 0,142857142857142857 \dots\dots$$

bestuderen. De zogenaamde periode van deze decimale breuk is het wonderlijke getal 142857.

Deze decimale breuk herleiden we als volgt tot een gewone breuk met teller en noemer:

$$\begin{array}{r} 1000000 x = 142857,142857142857 \dots\dots \\ x = \quad \quad 0,142857142857 \dots\dots \\ \hline 999999 x = 142857 \\ x = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7} \end{array}$$

Dus is 142857 de periode van de repetente decimale ontwikkeling van $\frac{1}{7}$.

Dat die decimale ontwikkeling repetent is, spreekt overigens bijna van zelf. Bij het uitvoeren van de staartdeling $1 : 7$ treden *resten* op. Omdat die deling niet opgaat, kunnen alleen de resten 1, 2, 3, 4, 5, 6 voorkomen. Je moet dus eens terecht komen op een rest, die je al eerder ontmoette. En zodra dat gebeurt, wordt het hele lied weer van voren af aan gedraaid.

$$7/1,000000\dots \setminus 0,142857\dots\dots$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline 50 \\ 49 \\ \hline 1 \end{array}$$

Resten: 1, 3, 2, 6, 4, 5

Als je nu bijvoorbeeld $\frac{3}{7}$ decimaal ontwikkelt, dan krijg je de zelfde 6 resten, maar dan in de (cyclische) volgorde 3, 2, 6, 5, 4, 1. Daarom is $\frac{3}{7} = 0,428571428571 \dots\dots$. En daarom is $3 \times 142857 = 428571$.

Ter vergelijking bekijken we ook nog eens de onderstaande staartdelingen:

$$13/1,000000\backslash 0,076923 \dots$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ \hline 100 \\ 91 \\ \hline 90 \\ 78 \\ \hline 120 \\ 117 \\ \hline 30 \\ 26 \\ \hline 40 \\ 39 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$13/3,0\backslash 0,230769 \dots$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \hline 40 \\ 39 \\ \hline 100 \\ 91 \\ \hline 90 \\ 78 \\ \hline 120 \\ 117 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$13/5,0\backslash 0,384615 \dots$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \hline 110 \\ 104 \\ \hline 60 \\ 52 \\ \hline 80 \\ 78 \\ \hline 20 \\ 13 \\ \hline 70 \\ 65 \\ \hline 5 \end{array}$$

Hierin komen de resten 1, 10, 9, 12, 3, 4 wel voor en de resten 2, 5, 6, 7, 8, 11 niet voor.

Bij de deling $3 : 13$ bijvoorbeeld krijgen we een cyclische permutatie van 076923 als periode, maar bij $5 : 13$ komt er iets heel anders.

De tafel van 076923 heeft dus niet de merkwaardigheid, die ons in de tafel van 142857 opgevallen is:

$1 \times 076923 = 076923$	$2 \times 076923 = 153846$
$3 \times 076923 = 230769$	$5 \times 076923 = 384615$
$4 \times 076923 = 307692$	$6 \times 076923 = 461538$
$9 \times 076923 = 692307$	$7 \times 076923 = 538461$
$10 \times 076923 = 769230$	$8 \times 076923 = 615384$
$12 \times 076923 = 923076$	$11 \times 076923 = 846153$
$13 \times 076923 = 999999$	

Om te verkrijgen dat de tafel keurig netjes begint met *alle* cyclische permutaties, moeten we dus een staartdeling hebben waarin *alle* resten voorkomen. Dat gebeurt bij de deling $1 : 7$ (alle 6 de resten) en dan pas weer bij de deling $1 : 19$ (alle 18 resten).

De delers 7 en 19 zijn priemgetallen (getallen met precies twee verschillende delers, namelijk 1 en zichzelf). Ook achter dit feit steekt een brok wiskunde. Misschien kun je door zelfstudie daar iets van onthullen.

Vijf studenten en hun hobbies^{ooo}

In het Duitse tijdschrift Archimedes stond vorig jaar de volgende 'hersensbreker'. Hij is te mooi om hem onze lezers te onthouden. De oplossing zullen we in het volgende nummer publiceren.

Aan de Berlijnse universiteit studeren de volgende studenten verschillende vakken; ze hebben verschillende voornamen, verschillende hobbies en verschillende geboortestreken.

- a Peter, de bouwkundige, de Rijnlander en de bergbeklimmer zijn dikke vrienden.
- b Frans, de Badener (afkomstig uit Baden), de postzegelverzamelaar en de bouwkundige wonen in de studentenflat naast elkaar.
- c De postzegelverzamelaar komt niet uit Württemberg en heet niet Karl.
- d De natuurkundige voelt zich de gastheer van Frans en van de zanger.
- e De toekomstige arts Karl heeft een zwakke gezondheid en een krakende stem.
- f De Beier heeft een hekel aan bouwkunde, aan kaartspelen en aan postzegelverzamelingen.

- I Welke hobbies hebben Hans, de Badener en de jurist?
- II In welke vakken studeren Helmut, de bergbeklimmer en de Württemberger?
- III Hoe heten de Rijnlander, de taalkundige en de postzegelverzamelaar?
- IV Uit welke streken komen Frans, de atleet en de jurist?



Speelse poolcoördinaten^{oo} (2)

1. Wat zijn poolcoördinaten ook weer?

In het eerste nummer van deze jaargang bleek, dat poolcoördinaten uitnemend geschikt zijn om cirkelvormige figuren mee aan te duiden. We gaan de toepassing ervan nog uitbreiden, maar herhalen eerst even, wat het begrip inhoudt.

a Ze worden gebruikt om de plaats van een punt vast te leggen. In figuur 2 is p de *poolas*, $\angle O$ de *poolhoek* en OA de *voerstraal*. $A(2, 40^\circ)$ betekent: $\angle O = 40^\circ$ en lijnstuk $OA = 2$ cm lang.

b De drie punten $P_0(2, 0^\circ)$, $P_1(2, 120^\circ)$ en $P_2(2, 240^\circ)$ liggen op de cirkel met O als middelpunt en 2 cm als straal. De poolhoeken zijn 0.120° , 1.120° en 2.120° . Ook is $P_3(2, 360^\circ) = P_0(2, 0^\circ)$ en $P_4(2, 480^\circ) = P_1(2, 120^\circ)$ enz.

We vangen de punten in de verzameling

$$P = \{P_k(2, k \cdot 120^\circ) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Figuur 3 is de afbeelding van deze verzameling. De voerstralen zijn *constant*.

2 Variabele voerstralen.

a *Lineaire functies.*

Tot nu toe hebben we verzamelingen punten gebruikt, waarbij de voerstralen een *constante* lengte hadden. Figuur 4 is een voorbeeld van *variabele* voerstraallengten.

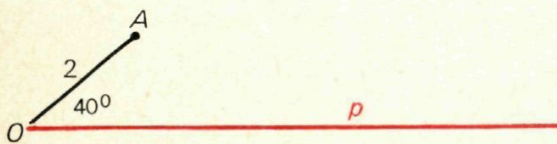


Fig. 2

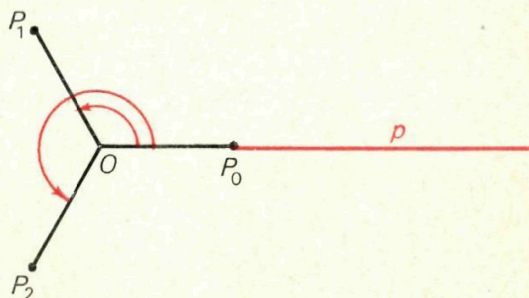


Fig. 3

Bekijk dat eerst eens in een tabel:

origineel	beeld (voerstraallengte)	punt
k	?	P_k
0	1	$P_0(1,0^\circ)$
1	2	$P_1(2,60^\circ)$
2	3	$P_2(3,120^\circ)$
3	4	$P_3(4,180^\circ)$
enz.		

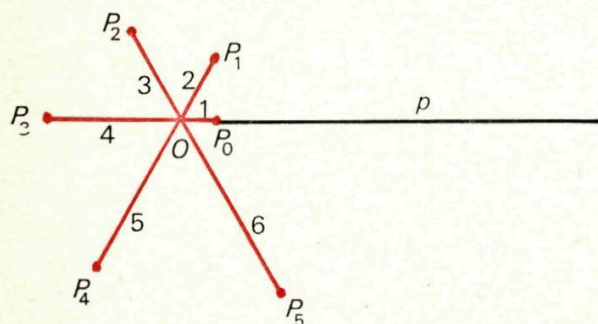


Fig.4

Elk beeld is 1 meer dan het bijbehorend origineel. De voerstraallengte is een lineaire functie van k en wel $k \rightarrow k + 1$. De verzameling punten wordt geschreven als $P = \{P_k(k + 1, k \cdot 60^\circ) \mid k \in A\}$
 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

b Kwadratische functies.

Voor de voerstraallengte gebruiken we nu een tweedegraadsfunctie van k , bijv. $k \rightarrow (k - 2)^2$

De verzameling punten is:

$$P = \{P_k[(k - 2)^2, k \cdot 90^\circ] \mid k \in A\} \quad A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Het is raadzaam de voerstralen apart uit te rekenen. Een tabel is daarvoor weer het meest geschikt.

origineel	beeld(voerstraal)	punt
k	$(k - 2)^2$	P_k
0	4	$P_0(4,0^\circ)$
1	1	$P_1(1,90^\circ)$
2	0	$P_2(0,180^\circ)$
3	1	$P_3(1,270^\circ)$
4	4	$P_4(4,360^\circ) = P_4(4,0^\circ)$

De afbeelding hiervan, figuur 5, is heel eenvoudig, maar laat toch duidelijk zien, dat de poolas ook as van symmetrie is.

Met wat fantasie kan men in figuur 5 een boompje zien met drie takken. Eigenlijk is er een vierde, maar die heeft lengte nul. Zie punt P_2 . Het boompje gaat er voller uitzien, als de poolhoeken kleiner gekozen worden.

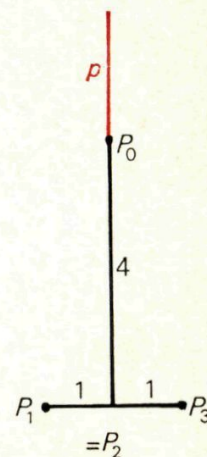


Fig.5

Ook als de minimum voerstraallengte groter dan nul wordt gemaakt. De functie $(k - 9)^2 + 10$ komt aan die wensen tegemoet en zo ontstaat de verzameling punten

$$P = \{P_k[(k - 9)^2 + 10, k \cdot 20^\circ] \mid k \in A\}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 18\}$$

Zie figuur 6 en daarna figuur 7.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$(k-9)^2 + 10$	91	74	59	46	35	26	19	14	11	10	11	14	19	26	35	46	59	74	91

Fig. 6

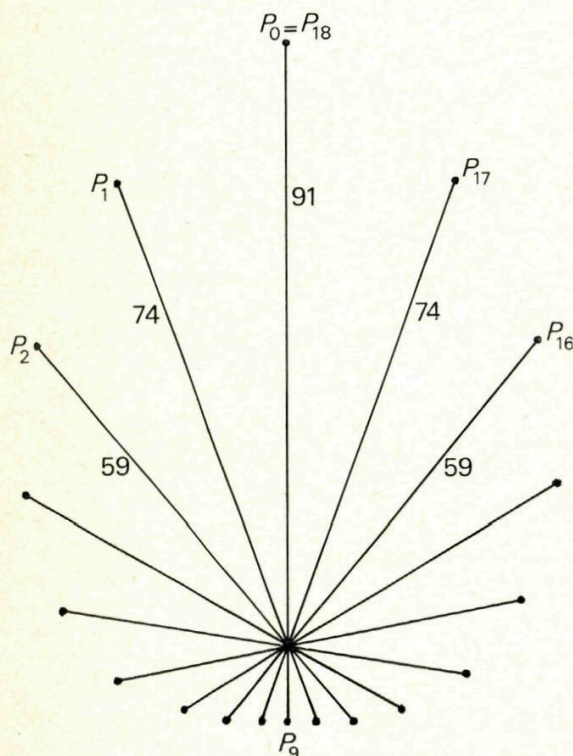


Fig. 7

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$(k-2)(k-6)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

Fig. 8

OPMERKING:

Wie zelf wil gaan tekenen, moet op het volgende letten:

1 Begin de tabel met het minimum $f(9) = 10$

Daarna volgen $f(8) = f(10) = 11$

$f(7) = f(11) = 14$ enz.

2 Bij keuze van de hoekcoördinaten $k \cdot 20^\circ$ ontstaan er 18 punten, wegens $360^\circ = 18 \times 20^\circ$

De voerstraalfunctie moet dan zo gekozen worden, dat voor $k = 9$ een minimum optreedt. Gebeurt dat niet, nemen we bijv. $(k - 11)^2 + 10$, dan is de symmetrie verloren gegaan.

Verder neuzende in de voorraad kwadratische functies blijkt het, dat sommige voor een onaangename verrassing zorgen. De functie $f(k) = k^2 - 8k + 12 = (k - 2)(k - 6)$ weigert hier en daar een voerstraal te

leveren. Immers $f(4) = (4 - 2)(4 - 6) = -4$. Een negatieve lengte is evenwel ondenkbaar. Zie figuur 8. We redden ons met $f(k) = |(k - 2)(k - 6)|$. De tabel wordt nu: (Zie figuur 9).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$ (k-2)(k-6) $	12	5	0	3	4	3	0	5	12

Fig. 9

Lettend op de *gehele* tabel, zien we dat het maximum van de voerstraallengte 12 is. Blijven we in de omgeving van $k = 4$, dus binnen de rode rechthoek, dan valt daar het maximum 4 op. We zeggen:

Er is: een *absoluut* maximum 12 voor $k = 0$ en $k = 8$
 een *relatief* maximum 4 voor $k = 4$
 een *absoluut* minimum 0 voor $k = 3$ en $k = 5$

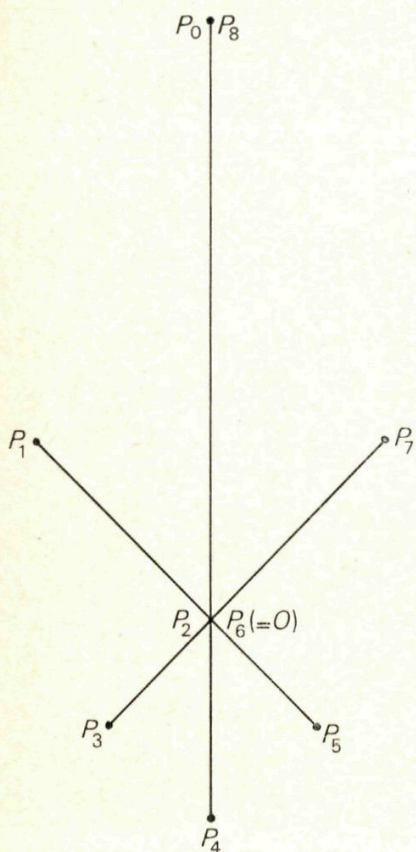


Fig. 10

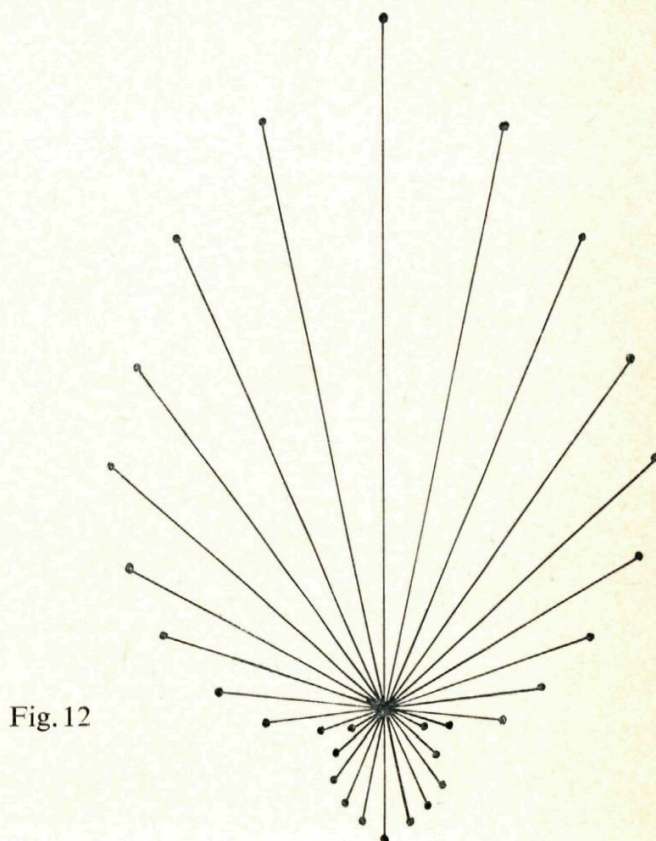


Fig. 12

Fig. 11

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$ (k-10)(k-20) + 10$	210	181	154	129	106	85	66	49	34	21	10	19	26	31	34	35	34	31	26	19	10	21	34	49	66	85	106	129	154	181	210

Ga nu zelf na hoe al deze extremen hun afbeelding vinden in figuur 10. Daar is de verzameling

$$P = \{P_k[(k-2)(k-6) \mid k \cdot 45^\circ] \mid k \in A\}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 8\}$$

getekend.

Een sierlijker boeket voerstralen ontstaat uit de verzameling $P = \{P_k[(k-10)(k-20) \mid +10, k \cdot 12^\circ]\}$

$k \in A\}$ en $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 30\}$ Zie de figuren 11 en 12.

3 Combinaties van variabele en constante voerstralen

Het eenvoudige voorbeeld van figuur 13 begint bij de verzameling $P = \{P_k(3, k \cdot 120^\circ) \mid k \in N\}$

Er ontstaan dus drie punten P_k met gelijke voerstralen OP_k . Voor een verdere uitbouw dienen de punten P_k zelf weer als pool en de verlengden van de lijnstukken OP_k als poolas. Figuur 10 kan drie keer geplaatst worden. Dat is hier twee maal gebeurd bij de punten P_0 en P_1 .

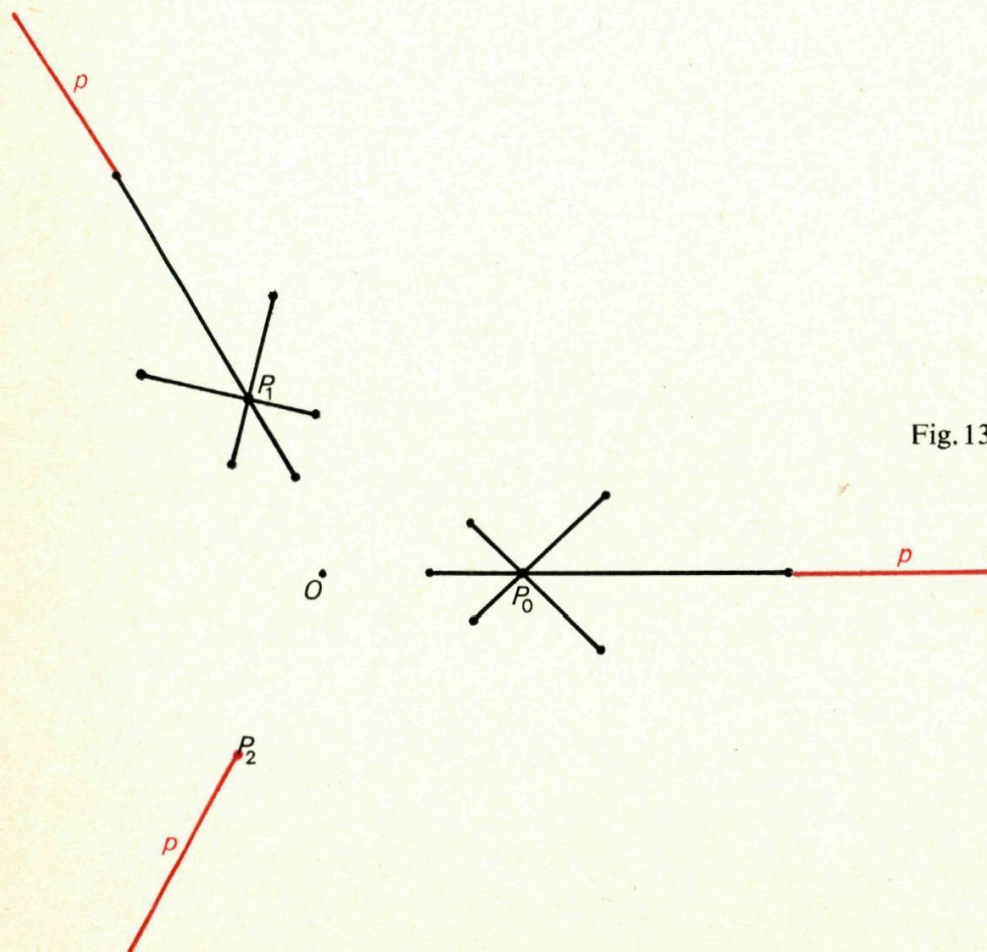


Fig. 13

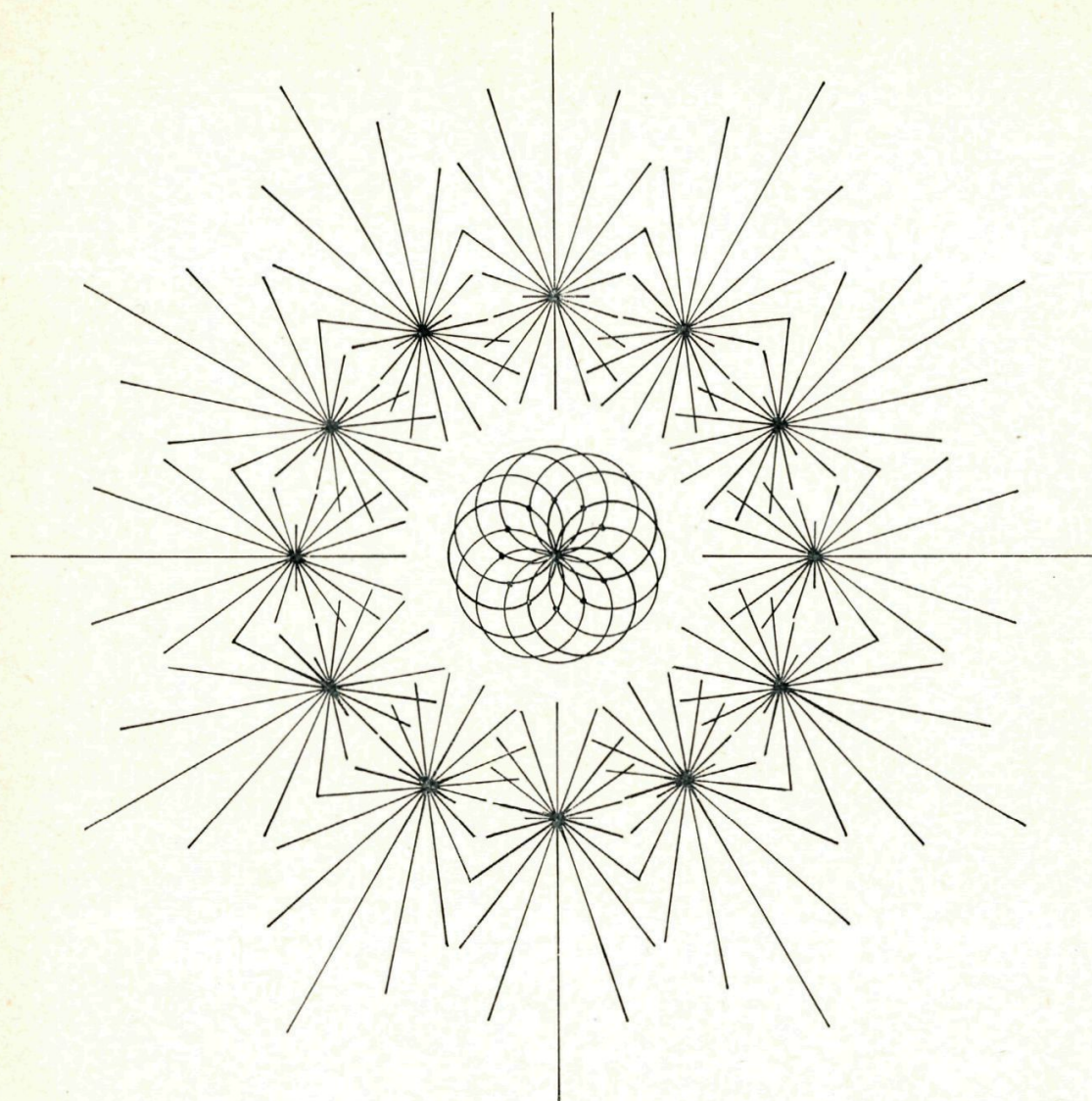


Fig. 14

Figuur 14 laat zien, dat het Eurovisiebeeld wiskundig kan worden uitgedrukt. Na al het voorgaande is een gedetailleerde toelichting niet meer nodig. Daarom volgt hier alleen de opbouw!

- 1 De verzameling punten $P = \{P_k(3, k \cdot 30^\circ) \mid k \in N\}$
De voerstralen zijn niet getekend.
- 2 De 12 keer afgebeelde verzameling punten
 $T = T_k[(k - 5)(k - 15) \mid + 10, k \cdot 18^\circ] \mid k \in A\}$
 $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 20\}$
- 3 Voor P gebruik je als maateenheid 1 cm, voor T de eenheid $\frac{1}{2}$ mm.
- 4 Het hart is gevuld met:
De verzameling punten $Q = \{Q_k(7, k \cdot 30^\circ \mid k \in N\}$
De verzameling cirkels $C = \{C_k(Q_k, 7) \mid k \in N\}$
- 5 Voor Q maateenheid 1 mm, voor C ook 1 mm.



4 Zelf aan de slag.

Je grijpt al naar papier en tekengerei? Prachtig. Laat je vaardige hand aan een eigen ontwerp gestalte geven. Maak een keus uit het oneindig aantal lineaire en kwadratische functies, houd de voerstralen constant, of laat ze variëren. Kortom, experimenteer. Vergeet de tegenvallers en stuur je geslaagde kunstwerk naar de redactie. Misschien kan het een plaatsje vinden in een volgend nummer van deze jaargang. Veel succes.

Prijsvraag

In de figuur hiernaast zie je een witte cirkelvormige ring, waarin de getallen 1 tot en met 12 op de gewone wijzerplaat-manier geschreven zijn.

Deze ring is vast, maar de rode cirkelschijf kan binnen die ring draaien.

Ook op die rode cirkelschijf zijn de getallen van 1 tot en met 12 geschreven, maar in een andere volgorde. Zie je wel dat er vier getallen van de ring met de daar vlak bij staande getallen op de schijf overeenkomen? Het zijn de getallen 2, 6, 7 en 10.

Draaien we de schijf één uur verder (met de klok mee), dan gebeurt dit slechts met twee getallen: de 1 en de 12.

Draaien we de schijf dan nog een uur verder, dan zijn er helemaal geen getallen meer op de ring, die overeenkomen met de erbij staande getallen op de schijf.

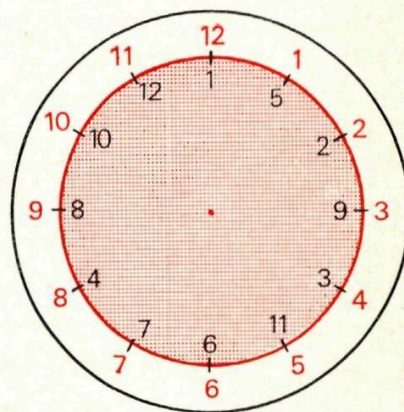


Fig. 15

Is het mogelijk die getallen op de schijf zo neer te zetten, dat er in elk van de 'uurstanden' van de schijf precies één van die getallen overeenkomt met het daarbij staande getal op de ring?

In plaats van twaalf getallen op ring en schijf kun je ook een ander aantal kiezen. Hieronder zie je een ring en schijf met de getallen 1, 2, 3 in elk van de drie standen getekend.

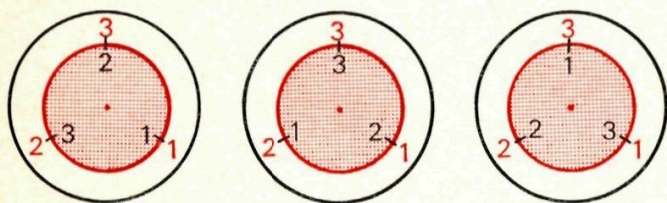


Fig. 16

Je ziet dat er in elk van de drie standen precies één getal op de ring overeenkomt met zijn buurman op de schijf. In dit geval moet de hierboven gestelde vraag dus bevestigend beantwoord worden.

We vragen je nu dit ring-en-schijf-probleem algemeen op te lossen.

Dit wil zeggen dat je deze situatie moet bestuderen voor het geval, dat de getallen 1 tot en met 4 op ring en schijf gezet worden. Ook voor de getallen 1 tot en met 5. Ook voor de getallen 1 tot en met 6. En zo verder.

Voor goede, correct beredeneerde oplossingen stellen we een aantal prijzen in de vorm van boekenbonnen beschikbaar.

Oplossingen moeten voor 1 februari 1972 op het redactiesecretariaat zijn.

Denkertjes

- 15 Op een vel roosterpapier (het rooster bestaat uit vierkanten met zijden van 1 centimeter) tekent men een scherphoekige driehoek, waarvan de drie hoekpunten roosterpunten zijn en waarbinnen slechts één roosterpunt ligt. Bereken de kleinste oppervlakte die deze driehoek kan hebben.
- 16 Een dunne lange draad van 10 meter lengte moet verknipt worden tot 100 stukjes van een decimeter lengte. Dat kan natuurlijk gebeuren, door 99 keer te knippen. Dit aantal kan echter aanzienlijk verminderd worden door meerdere stukken van die draad tegelijk door te knippen. Hoe vaak moet men minstens knippen om het doel te bereiken?
- 17 Pientere Pietje beweert: als een hoek van 19° met passer en liniaal geconstrueerd kan worden, dan kan elke hoek met een geheel aantal graden met passer en liniaal geconstrueerd worden. Heeft Pietje gelijk?
- 18 Een insect vliegt twee keer heen en weer over dezelfde afstand. Eerst heen met een snelheid van 30 km/uur, dan terug met 60 km/uur, weer heen met 90 km/uur en terug met 120 km/uur. Wat is de gemiddelde snelheid van het insect gedurende dit heen-en-weer-gevlieg?
- 19 Bedenk een manier, waarop je alle oplossingen van $xy + 3x - 5y + 3 = 0$ kunt vinden waarin x en y gehele getallen zijn (er zijn twaalf van die oplossingen).
- 20 Schrijf een zo groot mogelijk aantal positieve gehele getallen op zo, dat geen enkel drietal van de opgeschreven getallen een drievoud als som heeft. Kun je aantonen dat jouw aantal getallen inderdaad zo groot mogelijk is?



We nemen aan dat je een schaakbord tot je beschikking hebt. De velden hiervan zijn vierkanten en het is de bedoeling dat je een kubus vervaardigt van karton, zodanig dat de zijvlakken even groot zijn als de velden van het schaakbord.

Plaats de kubus op één van de velden midden op het schaakbord. Je kunt de kubus nu kantelen om een ribbe, zodat hij komt te rusten op een veld naast het oorspronkelijke. Door achtereenvolgende kantelingen kun je elk veld van het bord bereiken.

Vragen

- 1 Zet een kruis op een bepaald veld van het schaakbord. Kun je de kubus met elk gewenst zijvlak op het aangekruiste veld krijgen, door op verschillende manieren te kantelen vanuit dezelfde uitgangssituatie?

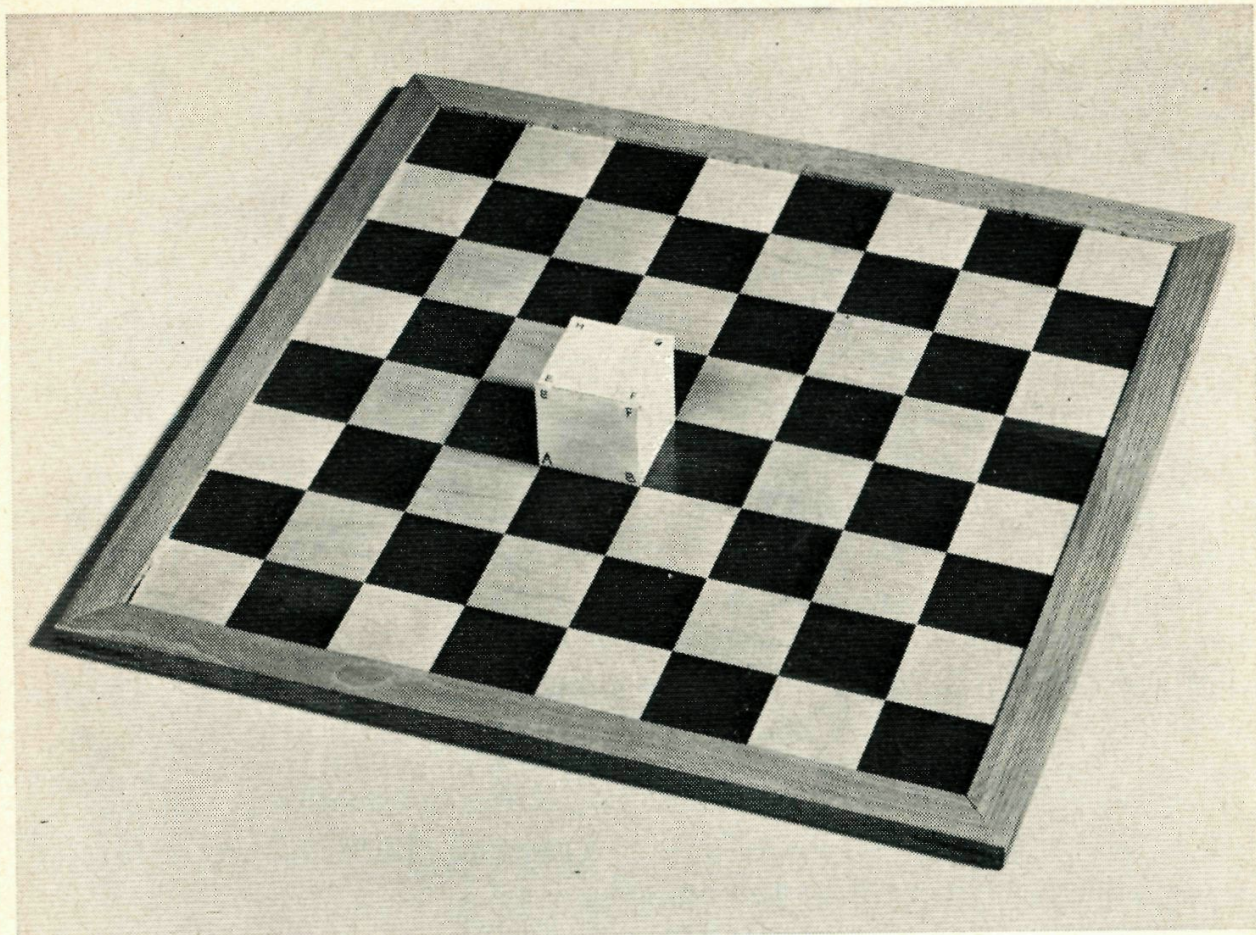
Plaats de kubus bijvoorbeeld met het zijvlak $ABFE$ op een veld. Zet je vinger bij hoekpunt A . Door de kubus om zijn as te draaien kun je ook de andere hoekpunten op de plaats van de vinger krijgen. De kubus kan dus met één van zijn zijvlakken op één bepaald veld van het schaakbord vier verschillende standen innemen.

- 2 Zijn deze standen alle vier door kantelen vanuit dezelfde beginsituatie te verkrijgen?
- 3 Wat is in elk van de gevallen waarin vraag 2 positief beantwoord kan worden, het minimale aantal kantelingen dat je moet uitvoeren?
- 4 Neem de uitgangssituatie. Hoeveel verschillende standen kan de kubus na kantelen innemen, zodanig dat hoekpunt A weer zijn oorspronkelijke plaats inneemt?
- 5 Hoeveel standen van de kubus zijn door kantelen bereikbaar, zodanig dat hoekpunt A in het geheel niet van zijn plaats komt?

De kantelende kubus^{oo}

In de vorige jargaang plaatste professor dr. H. Freudenthal een prijsvraag over een kantelende kubus. Er kwamen maar weinig oplossingen binnen en dus was het een moeilijke prijsvraag. Op die moeilijkheden willen wij nu eens ingaan. Wij menen daar iets over te kunnen vertellen dat ook van belang is voor iemand, die de prijsvraag niet kon oplossen of niet probeerde op te lossen.

De kubus staat in de uitgangssituatie op een middenveld van een schaakbord, zoals in de foto getoond wordt. Je mag de kubus laten kantelen om een willekeurige grondvlakribbe, zodat hij op een veld naast het beginveld komt te liggen. Dan mag je weer een ribbe kiezen van het zijvlak, waar de kubus dan op rust, en kantelen om de gekozen ribbe. En zo verder, net zo vaak als je wilt.



Nu kies je een ander veld van het schaakbord uit als doelveld. Je wilt de kubus al kantelende naar dat doelveld brengen en hem tenslotte op dat doelveld laten rusten. Kun je dat altijd doen, hoe je dat doelveld ook kiest?

Het is gemakkelijk in te zien, dat hieraan geen enkele moeilijkheid verbonden is. Daarom gaan we de vraag iets pittiger maken. Onze kubus heeft zes zijvlakken. Je kunt ze van elkaar onderscheiden door op de kubus letters te zetten bij de hoekpunten volgens het schema van figuur 17. Nu kiezen we niet alleen een doelveld uit, waar we de kubus naar toe willen brengen. We kiezen ook nog van te voren één van zijn zes zijvlakken uit en willen dat hij straks, als hij op het doelveld aankomt, op dat uitgekozen zijvlak komt te rusten. Is ook dat mogelijk bij elke keuze van doelveld en van toekomstig grondvlak?

En hier begonnen nou de problemen van professor Freudenthal.

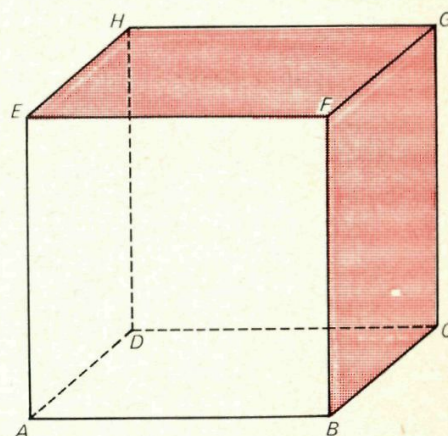


Fig. 17

Je kunt het doelveld op 63 verschillende manieren kiezen. Heb je het doelveld eenmaal gekozen, dan kun je nog op 6 verschillende manieren een toekomstig grondvlak aanwijzen. Dat betekent, dat je maar liefst $63 \cdot 6 = 378$ verschillende gevallen moet onderscheiden. Hoe begin je in vredesnaam aan zo iets ingewikkelds?

En stel je eens voor dat je, na eelt op je vingers gekregen te hebben van al dat gekantel, tot de slotsom zou komen dat het in elk van die 378 gevallen inderdaad mogelijk is. Hoe schrijf je dan je oplossing op? Misschien door voor elk van die 378 gevallen een serie kantelingen te beschrijven, die tot het doel voert?

Het lijkt inderdaad een karwei, waar je beter maar niet aan kunt beginnen. Niettemin verzekeren wij je, dat je al voor hetere vuren gestaan hebt. Luister maar.

Tweedegraads-vergelijkingen zijn vergelijkingen met het bouwschema $ax^2 + bx + c = 0$. Voor de schemaletters a , b , c kun je willekeurige getallen kiezen. Er is slechts één beperking, namelijk dat a niet gelijk mag zijn aan 0.

Hoeveel verschillende tweedegraads-vergelijkingen zijn er? Meer dan die 378 van zoëven, nietwaar?

Betekent dat nou dat de vraag 'heeft elke tweedegraads-vergelijking wortels?' ingewikkelder is dan de vraag 'kun je de kubus op elk gewenst doelveld op elk gewenst grondvlak brengen?'

Alle wetenschap omtrent de wortels van tweedegraads vergelijkingen wordt afgeleid uit de studie van bijzondere tweedegraads vergelijkingen. Namelijk uit die met het bouwschema $x^2 = k$.

Een dergelijke overgang van het bijzondere naar het algemene is typisch wiskundig. We gaan dat ook doen bij het kubusprobleem.

In de eerste plaats onderzoeken we voor één bepaald doelveld of we de kubus daar op elk van zijn zes zijvlakken kunnen laten rusten tenslotte. We kiezen daarvoor het zwarte veld, dat rechts naast het beginveld ligt. Maar we hadden er elk ander veld even goed voor kunnen kiezen (met inbegrip van het beginveld zelf).

Welnu, kantel je achtereenvolgens om

AB, BF, BC

dan komt de kubus op zijn doelveld aan en ligt dan op het zijvlak $ABCD$.

Evenzo leiden de kantelseries

AB, EF, FG, BF, AE tot ligging op $ADHE$
 CD, DH, AB, CD, GH tot ligging op $EFGH$
 AD, DH, CD, AD, AE tot ligging op $ABEF$
 AD, AE, AB, AD, DH tot ligging op $CDHG$
 BC tot ligging op $BCGF$

Op dit bijzondere doelveld kun je dus de kubus op elk gewenst zijvlak laten rusten.

Kies nu een willekeurig ander doelveld en een willekeurig toekomstig grondvlak uit. Breng de kubus op zes verschillende manieren van het beginveld naar dat doelveld toe.

Je begint met een van de zes hierboven genoemde kantelseries, die de kubus naar het zwarte buurveld brengen. Van daar uit breng je de kubus naar het doelveld en wel in elk van de zes series langs precies dezelfde weg. Het is duidelijk dat de zes eindresultaten verschillend zijn. En daarom is er vast en zeker precies één bij die aan je wensen voldoet.

Ziezo, dat probleem is opgelost.

Nu is het vrijwel altijd zo, dat zodra er een probleem opgelost is nieuwe problemen zich opdringen voor iemand, die nieuwsgierig genoeg is.

Ook hier is dat het geval. Als je de kubus zomaar neer mocht zetten op dat gekozen doelveld, en rustende op dat gekozen zijvlak, dan waren er altijd nog vier verschillende standen waarin je hem neer kon zetten. Zijn die vier standen allemaal ook door kantelen te bereiken? Dat was dan een volgende vraag uit de prijsvraag van vorig jaar.

We hebben je al gewezen op een vraag, die een wiskundige vaak stelt: kan ik algemene kennis afleiden uit die van een bijzonder geval. Naar aanleiding van dit nieuwe probleem wijzen we je op een andere vraag, die ook telkens een rol speelt in het wiskundige denken: is er temidden van al die veranderende dingen iets te vinden, dat niet verandert.

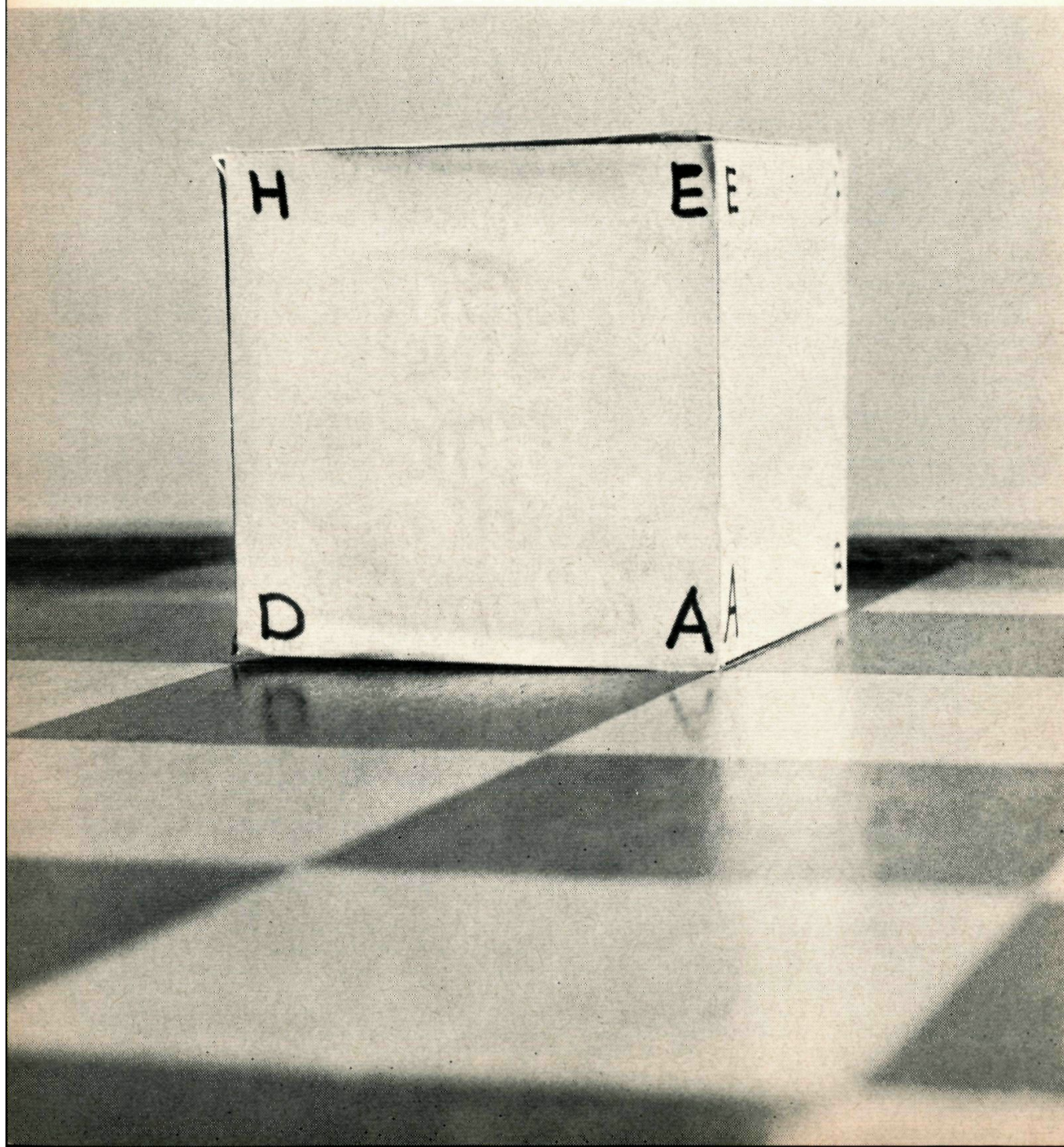
Bij dat kantelen van de kubus veranderen telkens de hoekpunten van plaats. De plaats van een hoekpunt kan aangeduid worden door coördinaten.

Kies x -as en y -as langs twee opvolgende randen van het schaakbord. Kies de z -as loodrecht op het vlak van het schaakbord. Kies als lengte-eenheid de zijde van een veld van het bord. En ga nu eens kijken wat er met de drie coördinaten van een hoekpunt van de kubus bij

het kantelen gebeurt.

Hoe je ook kantelt, er is altijd één van de drie coördinaten constant. De andere twee veranderen elk met één eenheid. Gevolg: de som van die drie coördinaten blijft even als hij even was, blijft oneven als hij oneven was. Hier hebben we iets onveranderlijks gevonden, namelijk het even of oneven zijn van de coördinatensom van een hoekpunt.

Kijk nu nog maar eens naar de foto van de kubus. En vraag je af of het hoekpunt *A* door kantelen ooit gebracht kan worden op de plaats, waar nu *B* zich bevindt. Of verzin zelf nog een paar andere vragen. Er zijn er genoeg te vinden op dit schaakbord met kubus.



De 13de internationale wiskunde-olympiade°

In juli 1971 waren in Tsjechoslowakije vijftien ploegen bijeengekomen voor de jaarlijkse wedstrijd in het oplossen van wiskundeproblemen. Zij kwamen uit

Hongarije	(255)	Tsjechoslowakije	(55)
Rusland	(205)	Nederland	(48)
Oost-Duitsland	(142)	Zweden	(43)
Polen	(118)	Bulgarije	(39)
Roemenië	(110)	Frankrijk	(38)
Engeland	(110)	Mongolië	(26)
Oostenrijk	(82)	Cuba	(9)
Zuidslavië	(69)		

De getallen tussen haakjes zijn de aantallen punten, die de ploegen wisten te binnen halen. Je zou dus kunnen zeggen dat Hongarije deze olympiade gewonnen heeft (en wel voor de zevende keer!). Maar eigenlijk mag je het niet zo stellen, want volgens de statuten is de internationale wiskunde-olympiade een wedstrijd van personen, niet een wedstrijd van ploegen. Als winnaar moet dan ook beschouwd worden de Hongaarse jongeman Rusza Imre, de enige van de 115 deelnemers die het maximale aantal punten van 42 scoorde. Hij kreeg één van de zeven eerste prijzen, plus nog twee extra prijzen voor zeer bijzondere oplossingen van twee van de zes vraagstukken. De overige eerste prijzen gingen naar drie teamgenoten van hem en naar een Oost-Duitser, een Pool en een Rus. Ook in de Nederlandse ploeg waren er prijswinnaars: Chris Jacobs en Gerard Renardel de Lavalette kregen elk een derde prijs.

Bovendien kreeg Gerard ook nog een extra prijs voor zijn fraaie oplossing van vraagstuk 2.

De opgaven waren heel wat moeilijker dan vorig jaar. Als je er een of meer van kunt oplossen, stuur ons dan je oplossing eens toe.

Als voorbeeld geven we aan het slot van dit artikel een oplossing van het zesde vraagstuk. Je zult daarin zien dat er alleen maar heel simpele hulpmiddelen gebruikt worden. Maar gemakkelijk, dat is iets anders ...

Opgave 1 (Hongarije, 5 punten)

Bewijs dat de volgende bewering waar is voor $n = 3$ en voor $n = 5$, maar fout is voor elke andere gehele n groter dan 2: Voor elke keuze van de reële getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ geldt:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) + \dots + (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \geq 0$$



Hier zie je het Nederlandse olympiadeteam aangetreden met hun Roemeense collega's voor een zeer vriendschappelijk partijtje voetbal.

Foto: Steven H. Dijk

Opgave 2 (Rusland, 7 punten)

Gegeven is een convex veelvlak P_1 met 9 hoekpunten $A_1, \dots, A_9$.

Onder P_i ($i = 2, 3, \dots, 9$) verstaan we het veelvlak, dat ontstaat door P_1 zo te transleren dat A_1 in A_i terecht komt.

Bewijs dat ten minste twee van de veelvlakken $P_1, \dots, P_9$ inwendige punten gemeenschappelijk hebben.

Opgave 3 (Polen, 9 punten)

Bewijs dat de verzameling getallen van de vorm $2^k - 3$ ($k = 2, 3, \dots$) een oneindige deelverzameling bevat met de eigenschap dat elk tweetal elementen van die deelverzameling onderling ondeelbaar is.

Opgave 4 (Nederland, 6 punten)

Alle zijvlakken van het viervlak $ABCD$ zijn scherphoekige driehoeken. We beschouwen alle gesloten, gebroken lijnen $XYZTX$ waarvoor geldt: X is een punt van de ribbe AB , dat niet samen valt met A of B ; evenzo zijn Y, Z, T opvolgend inwendige punten van de ribben BC, CD, DA .



Behalve voor het oplossen van wiskundige problemen werd tijdens de Olympiade in Tsjecho-Slowakije ook tijd uitgetrokken voor toeristische evenementen.

Foto: Gerard Renardel de Lavalette

Bewijs

- a als de som van de hoeken DAB en BCD ongelijk is aan de som van de hoeken ABC en CDA , dan is er onder die lijnen $XYZTX$ geen kortste;
- b als die twee sommen wel gelijk zijn, dan zijn er oneindig veel kortste lijnen $XYZTX$ en die hebben de lengte $2 \cdot AC \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, waarin α de som van de hoeken BAC , CAD en DAB is.

Opgave 5 (Bulgarije, 7 punten)

Bewijs dat er bij elk positief geheel getal m een (niet-lege) eindige verzameling S van punten in een vlak bestaat zo, dat elk punt van S de afstand l heeft tot precies m andere punten van S .

Opgave 6 (Zweden, 8 punten)

In elk van de velden van een ' n -bij- n schaakbord' is een niet-negatief geheel getal geschreven. Gegeven is dat de som van de getallen in een willekeurige rij plus die van de getallen in een willekeurige kolom ten minste gelijk is aan n , als het getal dat zowel in die rij als in die kolom staat gelijk is aan 0.

Bewijs dat de som van alle getallen op het bord niet kleiner is dan $\frac{1}{2}n^2$.

Oplossing van opgave 6

Als er geen enkele rij is zo, dat de som van de getallen in die rij kleiner is dan $\frac{n}{2}$, dan zijn we klaar. Want de som van alle getallen op het bord is gelijk aan de som van de n 'rijssommen' en dat is dan ten minste

$$n \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}n^2$$

Hetzelfde geldt als er geen enkele kolomsom kleiner dan $\frac{n}{2}$ is.

We nemen dus aan dat de kleinste van alle rij- en kolomsommen kleiner dan $\frac{n}{2}$ is en we noemen dat getal p . Nu zoeken we een rij of kolom met die minimale som p op om hem nader te bestuderen. Gemakshalve nemen we aan dat we een rij met rijssom p vinden.

Het aantal positieve getallen in die rij noemen we k ; het aantal nullen in die rij is dan dus $n - k$. Elk van die positieve getallen is ten minste gelijk aan 1 , zodat de rijssom ten minste gelijk is aan k :

$$k \leq p < \frac{n}{2}$$

We passen nu de gegeven eigenschap van het schaakbord toe op een van de nullen in die rij met rijssom p . We vinden dat de kolomsom van de kolom, waar die nul in staat, ten minste gelijk is aan $n - p$. Er zijn $n - k$ dergelijke kolommen. Van hun bijdrage S_1 tot de som S van alle getallen weten we dus nu

$$S_1 \geq (n - k)(n - p)$$

Van de overige k kolommen kunnen we niets anders zeggen dan dat hun kolomsom niet kleiner is dan p . Dat betekent voor hun bijdrage S_2 dat

$$S_2 \geq kp.$$

Zo komen we dus tot

$$\begin{aligned} S &\geq (n - k)(n - p) + kp \\ \text{of } S &\geq n(n - p) - k(n - 2p). \end{aligned}$$

Omdat $n - 2p$ positief is en $k \leq p$, geldt dus zeker

$$\begin{aligned} S &\geq n(n - p) - p(n - 2p) \\ \text{of } S &\geq 2p^2 - 2pn + n^2 \\ \text{of } S &\geq 2\left(\frac{1}{2}n - p\right)^2 + \frac{1}{2}n^2 \end{aligned}$$

Hierin is de eerste term positief, dus concluderen we tot $s > \frac{1}{2}n^2$, zodat we ook in dit geval klaar zijn.

Dat de minimale som van $\frac{1}{2}n^2$ voor even n 'haalbaar' en voor oneven n 'bijna haalbaar' is kunnen we nagaan door het bord te vullen met nullen op velden van de ene kleur en enen op velden van de andere kleur.

Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 15 januari 1972 worden ingezonden naar het redactiesecretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.

Voor de prijsvraag sluit de inzendingstermijn op 1 februari 1972.

Inhoud:

Wiskunde studeren °	25
Van de redactie	26
Denkertjes	26, 39
De tafel van 142857 °	27
Vijf studenten en hun hobbies °°	30
Speelse poolcoördinaten 2 °°	31
Prijsvraag	38
De kantelende kubus °°	40
De 13de internationale wiskunde-olympiade °	45

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.

BRUNO ERNST, Amersfoort.

A. F. VAN TOOREN, 's-Gravenhage.

R. H. PLUGGE, Amstelveen.

G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, besteld via één der docenten, f 4,50 per jaargang. Voor anderen f 7,00.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

