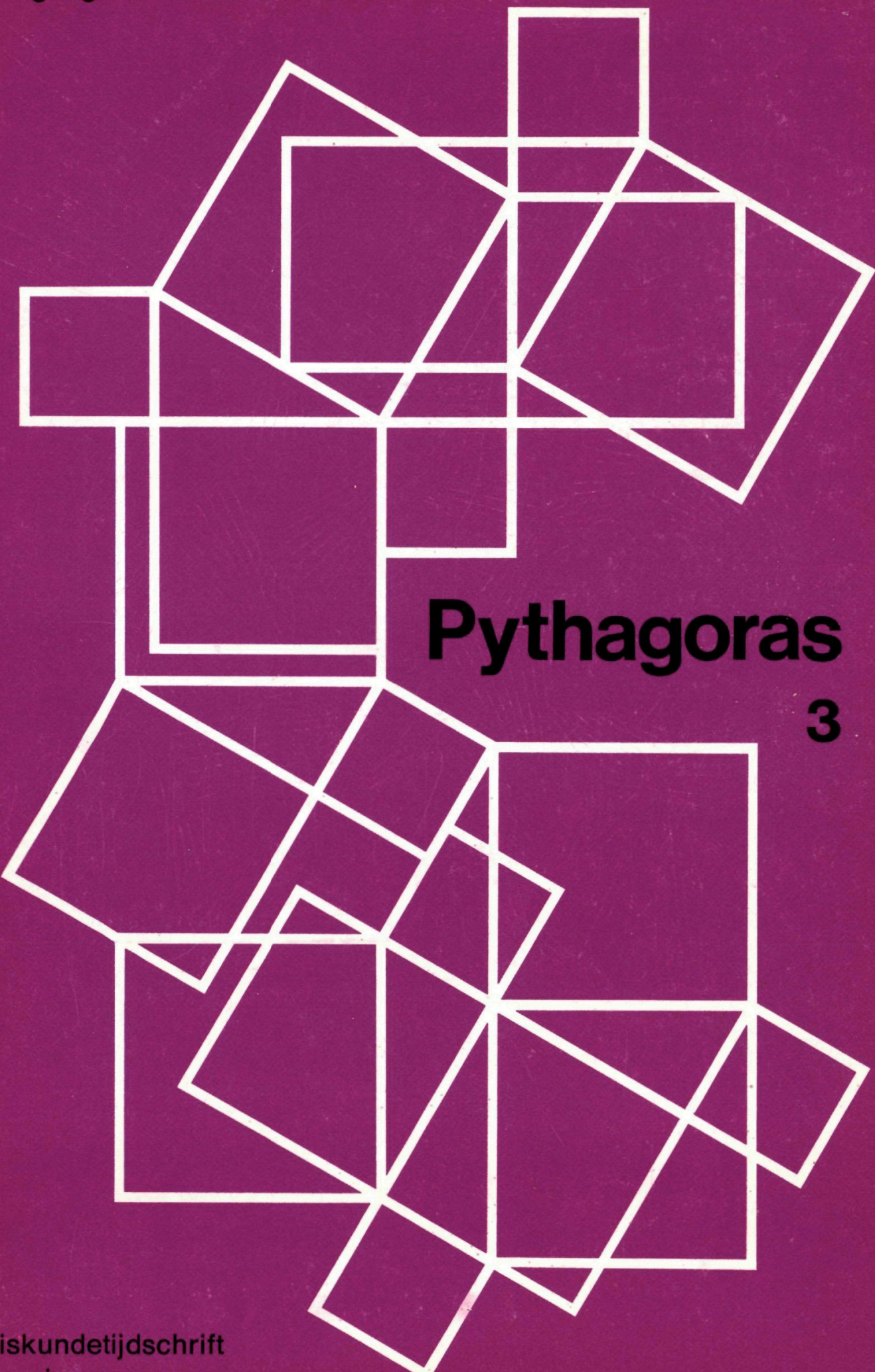


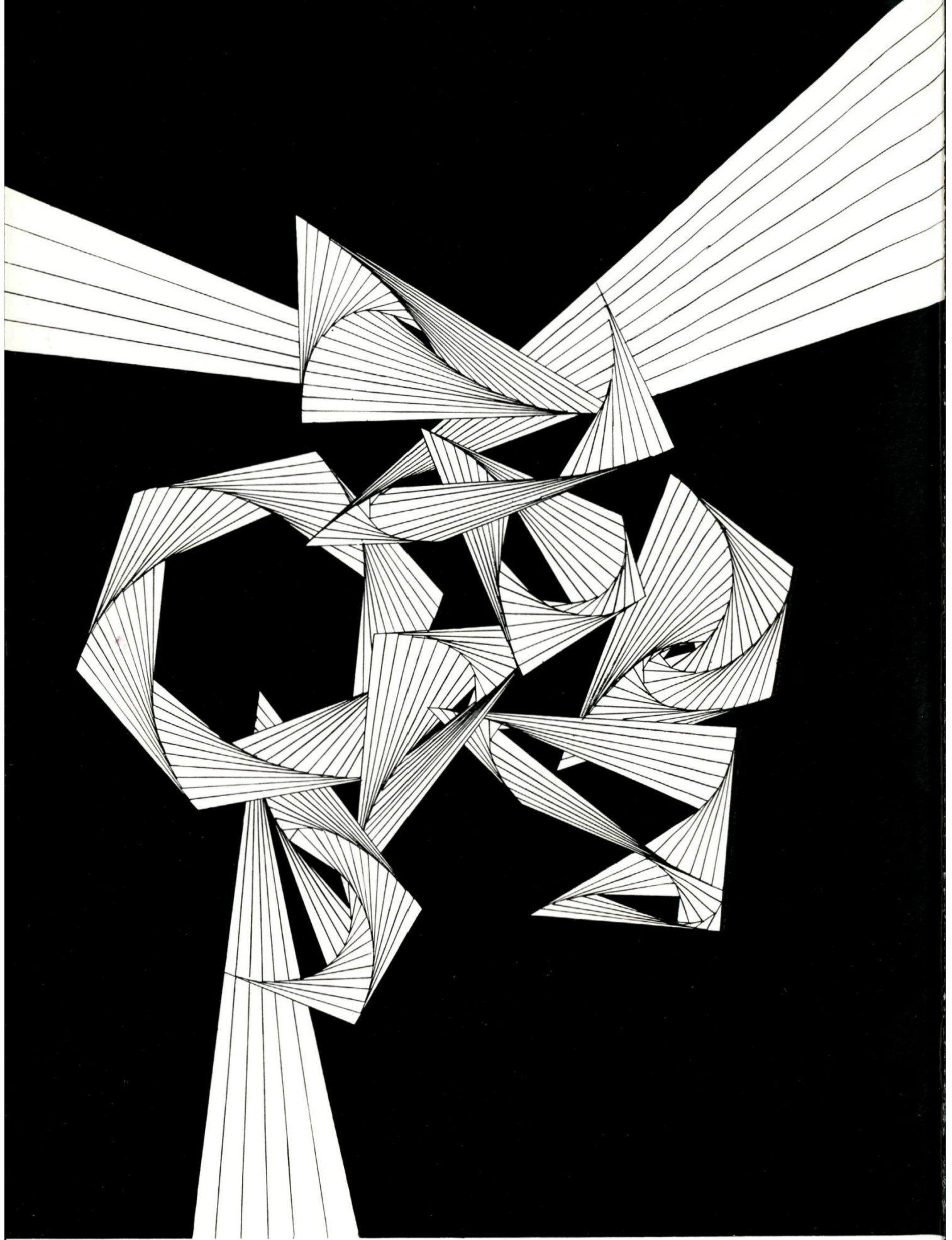
jaargang 11 1971/1972



Pythagoras

3

wiskundetijdschrift
voor jongeren



Deze tekening werd door Ivo Hosman uit de derde klas van het Henric van Veldekecollege gemaakt voor de wedstrijd waarover je in dit nummer meer kunt lezen.

Fibonacci °

Laat iemand twee getallen opschrijven, bij voorkeur niet te groot. Als voorbeeld nemen we hier 2 en 5. Laat nu een rij vormen, waarbij elk volgende getal wordt verkregen door de voorgaande twee op te tellen.

Dus 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212, 343, 555.

We stoppen als de rij twaalf termen heeft.

Laat nu de laatste twee getallen op elkaar delen. Dit geeft enig rekenwerk, er zal dan ook van overholen bewondering sprake zijn als blijkt dat je het resultaat van de deling uit je hoofd in drie cijfers achter de komma kunt geven:

$$\frac{555}{343} \approx 1,618$$

Of waren deler en deeltal verwisseld? Geen nood:

$$\frac{343}{555} \approx 0,618$$

Je kunt het respect nog vergroten door de twee gekozen getallen niet eens te willen zien, maar zuiver telepatisch te werk te gaan. Stel dat (zonder dat je het weet) wordt uitgegaan van 20 en 25:

20, 25, 45, 70, 115, 185, 300, 485, 785, 1270, 2055, 3325.

Ook nu geef je zonder na te denken de waarde van het quotiënt van de laatste twee getallen van de rij

$$\frac{3325}{2055} \approx 1,618 \text{ of } \frac{2055}{3325} \approx 0,618.$$

Er blijken nu twee dingen:

1. Je bent ongelooflijk knap
2. Je moet deze knapheid nooit tweemaal aan dezelfde proefpersonen demonstreren, want het is op zijn zachtst gezegd verdacht dat in beide voorbeelden dezelfde quotiënten optraden.

Enkele vragen:

- a. Wat is fibonacci en wat heeft dit er mee te maken?
- b. Waarom bestaat de rij precies uit twaalf termen?
- c. Wat voor bijzonders is er aan die breuken?

Antwoorden op deze vragen vind je op bladzijde 66 en volgende.

‘Van saai tot fraai’, nog altijd levend °

In de negende jaargang van Pythagoras stonden twee artikelen onder het motto ‘Van saai tot fraai’.

Daarin werden figuren geconstrueerd op wiskundige grondslag. Veel lezers hebben hun vaak prachtige tekeningen ingezonden. Jammer genoeg konden ze indertijd niet alle geplaatst worden.

De redactie ontvangt nog steeds nieuwe creaties.

Jos van de Sande, gymnasium ‘Beekvliet’ te Sint-Michielsgestel, schrijft:

‘Van saai tot fraai’, is nog steeds niet saai.

Van een tekening heb ik een dia gemaakt en deze is weer als negatief gebruikt. Vandaar de witte lijntjes op het zwarte veld.’

Nou, Jos, het ziet er magnifiek uit.

Fig. 1



In twee jaar is de lezerskring van Pythagoras sterk veranderd. Daarom volgt hier nog eens, beknopt, de opbouw van zo'n figuur.

In figuur 2 is $\triangle ABC$ gelijkzijdig. *Linksom* gaande, dat is dus in positieve richting, zijn afgepast $AD = BE = CF$. Via rotatie om het middelpunt O van de driehoek, kan bewezen worden, dat $\triangle DEF$ ook gelijkzijdig is. Dezelfde verkorting kan op de zijden van $\triangle DEF$ worden herhaald. Zie figuur 3. Dus: $DG = EH = FK$. $\triangle GHK$ is opnieuw gelijkzijdig.

Beginnen we met een grote driehoek en nemen we de afgepaste stukjes hoogstens $\frac{1}{2}$ cm, in negatieve richting, dan ontstaat na herhaalde toepassing figuur 4.

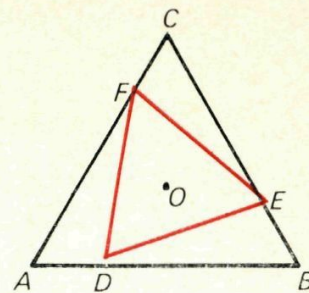


Fig. 2

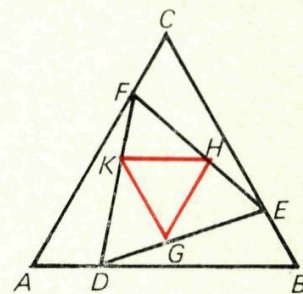


Fig. 3

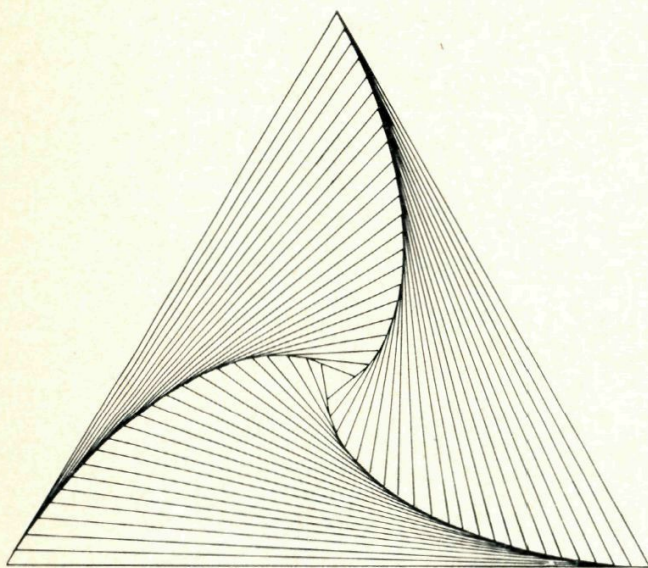


Fig. 4

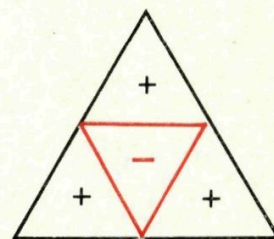


Fig. 5

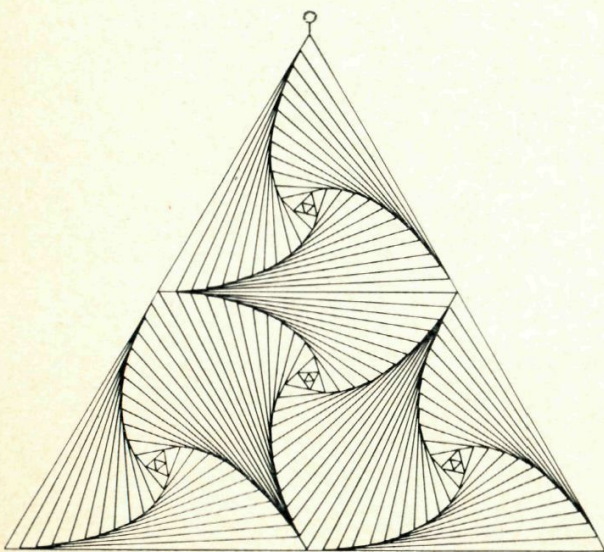


Fig. 6

Er zijn combinaties mogelijk. Een gelijkzijdige driehoek kan verdeeld worden in vier kleinere gelijkzijdige driehoeken. Zie figuur 5. In elke driehoek kan de boven behandelde operatie worden uitgevoerd, of in positieve, of in negatieve richting. Zo ontstaat figuur 6.

Vierkanten, ruiten en regelmatige zeshoeken zijn goed bruikbaar. De tekening van Jos van de Sande is een samenstel van driehoeken en ruiten, waarin de verkortingsoperatie uitstekend is gehanteerd. Her verrassende is, dat hoewel slechts rechte lijnen zijn getrokken, een speels krullende afbeelding werd verkregen.

Een brief uit Maastricht verdient ook de aandacht. Drs. H. Balemans schreef:

‘Een en ander heeft ons geïnspireerd tot het uitschrijven van een wiskunde-tekenwedstrijd onder de leerlingen van onze school’, het Henric van Veldekecollege te Maastricht.

De leerlingen mochten in de tekenlessen aan de tekeningen werken, daarbij begeleid door twee tekenleraren. We maakten de volgende groepsindeling:

Groep I: Brugklassers.

Groep II: Tweede en derde klassen.

Groep III: Vierde klassen. (de vijfde klassen deden buiten mededinging mee)

In de groepen I en II was elke deelnemer vrij in de keuze van motief of combinatie van motieven. In groep III werd het motief opgegeven van figuur 7.

Opzet was door middel van vermenigvuldigen, roteren, en spiegelen een zo gunstig mogelijke vlakverdeling te verkrijgen.

Dit schooljaar zal onderzocht worden in de lessen handvaardigheid het wedstrijdprincipe te verwezenlijken. Gedacht wordt aan draadmodellen, houtbordfiguren en opspanfiguren. We hopen op deze manier ook een stereometrisch element in de wedstrijd te brengen.

Tot zover de (verkorte) brief uit Maastricht. Een tweetal figuren uit de wedstrijd is afgedrukt. Misschien zijn er meer scholen waar een soortgelijke wedstrijd wordt georganiseerd. De artikelen over poolcoördinaten in de beide voorgaande nummers van deze jaargang en het vraagstuk over figuren in een cirkel in dit nummer wijzen weer nieuwe mogelijkheden aan.

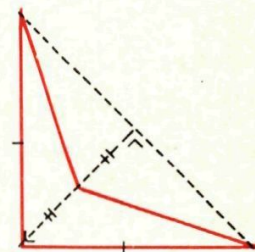


Fig. 7

Figuren in een cirkel^{oo}

Dr. J. G. van de Putte

Vraagstuk:

Beschrijf in een cirkel een figuur, waarvan de omtrek gelijk is aan de omtrek van de cirkel.

Omdat een paar eenvoudige stellingen misschien niet meer zo bekend zijn, worden die eerst apart vermeld.

- a. In figuur 8 valt het hoekpunt van $\angle M$ samen met het middelpunt van de cirkel. $\angle M$ heet middelpuntshoek. Het aantal hoekgraden is gelijk aan het aantal booggraden.

Stelling 1: Een middelpuntshoek is gelijk aan de bijbehorende boog.

$$\angle M = \text{bg } AB$$

Dus als boog $AB = 60^\circ$ is ook $\angle M = 60^\circ$.

- b. In figuur 9 ligt het hoekpunt van $\angle P$ op de cirkel-omtrek. $\angle P$ heet *omtrekshoek*.

Stelling 2: Een omtrekshoek is gelijk aan de helft van de bijbehorende boog.

$$\angle P = \frac{1}{2} \text{bg } CD$$

Dus als $\text{bg } CD = 40^\circ$ is $\angle P = 20^\circ$

- c. In figuur 10 raakt de kleine cirkel de grote *inwendig*. De grote straal is tweemaal de kleine straal. Omtrek grote cirkel = twee maal omtrek kleine cirkel
lengte één booggraad grote cirkel = twee maal lengte één booggraad kleine cirkel.

En nu het vraagstuk.

In figuur 11 raakt cirkel $(N, \frac{1}{2}r)$ inwendig aan cirkel (M, r) . We bewijzen eerst: lengte $\text{bg } AB = \text{lengte bg } CD$.

$$\angle M = \text{bg } AB \text{ (st. 1)}$$

$$\angle M = \frac{1}{2} \text{bg } CD \text{ (st. 2)}$$

Hieruit volgt:

Aantal booggraden van $\text{bg } AB = \frac{1}{2} \times \text{aantal booggraden bg } CD$

Lettend op de uitkomst onder c komt er:

$\text{lengte bg } AB = \text{lengte bg } CD$

Figuur 12 zal nu duidelijk zijn. Daarin is:

$\text{lengte bg } CD = \text{lengte bg } AB$

$\text{lengte bg } DE = \text{lengte bg } BF$

$\text{lengte bg } EG = \text{lengte bg } FH$

$\text{lengte bg } GL = \text{lengte bg } HP$

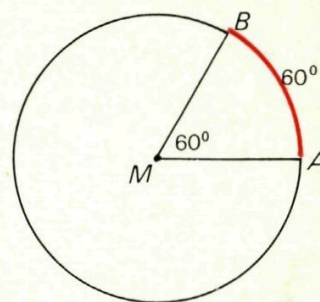


Fig. 8

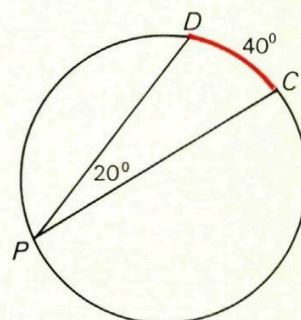


Fig. 9

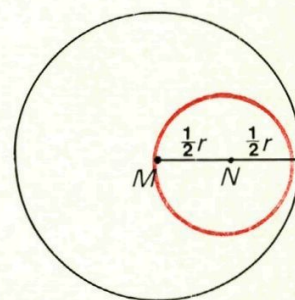


Fig. 10

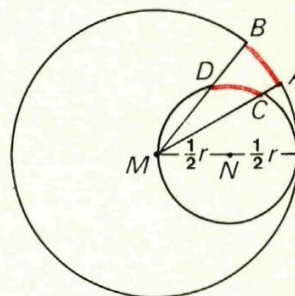


Fig. 11

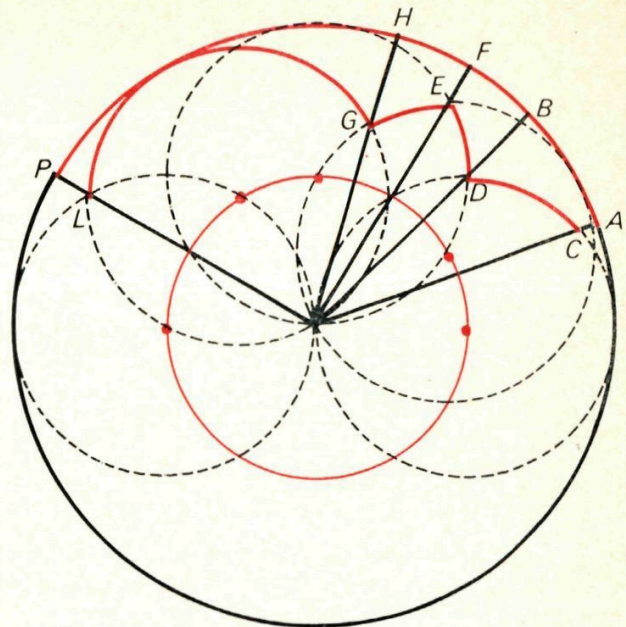


Fig. 12

Fig. 14

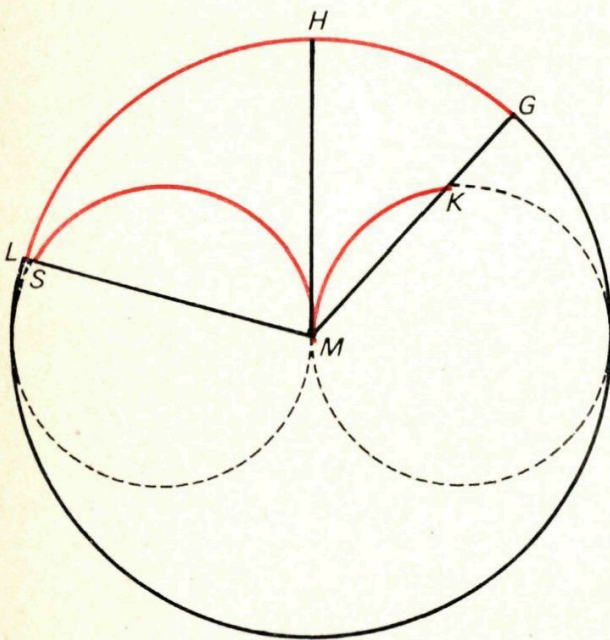
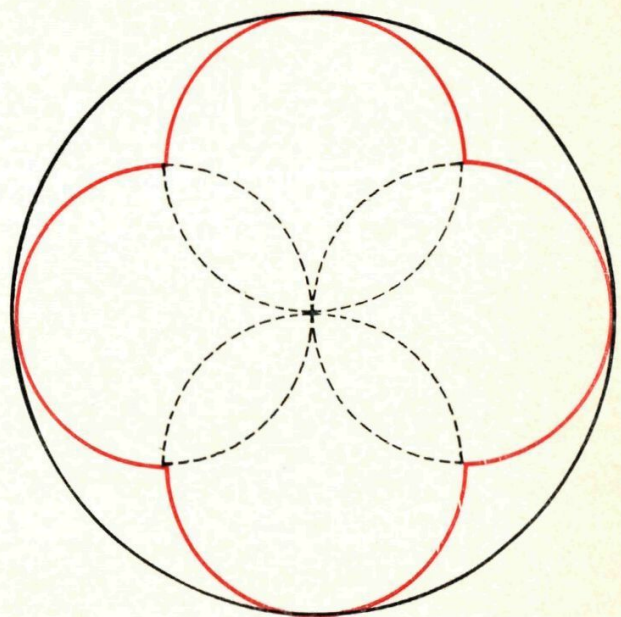


Fig. 13



Tekenen we meer inwendig rakende cirkels, die door M gaan dan krijgen we tenslotte een figuur, die dezelfde omtrek heeft als de grote cirkel. We moeten er wel voor zorgen, dat op elke straal vanuit M één en niet meer dan één punt van de gevraagde figuur komt te liggen. Dit houdt dus ook in, dat cirkels met straal $\frac{1}{2}r$ tot M kunnen worden doorgetrokken, mits ze elkaar in dat punt raken.

In figuur 13 is MH raaklijn aan de kleine cirkel.

lengte bg $GH = \text{lengte bg } KM$

lengte bg $HL = \text{lengte bg } SM$

In figuur 14 voldoet de rode omtrek aan de gestelde voorwaarde, maar ook de onderbroken getekende figuur.

Het bladmotief van figuur 15 is ook de moeite waard. Probeer zelf eens een oplossing te vinden, die er weer anders uitziet. Ook nu geldt weer: aardige vondsten zijn altijd welkom bij de redactie.

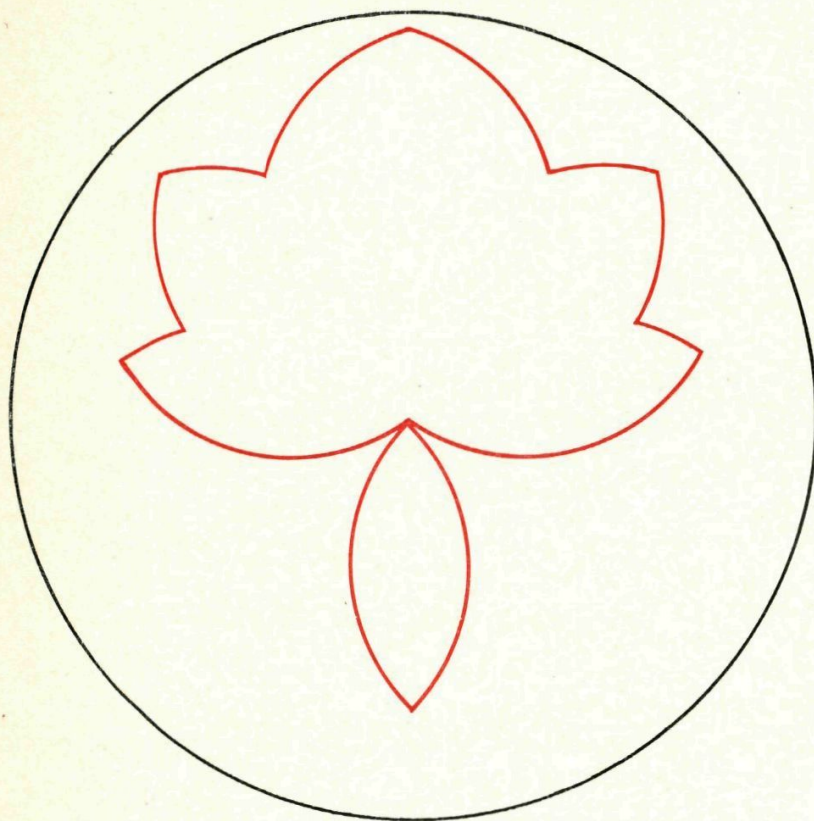


Fig. 15

Van de redactie

Bij de verschijning van dit derde nummer kan de redactie weer een verheugende belangstelling voor Pythagoras constateren. Velen zonden hun oplossingen van de Denkertjes in en anderen reageerden op reeds gepubliceerde artikelen. De 'Van saai tot fraai' figuren uit de negende jaargang stimuleren nog steeds tot creatief werk. Dat blijkt individueel uit de tekeningen, die abonnees insturen en collectief uit de wedstrijd in het maken van tekeningen op wiskundige grondslag, georganiseerd door enkele leraren van het Henric van Veldekecollege te Maastricht. In een der artikelen gaan we daar nader op in.

De lootprijs van de Denkertjes in het eerste nummer is gewonnen door W. Carels van het St. Antonius Doctorcollege in Kerkrade.

Een eenvoudige figuur, die enkele elegante rijen voortbrengt [∞]

Het begin is inderdaad heel simpel. In figuur 16 is $\triangle ABC$ gelijkzijdig. Op rechte $l \parallel AB$ zijn gelijke stukken $CC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = \dots = C_{n-1}C_n = \frac{1}{2}AB$ afgepast.

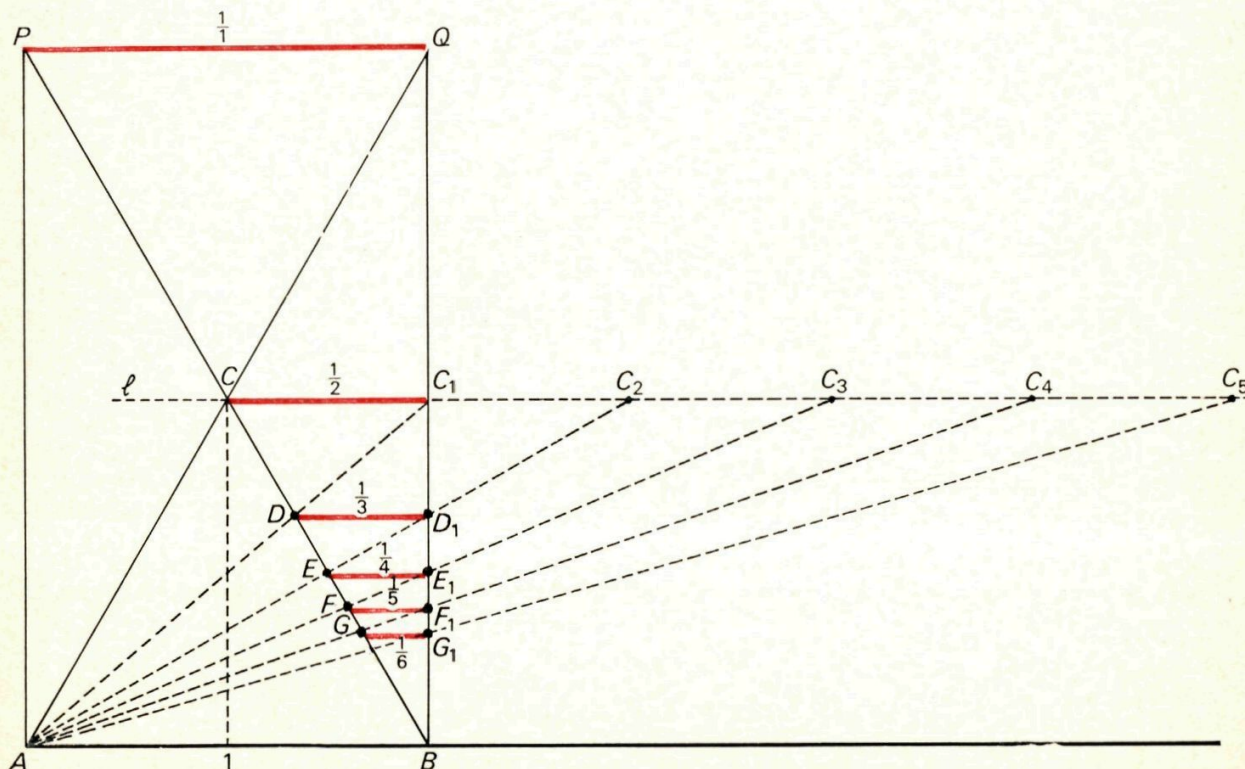
Stellen we $AB = 1$ dan hebben alle afgepaste stukken als lengte $\frac{1}{2}$. Wegens $\triangle ABD \sim \triangle C_1CD$ (hh) geldt:

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CC_1}{BA} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{DD_1}{CC_1} = \frac{BD}{BC} = \frac{2}{3} \\ \text{of } DD_1 = \frac{2}{3} \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Verder: $\triangle ABE \sim \triangle C_2CE$ (hh)

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{C_2C} = \frac{1}{1} \quad \text{Dus } BE = EC \left\{ \begin{array}{l} \frac{EE_1}{CC_1} = \frac{BE}{BC} = \frac{1}{2} \\ \text{of } EE_1 = \frac{1}{2} \cdot CC_1 = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Fig. 16



Zo verder gaande blijkt:

$$\begin{array}{ll} PQ = \frac{1}{1} & EE_1 = \frac{1}{4} \\ CC_1 = \frac{1}{2} & FF_1 = \frac{1}{5} \\ DD_1 = \frac{1}{3} & GG_1 = \frac{1}{6} \text{ enz.} \end{array}$$

a. Hoe groot is de som van de lijnstukken? Dus:

$$PQ + CC_1 + DD_1 + EE_1 + FF_1 + \dots \text{ of:}$$

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Algebraïsch kan dat onderzocht worden door eerst de som van de termen t.e.m. $\frac{1}{2^n}$ te bepalen.

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \times \frac{1}{8} = 2^2 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{2^4} > 8 \times \frac{1}{16} = 2^3 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{2^5} > 16 \times \frac{1}{32} = 2^4 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2}$$

$$\dots > \dots \quad \dots \frac{1}{2}$$

$$\dots > \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2^n} > 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

som van de termen tot

$$\text{en met } \frac{1}{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{deze som} > \frac{1}{2}n + 1$$

Als n onbeperkt toeneemt, dan doet het rechterlid dat ook, en dus ook het linkerlid.

b. Van een tweede rij gaan we eerst de som bepalen.

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots$$

Eerst:

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Elke breuk kan gesplitst worden in twee breuken, zogenaamde *partieelbreuken*.

$$\begin{aligned} \text{Stel: } \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \\ &= \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}$$

n is een natuurlijk getal. Dus $n(n+1) \neq 0$

$$(A+B)n + A = 1$$

$$A+B=0 \quad A=1 \text{ en } B=-1$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4.5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

enz.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = 1$$

Ook deze rij is in de figuur te vinden. Zie figuur 17.

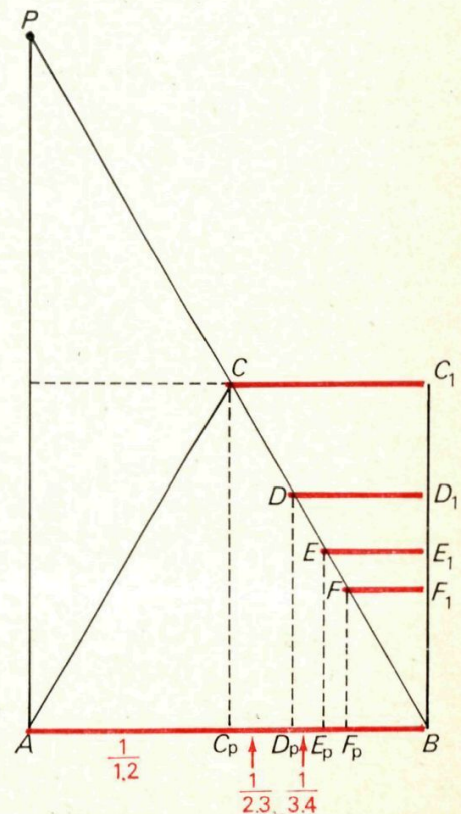
CC_1 is geprojecteerd op AB .

$$AC_p = AB - C_pB = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$$

$$C_pD_p = C_pB - D_pB = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2.3}$$

$$D_pE_p = D_pB - E_pB = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3.4} \text{ enz.}$$

Fig. 17



De som van de rij zie je dus in de figuur als

$$AC_p + C_pD_p + D_pE_p + \dots$$

c. Een laatste rij vinden we uit (zie figuur 17)

$$S = \frac{1}{1} \cdot C_pD_p + \frac{1}{2} \cdot D_pE_p + \frac{1}{3} \cdot E_pF_p + \frac{1}{4} \cdot F_pG_p + \dots$$

of:

$$S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \dots$$

Het splitsen in partieelbreuken wordt nu aan de lezer overgelaten. Er komt:

$\frac{1}{1.2.3} =$	$\frac{1}{2}$	$-$	$\frac{1}{2}$	$+$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2.3.4} =$	$\frac{1}{4}$	$-$	$\frac{1}{3}$	$+$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{3.4.5} =$	$\frac{1}{6}$	$-$	$\frac{1}{4}$	$+$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{4.5.6} =$	$\frac{1}{8}$	$-$	$\frac{1}{5}$	$+$	$\frac{1}{12}$
$\dots$					
$\dots$					
$\dots$					
$\dots$					
$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$	$\frac{1}{2n}$	$-$	$\frac{1}{n+1}$	$+$	$\frac{1}{2(n+2)}$
	1		2		3

$$\begin{array}{lcl}
 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) & \\
 2 & -\frac{1}{2} & - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} \\
 3 & & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{3}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S = \frac{1}{4}$$

d. Voor de wiskundige puzzelaars is het aardig zelf een rij te vinden. Reken maar eens uit de opeenvolgende hoogten van de driehoeken $\triangle ABP$, $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ABE$, in figuur 17.

De som van die rij is eenvoudig te vinden met behulp van de som uit a.

Denkertjes

- 21 Hoeveel keren komt de meetkundige voorstelling van de stelling van Pythagoras, zoals in figuur 18, maar dan met gelijkbenige driehoeken, voor in de tegel van figuur 19?



Fig. 19

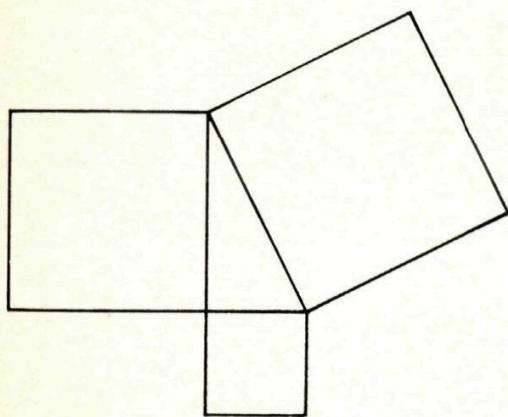
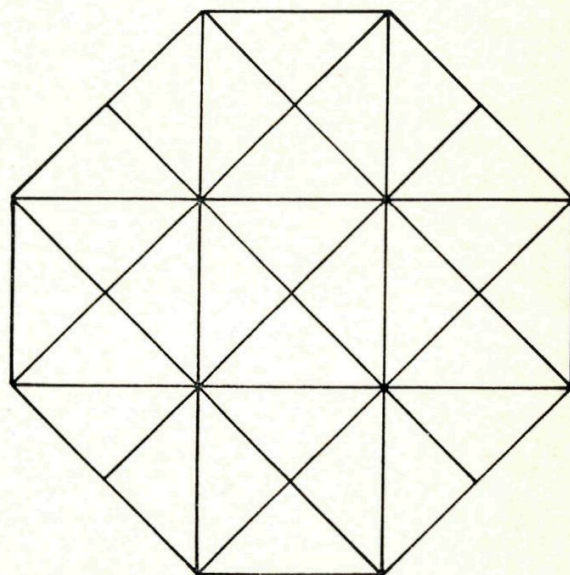
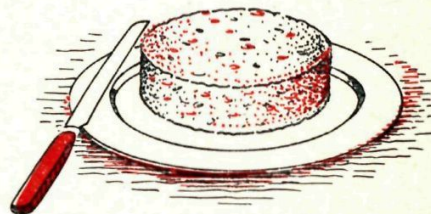


Fig. 18



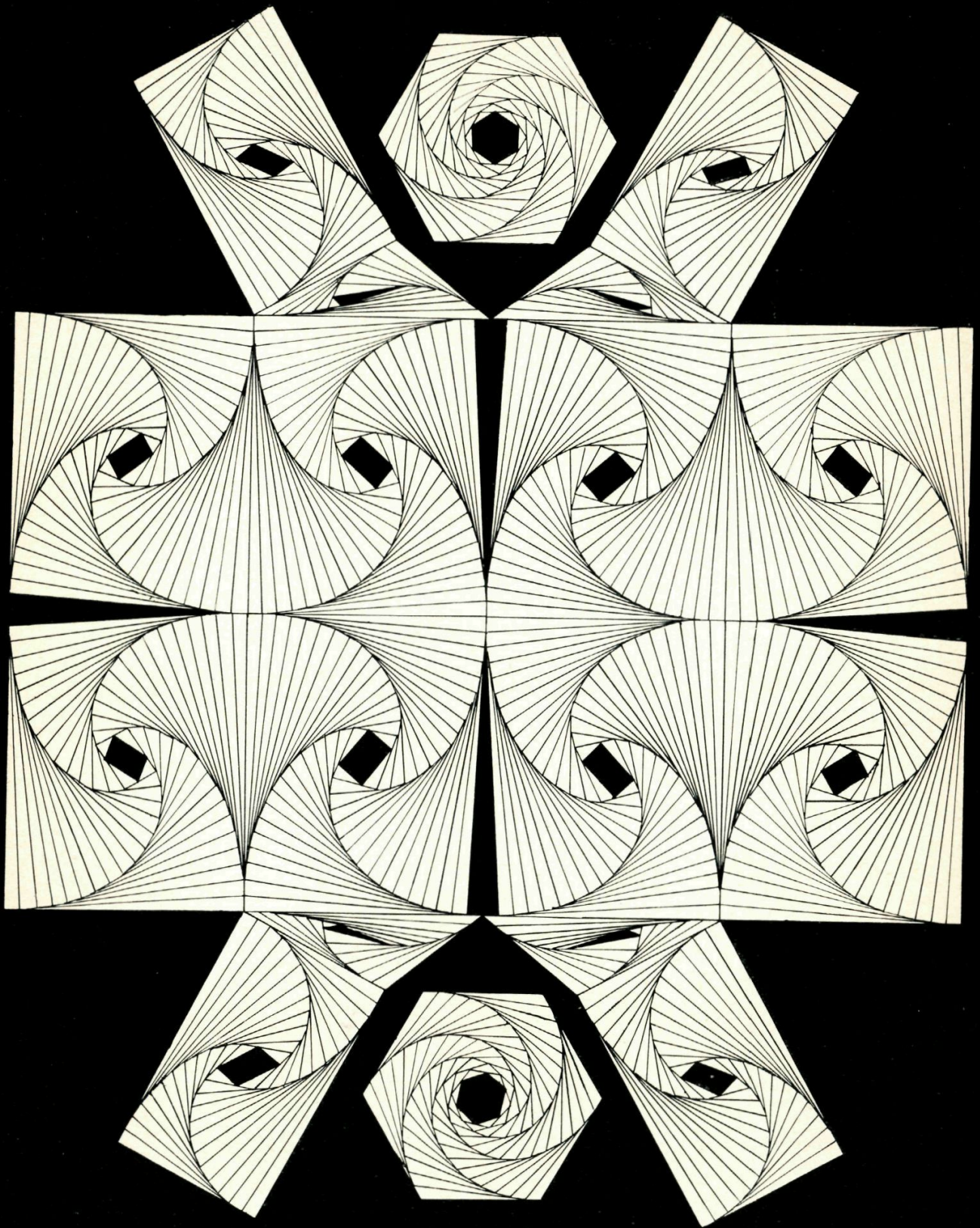
- 22 Voor het puntgebak, dat een banketbakker gaat maken, bakt hij eerst een cilindervormige cake. Hij is zo wiskundig vakkundig, dat hij bij het doorsnijden gebruik maakt van symmetrievlakken. Na vijf keer doorsnijden heeft hij 16 evengrote delen. Volgens welke symmetrievlakken verdeelde hij die cake?



- 23 Iemand schrijft:
- $$\begin{aligned} 6^2 - 5^2 &= 11 \\ 56^2 - 45^2 &= 1111 \\ 556^2 - 445^2 &= 111.111 \\ 5556^2 - 4445^2 &= 11.111.111 \\ 55556^2 - 44445^2 &= 1.111.111.111 \end{aligned}$$

Vorm zelf een soortgelijke serie met als uitkomsten getallen, die uitsluitend het cijfer 9 bevatten.

- 24 Hoeveel verschillende zetten kan men doen met een paard op een leeg schaakbord?



Tekening van Serve Eggen, tweede klas Henric van Veldeke college.

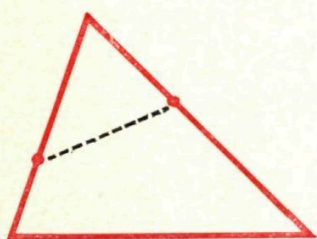
De stelling van Helly^{ooo}

In een van de opgaven van de internationale wiskunde-olympiade, zie het vorige nummer, staat het woord 'convex'. Wellicht ken je dat woord niet. Dat is jammer, want je kunt er heel veel mee doen ... in het scrabble-spel. En met het begrip, dat er achter schuilt, kun je in de wiskunde heel veel doen. Dat laatste is natuurlijk de reden waarom we je er kennis mee willen laten maken.

Een meetkundige figuur heet convex als alle verbindingslijnstukken van twee tot die figuur behorende punten geheel tot die figuur behoren. (We beperken ons in dit artikel tot vlakke figuren).

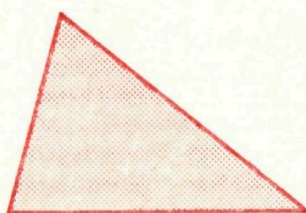
De driehoek uit figuur 20 is niet convex: als je twee punten van verschillende zijden met elkaar door een lijnstuk verbindt, dan behoort dat verbindingslijnstuk niet tot die (rode) driehoek. Het driehoekige gebied uit figuur 21 is echter wel convex: elk verbindingslijnstuk van twee van zijn punten maakt deel uit van dat driehoekige gebied.

Van de twee vierhoekige gebieden uit de figuren 22 en 23 is alleen de laatste convex. Van de twee aardappels uit 24 en 25 is alleen de laatste convex.



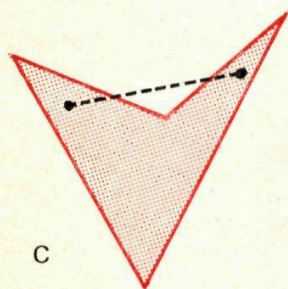
a

Fig. 20



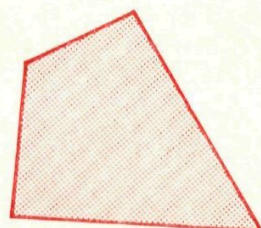
b

Fig. 21



c

Fig. 22



d

Fig. 23

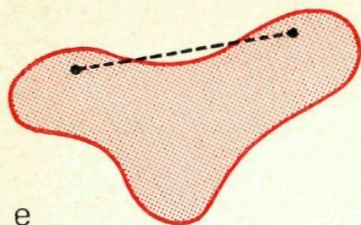


Fig. 24

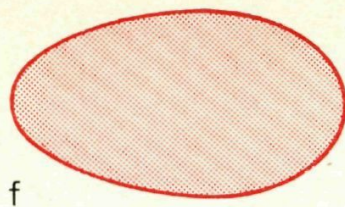


Fig. 25

Als de hoekpunten van driehoek ABC alle drie tot de convexe figuur F behoren, dan behoort elk punt van het driehoekige gebied ABC tot die convexe figuur F .

Elke zijde van driehoek ABC is namelijk verbindingslijnstuk van twee punten van F en daarom behoort zo'n zijde in zijn geheel tot F op grond van de definitie hierboven.

Nu behoeven we alleen nog maar te bekijken de punten, die binnen driehoek ABC liggen. Laat P zo'n punt zijn. Trek CP en bepaal het snijpunt Q van CP met AB . Omdat Q een punt van het lijnstuk AB is, behoort Q tot F . Omdat P een punt van het lijnstuk CQ is, waarvan de eindpunten tot F behoren, behoort ook P zelf tot F .

In figuur 26 zie je vier figuren F_1 , F_2 , F_3 en F_4 . De figuur F_4 is het rode, ringvormige gebied. Hij is niet convex. De andere drie figuren zijn wel convex en van hen zijn alleen de omtrekslijnen getekend.

In figuur 26 zijn verder nog vier punten aangeduid. Een daarvan, het punt binnen de rode ring, is een gemeenschappelijk punt van F_1 , F_2 en F_3 . De andere drie liggen in de rode ring. Een van die drie is een gemeenschappelijk punt van F_2 , F_3 en F_4 . Een ander is gemeenschappelijk punt van F_1 , F_3 en F_4 . En het laatste punt is gemeenschappelijk punt van F_1 , F_2 en F_4 .

Elk drietal uit de vier figuren F_1 , F_2 , F_3 en F_4 heeft dus een gemeenschappelijk punt. Maar naar een gemeenschappelijk punt van alle vier zul je tevergeefs zoeken.

Probeer nu eens vier figuren F_1 , F_2 , F_3 , F_4 te tekenen die alle vier convex zijn, zo dat elk drietal van hen een gemeenschappelijk punt heeft en zo dat er geen punt is dat tot alle vier die figuren behoort. Ik durf wel te wedden, dat het je niet lukken zal. Dat volgt namelijk uit de volgende redenering:

Laat A_1 gemeenschappelijk punt zijn van F_2 , F_3 , F_4 . Net zo A_2 van F_1 , F_3 , F_4 en A_3 van F_1 , F_2 , F_4 en A_4 van F_1 , F_2 , F_3 .

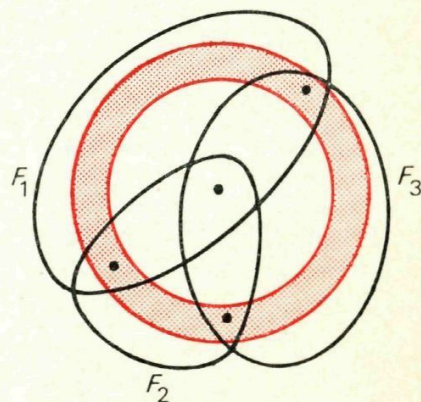


Fig. 26

Eerste geval: Het zou kunnen gebeuren dat de punten A_1, A_2, A_3 op één lijn liggen, en wel zo dat A_3 tussen A_1 en A_2 ligt. Nu behoren A_1 en A_2 allebei tot F_3 en F_3 is convex. Daarom is A_3 ook een punt van F_3 , evenals elk ander punt van het lijnstuk A_1A_2 . Maar A_3 was ook al gemeenschappelijk punt van F_1, F_2, F_4 . Dus behoort A_3 tot elk van de vier figuren.

Op dezelfde manier rekenen we af met alle andere situaties, waarin drie (of meer) van de vier A -punten op één lijn liggen.

Tweede geval: Het zou kunnen gebeuren dat A_1, A_2, A_3, A_4 de hoekpunten zijn van een convex vierhoekig gebied en wel zo, dat A_1, A_2 overstaande hoekpunten zijn en A_3, A_4 ook.

Nu behoren A_1 en A_2 allebei zowel tot F_3 als tot F_4 . Dit heeft tot gevolg dat de gehele diagonaal A_1A_2 zowel tot F_3 als tot F_4 behoort. Net zo vinden we dat de tweede diagonaal A_3A_4 zowel tot F_1 als tot F_2 behoort. Het snijpunt van de twee diagonalen is dus een punt, dat tot elk van de vier figuren F_1, F_2, F_3, F_4 behoort.

Op dezelfde manier rekenen we af met alle andere situaties, waarin de vier A -punten hoekpunten zijn van een convex vierhoekig gebied.

Derde geval: Nu blijft nog maar één mogelijkheid over, namelijk dat drie van de vier A -punten hoekpunten van een driehoek zijn en dat het vierde A -punt binnen die driehoek ligt.

Als bijvoorbeeld A_1, A_2, A_3 de hoekpunten van de driehoek zijn, dan redeneren we zo:

A_1, A_2, A_3 behoren alle drie tot F_4 . Elk punt binnen driehoek $A_1A_2A_3$ is dan een punt van F_4 (zie het begin van dit artikel). Met name geldt dit voor het punt A_4 , dat ook al tot F_1, F_2, F_3 behoorde. A_4 is dus een gemeenschappelijk punt van alle vier de figuren.

Zo hebben we dus bewezen dat vier convexe figuren een gemeenschappelijk punt hebben, zodra dat met elk drietal van hen het geval is.

We kunnen nog verder gaan: als n ($n \geq 3$) convexe figuren de eigenschap hebben dat elk drietal van hen een gemeenschappelijk punt heeft, dan is er een punt dat tot al die n convexe figuren behoort.

En dit is dan de stelling, die algemeen bekend staat als de stelling van Helly. Hij is naar zijn 'ontdekker' ge-

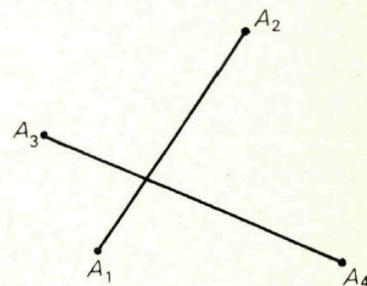


Fig. 27

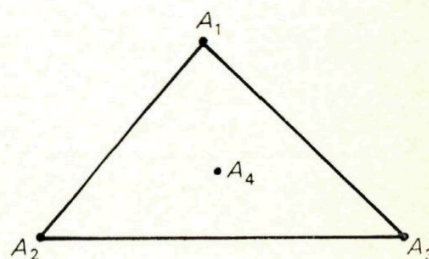


Fig. 28

noemd zoals zoveel andere wiskundige stellingen. Voor het geval $n = 3$ is deze stelling vanzelfsprekend en voor het geval $n = 4$ hebben we hem zojuist bewezen.

Kunnen we nu aantonen dat uit de geldigheid van deze stelling voor de een of andere waarde van n te concluderen valt, dat de stelling ook voor de volgende waarde van n waar is, dan volgt daaruit de algemene geldigheid van de stelling. Een bewijs volgens dit principe heet 'inductief bewijs'.

We nemen dus aan, dat de stelling bewezen is voor het geval $n = m$. Dus we nemen aan dat m convexe figuren een gemeenschappelijk punt hebben, zodra dat met elk drietal van hen het geval is.

Nu bekijken we een $(m + 1)$ -tal convexe figuren $F_1, \dots, F_m, F_{m+1}$ waarvan elk drietal een gemeenschappelijk punt heeft. Met name bekijken we eerst maar eens F_1 en F_2 . De punten die F_1 en F_2 gemeenschappelijk hebben vormen een nieuwe figuur en die noemen we $\bar{F}_2$ (de doorsnede van F_1 en F_2).

De doorsnede $\bar{F}_2$ is zelf ook weer een convexe figuur. Dit bewijzen we eerst, voor we de draad van onze redenering weer opnemen.

Laat A en B twee punten van $\bar{F}_2$ zijn. Dit betekent dat A en B tot F_1 behoren, zodat het hele lijnstuk AB tot F_1 behoort. Evenzo behoren A en B tot F_2 , zodat het lijnstuk AB ook deel uitmaakt van F_2 . Omdat het lijnstuk AB zowel tot F_1 als tot F_2 behoort, maakt het deel uit van hun doorsnede $\bar{F}_2$. Zo blijkt dat $\bar{F}_2$ convex is.

Elk drietal convexe figuren uit de rij $\bar{F}_2, F_3, \dots, F_m, F_{m+1}$ blijkt nu een gemeenschappelijk punt te hebben. Voor drietallen waar $\bar{F}_2$ niet in voorkomt, wisten we dat al eerder. En voor een drietal zoals $\bar{F}_2, F_3, F_4$ bijvoorbeeld weten we het omdat we al bewezen hebben dat F_1, F_2, F_3, F_4 een gemeenschappelijk punt hebben.

Op grond van het aannemen van de juistheid van de stelling van Helly voor het geval $n = m$ concluderen we dus, dat er een punt is dat tot alle m de figuren $\bar{F}_2, F_3, \dots, F_m, F_{m+1}$ behoort. Maar dat betekent niets anders dan dat er een punt is, dat tot elk van de $m + 1$ figuren $F_1, \dots, F_{m+1}$ behoort.

En dat voltooit dan het bewijs van de stelling van Helly.

Nogmaals Fibonacci °

Misschien heb je nog eens wat voorbeelden geprobeerd en ben je weer op dezelfde quotiënten terechtgekomen. Dit doet het vermoeden rijzen dat je daar voor elk tweetal getallen a en b op uitkomt. Wat wordt de rij?

$a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, 5a + 8b, 8a + 13b, 13a + 21b, 21a + 34b, 34a + 55b, 55a + 89b.$

We nemen nu even een heel eenvoudig geval, namelijk $a = 0$ en $b = 1$. We krijgen dan:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.

Dit zijn de eerste twaalf termen van een rij, die de naam draagt van de middeleeuwse wiskundige Leonardo van Pisa, ook genaamd Fibonacci (= zoon van Bonaccio). Neem je het quotiënt van twee opvolgende termen van deze rij, dan benader je steeds beter het getal 0,61803398875...

$\frac{1}{1} = 1,00000$	$\frac{13}{21} = 0,61904$
$\frac{1}{2} = 0,50000$	$\frac{21}{34} = 0,61764$
$\frac{2}{3} = 0,66667$	$\frac{34}{55} = 0,61818$
$\frac{3}{5} = 0,60000$	$\frac{55}{89} = 0,61797$
$\frac{5}{8} = 0,62500$	$\frac{89}{144} = 0,61805$
$\frac{8}{13} = 0,61538$	

We keren terug naar de rij die begint met a en b .

Je ziet dat in deze rij de coëfficiënten van a en b termen van de Fibonacci-rij zijn. Het quotiënt van de elfde en twaalfde term is

$$\frac{34a + 55b}{55a + 89b} = \frac{55}{89} \cdot \frac{\frac{34}{55}a + b}{\frac{55}{89}a + b} =$$
$$\approx 0,618 \cdot \frac{0,618a + b}{0,618a + b} = 0,618$$

De waarde van de breuk is dus bij benadering gelijk aan 0,618, onafhankelijk van a en b .

Het zal inmiddels wel duidelijk zijn dat de rij niet noodzakelijk uit precies twaalf termen bestaat.

In feite geldt: Hoe verder je gaat, des te nauwkeuriger wordt de benadering. Je kunt echter niet *minder* dan twaalf termen nemen, dan is de onnauwkeurigheid nog te groot.

Wat is nu dat getal 0,618...?

Stel dat c_{n-1} , c_n , c_{n+1} drie op elkaar volgende termen in de rij van Fibonacci zijn en dat

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = d_n \text{ en } \frac{c_{n+1}}{c_n} = d_{n+1}.$$

Nu is $c_{n+1} = c_{n-1} + c_n$ (volgens het constructievoorschrift van de rij: elke term is de som van de voorgaande twee).

Dus:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{c_{n-1} + c_n}{c_n} = \frac{c_{n-1}}{c_n} + 1 = \frac{1}{d_n} + 1$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{d_n} + 1 \quad (1)$$

Te bewijzen is dat de opvolgende quotiënten d_n , d_{n+1} , ... steeds dichterbij elkaar komen te liggen, zodat we kunnen zeggen $d_{n+1} \approx d_n \approx g$, waarbij g een vast getal is.

Welk getal?

Wel, volgens (1) geldt dan blijkbaar

$$g = \frac{1}{g} + 1, \quad (2)$$

$$\text{of } g^2 = 1 + g \quad (g > 0)$$

$$\text{of } g = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx \frac{1}{2}(1 + 2,2360680) \\ = 1,6180340.$$

Dat $\frac{1}{g} \approx 0,6180340$ volgt nu direct uit (2).

De getallen uit de rij van Fibonacci komen op de meest verrassende plaatsen te voorschijn. Kijk eens naar de tekening van een ananas in figuur 29.

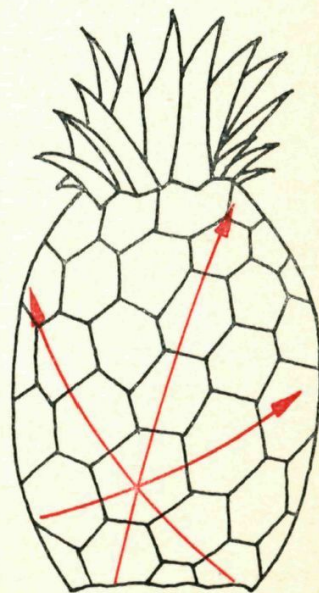


Fig. 29

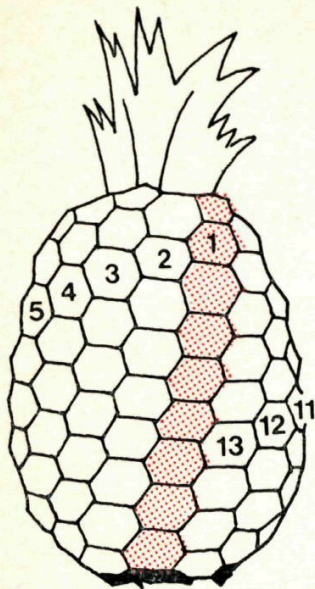


Fig. 30

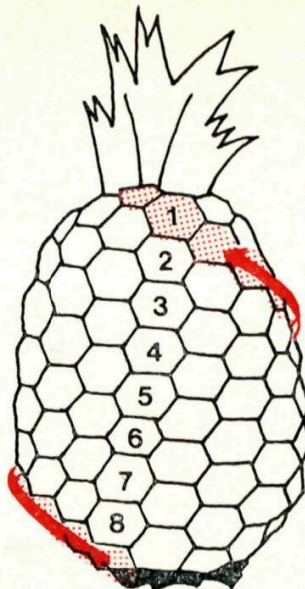


Fig. 31

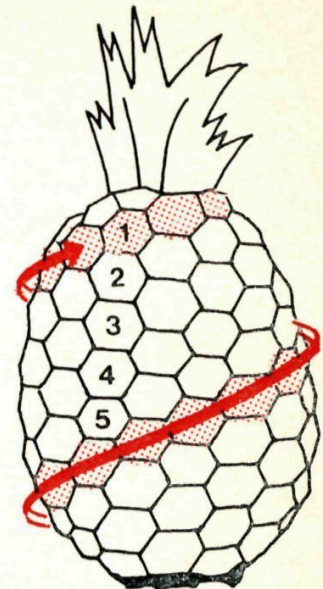


Fig. 32

De zeshoekige schubben zijn geordend in spiralen, 5 in de ene, 8 in een tweede en 13 in een derde richting. Tel ze zelf maar eens na in bovenstaande figuren.

Nog een voorbeeld vind je in het bos. Raap daar eens een denneappel op en bekijk die met wiskundige ogen.

Raadpleeg boeken over schelpen of planten. Tel in je tuin de spiralen in de grote zonnebloemzaadschijven.

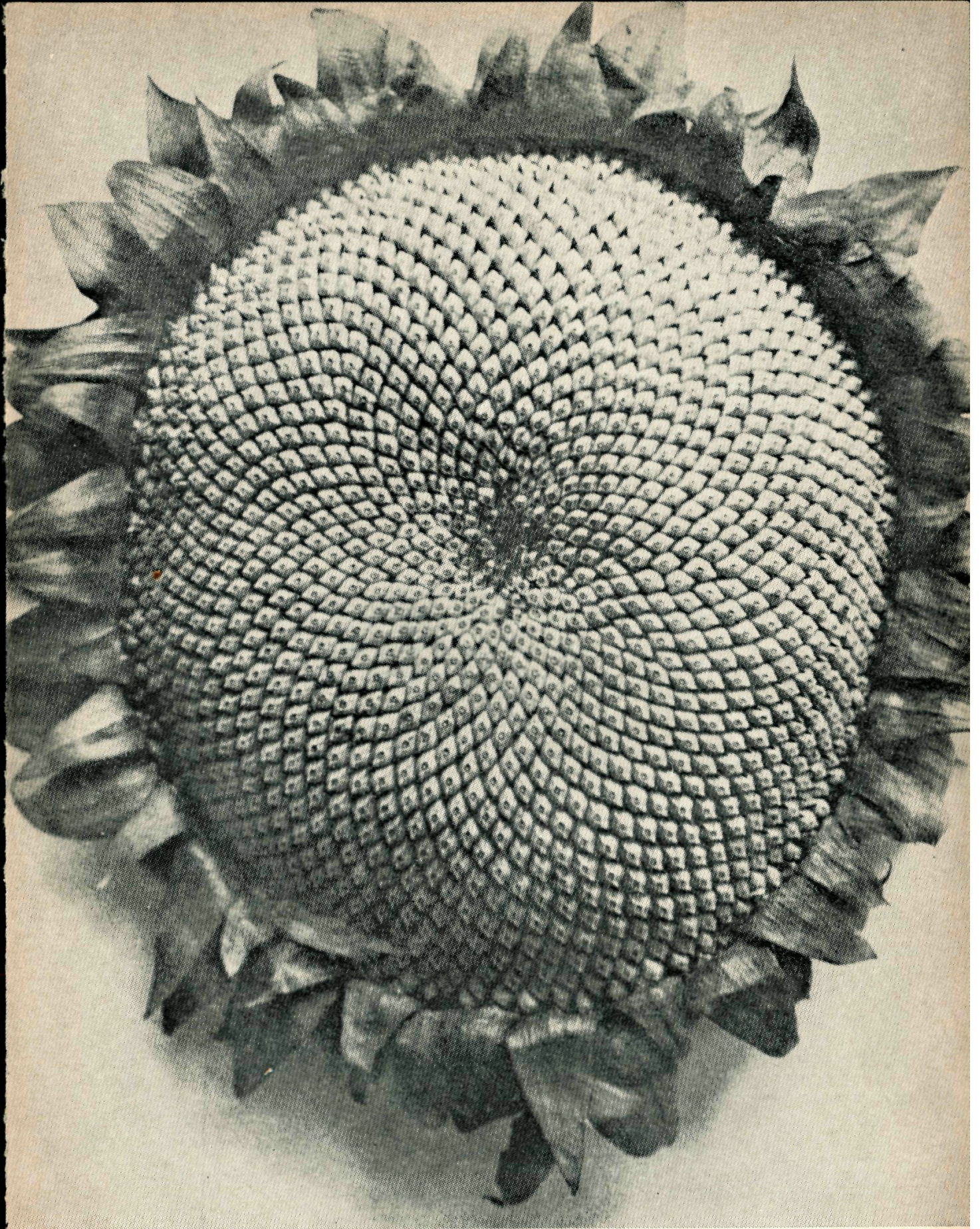
Het zal niet veel moeite kosten om opnieuw een paar getallen uit de rij van Fibonacci te vinden.

Vijf studenten en hun hobbies

Oplossing:

<i>Naam</i>	<i>studie</i>	<i>geboortestreek</i>	<i>sport</i>
Peter	natuurkunde	Berlijn	postzegelverzamelaar
Karl	medicijnen	Baden	kaartspeler *
Frans	taalkunde	Beieren	bergbeklimmer
Hans	bouwkunde	Württemberg	atletiek
Helmut	rechten	Rijnland	zanger

* Iemand met een zwakke gezondheid is geen atleet of bergbeklimmer.



Tel het aantal spiralen in deze zonnebloem. Zowel linksom als rechtsom kom je tot een getal uit de rij van Fibonacci, de rij waarvoor de natuur een voorliefde schijnt te bezitten.

Denkertjes

25 Een meisje heeft 5 kralen. Een witte, een gele, een rode, een blauwe en een zwarte. Ze maakt er een armband mee, zoals de figuur aangeeft. Op hoeveel manieren kan ze met die 5 kralen een armband maken?

26 Op hoeveel manieren kan men met n kralen zo'n armband maken?

27 $\triangle ABC$ is gegeven. Construeer een rechte l , die AC in P en BC in Q snijdt, zó, dat $AP = PQ = QB$.

28 Jan vraagt aan Piet: Schrijf 3 getallen op van ieder 3 cijfers. Het eerste cijfer groter dan het derde. Piet schrijft: 584, 804 en 371.

Jan voert de volgende operatie uit:

cijfers in tegengestelde volgorde	584	804	371
	485	408	173
	099	396	198
cijfers in tegengestelde volgorde	990	693	891
	1089	1089	1089

Bewijs dat bij toepassing van deze operatie de uitkomst altijd 1089 zal zijn.

29 Tussen de steden A en B rijden twee bussen. Er is slechts één halte, namelijk stad C gelegen tussen A en B . De afstanden van A naar C en van C naar B verhouden zich als 4 : 5. De ene bus vertrekt uit A en de andere tegelijkertijd uit B . Ze blijven ieder in C 10 minuten staan. Ze bereiken het eindstation na $1\frac{1}{2}$ uur. Ze rijden ook steeds even snel.

Waar zullen de bussen elkaar ontmoeten?

30 Iemand is tegelijk met zijn dochter jarig. In 1971 werd hij 51 jaar en zijn dochter 15 jaar. De cijfers in de getallen van de leeftijden vertonen een tegengestelde volgorde. Voor deze vader en dochter is dat al een keer eerder gebeurd, nl. bij 40 en 04 jaar. Het zal bij leven en welzijn nog wel een paar keer gebeuren.

a. Toon aan, dat in dergelijke gevallen het verschil der leeftijden een negenvoud is.

b. Voor een andere vader met dochter doet zich die cijfervolgorde maar één keer in hun leven voor. Hoe oud zijn ze beiden op die bijzondere verjaardag?

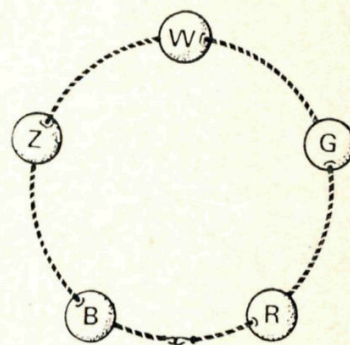


Fig. 33

Oplossingen van de Denkertjes uit nummer 1

- 1 Plaats de vier kubussen ① ② ③ en ④ tegen elkaar volgens het onderstaande schema:

	boven	onder	links	rechts	voor	achter
①	1	3	1	1	4	2
②	3	2	2	4	3	1
③	4	1	1	2	2	3
④	2	4	3	3	1	4

Fig. 34

In het vierde nummer zullen we nader op het tot stand komen van de oplossing ingaan.

- 2 Dit is een vraagstuk dat met de methode van de knikkers en de laatjes kan worden opgelost. De eerste klant heeft de keuze uit 5 dagbladen, de tweede uit 4, de derde uit 3, de vierde uit 2 en de laatste uit 1. Op $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ verschillende manieren kunnen dus verschillende kranten worden gekozen uit 5^5 verdelingsmogelijkheden. De kans is dus $\frac{120}{3125} \approx \frac{1}{25} = 4\%$
- 3 De oppervlakte van de schuingesneden plakken worst is inderdaad groter dan de rechtgesneden, maar ... de dikte is evenredig kleiner, zodat het volume, dus ook de massa, gelijk gebleven is. Jammer voor de slager.
- 4 In de opgave staat:
Neem drie lucifers weg. Er staat niet bij wat je met deze drie lucifers doet. Welnu je legt ze ergens anders precies zo neer als ze lagen.
Leg nu twee lucifers neer zodat weer dezelfde figuur ontstaat. Dit is nu niet moeilijk meer: Je legt de twee overgebleven lucifers weer bij de drie verplaatste.

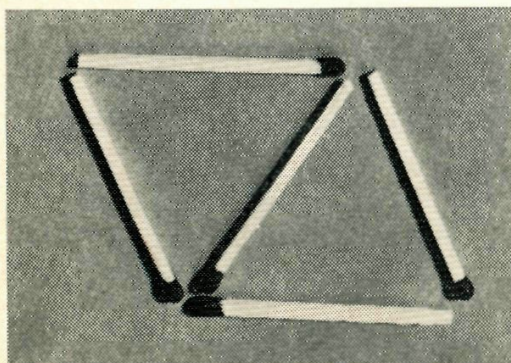


Fig. 35

5 Neem bijvoorbeeld $487 + 398 + 653 + 433 = 1971$.

Kies je andere getallen dan zal toch de som 1971 zijn.

Het blok getallen is zo geconstrueerd dat de som steeds 1971 is. Hoe doe je dat?

Kies acht getallen met als som 1971, bijvoorbeeld

$$100 + 171 + 483 + 212 + 355 + 166 + 278 + 206 = 1971$$

Plaats deze getallen zo:

	355	166	278	206
100	$100 + 355$	$100 + 166$	$100 + 278$	$100 + 206$
171	$171 + 355$	$171 + 166$	$171 + 278$	$171 + 206$
483	$483 + 355$	$483 + 166$	$483 + 278$	$483 + 206$
212	$212 + 355$	$212 + 166$	$212 + 278$	$212 + 206$

Hieruit ontstaat door de bovenste rij en de linkerkolom weg te laten een blok van 4×4 getallen met de gevraagde eigenschap.

6 Het aantal nullen wordt bepaald door het aantal factoren 10 in het produkt. Omdat $10 = 2 \times 5$ en er meer dan voldoende factoren 2 voorhanden zijn, is het aantal nullen gelijk aan het aantal factoren 5. Er zijn 20 vijfouden. Hiervan hebben 25, 50, 75, en 100 een extra factor, zodat er uiteindelijk 24 factoren 5 in het produkt zitten. Het getal heeft dus 24 nullen aan het eind.

7 De uitspraken kunnen niet alle drie waar zijn. Als C de waarheid spreekt, dan ook A. De uitspraak van B is dan onjuist. Als C niet de waarheid spreekt, dan is de uitspraak van B waar, die van A echter niet.

8 Spiegel één van de punten in de lijn l , bijvoorbeeld B.

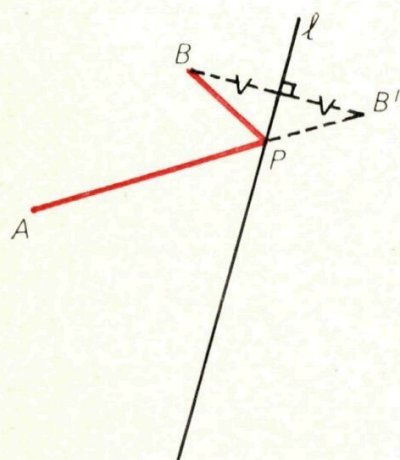


Fig. 36

De kortste verbinding van A en B' is AB'. Het snijpunt van AB' met l is het gevraagde punt. (In de opgave was helaas een fout geslopen: De bedoeling was P niet op AB, maar op l te bepalen.)

9 Stel de afstand a en de snelheid v .

De benodigde tijd voor het afleggen van de weg a met snelheid v is $t = \frac{a}{v}$. Als $\frac{1}{2}a$ wordt afge-

legd met snelheid $\frac{1}{2}v$ is hiervoor precies dezelfde tijd nodig. Guus kan dus al niet meer aan zijn voornemen voldoen: de tijd was al verstreken!

10 De lengte van de halve cirkel is precies even groot als de lengte van de honderd gelijke halve cirkeltjes.

Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 15 februari 1972 worden ingezonden naar het redactie-secretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.

Inhoud:

Fibonacci °	49
'Van saai tot fraai', nog altijd levend °	50
Figuren in een cirkel °°	53
Van de redactie	55
Een eenvoudige figuur, die enkele elegante rijen voortbrengt °°	56
De Stelling van Helly °°°	62
Nogmaals Fibonacci °	66
Denkertjes	60, 70
Oplossingen van de Denkertjes uit nummer 1	71

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Amersfoort.
A. F. VAN TOOREN, 's-Gravenhage.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, besteld via één der docenten, / 4,50 per jaargang. Voor anderen / 7,00. Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

