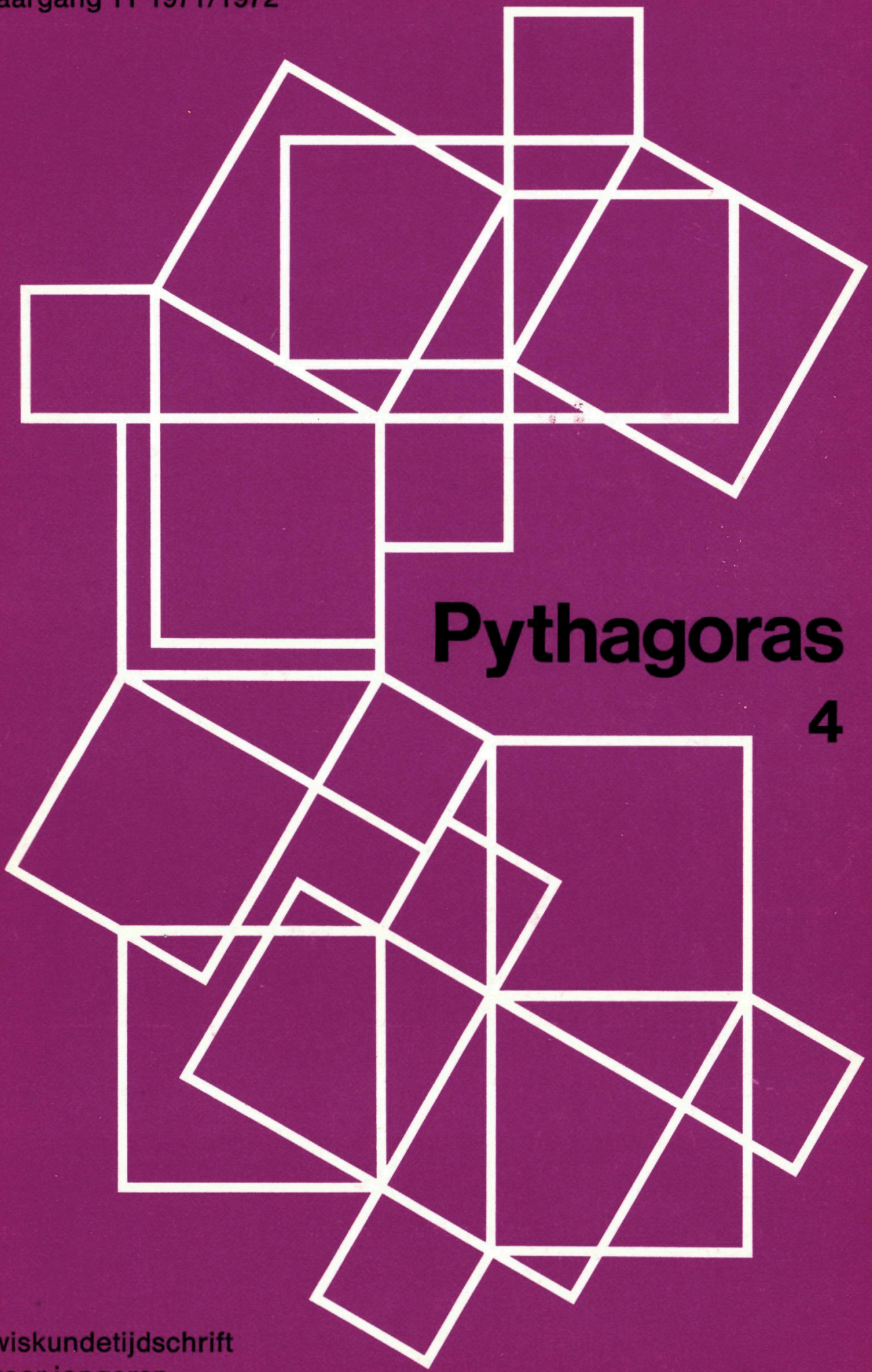
jaargang 11 1971/1972



Pythagoras

4

wiskundetijdschrift
voor jongeren

Hooggeëerd publiek!

Wat u thans gaat zien zult u niet willen geloven. Hier worden de grenzen van het mogelijke bijna overschreden! Op bladzijde 84 en 85.

Spel van delers°

Professor Fred. Schuh leefde van 1875 tot 1966, hij doceerde jarenlang wiskunde aan de Technische Hogeschool in Delft en was in velerlei opzichten een uitzonderlijk mens. Hij was ronduit een meester in het ontwerpen van wiskundige puzzels en spelen.

Het *spel van delers*, ontworpen in 1952, wordt door twee personen A en B gespeeld met een natuurlijk getal $n > 1$. Beide spelers kennen n en schrijven de verzameling D van delers van n op. A begint het spel door één van deze delers te noemen; beide spelers schrappen nu de genoemde deler *én* alle delers van die deler. Daarna is B aan de beurt voor zijn tegenzet: hij noemt één nog niet geschrapte deler van n. Deze deler wordt samen met al *zijn* delers geschrapt (voor zover ze niet al geschrapt zijn). Zo gaat het door met om de beurt noemen van een nog niet geschrapte deler van n en het schrappen van deze deler met al zijn delers.
De speler die aan de beurt is nadat alle delers van n geschrapt zijn *wint*!

Opmerking: Het is natuurlijk flauw om af te spreken, dat de speler die als laatste een nog niet geschrapte deler van n kan noemen de winnaar is, immers, dan wint A altijd met de openingszet n!!

Laten we eens als voorbeeld nemen het getal 48, dat heeft een flinke verzameling delers: $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$
We zetten een mogelijk spelverloop in een overzichtje:

	schrappen	blijft over
A kiest 1	1	{2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48}
B kiest 16	2, 4, 8, 16	{3, 6, 12, 24, 48}
A kiest 12	3, 6, 12	{24, 48}
B kiest 24	24	{48}

A moet 48 nemen en heeft dus verloren.

Wanneer B de eerste keer 4 in plaats van 16 had gekozen had dit kunnen gebeuren:

	schrappen	blijft over
A kiest 1	1	{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48}
B kiest 4	2, 4	{3, 6, 8, 12, 16, 24, 48}
A kiest 12	3, 6, 12	{8, 16, 24, 48}
B kiest 24	8, 24	{16, 48}
A kiest 16	16	{48}

B moet 48 nemen en heeft dus verloren.

Het is beslist niet gemakkelijk bij een willekeurige waarde van n vast te stellen wat het beste speelplan is voor A en B. Verbluffend eenvoudig is het bewijs, dat de beginner A eigenlijk behoort te winnen (anders gezegd: als A verliest is het zijn eigen schuld!). Met de woorden van professor Schuh:
'Deze bijzonderheid, dat men wel kan inzien wie wint, maar niet hoe die 'wie' moet spelen om ook werkelijk te winnen, komt hoogst zelden voor. Tenminste mij is geen ander spel bekend waarbij zich dit voordoet.'
Nu het bewijs. Er zijn precies twee mogelijkheden:
1 er is een van 1 verschillende openingszet van A waardoor hij wint.
2 er is *geen* van 1 verschillende winnende beginzet van A.
In het eerste geval wint A. In het tweede geval wint A ook, nl. door de openingszet 1, immers dan komt B in de situatie waarin A zich bevond toen hij begon, met dit verschil, dat 1 al geschrapt is; B kan dus niet meer winnen!

Belangrijk is ook de vraag of er bij een willekeurige waarde van n meer dan één winnende openingszet bestaat. Hoewel alle tot op heden onderzochte gevallen elk juist één winnende openingszet bevatten, is er (nog) geen bewijs, dat dit voor elke waarde van n zo is. Zeker is wél, dat de deler 1 en een grotere deler van n niet *beide* een winnende openingszet kunnen zijn. We zullen dit eens nagaan.

Enkele gevallen laten zich heel goed onderzoeken.

1. n is een macht van een priemgetal. Bijvoorbeeld $n = 7^3 = 343$.
   Nu is $D = \{1, 7, 49, 343\}$
   A wint door te beginnen met 49. Elke 'lagere' opening van A kan fataal zijn, omdat B dan 49 kiest.
2. n is een product van twee priemgetallen. Bijvoorbeeld $n = 11 \times 13 = 143 \quad D = \{1, 11, 13, 143\}$
   A wint met openingszet 1. Antwoordt B met 11, dan neemt A de deler 13 of omgekeerd.
3. n is het product van een priemgetal en een macht van een ander priemgetal. Bijvoorbeeld $n = 11 \times 7^3 = 11 \times 343 = 3773$
   $D = \{1, 7, 11, 49, 77, 343, 539, 3773\}$
   A wint met openingszet 1.

   Kiest B nu een getal *zonder* factor 11, dus 7, 49 of 343, dan antwoordt A respectievelijk met 11, 77 of 539.
   Kiest B juist één van deze laatste drie getallen, dan vervolgt A respectievelijk met 7, 49 of 343, en weer is B het haasje!
   Vraag: Hoe moet A dus spelen in het geval $n = 48$?

Als de deler d *in een bepaalde spelsituatie* S een winnende zet is, is elke kleinere deler e van d (waartoe zeker 1 behoort!) automatisch *geen* winnende zet: op de zet e antwoordt de tegenpartij namelijk met d en hij wint. (Merk op, dat de zettenreeks e-gevolgd-door-d tot dezelfde schrapping in D leidt als de zet d alleen.)

Omgekeerd, als *in een bepaalde spelsituatie S* de deler d (bijvoorbeeld 1) een winnende voortzetting is, is elk groter veelvoud van d natuurlijk geen winnende zet.
Een pikante bijzonderheid is nog het volgende.
Stel, dat in een bepaalde spelsituatie S speler A de zet u doet en dat B daarop het winnende antwoord v tot zijn beschikking heeft (er is dan een situatie S^1 ontstaan waarin de zet v de speler die aan de beurt is de winst mogelijk maakt). Nemen we nog aan, dat v geen veelvoud is van u, dan is in de situatie *S u een winnende zet als antwoord op de zet v*!!
Dit komt omdat na de zetten u en v en ongeacht de volgorde waarin ze worden uitgevoerd, dezelfde delers geschrapt zijn.

We hebben dit gezien in de voorbeelden 2 en 3. Kijk nog eens naar 2. Als B de deler 11 kiest dan neemt A de deler 13 en wint. Kiest B omgekeerd 13, dan wint A met 11!

Het zou buitengewoon interessant zijn te weten hoe een met dit spel geprogrammeerde computer te werk gaat; voorlopig is zeker veel voldoening te beleven aan een spel met $n = 720$; daarin zitten genoeg delers om een spannende en gevarieerde strijd te garanderen! Veel plezier!

Denkertjes

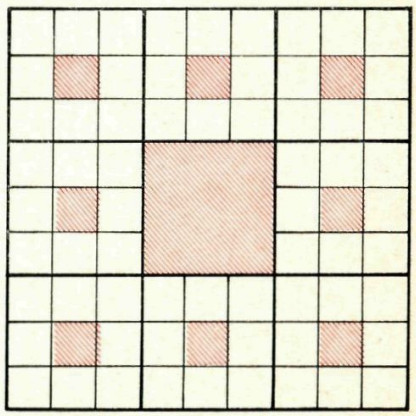
31 De punten P en Q liggen binnen een cirkel C. Construeer een rechthoekige driehoek waarvan de hoekpunten op de cirkel C liggen en waarbij de rechthoekszijden door P en Q gaan. Onder welke voorwaarden is de constructie onmogelijk?

32 $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ is alleen dan deelbaar door 5 als het natuurlijke getal n niet deelbaar is door 4. Bewijs dit.

33 Van de reële getallen a, b, c is gegeven
$a^2 + b^2 + c^2 = 1$, toon aan dat
$-\frac{1}{2} \leqq ab + bc + ca \leqq 1$.

34 Verdeel een vierkant met zijde 1 in 9 congruente vierkantjes en verwijder dan het middelste.
Behandel de overige 8 vierkantjes op de zelfde manier en herhaal dit proces n maal. Hoeveel vierkantjes met zijde $\frac{1}{3^n}$ blijven er over?

(Zie nevenstaande figuur).



Een graas-probleem°

De heer W. A. van der Spek te Mantgum heeft ons door het inzenden van het volgende probleempje weer eens doen beseffen, dat ook na de grote Sir Isaäc Newton het Britse Imperium niet gekampt heeft met het gebrek aan oorspronkelijk denkende wiskundigen. In een Engels rekenboek van 1898 (Arithmetic, by Charles Pendlebury), zo meldt ons de briefschrijver, is een hoofdstuk gewijd aan problemen betreffende 'pastures with uniformly growing grass'.
Een zo'n vraagstuk luidt:

Als 17 paarden een weide met eenparig groeiend gras kaalgrazen in 30 dagen en 19 paarden dat doen in 24 dagen, hoeveel paarden kunnen daar dan 8 dagen geweid worden als na 6 dagen er 4 worden weggehaald?

Wie zet er zijn tanden eens in?

Wij niet!

De verminkte staartdeling°°

Met deze naam worden al die rekenkundige problemen aangeduid waarbij het er om gaat de met opzet uit een staartdeling weggeveegde cijfers door logisch nadenken terug te vinden.
Eerst maar eens een paar voorbeelden.

1 Welke cijfers moeten op de open plaatsen worden bijgeschreven? (zie figuur 1a).
Het eerste cijfer van het quotiënt Q is 1 omdat
1 de deler d een getal is tussen 80 en 89,
2 het getal op r_1 uit twee cijfers bestaat.
Dit betekent ook, dat het eerste cijfer op r_1 8 is; de sprong van r_2 op r_3 toont aan, dat ook het eerste cijfer van het deeltal D een 8 is.
Op r_2 én op r_4 worden twee cijfers uit D 'aangehaald' en dus is het tweede én het vierde cijfer in Q een 0.
Gelet op r_4 is het eerste cijfer op r_2 een 3 en *dus* is het tweede cijfer op r_1 een 5 en dit betekent $d = 85$.
Op r_3 staat, dat het product van 85 en het cijfer der honderdtallen uit Q driehonderd-zoveel is.
Het derde cijfer in Q is daarom 4. Omdat nu d en Q bekend zijn weten we ook D. De rest is dan wel erg eenvoudig: r_5 bevat 765 ($= 9 \cdot 85$) en r_6 bepaalt tenslotte de stand op r_4 namelijk 767.

2 Voltooi de deling van figuur 2a.
Uit de 'aanhalingen' op r_2 en op r_4 volgt, dat het tweede én het vierde cijfer van Q een 0 is.
Het product $8 \cdot d$ heeft (zie r_3) 2 cijfers en dus geldt $d \leqq 12$; op r_5 staat het product van d en het laatste cijfer van Q, dat zijn 3 cijfers m.a.w. $d \geqq 12$. Samen betekent dit $d = 12$.
Gelet op r_1 moet het eerste cijfer van Q een 9 zijn. Nu zijn de cijfers op r_1 en daarmee de eerste drie cijfers van D gevonden: 108 ($= 9 \cdot 12$).
Het veelvoud van $d = 12$ op r_5 heeft drie cijfers, is dus 108; hier uit volgt $Q = 90809$, de rest is dan niet moeilijk meer.
Wereldberoemd zijn de zogenaamde 'Berwick-problemen'.

```
d      D        Q
8 . /.8 ....\.... 9
    . .                 r1
     . . .              r2
    3 . .               r3
      . . .             r4
      . . .             r5
        2               r6
```

fig. 1a

Oplossing:

```
85 /884767\ 10409
   85
    347
    340
      767
      765
        2
```

fig. 1b

```
d      D        Q
. . /. . . . . .\. . 8 . .
    . . .               r1
      . .               r2
      . .               r3
        . . .           r4
        . . .           r5
          1             r6
```

fig. 2a

Oplossing:

```
12 /1089709\ 90809
   108
     97
     96
      109
      108
        1
```

fig. 2b

We kozen daaruit het *probleem van de zeven zevens*, (ontworpen in 1906 door de schoolmeester W. E. H. Berwick).
Er is precies één oplossing, namelijk $d = 125473$, $Q = 58781$, maar het vereist een flinke dosis vindingrijkheid om daar achter te komen. Probeer het maar eens!

```
....7./..7.......\..7..
      ......
      ------
      .....7.
      -------
        .7....
        .7....
        -------
        .......
        ....7..
        -------
          ......
          ------
             0
```

fig. 3

3 De absolute 'topper op dit gebied is de wonderlijke bijdrage van professor Schuh uit 1921.
'Een natuurlijk getal D van zeven cijfers levert na deling door een natuurlijk getal d van zes cijfers een tiendelige repeterende breuk met twee cijfers "voor de komma". In de staartdeling (zie figuur 4) vormen de laatste negen cijfers het repeterende deel r van deze breuk'.

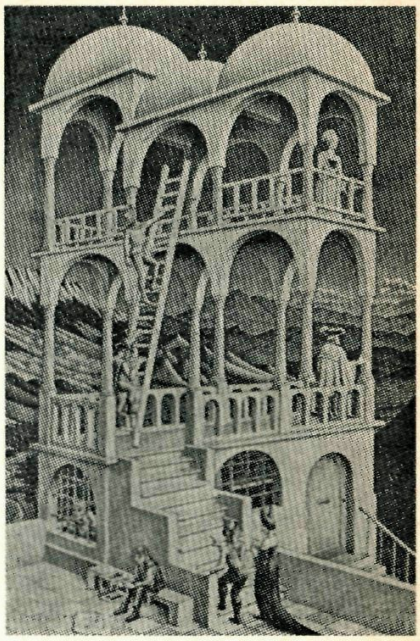
```
  d        D          r
 ------  -------     ---------
....../.......\..,.........
      ------
      .......
       ------
       .......
       -------
  ---->.......
        ------
        .......
        -------
         .......
         -------
||        .......
          -------
           .......
           -------
             ......
             ------
<----------- .......
```

fig. 4

Dit probleem is opmerkelijk door het feit, dat geen enkel cijfer direct gegeven is! Toch is er weer precies één oplossing:
$d = 667334$, $D = 7752341$.

Wie durft?!!

Van de redactie



Belvedère

Escher

Regelmatig komen op het redactiesecretariaat briefjes binnendwarrelen met de vraag: Zijn er nog Escherprenten?
Dat is inderdaad het geval en we herhalen daarom nog maar eens uit welke prenten beide series bestaan en hoe je ze kunt bestellen:

Serie 1: Dag en Nacht, Hol en Bol, Prentententoonstelling

Serie 2: Belvedère, Boven en Onder, Balkon.

Prijs per serie: *f* 6,—.

Bestellingen *uitsluitend* door storting of overschrijving op gironummer 1308949 t.n.v. Wolters-Noordhoff nv, Groningen, onder vermelding van:

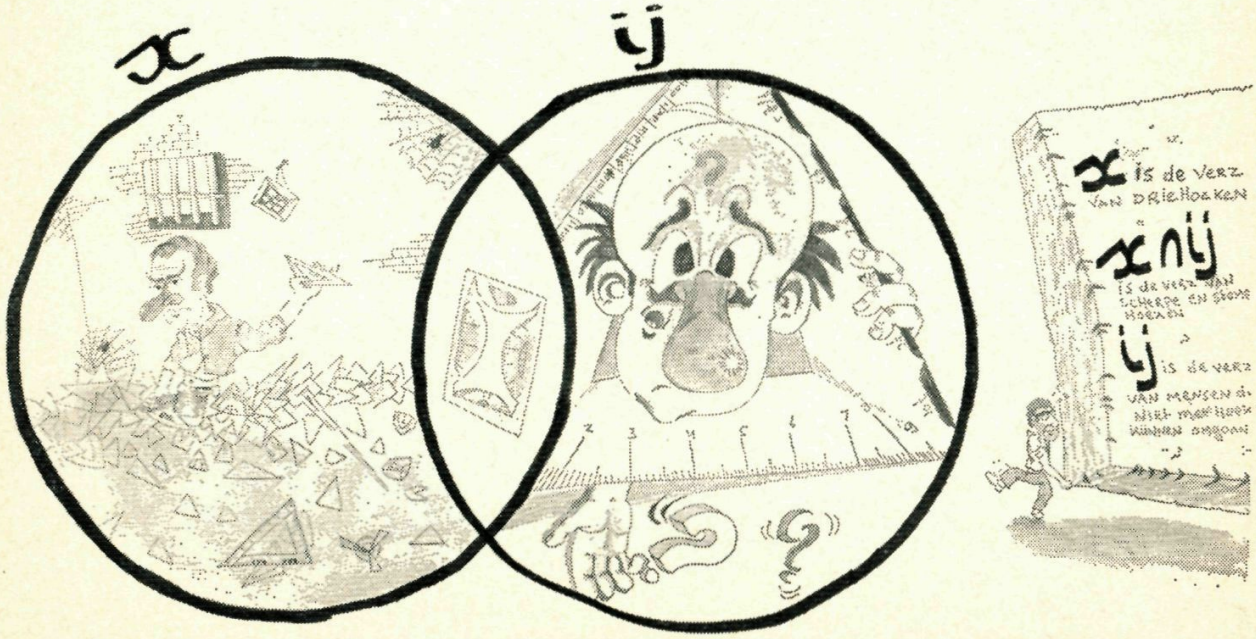
... × Escherprenten, serie 1
... × Escherprenten, serie 2

Denkertjes

De lootprijs voor de Denkertjes in nummer 2 van deze jaargang is gewonnen door G. Groenewegen, Nijmegen.

Verzamelingen

Je zult bij het doorbladeren van dit nummer kunnen constateren dat de verzamelingen een duchtig woordje meespreken. Een leerling van het Thorbecke-college in Groningen werd door dit onderwerp geïnspireerd tot de onderstaande tekening.
Op de wiskundige aspecten hebben we maar niet al te zeer gelet. Deze vertonen misschien enige overeenkomst met de mayonaise van bladzijde 86?



Nog eens het spel met de vier kubussen°°

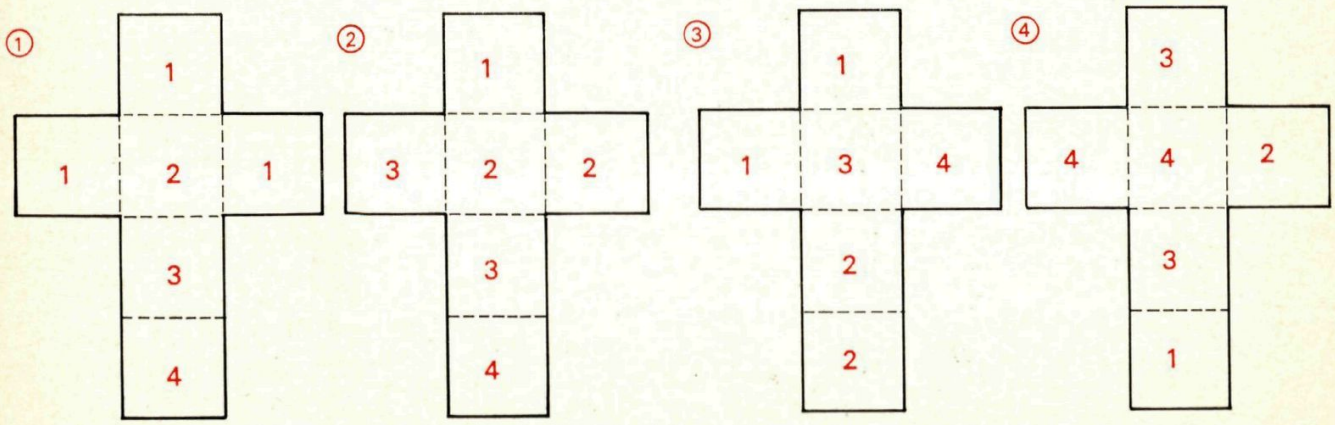
Zet de vier genummerde kubussen ① ② ③ en ④ in een rij tegen elkaar, zó, dat op elke lange zijde van de balk elk van de cijfers 1, 2, 3 en 4 juist één keer voorkomt.
Dat was de opgave uit het eerste nummer van deze jaargang; een oplossing van dit spel is opgenomen in het tweede nummer, en nu de bijbehorende redenering.
Twee cijfers *a* en *b* die op twee overstaande zijvlakken van een kubus staan noemen we een *koppel* (*a*, *b*) of (*b*, *a*), de volgorde der cijfers doet er niet toe.
In het spel komen de volgende *koppels* voor:

①	②	③	④
(1, 1)	(3, 2)	(1, 4)	(4, 2)
(1, 3)	(1, 3)	(1, 2)	(3, 3)
(2, 4)	(2, 4)	(3, 2)	(4, 1)

Tabel 1

Als we de kubussen op een rij tegen elkaar plaatsen zal op elke kubus juist één *koppel* uitgeschakeld worden, d.w.z. de cijfers van dit *koppel* leveren geen bijdrage aan het cijferbeeld op de lange zijden van de balk. Zo'n *koppel* noemen we een 0-*koppel*.
Uit tabel 1 volgt, dat er één *vier* te veel in het spel zit: het zijn er vijf en we kunnen er maar vier gebruiken. Gevolg: er is juist één 0-*koppel* waarin één *vier* voorkomt. Gemakkelijk is na te gaan wat het overschot aan *enen*, *tweeën* en *drieën* is. Op deze berekening berust de volgende bepaling van de noodzakelijke 0-*koppels*.

fig. 5



De 0-koppels

Is (2, 4) 0-koppel op ①, dan spelen de volgende koppels mee: (1, 1) en (1, 3) op ①, (1, 4) op ③ en (4, 1) op ④. Hierin komt het cijfer 1 vijf keer voor en dat is één keer te veel; (2, 4) is dus geen 0-koppel op ①.

Is (2, 4) 0-koppel op ②, dan is (3, 3) 0-koppel op ④; nu mag er nergens meer een cijfer 3 in een 0-koppel verdwijnen. Op ① is dus (1, 1) en op ③ is (1, 2) 0-koppel. Ga na, dat de cijfers 1, 2, 3 en 4 elk vier keer voorkomen (geval *A*).

Stel (4, 2) is 0-koppel op ④ en (3, 2) is 0-koppel op ③. Nu mag geen enkele 2 meer voorkomen in een 0-koppel en dus is (1, 3) 0-koppel op ②. Gelet op het aantal *drieën* en *enen* moet (1, 1) 0-koppel zijn op ① (geval *B*).

Stel (4, 2) is 0-koppel op ④ en (1, 2) is 0-koppel op ③; geen 2 mag meer wegvallen, dus (1, 3) is 0-koppel op ②. Door op ① (1, 3) als 0-koppel te nemen blijven de cijfers 1, 2, 3 en 4 elk vier keer in het spel (geval *C*).

Stel (1, 4) is 0-koppel op ③, dan is (3, 3) 0-koppel op ④. Op ② valt opnieuw een 3 weg in een 0-koppel, er blijven dan slechts drie *drieën* in het spel en dat is te weinig: (1, 4) is geen 0-koppel op ③.

Neem aan (4, 1) op ④ en (1, 1) op ① zijn 0-koppels. Geen 1 mag nu meer verdwijnen en dus is (3, 2) op ② en (3, 2) op ③ 0-koppel. Elk van de cijfers 1, 2, 3 en 4 komt vier keer voor in het spel (geval *D*).

Neem aan (4, 1) op ④ en (1, 3) op ① zijn 0-koppels. Op ② valt de laatste overtollige 3 weg (immers (3, 2) of (1, 3) is daar 0-koppel) en dus is op ③ (1, 2) 0-koppel. Door nu op ② (3, 2) als 0-koppel te nemen blijven er weer precies vier *vieren*, *drieën*, *tweeën* en *enen* in het spel (geval *E*).

In tabel 2 is het resultaat van deze onderzoekingen nog eens overzichtelijk gerangschikt.

	①	②	③	④
A	(1, 1)	(2, 4)	(1, 2)	(3, 3)
B	(1, 1)	(1, 3)	(3, 2)	(4, 2)
C	(1, 3)	(1, 3)	(1, 2)	(4, 2)
D	(1, 1)	(3, 2)	(3, 2)	(4, 1)
E	(1, 3)	(3, 2)	(1, 2)	(4, 1)

tabel 2, de 0-koppels

Uitschakeling van *C* en *E*.

In de gevallen *C* en *E* komen op ① en ③ dezelfde 0-koppels voor: (1, 3) en (1, 2). De kubussen ① en ③ kunnen op twee principieel verschillende manieren tegen elkaar worden gezet:

	links	rechts	voor	achter	boven	onder
①	1	3	–	–	–	–
③	1	2	–	–	–	–
of						
①	1	3	–	–	–	–
③	2	1	–	–	–	–

In beide gevallen kan ③ nog vier standen t.o.v. ① aannemen door ③ te wentelen om de as die de 0-koppels verbindt. Je kunt gemakkelijk proefondervindelijk vaststellen, dat in elk van de twee gevallen juist één stand van ③ t.o.v. ① bruikbaar is; bij elk van de andere standen blijkt minstens één cijfer tweemaal voor te komen op een zijkant.
De twee bruikbare standen zijn:

I	links	rechts	voor	achter	boven	onder
①	1	3	1	1	2	4
③	1	2	2	3	4	1

II	links	rechts	voor	achter	boven	onder
①	1	3	1	1	2	4
③	2	1	3	2	4	1

In beide gevallen zie je, dat de kubussen ② en ④ samen twee koppels moeten 'leveren' zó, dat de som der cijfers *voor* en de som der cijfers *achter* gelijk wordt aan 10 (= $1 + 2 + 3 + 4$). De som der cijfers op die twee koppels zou dan in beide gevallen moeten zijn $7 + 6 = 6 + 7 = 13$ en zo'n tweetal is er niet.
De gevallen *C* en *E* zijn daarmee uitgeschakeld.

Uitschakeling van *B* en *D*.

Bij deze gevallen komen op ① en ③ dezelfde 0-koppels voor: (1, 1) op ① en (3, 2) op ③.
Met een paar eenvoudige handgrepen stellen we vast, dat er ook nu weer precies twee bruikbare standen zijn:

I	links	rechts	voor	achter	boven	onder
①	1	1	2	4	3	1
③	2	3	4	1	1	2

II	links	rechts	voor	achter	boven	onder
①	1	1	2	4	3	1
③	2	3	1	2	1	4

In I moeten ② en ④ weer twee koppels leveren waarvan de som der cijfers 13 is; ditmaal om bij *boven* en *onder* het totaal op 10 te brengen en dat lukt niet. Letten we in II op *voor* en *achter* dan hebben we daar alleen nog maar belangstelling voor een koppel uit ② en een koppel uit ④ waarin het cijfer 2 niet voorkomt. In aanmerking komen (1, 3) op ② en (4, 1) op ④. Helaas, in *B* is (1, 3) 0-koppel en in *D* is (4, 1) 0-koppel. Dag *B*, dag *D*!

Geval *A*.

De slotaanval dient zich dus te richten op geval *A* van tabel 2.
De twee plaatsingen van de 0-koppels op ① en ③ leveren elk één bruikbare stand op (weer met handkracht gevonden):

I	links	rechts	voor	achter	boven	onder
①	1	1	2	4	3	1
③	2	1	4	1	2	3

II	links	rechts	voor	achter	boven	onder
①	1	1	2	4	3	1
③	1	2	3	2	1	4

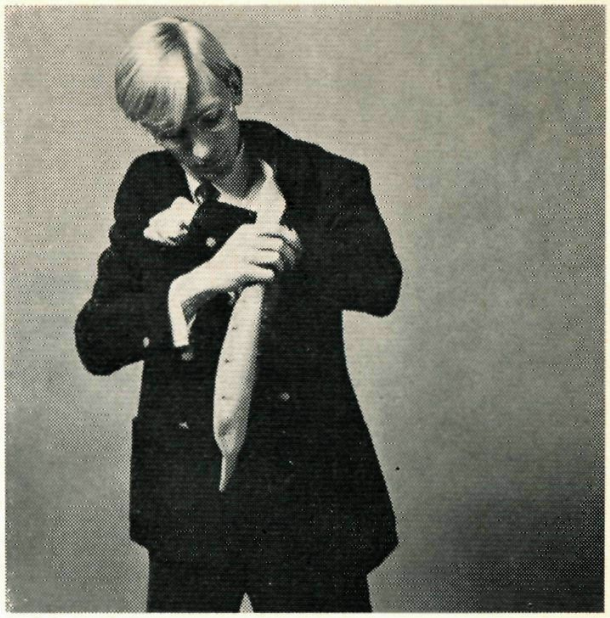
In geval I kan kubus ④ niet meer worden 'aangeschoven' zonder dat cijferherhaling optreedt; in II is ④ in precies één stand nog bruikbaar:

I	links	rechts	voor	achter	boven	onder
④	3	3	4	1	4	2

Nu blijkt er nog net één aansluiting met ② te zijn waardoor op alle lange zijkanten van de balk voldaan is aan de gestelde voorwaarde:

II	links	rechts	voor	achter	boven	onder
②	2	4	1	3	2	3

Binnen of Buiten?°

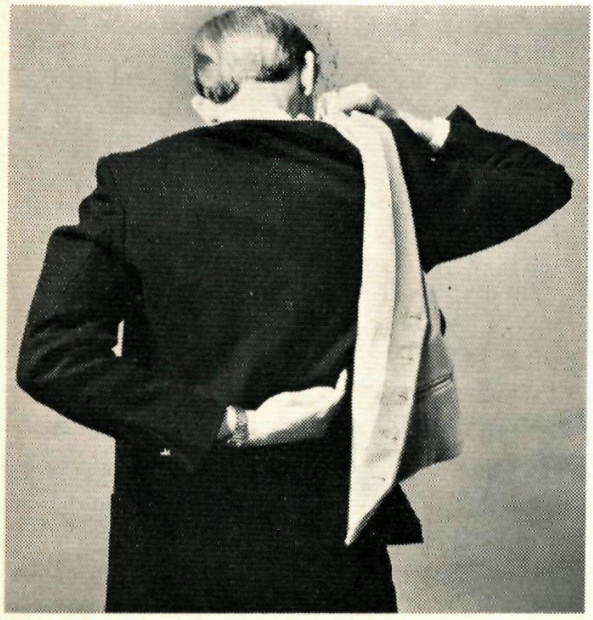


1

We houden er van de wereld om ons heen in te delen in meer of minder nauwkeurig afgebakende rubrieken. Een stoel is een stoel en een tafel is een tafel. Een stoel en een tafel moet je niet door elkaar halen, een groen en een rood verkeerslicht nog minder. Ook in de wiskunde werken we bij voorkeur met afgebakende begrippen. Een cirkel is een cirkel en een vierkant is een rechthoek. Een punt kan binnen, op of buiten een cirkel liggen, maar niet alle drie tegelijk.

Je kunt een ladder binnenshuis gebruiken of buitenshuis, de enige die met deze wet een loopje kan nemen is de graficus M. C. Escher in zijn *Belvedère*. De gevangene onder in dat gebouw zou wel willen dat binnen en buiten zulke relatieve begrippen zouden zijn. Hij zou ogenblikkelijk zijn kerker verlaten!

2



3

4

5

En neem nu deze keurige meneer. Pantalon, colbert, vest. Werkelijk keurig gekleed, met het vest binnen het colbert en het overhemd binnen het vest. Nou ja, binnen?
Bij het bekijken van de fotoreportage wordt je gevoel voor wat nu eigenlijk binnen en wat buiten is wel op de proef gesteld: Meneer trekt zijn vest uit, zonder eerst zijn jasje uit te doen!
'Topological tomfoolery' noemen ze dergelijk stuntwerk in het Engels. Topologie is het onderdeel van de wiskunde dat zich bezig houdt met eigenschappen van figuren en lichamen, die bij de meest vreemde vervormingen behouden blijven.

Tomfoolery wordt in het woordenboek omschreven als: malligheid, gekke streken, flauw gedoe. Je mag dus kiezen.

6

7

Wat is een actuaris?°

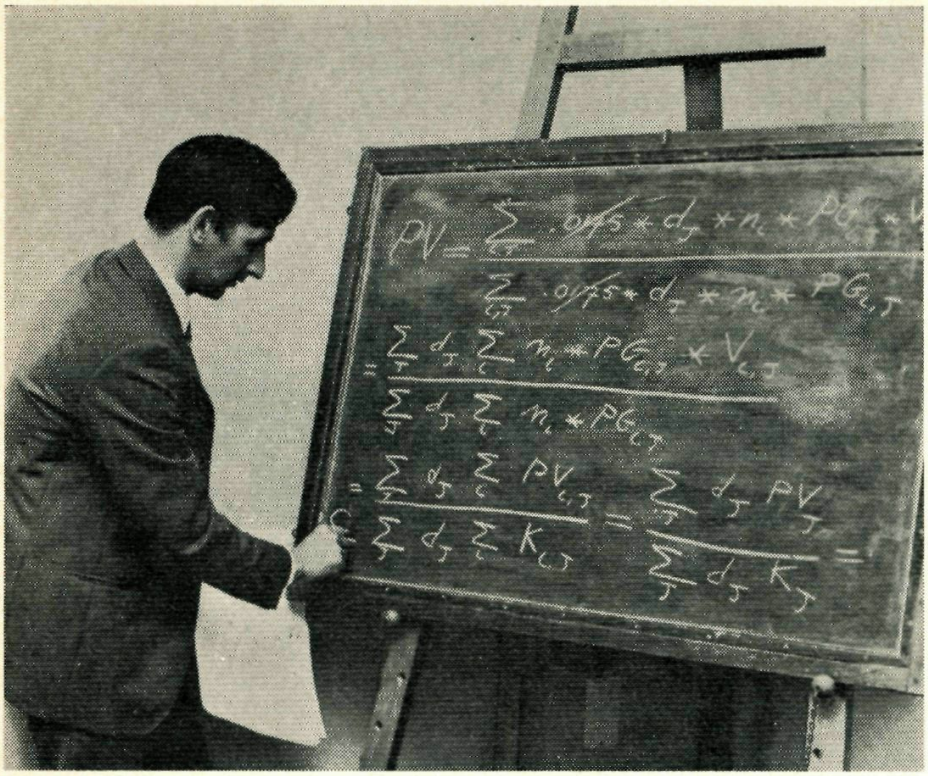
In het eerste nummer van het tijdschrift *Welwezen* van de Nederlandse Vereniging tot bevordering van het Levensverzekeringwezen staat een interview met drs. W. van der Klink, actuaris bij een levensverzekeringsmaatschappij.
Blijkbaar heeft de schrijver eerst in zijn omgeving eens geïnformeerd hoeveel mensen eigenlijk weten wat een actuaris is en doet, wat de meest uiteenlopende reacties opleverde:

'*Iemand die akten en andere documenten opmaakt*'.
'*Een soort notaris, geloof ik*'.
'*Iemand in de waterbouwkunde, een ingenieur of zo*'.
'*Een ambtenaar bij de belastingen*'.

Een eenvoudige omschrijving is: Een actuaris is een verzekeringswiskundige, die zich bezighoudt met de financiële problemen van verzekeringen. Om te zien wat dit inhoudt zullen we een duik nemen in de geschiedenis. De eerste levensverzekeringsmaatschappij, de 'Amicable' ontstond in 1706 in Schotland. Deze instelling werkte volgens een omslagstelsel: Jaarlijks werden de ontvangen premies verdeeld over degenen die recht hadden op een uitkering.
In 1762 werd in Londen de 'Equitable' opgericht, welke maatschappij als eerste premies gebruikte, die afhankelijk waren van de leeftijd bij toetreding. Bij deze maatschappij kreeg de hoogste functionaris de titel van 'actuary', waarbij waarschijnlijk met een scheef oog is gekeken naar het Romeinse rijk, waarin de *actuarius* een soort secretaris van de Senaat was. In de loop van de tijd heeft het levensverzekeringswezen een grote vlucht genomen en langzamerhand is de beroepsbenaming actuaris meer en meer gebruikelijk geworden voor een wiskundige in het levensverzekeringsbedrijf.
De grote verzekeringsmaatschappijen van tegenwoordig hebben een aantal actuarissen in dienst die de grondslagen kiezen, waarop de tarieven worden gebaseerd. Hierbij gaat het om drie factoren:

1 De kosten van het maken en het verkopen van de verzekering.
2 De sterfte in de doelgroep.
3 Het rendement op de beleggingen.

Sterftestatistieken, loonstijgingen en rentevoeten worden aldus tot een wiskundige mayonaise geklutst, waarmee de actuaris dan verder werkt. Jaarlijks worden de grondslagen op hun juistheid gecontroleerd.
Behalve bij het levensverzekeringswezen treft men ook actuarissen aan bij pensioenfondsen. Verder zijn er raadgevende actuarissen, die een eigen praktijk hebben en optreden als adviseurs op het gebied van pensioenen.
Wat brengt iemand er toe dit vak te kiezen? De heer Van der Klink zegt hierover:



'Tja, aanleg voor wiskunde en afkeer van natuurkunde bijvoorbeeld. Zo was het tenminste in mijn geval. Dat ik wiskunde zou gaan studeren was al vrij vroeg duidelijk maar als zuiver wiskundige moet je sterrenkunde en natuurkunde als bijvak nemen en dat interesseert me niet. Dan kun je kiezen tussen actuariaat en econometrie. In beide gevallen moet je economie er bij doen. Ik heb voor actuariële wetenschappen gekozen. Waarom? Ach, je hebt wat gekozen en je weet later vaak niet eens meer goed waarom. Ik had een vrij goed beeld voor ogen van wat een actuaris doet. Overigens vind ik het niet zo belangrijk wat ik precies ben. Ik ben nu actuaris maar als ik door omstandigheden iets anders moet gaan doen dan is dat geen bezwaar. Ik kan overal elders in het bedrijf terecht als dat moet: personeelszaken of in het management. En ook buiten het bedrijf zijn er talloze mogelijkheden als je je maar durft om te scholen. Ik hoef geen specialist te zijn want er zijn overal specialisten aanwezig. Als ik maar op tijd de juiste informatie van de juiste man krijg.'

Voor nadere inlichtingen over het beroep van actuaris verwijzen we naar het in de serie beroepenmonografieën verschenen deeltje, dat door storting of overschrijving van *f* 2,20 op girorekening 425300 t.n.v. de Staatsuitgeverij te 's-Gravenhage, verkregen kan worden. (Op de stortingskaart vermelden: Actuaris, anders krijg je misschien het boekje over opvoedkundige of hogere politieambtenaar.) In het boekje staan voor de geïntresseerden ook alle opleidingsmogelijkheden voor dit niet alledaags beroep, waaraan door de ontwikkeling van de computer als rekengereedschap weer nieuwe facetten zijn toegevoegd:

'We hebben een stijgend weduwenpensioen kunnen aanbieden dank zij de computer. Als een verzekerde op zijn 35ste overlijdt kun je niet zijn weduwe voor de komende dertig jaar op hetzelfde pensioen laten staan. Bij een normale carrière-ontwikkeling van haar

man zou ze immers bij zijn leven ook een stijgend inkomen hebben gehad. Het zou werkelijk onbegonnen werk zijn geweest om zo'n stijgende schaal met de hand uit te rekenen: je hebt te maken met progressieve rentevoeten en dat soort dingen voor exacte berekeningen. Tientallen mensen zouden jarenlang rekenen met al weer achterhaalde uitkomsten als resultaat. De computer geeft je de mogelijkheden in bijv. een dag. De computer is daarom gewoon rekengereedschap geworden van de actuaris; absoluut noodzakelijk en vanzelfsprekend om je daarvan te bedienen. Dat zeg ik niet alleen maar daarmee is ook mijn oudste collega het eens – hij zit vlak voor zijn pensioen maar hij is even enthousiast over het computergebruik als ik.'
De veronderstelling, dat zijn vak niet van de eenvoudigste is en dat de drempel voor menige student misschien te hoog is, brengt hem tot een schouderophalen.
'Ik vond de middelbare school moeilijker,' zegt hij.

Denkertjes

35 O, A en B zijn drie niet op één lijn gelegen punten; het lijnstuk OA is langer dan het lijnstuk OB. Bepaal de verzameling van de punten die gelijke afstand hebben tot dit tweetal lijnstukken.

36 A en B zijn twee deelverzamelingen van $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $A \cup B = V$; $A \cap B = \varnothing$. Bewijs, dat één van deze deelverzamelingen twee getallen en hun verschil bevat.

37 Hoeveel posities kunnen een witte en een zwarte dame op een overigens leeg schaakbord innemen zonder elkaar te bedreigen?

38 Met 4550 sinaasappels bouwt een groentewinkelier in zijn etalage twee zo hoog mogelijke stapels. Het grondvlak van de ene stapel heeft de vorm van een gelijkzijdige driehoek, dat van de andere stapel de vorm van een rechthoek. Het aantal lagen is in beide stapels even groot. Bereken dat aantal.

Verzamelingen en kansen°°

De 'oud-opgeleiden' onder de lezers maken in dit artikel kennis met een drietal voor hen nieuwe begrippen. Voor de 'nieuwelingen' is het kunnen toepassen van vereniging en doorsnede bij de kansberekening een aantrekkelijk extra.

We nemen twee verzamelingen letters:

$V_1 = \{a, b, c, d\}$ en $V_2 = \{c, d, e, f, g\}$.

De letters c en d behoren èn tot V_1 èn tot V_2. Die twee behoren tot de *doorsnede*. Dat wordt geschreven als:

$V_1 \cap V_2 = \{c, d\}$.

De *vereniging* van V_1 en V_2 bevat alle elementen, die òf tot V_1 òf tot V_2 behoren.
Notatie: $V_1 \cup V_2 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
c en d worden hierin slechts één keer opgeschreven.
In figuur 6 zijn vereniging en doorsnede in een Venndiagram aangegeven. De doorsnede is gearceerd, de vereniging is rood omlijnd.
Het aantal elementen van V_1 duiden we aan met $\overline{V}_1$, dat van V_2 met $\overline{V}_2$ enz.
De nu volgende tabel en de figuur 7 drukken het zelfde aantal van iedere verzameling uit.

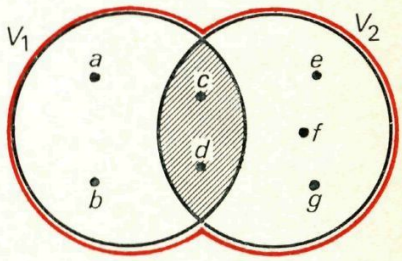


fig. 6

Tabel:

verzameling	aantal
V_1	$\overline{V}_1 = 4$
V_2	$\overline{V}_2 = 5$
$V_1 \cap V_2$	$\overline{V_1 \cap V_2} = 2$
$V_1 \cup V_2$	$\overline{V_1 \cup V_2} = 7$

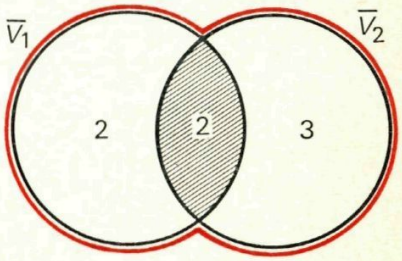


fig. 7

Belangrijk voor ons doel is de gelijkheid:

$$\overline{V_1 \cup V_2} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 - \overline{V_1 \cap V_2}$$
$$7 = 4 + 5 - 2$$

Deze relatie is juist voor twee eindige verzamelingen, want:
Het aantal elementen van de vereniging = de som van het aantal elementen van beide verzamelingen.
Hierin is het aantal van de doorsnede twee keer berekend.
Het aantal van de doorsnede moet dus één keer worden afgetrokken.
Een tweede voorbeeld geeft figuur 8. Daarin zijn direct

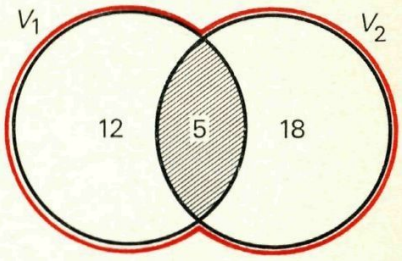


fig. 8

de aantallen elementen van twee andere verzamelingen V_1 en V_2 vermeld.

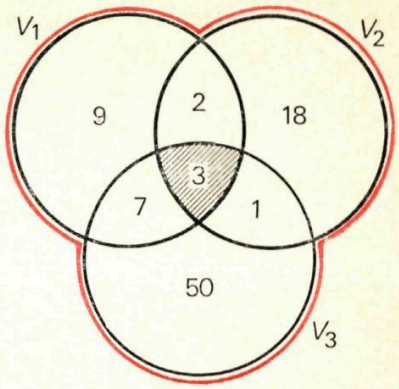


fig. 9

Ook nu geldt: $\overline{V_1 \cup V_2} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 - \overline{V_1 \cap V_2}$.
$\qquad 35 = 17 + 23 - 5$

Voor drie nieuwe verzamelingen V_1, V_2 en V_3 geven een tabel en figuur 9 weer dezelfde aantallen.

verzameling	aantal
V_1	$\overline{V}_1 = 21$
V_2	$\overline{V}_2 = 24$
V_3	$\overline{V}_3 = 61$
$V_1 \cap V_2$	$\overline{V_1 \cap V_2} = 5$
$V_1 \cap V_3$	$\overline{V_1 \cap V_3} = 10$
$V_2 \cap V_3$	$\overline{V_2 \cap V_3} = 4$
$V_1 \cap V_2 \cap V_3$	$\overline{V_1 \cap V_2 \cap V_3} = 3$ gearceerd
$V_1 \cup V_2 \cup V_3$	$\overline{V_1 \cup V_2 \cup V_3} = 90$ rood omlijnd.

Nu geldt de relatie:

$$\overline{V_1 \cup V_2 \cup V_3} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 - \overline{V_1 \cap V_2} - \overline{V_1 \cap V_3} - \overline{V_2 \cap V_3} + \overline{V_1 \cap V_2 \cap V_3} \qquad (1)$$

De juistheid blijkt weer na substitutie van de getallen:

$$90 = 21 + 24 + 61 - 5 - 10 - 4 + 3$$
$$90 = (21 + 24 + 61) - (5 + 10 + 4) + 3$$
$$90 = 106 - 19 + 3$$
$$90 = 90.$$

Voor elk drietal eindige verzamelingen V_1, V_2 en V_3 geldt:
Het aantal elementen van de vereniging = som van het aantal van elke verzameling.
Dan is het aantal van elke doorsnede twee aan twee, dubbel geteld.
Dat aantal moet dus één keer afgetrokken worden.
Nu is het aantal van de doorsnede van alle drie verzamelingen drie keer afgetrokken.
Dat aantal moet dus nog één keer bijgeteld worden.
We schrijven (1) nog eens op in de vorm:

$$\overline{V_1 \cup V_2 \cup V_3} = \underbrace{(\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3)}_{s_1} - \underbrace{(\overline{V_1 \cap V_2} + \overline{V_1 \cap V_3} + \overline{V_2 \cap V_3})}_{s_2} + \underbrace{\overline{V_1 \cap V_2 \cap V_3}}_{s_3}.$$

Zonder bewijs stellen we nu de algemene geldigheid voor n verzamelingen:

$$\overline{V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots\ldots \cap V_n} =$$
$$= s_1 - s_2 + s_3 - s_4 \ldots\ldots - (-1)^n \cdot s_n.$$

Hierin is:

s_1 de som van het aantal elementen van alle verzamelingen apart
s_2 de som van het aantal elementen van alle doorsneden twee aan twee
s_3 de som van het aantal elementen van alle doorsneden drie aan drie.
enz.

En nu de overstap naar de kansrekening.

Kans met kaarten

We nemen eerst een eenvoudig probleem, dat opgelost kan worden met en zonder bovenstaande formule.
Een volledig kaartspel bevat 52 kaarten.

Er zijn:	Kans op het trekken van:
4 boeren	een boer is $\frac{4}{52}$
13 schoppen	een schop is $\frac{13}{52}$
26 zwarte kaarten	een zwarte kaart is $\frac{26}{52}$

Hoe groot is de kans op het trekken van òf een boer, òf een schop, òf een zwarte kaart?
Bedenkende dat de schoppen en twee van de boeren ook zwart zijn tellen we 28 van zulke kaarten.

De kans is $\dfrac{\text{aantal bedoelde kaarten}}{\text{totaal aantal kaarten}} = \frac{28}{52}$ ②

Nu de oplossing met de formule.
② kunnen we ook schrijven als

$$\frac{\text{aantal bedoelde kaarten}}{\text{totaal aantal kaarten}} = \frac{\overline{B \cup S \cup Z}}{52}$$

Hierin is B de verzameling boeren, S de verzameling schoppen en Z de verzameling zwarte kaarten.
Verder komt er

$$= \frac{s_1 - s_2 + s_3}{52}$$
$$= \frac{(4 + 13 + 26) - (1 + 13 + 2) + 1}{52}$$
$$= \frac{28}{52}$$

Dus $s_1 = \overline{B} + \overline{S} + \overline{Z}$
$s_2 = \overline{B \cap S} + \overline{B \cap Z} + \overline{S \cap Z}$
$s_3 = \overline{B \cap S \cap Z}$

Nog een voorbeeld:
Hoe groot is de kans op het trekken van òf een boer, òf een vrouw, òf een rode kaart òf een hart?
De kans is

$$\frac{s_1 - s_2 + s_3 - s_4}{52}$$

$$= \frac{(4 + 4 + 26 + 13) - (0 + 2 + 1 + 2 + 1 + 13) + (0 + 0 + 1 + 1) - 0}{52}$$

$$= \frac{47 - 19 + 2}{52} = \frac{30}{52}$$

In deze voorbeelden wordt een grondregel van de kansberekening gebruikt. Die wordt genoemd de *somregel* en luidt:
Als een experiment onder meer kan leiden tot de gebeurtenissen $G_1, G_2, G_3, \ldots G_n$ en $k(G_i)$ is de kans op gebeurtenis G_i dan is de kans, dat tenminste één van deze n gebeurtenissen zich voordoet gelijk aan $k_n = s_1 - s_2 + s_3 - \ldots - (-1)^n \cdot s_n$.
In deze veelterm is s_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) de som van de kansen op precies i van de genoemde n gebeurtenissen.
Een exact bewijs zou te ver voeren en laten we dus achterwege. Liever passen we de regel nog eens toe op een ander probleem.

Kans met voetballen

Bij het begin van de competitie worden de clubs van de voetbaleredivisie genummerd (bijvoorbeeld op grond van een alfabetische rangschikking). Hoe groot is de kans, dat *tenminste één* van deze clubs aan het eind van het seizoen op dezelfde plaats staat als bij de aanvang? We nemen aan, dat de clubs wat hun spel betreft onderling zo gelijkwaardig zijn dat elke club evenveel kans heeft op welke plaats dan ook aan het eind van de competitie!

Om een beetje vat op de vraag te krijgen, beperken we de eredivisie eerst maar eens tot vier clubs, aan het begin van de competitie genummerd 1, 2, 3 en 4. Welke eindstanden zijn mogelijk?
We schrijven ze op: (Elke *kolom* is een mogelijke eindstand.)

1 1 1 1 1 1	2 2 2 2 2 2	3 3 3 3 3 3	4 4 4 4 4 4
2 2 3 3 4 4	1 1 3 3 4 4	1 1 2 2 4 4	1 1 2 2 3 3
3 4 2 4 2 3	3 4 1 4 1 3	2 4 4 1 1 2	2 3 3 1 1 2
4 3 4 2 3 2	4 3 4 1 3 1	4 2 1 4 2 1	3 2 1 3 2 1

Dit zijn alle permutaties van 4, in totaal $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ (4-faculteit).

Je ziet in de tabel precies 24 rode cijfers, en wel elk van de getallen zesmaal. Deze rode cijfers geven aan dat ze op dezelfde plaats staan als in de uitgangssituatie.
Een grappig resultaat: Er zijn 24 mogelijke standen en ook 24 rode cijfers. Het is niet moeilijk aan te tonen dat dit geen toeval is!

Mag je nu ook zeggen: De kans dat minstens één club (in een competitie van 4) op dezelfde plaats eindigt als waar hij begon, is 24 op 24, dus 1 of 100%?
Je ziet direct dat dit niet het geval is. Er zijn weliswaar 24 rode cijfers, maar ..... die staan in 15 van de 24 rangschikkingen, terwijl in 9 rangschikkingen geen rode cijfers voorkomen.
Er zijn dus standen met meer dan één rood cijfer. Voor het berekenen van de gevraagde kans kunnen we ook hier weer gebruik maken van de somregel:

$k_4 = s_1 - s_2 + s_3 - s_4$.

Hierbij is s_1 de som van de kansen dat een rode 1, een rode 2, een rode 3 of een rode 4 voorkomt, dus $s_1 = 4 \times \frac{6}{24} = 1$.
Evenzo is s_2 de som van de kansen dat een tweetal rode cijfers in een rangschikking optreedt.
Er zijn zes mogelijke rode tweetallen: (1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 3) (2, 4) en (3, 4). Deze komen elk tweemaal voor, dus $s_2 = 6 \times \frac{2}{24} = \frac{1}{2}$.
Zo ook s_3: Er zijn vier mogelijke rode drietallen, (1, 2, 3) (1, 2, 4) (1, 3, 4) en (2, 3, 4) en deze komen alle éénmaal voor, dus $s_3 = 4 \times \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$.
Tenslotte s_4: Er is slechts één rood viertal (1, 2, 3, 4) dus $s_4 = \frac{1}{24}$.

Dus: $k_4 = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{15}{24} = 0{,}625$.

In werkelijkheid bestaat de eredivisie uit 18 clubs. Te bewijzen is nu dat

$k_{18} = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 \ldots s_{17} - s_{18}$,

waarbij $s_p = \frac{1}{p!}$, dus $k_{18} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \frac{1}{17!} - \frac{1}{18!}$.

We hebben al gezien dat $k_4 = \frac{15}{24} = 0{,}625$

$k_5 = \frac{76}{120} \approx 0{,}63333$

$k_6 = \frac{455}{720} \approx 0{,}63196$

$k_7 = \frac{3187}{5040} \approx 0{,}63214$.

De getallen k_n blijken naar een bepaalde waarde 0,632 ... te convergeren, zodat $k_{18} \approx 0{,}632$.
Er is dus een kans van ruim 63 % dat minstens één club in de eredivisie aan het eind van de competitie dezelfde plaats op de ranglijst inneemt als aan het begin. Dat wil zeggen: als het verloop van de competitie door het toeval bepaald wordt. En wie twijfelt daaraan?

Denkertjes

39 Zandhuizen ligt 11,2 km ten NW van Veendorp. De zand-veengrens loopt tussen beide dorpen precies oost-west.
Men besluit tot de aanleg van een tramverbinding. De aanlegkosten, die in het zandgebied *f* 1000 per strekkende meter bedragen, zijn in het veen belangrijk hoger. Als gevolg hiervan is niet de kortste weg het goedkoopst, maar die waarbij 5 km in het zand en 7,8 km in het veen komt te liggen.
Hoeveel bedragen de aanlegkosten in het veen per strekkende meter?

40 Als de cijfers 1 t/m 9 in een willekeurige volgorde worden opgeschreven – waardoor een getal van negen cijfers ontstaat – hoe groot is dan de kans dat dit getal deelbaar is door 11?
Als we de kans op deelbaarheid door een willekeurig priemgetal p berekenen, zijn er dan getallen waarbij die kans gelijk is aan $\frac{1}{p}$, is deze kans misschien wel altijd kleiner dan $\frac{1}{p}$? Onderzoek dit.

De Nederlandse Wiskunde Olympiade 1971

Op 23 september 1971 kregen de deelnemers aan de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1971 de volgende problemen voorgelegd:

1 Vierhoek $ABCD$ is een trapezium; $AB \parallel DC$.
Op de zijde AD ligt een punt P en op de zijde BC ligt een punt Q zodat $AQ \parallel PC$.
Bewijs: $PB \parallel DQ$.

2 Een rij reële getallen $t_1, t_2\ t_3, \ldots.$ heet een *Fibonacci-rij* als:
$t_{n+2} = t_{n+1} + t_n$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots.$
Twee Fibonacci-rijen noemen we *essentieel verschillend* als de termen van de ene rij niet verkregen kunnen worden door de termen van de andere met een constante te vermenigvuldigen.
De Fibonacci-rijen 1, 2, 3, 5, 8, ... en 1, 3, 4, 7, 11, ... zijn bijv. essentieel verschillend, maar de rijen 1, 2, 3, 5, 8, ... en 2, 4, 6, 10, 16, ... zijn dat niet.
a Bewijs dat er reële getallen p en q bestaan, zó dat de rijen $1, p, p^2, p^3, \ldots.$ en $1, q, q^2, q^3, \ldots.$ essentieel verschillende Fibonacci-rijen zijn.
b Laat $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ en $b_1, b_2, b_3, \ldots.$ essentieel verschillende Fibonacci-rijen zijn.
Bewijs dat er voor elke Fibonacci-rij $t_1, t_2, t_3, \ldots.$ precies één getal α en precies één getal β bestaat, zó dat:
$t_n = \alpha\, a_n + \beta\, b_n$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots.$
c $t_1, t_2, t_3, \ldots.$is de Fibonacci-rij met $t_1 = 1$ en $t_2 = 2$.
Druk t_n uit in n.

3 Bewijs dat de enige paren gehele getallen (x, y) die voldoen aan $x^2 + x + 1 = y^2$ zijn: $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(-1, 1)$ en $(-1, -1)$.

4 Bij ieder positief geheel getal n bestaan er eenduidig bepaalde niet-negatieve gehele getallen $a(n)$ en $b(n)$ zó dat
$n = 2^{a(n)}\,(2b(n) + 1)$.
Voor positieve gehele k definiëren we $S(k)$ door:
$a(1) + a(2) + a(3) + \ldots. + a(2^k) = S(k)$.
Druk $S(k)$ uit in k.

5 Iemand tekent tenminste drie lijnen op papier. De lijnen snijden elkaar twee aan twee. Geen drietal lijnen gaat door één punt. Hij kiest een lijn en telt de snijpunten aan weerszijden van de lijn. De aantallen snijpunten aan weerszijden blijken even groot. Hij kiest een andere lijn. Nu blijkt het aantal snijpunten aan de ene kant zesmaal zo groot als dat aan de andere kant. Wat is het minimale aantal lijnen waarbij dit mogelijk is? 9

Oplossingen van de Denkertjes uit nummer 2

11 x . 17 eindigt op . . .1 als x eindigt op . . .3
x . 17 eindigt op . .11 als x eindigt op . .83
65359477124183. 17 is het kleinste zeventienvoud, dat met louter énen wordt geschreven (16 stuks).

12 Als je de volgende getallengroepen aanvult met louter énen, dan krijg je oplossingen van dit denkertje:
(100,2), (34,4), (12, 10), (7, 4, 4,), (3, 3, 3, 3, 2,).

13 Gemakshalve geven we de kleuren met nummers aan en nu is dit een oplossing (er zijn er meer;)

12345123
34512345
51234512
23451234
45123451
12345123
34512345
51234512

14 Kies voor b en c willekeurige getallen (het mooiste is b en c verschillend te nemen) en kies $a = b + c$.

15 De kleinste oppervlakte bedraagt $1\frac{1}{2}$ roostervierkantje.
Neem als hoekpunt bijvoorbeeld (2, 0) en (0,1) en (1, 2)

16 Als de draad maar dun genoeg is, dan kun je met één keer knippen volstaan: maak windingen met een omtrek van 10 cm.

17 Ja, Pietje heeft (zoals altijd) gelijk. Een hoek van 75° kan hij met passer en liniaal construeren. Dus kan hij ook een hoek van $1° = 4.\ 19° - 75°$ maken.

18 Die gemiddelde snelheid is niet $\frac{1}{4}(30 + 60 + 90 + 120) = 75$, maar wel
$4 : (\frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{90} + \frac{1}{120}) = 57{,}6$

19 Schrijf $xy + 3x - 5y + 3 = 0$ in de vorm $(x - 5)(y + 3) = -18$.
$x - 5$ kan als deler van 18 alleen de waarden
$-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18$ hebben.

20 Elk getal is of drievoud of drievoud plus één of drievoud plus twee; we schrijven daarvoor $3k$, $3k + 1$ en $3k + 2$.
Zijn alle drie die soorten vertegenwoordigd, dan zit je op de verkeerde weg, want $(3p) + (3q + 1) + (3r + 2)$ is een drievoud. Heb je getallen van één van die drie soorten, dan leveren drie van die getallen een drievoud als som; je kunt er dus niet meer dan twee van elke soort gebruiken. Het verste kun je dus komen met van twee verschillende soorten elk twee, bijvoorbeeld 2, 2, 3, 3.

Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 1 april 1972 worden ingezonden naar het redactie-secretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.

Inhoud

Spel van delers° 73

Denkertjes 75, 88, 94

Een graas-probleem° 76

Een verminkte staartdeling°° 77

Van de redactie 79

Nog eens het spel met vier kubussen°° 80

Binnen of Buiten?° 84

Wat is een actuaris?° 86

Verzamelingen en kansen°° 89

De Nederlandse Wiskunde Olympiade 1971 95

Oplossingen van de Denkertjes uit nummer 2 96

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Amersfoort.
A. F. VAN TOOREN, Leusden-C.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via één der docenten, *f* 4,50 per jaargang. Voor anderen *f* 7,00.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.