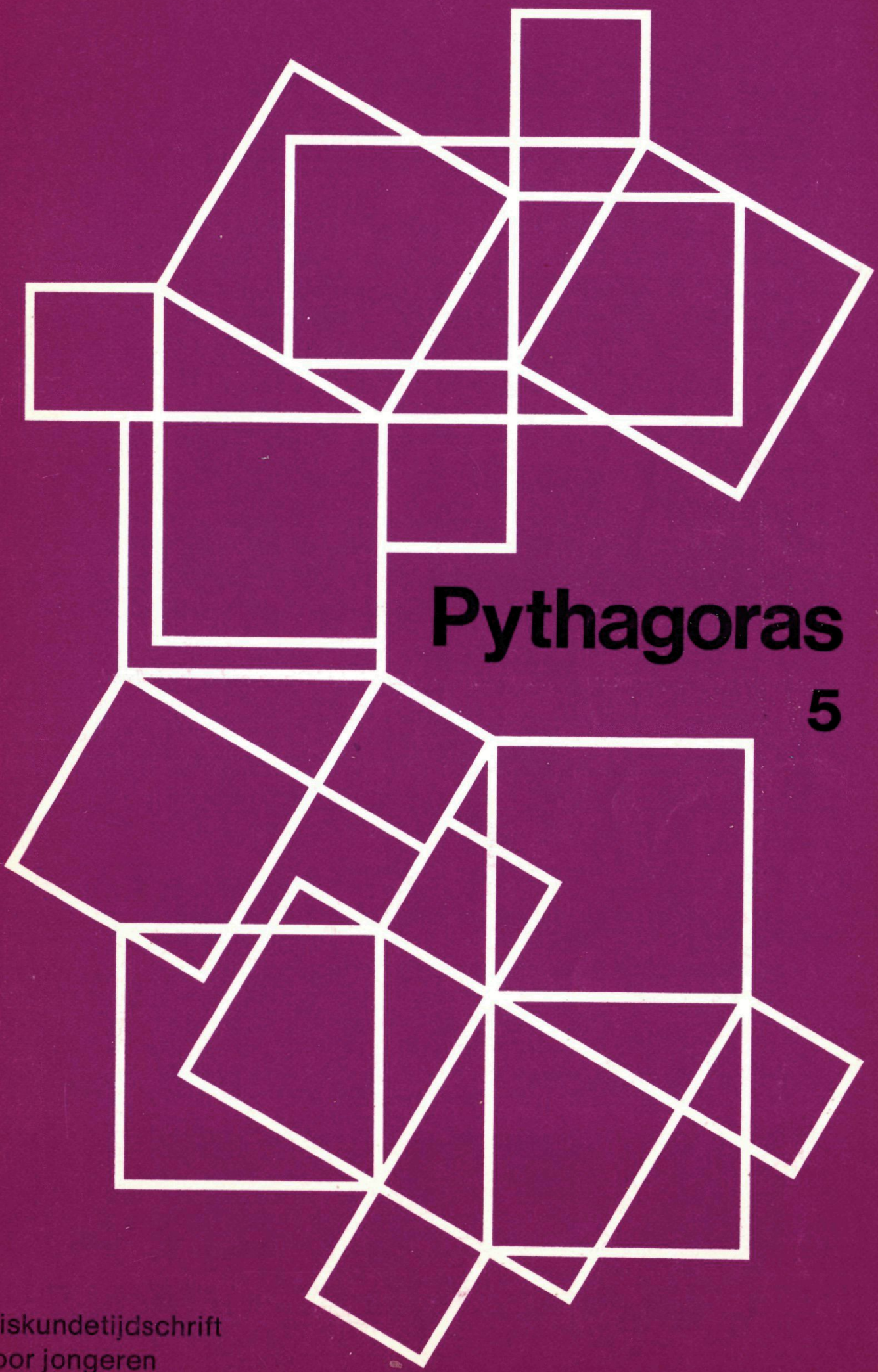
jaargang 11 1971/1972



Pythagoras

5

wiskundetijdschrift
voor jongeren

Fabricage van DAF personenauto's. Boven de zogenaamde bodylijn en onder de eindband.

Inleiding°

Waarin verteld wordt dat dit een speciaal nummer is, gewijd aan 'lineaire programmering', dat is een van de methodes om het produktieprogramma van een fabriek zo gunstig mogelijk te krijgen.

In elke jaargang van 'Pythagoras' is een speciaal nummer opgenomen. Dit is zo'n nummer, dat wil zeggen niet zoals gewoonlijk een aantal artikeltjes over verschillende onderwerpen, maar een hele aflevering gewijd aan één thema.
Dat betekent dat we hierover wat uitvoeriger kunnen zijn dan in korte stukjes. Wel uitvoeriger, maar naar we hopen niet moeilijker.

Een woord dat je regelmatig in de krant leest of voor de televisie hoort is 'loonsverhoging'. Misschien heb je je weleens afgevraagd hoe deze loonsverhogingen betaald kunnen worden. Als arbeiders in een fabriek voor bijvoorbeeld huishoudelijke artikelen 5 % loonsverhoging krijgen, dan moet dat geld ergens vandaan komen. Dit geld zou er vanzelf komen als de mensen ook 5 % langer zouden gaan werken. Maar dat is wat we niet willen, meestal juist het tegendeel. Het aantal wekelijkse werkuren wordt langzaamaan minder en de vakanties langer.
De loonsverhoging kan betaald worden uit de winst van het bedrijf. Maar er moet wat winst blijven om geld te hebben voor de aanschaf van nieuwe machines, om wat reserve te hebben in een tijd dat er minder verkocht wordt, enzovoort. Fabrieken die de loonsverhogingen altijd volledig uit de winst betalen, moeten al gauw hun poorten sluiten. Hierover lees je helaas ook maar al te vaak in de krant. De loonsverhoging kan ook betaald worden als de fabriek de prijzen van alle huishoudelijke artikelen met 5 % verhoogt. Maar als alle fabrieken dat doen, is geen mens er mee opgeschoten. We verdienen wel 5 % meer, maar alles is ook 5 % duurder geworden. In plaats dat we meer voor ons loon kunnen kopen, wat toch de bedoeling van de verhoging was, is ons geld alleen maar minder waard geworden. Dit laatste noemt men *inflatie*. Alle voorgaande methoden om loonsverhoging te financieren zijn, ook al worden ze maar al te vaak toegepast, weinig aantrekkelijk. Een betere manier is *produktieverhoging*. Dat wil zeggen dat, hoewel de werknemers van de fabriek dezelfde werktijden blijven houden en er geen nieuwe mensen worden aangenomen, er 5 % meer huishoudelijke artikelen de fabriek uitkomen om verkocht te worden. Hoe bereiken we dit?
Natuurlijk door de aanschaf van betere en snellere machines, als die bestaan en als daarvoor tenminste geld beschikbaar is.
Daarover zullen we het niet verder hebben. Verder is het wenselijk om stagnatie bij de fabrikage te vermijden. Dit wil zeggen dat voorkomen wordt dat mensen moeten wachten aan de machines òf op grondstoffen òf op elkaars werk. Ten slotte zullen liefst die artikelen in produktie worden genomen waaraan zoveel mogelijk geld wordt overgehouden. Dat kan natuurlijk niet onbegrensd, want je moet die artikelen ook nog

kunnen verkopen, dus er moet voldoende vraag naar bestaan. Vooral in een fabriek waar veel verschillende artikelen gefabriceerd worden met behulp van een aantal machines, kan het een ingewikkelde zaak worden om het produktie*programma*, dat is de organisatie van de fabrikage, zo gunstig mogelijk te krijgen.

Je zult je wel afvragen wat dat allemaal met wiskunde en met ons tijdschrift Pythagoras te maken heeft. Wel, één van de methoden die vaak kan worden toegepast om dit probleem op te lossen is de wiskundige methode: *lineaire programmering*. En over lineair programmeren zal dit nummer speciaal gaan.

Denkertjes

1 Voor een bepaald soort gebak is 60 g bloem en 40 g boter nodig. Voor een tweede soort is 50 g bloem en 50 g boter nodig. Men wil zoveel mogelijk gebakjes maken uit een voorraad van 1,2 kg bloem en 1 kg boter. Hoeveel moet men er van elke soort maken?

2 Los het volgende probleem grafisch op.
Maximaliseer $2x_1 + x_2$ als
$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$
$x_1 - x_2 \leqq 7$
$x_1 + x_2 \leqq 13$
$x_1 + 2x_2 \leqq 24$

Zie blz. 102 t/m 104

3 Voer A kost 40 ct/kg en bevat 20 % eiwit en 40 % zetmeel.
Voer B kost eveneens 40 ct/kg en bevat 10 % eiwit en 50 % zetmeel.
Voer C kost 20 ct/kg en bevat 10 % eiwit en 30 % zetmeel.
Wat is de grootste hoeveelheid veevoeder die men uit A, B en C kan mengen voor *f* 1,—, als men minstens 12 % eiwit en minstens 40 % zetmeel in het mengsel wil hebben.

4 Los op
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= -4 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 3x_2 + 2x_3 &= 7. \end{aligned}$$

5 Los op
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

6 Los op
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 &= 9 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

Zie blz. 108

Lineaire programmering°

Waarin drie problemen worden gesteld die met lineaire programmering kunnen worden opgelost.

Zoals ook al in de inleiding is gezegd, wordt het opstellen van een ideaal produktieprogramma moeilijk bij veel verschillende produkten. In onze voorbeelden zullen we het onszelf makkelijk maken. Het eerste gaat over een fabriek waarin maar twee verschillende artikelen gemaakt worden.
Deze fabriek is ook verder zo eenvoudig gehouden, dat het eigenlijk niets meer met de werkelijkheid te maken heeft. Het is helemaal fantasie, wat je ook aan de gebruikte namen wel kunt merken.

Het eerste voorbeeld

PRAFRO N.V. maakt twee toestellen: frotten en prammen. Een frot is ongeveer evengroot als een pram, maar een pram is veel ingewikkelder en duurder. Aan elke frot is één man precies één dag bezig om hem te bouwen. Als de frot klaar is, wordt hij dezelfde avond nog weggehaald. Na verkoop blijft er, nadat arbeidsloon en de materiaalkosten er zijn afgegaan, nog 200 gulden over. Er is bekend dat er hooguit 10 frotten per dag verkocht kunnen worden, zodat het geen zin heeft er 11 of meer te fabriceren. We gaan dit nu wiskundig uitdrukken. We noemen het aantal frotten dat de firma per dag maakt x_1. Als je je afvraagt waarom niet gewoon x en het aantal prammen y, dan is het antwoord dat in de praktijk het aantal verschillende letters onoverzichtelijk groot zou worden en dat men de voorkeur geeft aan x_1, x_2, x_3 enz.

Niet meer dan 10 per dag: $x_1 \leqq 10$
Aantal mensen bezig met de fabricage: x_1
Zuivere verdienste in guldens: $200\ x_1$

Nu de prammen. Met de fabricage van een pram zijn twee mensen één hele dag bezig, hij brengt 300 gulden schoon op en er kunnen er niet meer dan 8 per dag verkocht worden. We noemen de dagproduktie van de prammen x_2.

Niet meer dan 8 per dag: $x_2 \leqq 8$
Aantal mensen bezig met de fabricage: $2x_2$
Zuivere verdienste in guldens: $300x_2$

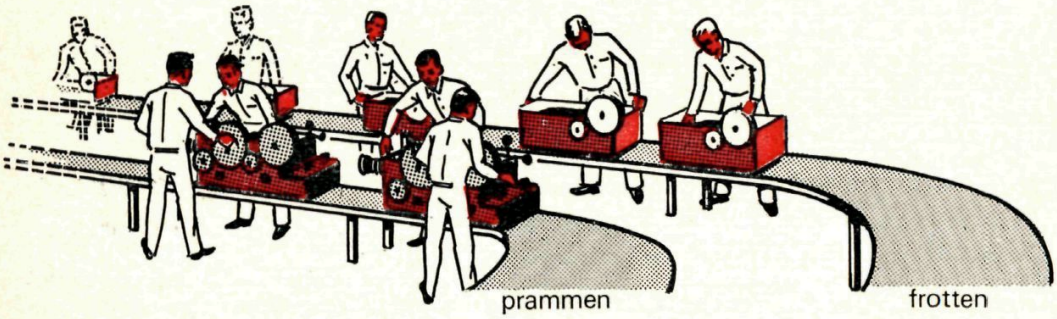
We hebben nu nog wat extra zorgen, namelijk in de fabriekshal kunnen niet meer dan 13 toestellen tegelijk worden aangemaakt vanwege de beschikbare ruimte:
$x_1 + x_2 \leqq 13$.

Verder heeft onze fabriek 18 man personeel. Het aantal mensen bezig met de fabricage is $x_1 + 2x_2$ en dus $x_1 + 2x_2 \leqq 18$. Om te weten te komen hoeveel frotten en prammen we per dag moeten maken om zoveel mogelijk verdienste over te houden, bepalen we x_1 en x_2 zo, dat

$$\begin{array}{lrl} 0 \leqq & x_1 & \leqq 10 \\ 0 \leqq & & x_2 \leqq 8 \\ & x_1 + & 2x_2 \leqq 18 \\ & x_1 + & x_2 \leqq 13 \end{array}$$

zodat $200x_1 + 300x_2$ zo groot mogelijk is.

Je ziet aan de bovenste twee regels dat x_1 en x_2 niet negatief mogen zijn, wat natuurlijk weergeeft dat de fabriek geen negatief aantal toestellen kan fabriceren. De bovenstaande regels zijn van de eerste graad in x_1 en x_2, dat wil zeggen *lineair*, vandaar de naam *lineaire* programmering.
Hoe we dit probleem kunnen oplossen zullen we zien in het vervolg van dit nummer. Eerst nog twee andere voorbeelden.



Het tweede voorbeeld

Boer W. EILAND bereikt al jarenlang goede resultaten met het fokken van gnurpels door ze voer te geven dat minstens 12 gewichtsprocenten eiwit en minstens 40 gewichtsprocenten zetmeel bevat. Voederhandelaar A kan hem tegen 40 cent per kilo iets leveren waarin 20 % eiwit en 40 % zetmeel zit.
Handelaar B levert tegen dezelfde prijs voer met 10 % eiwit en 50 % zetmeel. Tenslotte heeft C een goedkope aanbieding van 20 cent per kilo, waarin 10 % eiwit en 30 % zetmeel. Als boer Eiland 10 kilo voer wil mengen tegen een zo laag mogelijke prijs, welke hoeveelheden zal hij dan kopen van A, B en C? Stel deze niet negatieve hoeveelheden x_1, x_2 en x_3 kilo, dan geldt

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 = 10 & \text{totaal gewicht,} \\ \frac{20}{100}x_1 + \frac{10}{100}x_2 + \frac{10}{100}x_3 \geqslant \frac{12}{100} \times 10 & \text{gewicht eiwit,} \\ \frac{40}{100}x_1 + \frac{50}{100}x_2 + \frac{30}{100}x_3 \geqslant \frac{40}{100} \times 10 & \text{gewicht zetmeel.} \\ 40x_1 + 40x_2 + 20x_3 & \text{zo laag mogelijk.} \end{array}$$

Na enige vereenvoudiging wordt dit:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geqq 12 \end{array}$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geqq 40$$
$$40x_1 + 40x_2 + 20x_3 \text{ minimaal.}$$

Ook hierbij is elke regel lineair. De eerste drie regels worden de *voorwaarden* genoemd. Dit mogen ongelijkheden of vergelijkingen zijn. De functie in de onderste regel heet de *doelstellingsfunctie*.

Het derde voorbeeld

PRAFRO N.V. uit het eerste voorbeeld kan naast de twee produkten die zij zelf fabriceert, nog een derde toestel importeren en doorverkopen. Aan deze blins hoeft niets meer te worden gemonteerd, want ze komen kant en klaar binnen. Ze nemen echter wel ruimte in de fabriekshal in. Een blin is half zo groot als een frot of een pram. Het importeren van bijvoorbeeld twee blins op een dag betekent dat één frot of één pram minder gefabriceerd kan worden. De buitenlandse fabrikant van blins kan niet meer dan 15 stuks per dag leveren. De zuivere winst per blin is 50 gulden. We krijgen nu bij import van x_3 blins per dag:

$$x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \leqq 13 \text{ halruimte, uitgedrukt in frotgrootten}$$
$$x_1 + 2x_2 \leqq 18 \text{ personeel, uitgedrukt in mandagen}$$
$$x_1 \leqq 10 \text{ afzetgrens}$$
$$x_2 \leqq 8 \text{ afzetgrens}$$
$$x_3 \leqq 15 \text{ importgrens}$$
$$200x_1 + 300x_2 + 50x_3 \text{ maximaal.}$$

Denkertjes

7 Breng denkertje 2 in de kanonieke vorm en vind het optimum door oplossen van vergelijkingen.

8 De FAD-fabriek in het zuiden des lands maakt trucks van het type 77 en personenwagens van het type 22. De carrosserieafdeling heeft een dagcapaciteit van maximaal 200 manuur. Het vervaardigen van een 77-carrosserie vergt 2 manuur en van een 22-carrosserie één manuur. De afdeling motoren heeft dagcapaciteit van maximaal 150 manuur, terwijl het vervaardigen van een 77-motor één en van een 22-motor $1\frac{1}{2}$ manuur kost. De assembleerafdeling legt geen beperking op het aantal samen te stellen trucks maar kan niet meer dan 90 personenauto's per dag verwerken. De winst op een truck bedraagt *f* 300,— en op een personenauto *f* 200,—. De FAD-fabriek wil zijn winst maximaliseren.
Breng het probleem in de kanonieke vorm en vind het optimum door oplossen van vergelijkingen.

Zie blz. 109 t/m 111

De grafische oplossingsmethode°

Waarin twee van de voorgaande problemen met behulp van grafieken zullen worden opgelost.

Het eerste probleem

$$
\begin{aligned}
0 \leqq \quad x_1 \qquad\qquad &\leqq 10 \\
0 \leqq \qquad\qquad x_2 &\leqq 8 \\
x_1 + \quad 2x_2 &\leqq 18 \\
x_1 + \quad x_2 &\leqq 13 \\
200x_1 + 300x_2 &\text{ maximaal.}
\end{aligned}
$$

We tekenen een loodrecht assenstelsel met een X_1-as en een X_2-as. De punten (x_1, x_2) die voldoen aan de bovenste voorwaarde liggen in de strook aangegeven in figuur 1. De tweede voorwaarde zie je in figuur 2 weergegeven. De voorwaarde $x_1 + 2x_2 \leqq 18$ brengen we in beeld door het tekenen van de lijn $x_1 + 2x_2 = 18$ door bijvoorbeeld de punten (18, 0) en (0, 9).
Omdat (0, 0) voldoet aan de ongelijkheid, weten we welk halfvlak de ongelijkheid $x_1 + 2x_2 \leqq 18$ weergeeft (figuur 3). Figuur 4 brengt tenslotte $x_1 + x_2 \leqq 13$ in beeld. Willen we tegelijk aan de vier voorwaarden voldoen, dan zijn alleen punten in de doorsnede van de voorgaande verzamelingen toegestaan (figuur 5). Elk punt in dit gebied vertegenwoordigt een zogenaamde *toelaatbare oplossing*. Maar niet elke toelaatbare oplossing is erg winstgevend, zoals we kunnen zien aan $x_1 = 0, x_2 = 0$, met een winst $200x_1 + 300x_2$ gelijk aan nul.
Het probleem is dus nog allerminst opgelost.

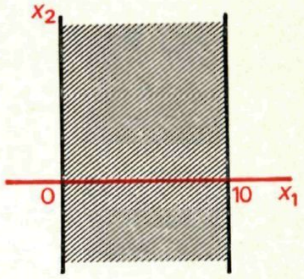


Fig. 1

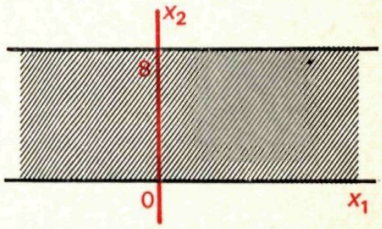


Fig. 2

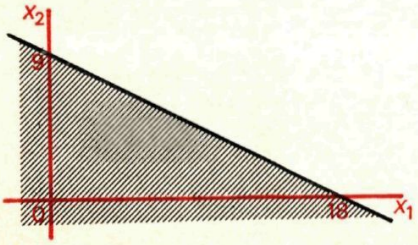


Fig. 3

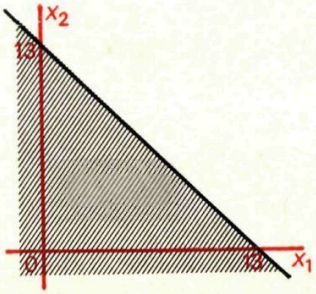


Fig. 4

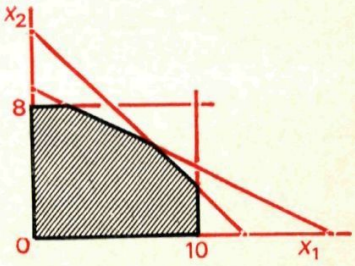


Fig. 5

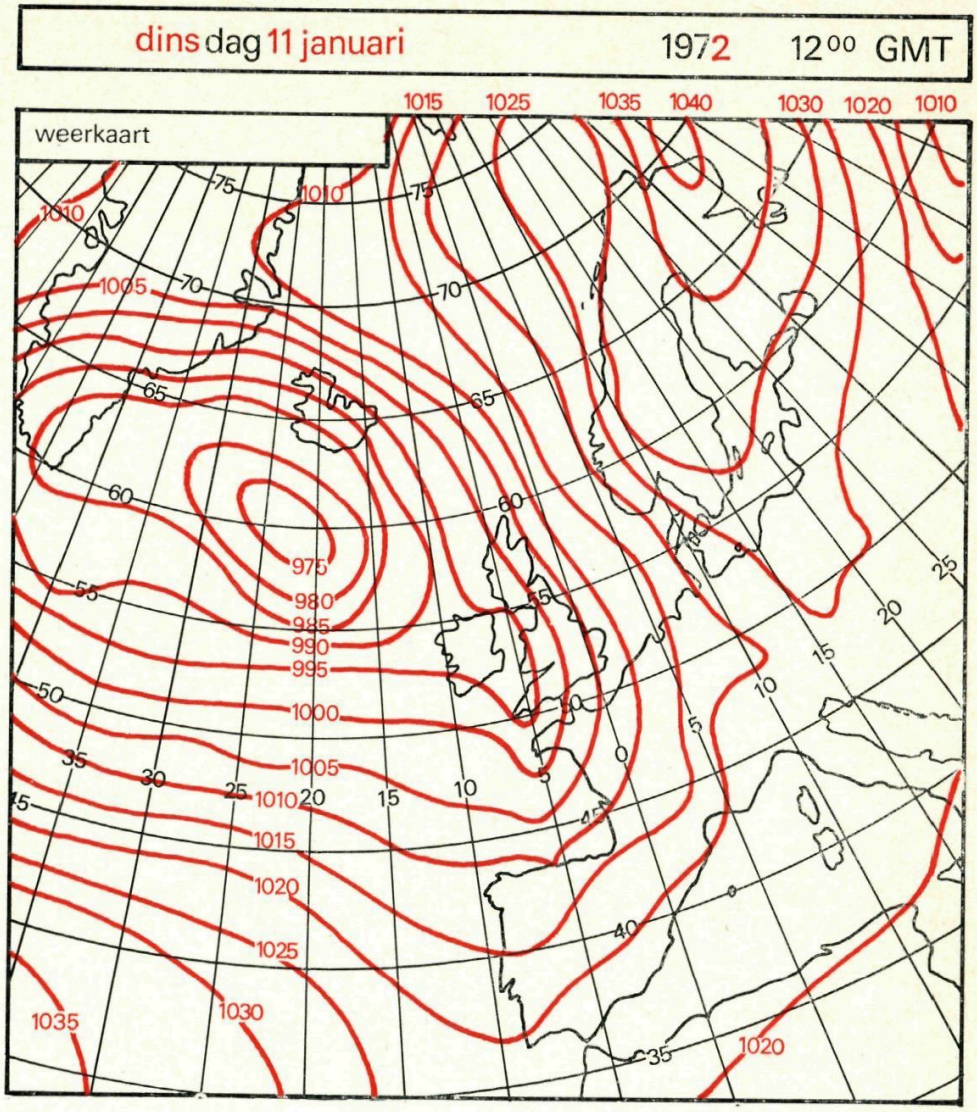


Fig. 6

In figuur 6 zie je een kaart, ons verstrekt door het KNMI, met daarin getekend *isobaren*. De aanduiding 1025 geeft de verbindingslijn van alle punten aan, waar de luchtdruk op 12 januari 1972 gelijk was aan 1025 millibar. Het is niet mogelijk om in elk punt de luchtdruk af te lezen, maar wel geeft de kaart ons inlichtingen over de richting waarin we de hoogste luchtdruk moeten zoeken.

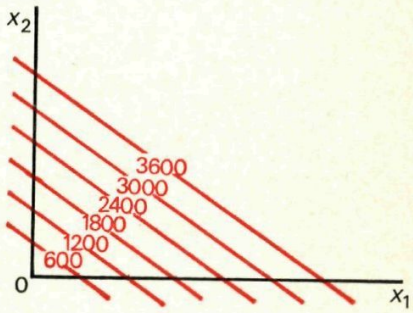


Fig. 7

Op dezelfde wijze gaan we in ons assenstelsel de richting aangegeven waarin we de hoogste winst kunnen vinden. Alle punten waarin de winst gelijk is aan bijvoorbeeld 600 gulden liggen op de *isowinstlijn* $200x_1 + 300x_2 = 600$. Verder zie je in figuur 7 de isowinstlijn 1200 met vergelijking $200x_1 + 300x_2 = 1200$, enzovoort. De combinatie van de figuren 5 en 7 geeft ons in figuur 8 de aanwijzing dat het punt D de ge-

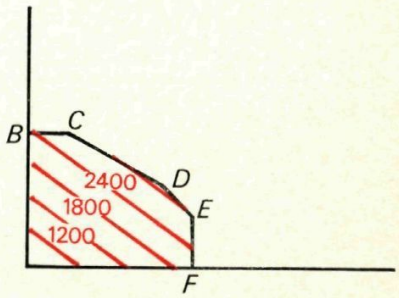


Fig. 8

zochte *optimale oplossing* vertegenwoordigt. Het punt $D(8,5)$, te vinden door oplossen van

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 18 \\ x_1 + \ \ x_2 = 13 \end{cases}$$

betekent dat per dag het best 8 frotten en 5 prammen kunnen worden gefabriceerd.

Het tweede probleem

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 10 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &\geqq 12 \\ 4x_1 + \ 5x_2 + \ 3x_3 &\geqq 40 \\ 40x_1 + 40x_2 + 20x_3 &\text{ minimaal.} \end{aligned}$$

Bij het eerste probleem hadden we te maken met twee *variabelen* x_1 en x_2. Een grafiek met twee assen kon ons een oplossing verschaffen. Hoe zit het nu met het tweede probleem, waarin de drie variabelen het tekenen wat moeilijk maken?
Nu valt het wat mee, want als x_1 en x_2 bekend zijn, kan x_3 berekend worden uit $x_1 + x_2 + x_3 = 10$. De variabele x_3 kan daarom gevoeglijk weggewerkt (geëlimineerd) worden.

$2x_1 + \ x_2 + \ x_3 \geqq 12$ verminderd met
$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ geeft $x_1 \geqq 2$
$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geqq 40$ met $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 30$
geeft $x_1 + 2x_2 \geqq 10$

Minimum van $f = 40x_1 + 40x_2 + 20x_3$ verminderd met $200 = 20x_1 + 20x_2 + 20x_3$ wordt het minimum van $f - 200 = 20x_1 + 20x_2$.

In figuur 9 is de doorsnede van de halfvlakken $x_1 \geqq 2$, $x_1 + 2x_2 \geqq 10$ en, wat stilzwijgend is aangenomen, $x_2 \geqq 0$ aangegeven. Bovendien staan een aantal *isokostenlijnen* in de figuur, welke aangeven in welke richting we de minimale kosten moeten zoeken. We vinden het punt (2, 4), wat wil zeggen 2 kg van A, 4 kg van B en dus 4 kg van C (samen 10 kg).

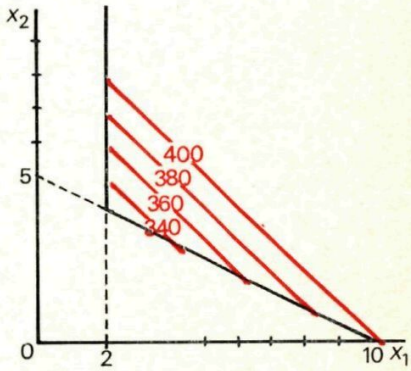


Fig. 9

We hadden dit probleem ook heel anders kunnen aanpakken. Je kunt gaan berekenen hoe je *zoveel mogelijk* gnurpelvoer voor 100 ct kunt mengen dat aan de eiwit- en zetmeeleisen voldoet. Je krijgt (denkertje 3) voor dit geld echter maar $3\frac{1}{8}$ kg. Door nu alle hoeveelheden met $3\frac{1}{5}$ te vermenigvuldigen, kom je toch weer op 10 kg van dezelfde samenstelling. Hieruit volgt dat het geen beperking is als we ons verder *bezighouden met problemen waarin een doelstellingsfunctie gemaximaliseerd* moet worden.

Grafische oplossing van probleem 3°°

Waarin het derde probleem grafisch wordt opgelost, waarbij blijkt dat de grafische oplossingsmethode alleen opgaat in eenvoudige gevallen. Aan het eind van de paragraaf maken we een aantal afspraken die verder in dit nummer zullen gelden.

Er is nu geen vergelijking onder de voorwaarden beschikbaar om een variabele te elimineren. We zitten nu echt aan drie variabelen vast. Om toch grafisch te werk te gaan hebben we een drie-dimensionaal assenstelsel nodig, waarvan je in figuur 10 een weergave ziet. De toelaatbare oplossingen worden voorgesteld door punten binnen en op het oppervlak van het getekende lichaam. De isowinstvlakken met vergelijking $200x_1 + 300x_2 + 50x_3 = f$ zijn voor enkele waarden van f tussen 2000 en 3000 gesneden met dit lichaam. We zullen er hier niet op ingaan hoe dat allemaal geconstrueerd moet worden, want je begrijpt dat daar wel wat stereometrie aan te pas komt. Als de constructie van figuur 10 zuiver is uitgevoerd blijkt dat ribbe DJ evenwijdig is aan de isowinstvlakken, zodat het er niet toe doet welk punt we van die ribbe nemen. We zullen dit later door berekening bevestigd zien.
De punten D(8, 5, 0), (6, 6, 2), (4, 7, 4) en J(2, 8, 6) geven dus alle optimale oplossingen aan.

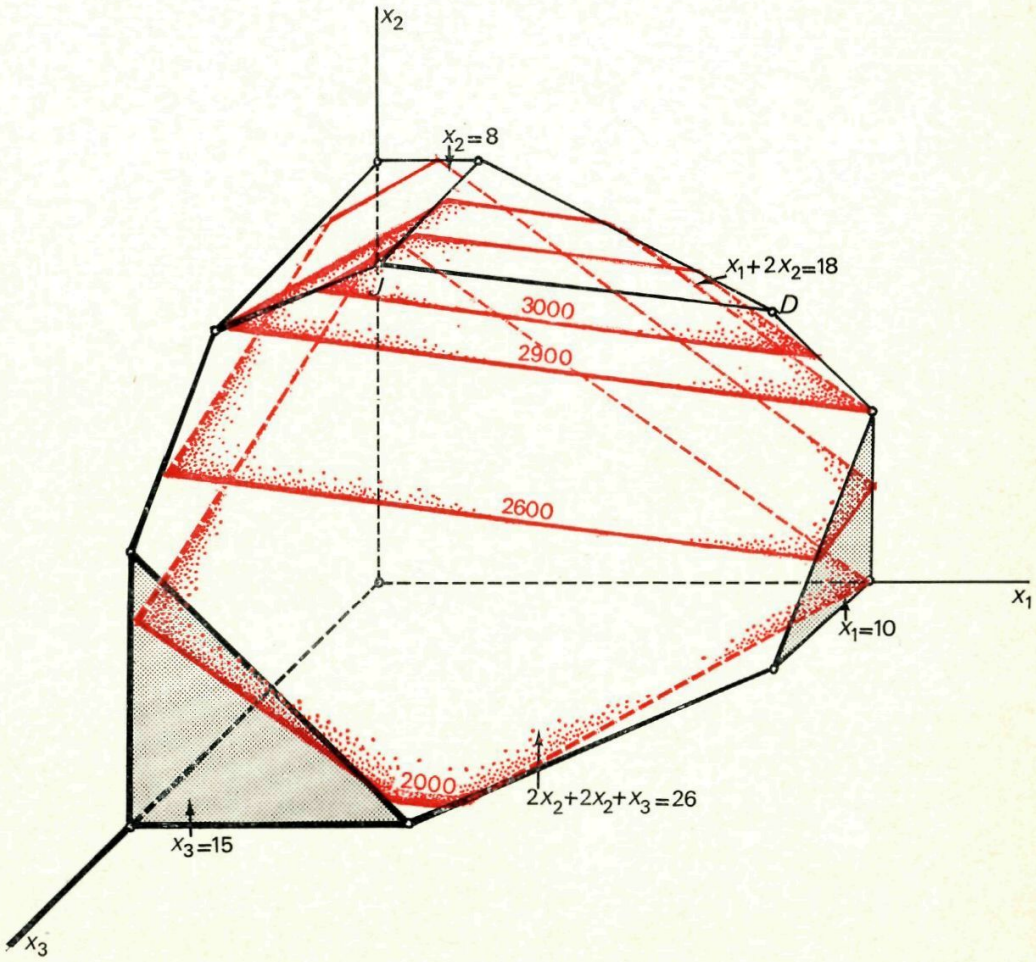


Fig. 10

Zouden we ook een punt van de ribbe met minder mooie coördinaten, bijvoorbeeld $(7, 5\frac{1}{2}, 1)$, mogen nemen?
Nu is de oplossing $(7, 5\frac{1}{2}, 1)$ een voorstelling van 7 frotten, $5\frac{1}{2}$ pram en één blin. Maar $5\frac{1}{2}$ pram neemt bij fabricage in de fabriekshal toch de plaats in van 6 prammen, zodat er geen plaats is voor de blin. De oplossing lijkt dus onjuist, maar kan goed gemaakt worden als we hem interpreteren als de éne dag (7, 5, 2) en de andere dag (7, 6, 0), zodat het gemiddelde toch op hetzelfde neerkomt.

We nemen nu verder in dit nummer aan, dat een oplossing ook breuken mag bevatten. Zo zal men in het tweede voorbeeld van het gnurpelvoer, van handelaar A. wel 2,25 kg mogen bestellen.
Het zal voor de meesten van ons al moeilijk zijn om een lineair programmeringsprobleem met drie variabelen op te lossen, vanwege het moeilijke tekenwerk. Bij meer dan drie variabelen wordt het onmogelijk. In de praktijk hebben we al gauw met veel meer variabelen te maken, zodat we naar andere oplossingsmethoden moeten omzien. Om het verhaal nu niet veel te lang te maken, beperken we ons tot een bepaald geval. In het vervolg van dit nummer zullen daarom de volgende *afspraken* gelden.

1 We houden ons bezig met problemen van de volgende soort.
Maximaliseringsproblemen, waarvan de voorwaarden ongelijkheden zijn van het soort
$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n \leqq b$ waarin $b \geqq 0$
2 Elke variabele is nul of positief.
3 We staan voor de variabelen rationale waarden toe.

Denkertjes

9 Spelingsvariabelen hebben vaak een in de reële situatie herkenbare betekenis. Hoe zou die van de variabelen x_5 en x_6 van de kanonieke vorm van voorbeeld 1 onder woorden kunnen worden gebracht?

Zie blz. 109

De schoorsteenveegmethode°

Waarin een methode wordt gegeven om n vergelijkingen met n onbekenden op te lossen.
Het heeft (nog) niets te maken met lineaire programmering en wordt ook in de rest van de algebra gebruikt.

In de voorgaande paragraaf hebben we gezien dat het oplossen van ongelijkheden met meer dan drie variabelen moeilijkheden opleverde. Met het oplossen van vergelijkingen is dat niet het geval. We zullen hierin eerst wat oefenen om dan in de volgende paragraaf terug te keren tot onze lineaire programmering.
Uit je ervaring met vergelijkingen met twee onbekenden weet je, dat de oplossing niet verandert als je een vergelijking met een factor vermenigvuldigt of als je één van de vergelijkingen vervangt door zichzelf min (een aantal malen) de andere vergelijking.

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 11 & \text{bovenste min} \\ x_1 - x_2 = 1 & 3 \times \text{de onderste} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + 8x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{bovenste} \times \tfrac{1}{8} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 + x_2 = 1 & \text{onderste plus} \\ x_1 - x_2 = 1 & \text{de bovenste} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + x_2 = 1 \\ x_1 + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2) = (2, 1)$$

We kunnen het schrijfwerk hierin wat verminderen, door alleen de coëfficiënten te noteren. Hetzelfde voorbeeld nogeens.

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \quad \text{bov.} - 3 \times \text{ond.} \quad \begin{array}{cc|c} 0 & 8 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \quad \text{bov.} \times \tfrac{1}{8} \quad \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \quad \text{ond.} + \text{bov.}$$

$$\begin{array}{cc|l} 0 & 1 & 1 \Rightarrow x_2 = 1 \\ 1 & 0 & 2 \Rightarrow x_1 = 2 \end{array}$$

We gaan nu dezelfde schrijfwijze toepassen op vier vergelijkingen met vier onbekenden.

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 \qquad\quad - 2x_4 = 3 \\ \qquad 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{array} \quad \text{wordt} \quad \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{kijk naar de} \\ \text{linker kolom} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

We gaan nu zorgen dat er in die kolom maar één 1 voorkomt en verder alleen nullen. We kiezen bijvoorbeeld de bovenste 1 om te blijven. Deze 1 is de takkenbos waarmee we de schoorsteen gaan vegen.

Op de derde etage hoeft niets te gebeuren, want daar staat al een nul.

We nemen de 2e etage min de vierde etage.
Ook de eerste etage min de vierde etage.

We kiezen nu een andere schoorsteen en daarin een takkenbos.
Deze takkenbos moet op een andere etage dan de voorgaande takkenbos(sen).

We kozen de getekende schoorsteen, omdat die al een nul bevatte, maar noodzakelijk is dat niet.

We vegen hem schoon door 2e etage — 3e etage en 1e etage — 2 × 3e etage.
Merk op dat bij deze procedure de linker schoorsteen schoon is gebleven. Probeer na te gaan waarom.
We kiezen een nieuwe schoorsteen, *links van de streep.*

Tenslotte hebben we geen keus meer, want is er maar één schoorsteen over en ook maar één etage waaruit we de takkenbos mogen kiezen. Deze bos is niet gelijk aan 1, maar dat krijgen we wel als we de 1e etage met $-\frac{1}{2}$ vermenigvuldigen.

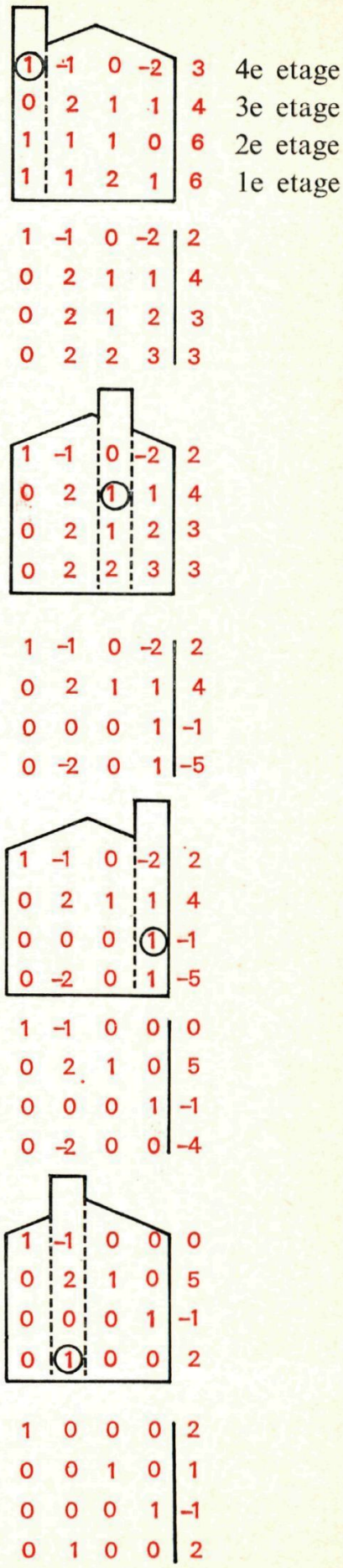
We hebben nu vier schone schoorstenen en stoppen. Het resultaat weer geschreven met de variabelen zie je hier onder.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 2 \\ x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ x_4 \qquad &= -1 \\ x_2 \qquad\qquad\qquad &= 2 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 1, -1)$
Het probleem is opgelost.

Na enige oefening gaat deze methode snel. Daarom bevelen we de volgende opgaven bijzonder aan. Ze staan bij de 'denkertjes', ten onrechte, want je kunt ze bijna gedachteloos doen.

Denkertjes 4, 5 en 6 op bladzijde 98.



De kanonieke vorm °°

Waarin een lineair programmeringsprobleem wordt geschreven met uitsluitend vergelijkingen, waarna we hem met de schoorsteenveegmethode oplossen.

We komen terug op ons eerste voorbeeld. De bovenste ongelijkheid luidde $0 \leqq x_1 \leqq 10$. We hadden al afgesproken dat de variabelen niet negatief zouden zijn, dus $x_1 \leqq 10$.
Nu komt $x_1 \leqq 10$ neer op $x_1 = 10$ — een getal, waarbij dat getal nul is in het geval $x_1 = 10$ en dat getal positief is in het geval $x_1 < 10$. Dat getal zullen we de *spelingsvariabele* x_3 noemen, zodat $x_1 = 10 - x_3$ of wel

$x_1 + x_3 = 10.$

Van zo'n spelingsvariabele interesseert ons de uiteindelijke waarde nauwelijks, maar wel het niet negatief zijn. De uiteindelijke waarde van x_1 bepaalt mede de *beslissing* omtrent het produktieprogramma. Daarom wordt x_1 ter onderscheiding van de spelingsvariabelen ook wel *beslissingsvariabele* genoemd.
We gaan nu alle ongelijkheden van probleem 1 met behulp van spelingsvariabelen schrijven als vergelijkingen.

$$\boxed{\begin{array}{lllllll} x_1 & & + x_3 & & & = 10 & \\ & x_2 & & + x_4 & & = 8 & \\ x_1 + & 2x_2 & & & + x_5 & = 18 & x_i \geqq 0 \\ x_1 + & x_2 & & & & + x_6 = 13 & \\ f = 200x_1 + 300x_2 \text{ maximaal} & & & & & & \end{array}}$$

We noemen dit de kanonieke vorm van een lineair programmeringsprobleem.
Als we van de oplossingen van dit stelsel die nemen waarvoor geldt dat $x_1 + 2x_2 = 18$, dan is $x_5 = 0$. In figuur 11 is daarom de lijn $x_1 + 2x_2 = 18$ gekarakteriseerd door $x_5 = 0$. Een soortgelijke typering geldt voor de andere grenslijnen. In het rose binnengebied geldt dat $x_i > 0$.
Uit onze ervaring met de grafische oplossingsmethode concluderen we dat *de optimale oplossing in* tenminste *één van de hoekpunten* van het toelaatbare gebied te vinden is. In elk snijpunt van twee lijnen weten we dat twee van de zes variabelen gelijk zijn aan nul. Als de optimale oplossing wordt aangegeven door een hoekpunt van het toelaat-

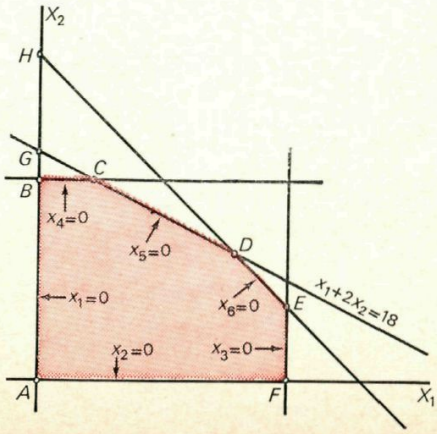


Fig. 11

bare gebied, dus een snijpunt van twee lijnen van figuur 11, dan zal voor die optimale oplossing gelden dat tenminste twee van de zes variabelen gelijk zijn aan nul.

We gaan nu *alle* oplossingen van de kanonieke vorm na, waarvan twee variabelen nul zijn.
We kiezen eerst $x_1 = x_2 = 0$, dus het punt A. We zien gelijk dat
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 10, 8, 18, 13)$
en er hoeft geen schoorsteenveger aan te pas te komen.
De waarde f van de doelstellingsfunctie is nul.

$$\begin{array}{l} 0 \quad +x_3 \qquad\qquad\qquad =10 \\ \quad 0 \qquad +x_4 \qquad\qquad = 8 \\ 0+0 \qquad\qquad +x_5 \qquad =18 \\ 0+0 \qquad\qquad\qquad +x_6=13 \\ f=0+0 \end{array}$$

We kiezen nu $x_1 = 0$ en $x_3 = 0$. Op de bovenste etage zie je een valse vergelijking, zodat we geen oplossing zullen vinden. Dat klopt, want we zijn hier op zoek naar het snijpunt van de evenwijdige lijnen AH en FE.

$$\begin{array}{l} 0 \quad +0 \qquad\qquad\qquad =10 \\ x_2 \quad +x_4 \qquad\qquad = 8 \\ \text{enz.} \end{array}$$

We kiezen $x_1 = 0$ en $x_4 = 0$.
We passen de schoorsteenveegmethode toe. De kolommen voor x_1 en x_4 hebben we weggelaten, zodat we inderdaad met vier onbekenden in de vier vergelijkingen te maken hebben.
Er is maar één vuile schoorsteen, dus die, zowel als de takkenbos is bepaald.
De oplossing (0, 8, 10, 0, 2, 5) is het punt B. De waarde van de doelstellingsfunctie is $0 + 300 \times 8 = 2400$.

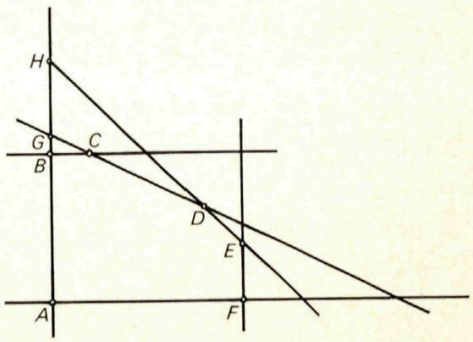
$$\begin{array}{l} 0 \quad +x_3 \qquad\qquad\qquad =10 \\ \quad x_2 \qquad +0 \qquad\qquad = 8 \\ 0+2x_2 \qquad\qquad +x_5 \qquad =18 \\ 0+\ x_2 \qquad\qquad\qquad +x_6=13 \\ f=0+300x_2 \end{array}$$

We rekenen verder niet alles voor, maar geven de resultaten.

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$	
(0, 0, 10, 8, 18, 13)	het punt A, $f = 0$
(0, , 0)	geen punt.
(0, 8, 10, 0, 2, 5)	het punt B, $f = 2400$
(0, 9, 10, −1, 0, 4)	het punt G, x_4 is echter negatief, wat verboden is. G is dan ook een niet toegestaan punt.
(0, 13, 10, −5, −8, 0)	×
(10, 0, 0, 8, 8, 3)	het punt F, $f = 2000$
(, 0, , 0, ,)	×
(18, 0, −8, 8, 0, −5)	×
(13, 0, −3, 8, 5, 0)	×
(10, 8, 0, 0, −8, −5)	×
(10, 4, 0, 4, 0, −1)	×
(10, 3, 0, 5, 2, 0)	het punt E, $f = 2900$
(2, 8, 8, 0, 0, 3)	het punt C, $f = 2800$
(5, 8, 5, 0, −3, 0)	×
(8, 5, 2, 3, 0, 0)	het punt D, $f = 3100$



Het toegestane punt met de hoogste waarde van *f* is de optimale oplossing. Wanneer twee punten met dezelfde hoogste waarde voorkomen, dan zijn alle punten van het verbindingslijnstuk ook optimale oplossingen, want dit lijnstuk valt samen met een isowinstlijn.
Ook al hebben we in deze paragraaf een tekening gebruikt, je kunt de methode toepassen zonder figuren, zodat hij ook bruikbaar is voor meer dan drie beslissingsvariabelen. Het aantal variabelen dat voor een oplossing gelijk aan nul genomen mag worden, wordt bepaald door het totaal aantal variabelen min het aantal vergelijkingen. Deze methode wordt bij meer variabelen wél erg tijdrovend.

Denkertjes

10 Los denkertje 8 op met de simplex-methode.

11 Los het volgende probleem op met de simplex-methode.
Een zekere fabrikant maakt produkten A en B, en wil zijn winst op die produkten maximaliseren. De fabrikage van A en B geschiedt in twee fasen:
1 de hoofdbewerking, die plaatsvindt in werkplaats I en
2 de nabewerking, die, voor beide produkten, zowel in werkplaats II als in werkplaats III plaats kan vinden.
Door het verschil in outillage in de werkplaatsen II en III treedt een verschil op in bewerkingstijden én in de bijdrage die het gereed produkt tot de winst levert. In werkplaats II is er ook nog de mogelijkheid tot overwerk, wat alleen invloed heeft op de bijdrage tot de winst; de bewerkingstijden blijven uiteraard gelijk. In onderstaande tabel 1 zijn de bewerkingstijden per eenheid produkt vermeld. In de laatste kolom van deze tabel is de maximale capaciteit van iedere afdeling opgenomen. In tabel 2 zijn de bijdragen tot de winst per eenheid produkt en per produktiecombinatie vermeld.

Zie blz. 112 t/m 115

tabel 1. bewerkingstijden en maximale capaciteiten

bewerking	werkplaats	bewerkingstijden per eenheid A	bewerkingstijden per eenheid B	maximale capaciteit normaal	maximale capaciteit overwerk
voorbewerking	I	0,8	0,5	1000	–
nabewerking	II	0,4	0,5	850	250
	III	0,5	0,6	1100	–

tabel 2. bijdragen tot de winst per eenheid produkt

produktiemethode (combinatie)		I & II	I & III	I & overwerk in II
produkt	A	*f* 15,–	*f* 13,–	*f* 10,–
	B	*f* 10,–	*f* 7,–	*f* 8,–

De simplex-methode °°°

waarin een snellere oplossingsmetbode wordt gepresenteerd, die met rondwandelen en met schoorsteenvegen te maken heeft. Het aantal variabelen mag groot zijn.

We gaan weer uit van voorbeeld 1. Wat we nu willen is niet alle oplossingen beschouwen waarvan twee variabelen de waarde nul hebben, want daarbij zitten een heleboel onbruikbare, maar alleen toelaatbare oplossingen. Grafisch komt het hierop neer dat we in het punt A(0, 0, 10, 8, 18, 13) beginnen en dat we langs de rand wandelen via B(0, 8, 10, 0, 2, 5), C(2, 8, 8, 0, 0, 3) naar D(8, 5, 2, 3, 0, 0) (figuur 12).
We zorgen hierbij voor twee zaken:

1 bij iedere stap moet de doelstellingsfunctie in waarde stijgen. We voorkomen hiermee dat we door zouden wandelen naar bijvoorbeeld E of F. Dat we door deze eis inderdaad in het optimum terechtkomen, is eigenlijk nog niet bewezen.
In figuur 13 zouden we bijvoorbeeld van U via V naar W wandelen en daar stoppen, terwijl het optimum bij Y ligt. Men kan echter bewijzen dat een toelaatbaar gebied zoals van figuur 13 niet voor kan komen omdat het convex moet zijn. We gaan hier verder niet op in.
2 Iedere stap langs de ribbe is zó groot, of zo je wilt: zó klein, dat we in het eerstvolgende hoekpunt van het toelaatbare gebied komen en niet buiten dit gebied raken.

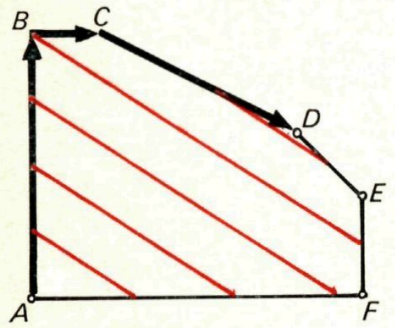


Fig. 12

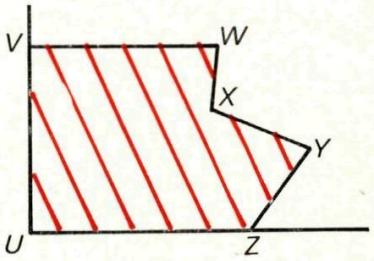


Fig. 13

Hoe gaat dit wandelen in zijn werk? Wel, we beginnen met de kanonieke vorm van het probleem waarvan uitsluitend de coëfficiënten worden genoteerd. We herhalen even hoe dat in het algemeen eruit ziet, als we ons aan de eerder gemaakte afspraken houden.

a_{11}	a_{12}	1	0	0	0	b_1	waarin $b_i \geqq 0$
a_{21}	a_{22}	0	1	0	0	b_2	
a_{31}	a_{32}	0	0	1	0	b_3	
a_{41}	a_{42}	0	0	0	1	b_4	

Hiernaast staat het tableau van voorbeeld 1. Hierin valt op dat er links van de streep twee vuile kolommen voorkomen, namelijk de x_1- en de x_2-kolom, en verder schone kolommen. Eén oplossing van dit stelsel is in een oogwenk te zien, namelijk die waarin $x_1 = x_2 = 0$, dus $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 10, 8, 18, 13)$.
Zo'n oplossing, waarin we de variabelen, aangegeven door de vuile kolommen, gelijk aan nul nemen, noemen we de *basisoplossing*. We gaan nu in dit tableau vegen met de aangegeven takkenbos.

1	0	1	0	0	0	10
0	1	0	1	0	0	8
1	2	0	0	1	0	18
1	1	0	0	0	1	13

1	0	1	0	0	0	10
0	1	0	1	0	0	8
1	2	0	0	1	0	18
1	1	0	0	0	1	13

1	0	1	0	0	0	10
0	1	0	1	0	0	8
1	0	0	−2	1	0	2
1	0	0	−1	0	1	5

We krijgen een nieuw tableau waarin de x_1- en de x_4-kolom vuil zijn, zodat hiervan de basisoplossing (0, 8, 10, 0, 2, 5) is. Dat is het punt B. Onze eerste stap is gelukt!

tableau 1

1	0	1	0	0	0	10
0	1	0	1	0	0	8
1	2	0	0	1	0	18
1	1	0	0	0	1	13
−200	−300	0	0	0	0	$-f$
	↑					

Nu begrijp je wel dat het verkeerd gaat als we in het wilde weg gaan vegen. We moeten onze twee zaken in de gaten houden: 1° de doelstellingsfunctie moet stijgen bij een stap en 2° we mogen niet buiten het toelaatbare gebied raken.

Ad 1 We zorgen voor een stijging van de doelstellingsfunctie door het kiezen van de juiste kolom. Daartoe nemen we de doelstellingsfunctie
$f = 200x_1 + 300x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$,
of liever gezegd juist het tegengestelde, op in het tableau. We kiezen in het tableau hiernaast nu de kolom met het meest negatieve getal onderaan.

tableau 1

1	0	1	0	0	0	10	$\frac{10}{0}$
0	1	0	1	0	0	8	$\frac{8}{1} = 8$ ←
1	2	0	0	1	0	18	$\frac{18}{2} = 9$
1	1	0	0	0	1	13	$\frac{13}{1} = 13$
−200	−300	0	0	0	0	$-f$	
	↑						

Ad 2 We delen op elke etage het getal rechts van de streep door het getal uit de verkozen kolom. Van deze quotiënten kiezen we de kleinste niet negatieve. Dit bepaalt de takkenbos.

tableau 2

1	0	1	0	0	0	10	10
0	1	0	1	0	0	8	∞
1	0	0	−2	1	0	2	2 ←
1	0	0	−1	0	1	5	5
−200	0	0	300	0	0	$-f + 2400$	
↑							

We hebben hier nog helemaal niet aannemelijk gemaakt waarom we de keus zó bepalen, maar dat komt straks. We laten eerst zien hoe de methode werkt.

Bij het vegen nemen we de doelstellingsfunctie mee. In tableau 2 staat voor de basisoplossing B(0, 8, 10, 0, 2, 5) in de onderste regel
$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = -f + 2400$,
zodat de waarde van $f = 2400$ onmiddellijk is af te lezen.

tableau 3

0	0	1	2	−1	0	8	4
0	1	0	1	0	0	8	8
1	0	0	−2	1	0	2	−1
0	0	0	1	−1	1	3	3 ←
0	0	0	−100	200	0	$-f + 2800$	
			↑				

We zetten het proces voort in de tableaux 3 en 4, met achtereenvolgens de basisoplossingen C(2, 8, 8, 0, 0, 3)

tableau 4

0	0	1	0	1	−2	2
0	1	0	0	1	−1	5
1	0	0	0	−1	2	8
0	0	0	1	−1	1	3
0	0	0	0	100	100	$-f + 3100$

en D(8, 5, 2, 3, 0, 0). De waarde van f is achtereenvolgens 2800 en 3100 in deze punten. Je moet wel voor ogen houden dat elk van deze tableaux hetzelfde lineaire programmeringsprobleem aangeeft, alleen het uiterlijk is gewijzigd om telkens een andere toelaatbare oplossing te beklemtonen.

Bij het vierde tableau staat in de onderste regel:

$$100x_5 + 100x_6 = -f + 3100$$

Omdat volgens de afspraak de variabelen x_5 en x_6 groter of gelijk nul zijn, geldt ook $-f + 3100 \geqq 0$, waaruit volgt $f \leqq 3100$. Met andere woorden: het maximum van f is 3100. Deze redenering is mogelijk zodra de getallen in de onderste regel, links van de streep, groter of gelijk nul zijn. We weten dus wanneer we de simplex-methode, zo heet deze snelle oplossingswijze, kunnen stoppen. De basisoplossing van het laatste tableau (8, 5, 2, 3, 0, 0) geeft ons de optimale oplossing, dit wil zeggen 8 frotten en 5 prammen.

We zullen nog aannemelijk maken hoe de takkenbos-keuze ontstaat. We gaan daarvoor terug naar het eerste tableau.

Ad 1 De doelstellingsfunctie $200x_1 + 300x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$ heeft in het beginpunt A(0, 0, 10, 8, 18, 13) de waarde nul. Verhoging van de waarde van f kan het meest effectief door de variabelen x_2 in waarde te verhogen, omdat die de grootste coëfficiënt heeft. Maar als $x_2 \neq 0$ in de basisoplossing, dan moet de x_2-kolom schoon zijn, dus deze kolom moet geveegd worden. In het tableau is deze kolom herkenbaar aan de meest negatieve coëfficiënt. Omdat in de oplossing x_1 gelijk aan nul blijft, gaan we blijkbaar op stap langs de lijn $x_1 = 0$.

Ad 2 Op deze lijn liggen de snijpunten B, G en H (figuur 11), waarvan de laatste twee niet zijn toegelaten. De ligging van de genoemde snijpunten is te halen uit het tableau, want uit

1 0	10	zijn de verge-	$x_1 + 0 \quad . \quad . \quad . \quad . = 10$
0 1	8	lijkingen van	$0 + x_2 \quad . \quad . \quad . \quad . = 8$
1 2	18	de grenslijnen	$x_1 + 2x_2 \quad . \quad . \quad . \quad . = 18$
1 1	13	te halen:	$x_1 + x_2 \quad . \quad . \quad . \quad . = 13$

Snijden met $x_1 = 0$ geeft $x_2 = \frac{10}{0}$ (evenwijdige lijnen), $x_2 = \frac{8}{1}$ (snijpunt B), $x_2 = \frac{18}{2}$ (G) en $x_2 = \frac{13}{1}$ (H). Het enige veilige punt is het dichtstbijzijnde, te vinden uit het kleinste niet negatieve quotiënt.

We lossen ter demonstratie ook voorbeeld 3 op volgens de simplex-methode.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqq 26 \\ x_1 + 2x_2 \quad &\leqq 18 \\ x_1 \quad &\leqq 10 \\ x_2 \quad &\leqq 8 \\ x_3 &\leqq 15 \\ -200x_1 - 300x_2 - 50x_3 &= -f \end{aligned}$$

We schrijven dit in de kanonieke tableauvorm, met spelingsvariabelen x_4 t/m x_8. De letter f wordt weggelaten.

2	2	1	1	0	0	0	0	26	13
1	2	0	0	1	0	0	0	18	9
1	0	0	0	0	1	0	0	10	∞
0	1	0	0	0	0	1	0	8	8 ←
0	0	1	0	0	0	0	1	15	∞
−200	−300	−50	0	0	0	0	0	0	
	↑								
2	0	1	1	0	0	−2	0	10	5
1	0	0	0	1	0	−2	0	2	2 ←
1	0	0	0	0	1	0	0	10	10
0	1	0	0	0	0	1	0	8	∞
0	0	1	0	0	0	0	1	15	∞
−200	0	−50	0	0	0	+300	0	2400	
↑									
0	0	1	1	−2	0	2	0	6	3 ←
1	0	0	0	1	0	−2	0	2	−1
0	0	0	0	−1	1	2	0	8	4
0	1	0	0	0	0	1	0	8	∞
0	0	1	0	0	0	0	1	15	∞
0	0	−50	0	200	0	−100	0	2800	
						↑			
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	0	1	0	3	
1	0	1	1	−1	0	0	0	8	
0	0	−1	−1	1	1	0	0	2	
0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	0	5	
0	0	1	0	0	0	0	1	15	
0	0	0	50	100	0	0	0	3100	

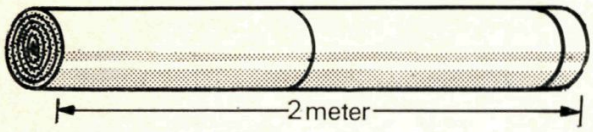
Uit het laatste tableau volgt dat de doelstellingsfunctie gelijk is aan 3100 als x_4 en x_5 gelijk zijn aan nul. Over de waarde van x_3 doet de onderste regel geen uitspraak.
Het aantal te importeren blins heeft geen invloed op de winst, een conclusie die we eerder al uit een tekening meenden te mogen trekken.

Nu we een methode hebben ontwikkeld, die uitgevoerd kan worden door het blindelings uitvoeren van een voorschrift (*algoritme*), kunnen we het oplossen van lineaire programmeringsproblemen net zo goed overlaten aan computers. Het is zelfs noodzakelijk, omdat in praktijkproblemen het aantal variabelen erg groot is. Bij het ontwerpen van een raffinaderij kijkt men niet op van 100.000 variabelen.

Het onderwerp lineaire programmering is nog vrij jong. De simplex-methode bijvoorbeeld dateert uit 1947 (G. B. Dantzig).
Men is nog lang niet uitgestudeerd op het onderwerp en er zijn nog onopgeloste problemen. Veel problemen hebben we in het verhaal en in de denkertjes omzeild door een aantal afspraken. Denkertjes 10, 11 en 12.

Denkertjes.

12 De firma Splinter maakt prima houtvrij papier met een machine die rollen van 2 meter breedte produceert. De produktiekosten van zo'n rol bedragen *f* 60,– per rol.



Deze rollen kunnen worden versneden tot rollen van kleinere breedten, zoals in de tekening is aangegeven. Er is vraag naar rollen van 60 cm, 90 cm en 120 cm breedte. Per dag kunnen hiervan hoogstens respectievelijk 9, 10 en 6 rollen op de markt worden afgezet tegen *f* 30,–, *f* 40,– en *f* 50,– per rol.
Snijresten zijn onverkoopbaar.
Bereken hoeveel 2 meter-rollen per dag moeten worden geproduceerd en op welke wijze deze moeten worden versneden om de winst te maximaliseren.
Aanwijzing: Neem aan dat er x_1 rollen in driemaal 60 cm versneden worden, x_2 rollen in 60 en 90 cm enz.

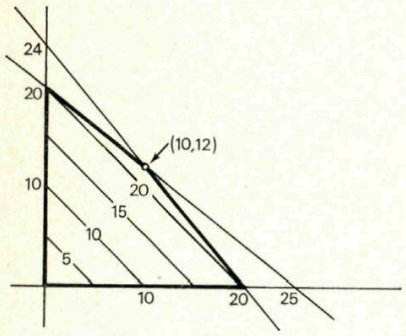
Oplossingen denkertjes

1 x_1 en x_2 gebakjes van eerste resp. tweede soort

bloem: $60x_1 + 50x_2 \leqq 1200$

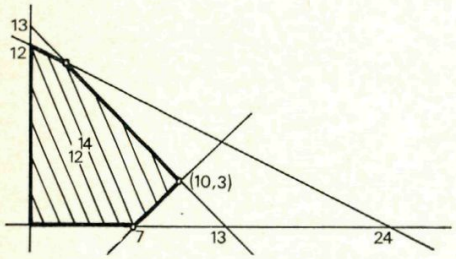
boter: $40x_1 + 50x_2 \leqq 1000$

$x_1 + x_2$ maximaal.



10 van de eerste soort en 12 van de tweede

2



$x_1 = 10$

$x_2 = 3$

3 x_1, x_2 en x_3 kg van A, B resp. C.

$40x_1 + 40x_2 + 20x_3 = 100$

$\frac{20}{100}x_1 + \frac{10}{100}x_2 + \frac{10}{100}x_3 \geqq \frac{12}{100}(x_1 + x_2 + x_3)$

$\frac{40}{100}x_1 + \frac{50}{100}x_2 + \frac{30}{100}x_3 \geqq \frac{40}{100}(x_1 + x_2 + x_3)$

max. $x_1 + x_2 + x_3$

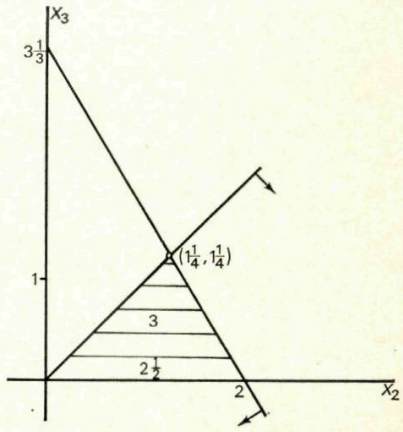
$$\boxed{\begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 \leqq 0 \\ - x_2 + x_3 \leqq 0 \\ \text{max. } x_1 + x_2 + x_3 \end{array}}$$

x_1 elimineren

$5x_2 + 3x_3 \leqq 10$

$-x_2 + x_3 \leqq 0$

max. $\frac{1}{2}x_3 + 2\frac{1}{2}$



optimum in het snijpunt $(1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4})$

$\rightarrow x_1 = \frac{5}{8}$, $x_2 = 1\frac{1}{4}$, $x_3 = 1\frac{1}{4}$ totaal $3\frac{1}{8}$ kg.

De weg naar de oplossing van denkertjes 4, 5 en 6 ligt niet vast. We geven hier maar voorbeelden.

4
$$\left.\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{rrr|r} -2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{rrr|r} 0 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 11 & 0 & 11 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. \Rightarrow (-1, 1, 2)$$

5
$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 15 \\ 3 & 2 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 15 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & -3 & -5 & -21 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & -5 & -21 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right. \Rightarrow (2, 2, 3)$$

6
$$\left.\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 10 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 9 \\ -5 & 0 & 0 & -1 & -9 \\ -8 & 1 & 0 & -3 & -30 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrr|r} 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 17 & 0 & 0 & 9 & 69 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 17 \\ -8 & 1 & 0 & -3 & -30 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrr|r} -3 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 17 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 21 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, 0, 2)$$

7
$$\begin{array}{rl} x_1 - x_2 + x_3 & = 7 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 & = 13 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_5 & = 24 \\ \text{max. } 2x_1 + x_2 = f & \end{array}$$

de oplossingen met twee onbekenden gelijk aan nul van

$$\left.\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 24 \end{array}\right.$$

zijn (0, 0, 7, 13, 24) $f = 0$
(0, −7, 0, 20, 38) ×
(0, 13, 20, 0, −2) ×
(0, 12, 19, 1, 0) $f = 12$
(7, 0, 0, 6, 17) $f = 14$
(13, 0, −6, 0, 11) ×
(24, 0, −17, −11, 0) ×
(10, 3, 0, 0, 8) $f = 23$ ←
$(12\frac{2}{3}, 5\frac{2}{3}, 0, -5\frac{1}{3}, 0)$ ×
(2, 11, 16, 0, 0) $f = 15$

8 Fabricage van x_1 trucks en x_2 personenwagens.

$$\begin{array}{ll} \text{carrosserie:} & 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad = 200 \\ \text{motoren:} & x_1 + 1\frac{1}{2}x_2 \qquad + x_4 \qquad = 150 \\ \text{assemblering:} & x_2 \qquad\qquad + x_5 = 90 \\ \text{maximaliseer } 300x_1 + 200x_2 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 200 \\ 1 & 1\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right.$$

heeft de voor ons belangrijke oplossingen:

(0, 0, 200, 150, 90) $f = 0$
(0, 200, 0, −150, −110) ×
(0, 100, 100, 0, −10) ×
(0, 90, 110, 15, 0) $f = 18000$
(200, 0, 0, −50, 90) ×
(150, 0, −100, 0, 90) ×

(75, 50, 0, 0, 40) $f = 32500 \Rightarrow x_1 = 75,\ x_2 = 50$
(55, 90, 0, −40, 0)
(15, 90, 80, 0, 0) $f = 22500$

9 x_5 is de niet gebruikte maar wel aanwezige mankracht, uitgedrukt in mandagen. Men noemt dit ook wel de leegloop.
x_6 is de niet aangesproken opslagruimte.

10 x_1 = aantal trucks, x_2 = aantal personenauto's

max. $\{3x_1 + 2x_2\}$

onder
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqq 200 \\ x_1 + 1\tfrac{1}{2}x_2 &\leqq 150 \\ x_2 &\leqq 90 \end{aligned}$$

2	1	1	0	0	200	100	←
2	3	0	1	0	300	150	
0	1	0	0	1	90	∞	
−3	−2	0	0	0	0		
↑							

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	100	200
0	2	−1	1	0	100	50 ←
0	1	0	0	1	90	90
0	$-\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	0	0	300	
	↑					

1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	75	$x_1 = 75$
0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50	$x_2 = 50$
0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	40	
0	0	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	325	
		↑	↑			

$x_3 = x_4 = 0$

11 x_1 = aantal produkten A via II
x_2 = aantal produkten A via II in overwerk
x_3 = aantal produkten A via III
x_4 t/m x_6 analoog voor B

$$\begin{aligned} 0{,}8\,(x_1 + x_2 + x_3) + 0{,}5\,(x_4 + x_5 + x_6) &\leqq 1000 \\ 0{,}4\,x_1 + 0{,}5\,x_4 &\leqq 850 \\ 0{,}4x_2 + 0{,}5x_5 &\leqq 250 \\ 0{,}5x_3 + 0{,}6x_6 &\leqq 1100 \end{aligned}$$

max. $\{15x_1 + 10x_2 + 13x_3 + 10x_4 + 8x_5 + 7x_6\}$

8	8	8	5	5	5	1	0	0	0	10000 ←
4	0	0	5	0	0	0	1	0	0	8500
0	4	0	0	5	0	0	0	1	0	2500
0	0	5	0	0	6	0	0	0	1	11000
−15	−10	−13	−10	−8	−7	0	0	0	0	0
↑										

1	1	1	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	1250
0	−4	−4	$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	3500 ←
0	4	0	0	5	0	0	0	1	0	2500
0	0	5	0	0	6	0	0	0	1	11000
0	5	2	$-\frac{5}{8}$	$1\frac{3}{8}$	$2\frac{3}{8}$	$1\frac{7}{8}$	0	0	0	18750
			↑							

1	2	2	0	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	375
0	$-1\frac{3}{5}$	$-1\frac{3}{5}$	1	-1	-1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	1400
0	4	0	0	5	0	0	0	1	0	2500
0	0	5	0	0	6	0	0	0	1	1100
0	4	1	0	$\frac{3}{4}$	$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{8}$	0	0	19625

$x_1 = 375$
$x_4 = 1400$
$x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$

12 x_1 is het (niet noodzakelijk gehele) aantal rollen dat op de daardoor aangegeven wijze wordt versneden.

	x_1	x_2	x_3	x_4
60 cm	3	1	1	0
90 cm	0	1	0	2
120 cm	0	0	1	0
opbrengst	90	70	80	80
kosten	60	60	60	60
winst	30	10	20	20

Andere snijcombinaties, bijv.:
0 2
1 of 0
0 0
geven verlies of in ieder geval geen winst.

3	1	1	0	1	0	0	9	←
0	1	0	2	0	1	0	10	
0	0	1	0	0	0	1	6	
-30	-10	-20	-20	0	0	0	0	
↑								

1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	3	
0	1	0	2	0	1	0	10	←
0	0	1	0	0	0	1	6	
0	0	-10	-20	10	0	0	90	
			↑					

1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	3
0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	5
0	0	1	0	0	0	1	6
0	10	-10	0	10	10	0	190
		↑					

1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1
0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	5
0	0	1	0	0	0	1	6
0	10	0	0	10	10	10	250

$x_2 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$
$x_1 = 1$
$x_3 = 6$
$x_4 = 5$

Inhoud:

Inleiding 97

Lineaire programmering ° 99

De grafische oplossingsmethode ° 102

Grafische oplossing van probleem 3 °° 105

De schoorsteenveegmethode ° 107

De kanonieke vorm °° 109

De simplex-methode °°° 112

Denkertjes 98, 101, 106, 111, 116

Oplossingen denkertjes 117

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Amersfoort.
A. F. VAN TOOREN, Leusden-C.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via één der docenten, *f* 4,50 per jaargang. Voor anderen *f* 7,00.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.
Bij elke 20 abonnementen of gedeelten ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.