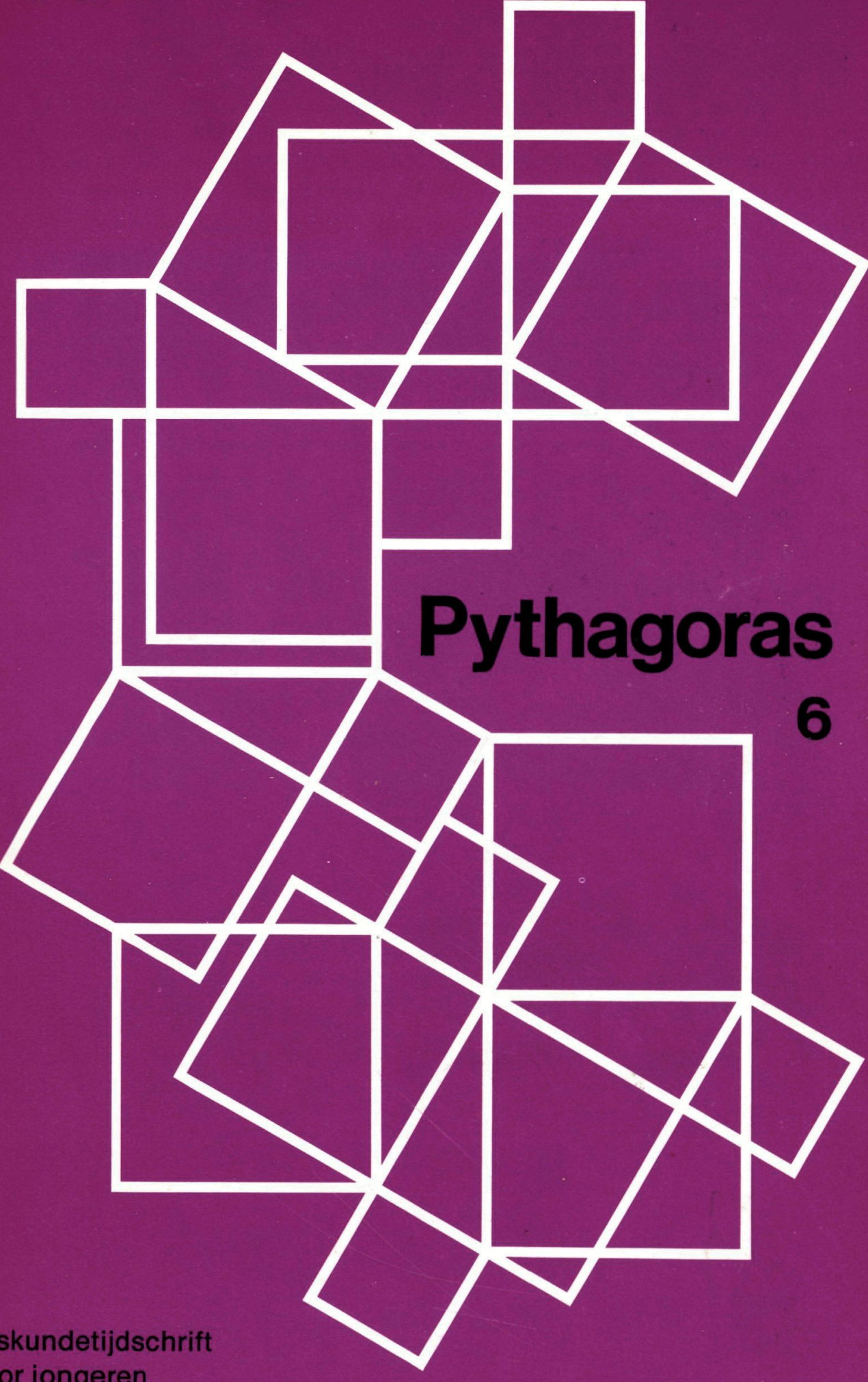


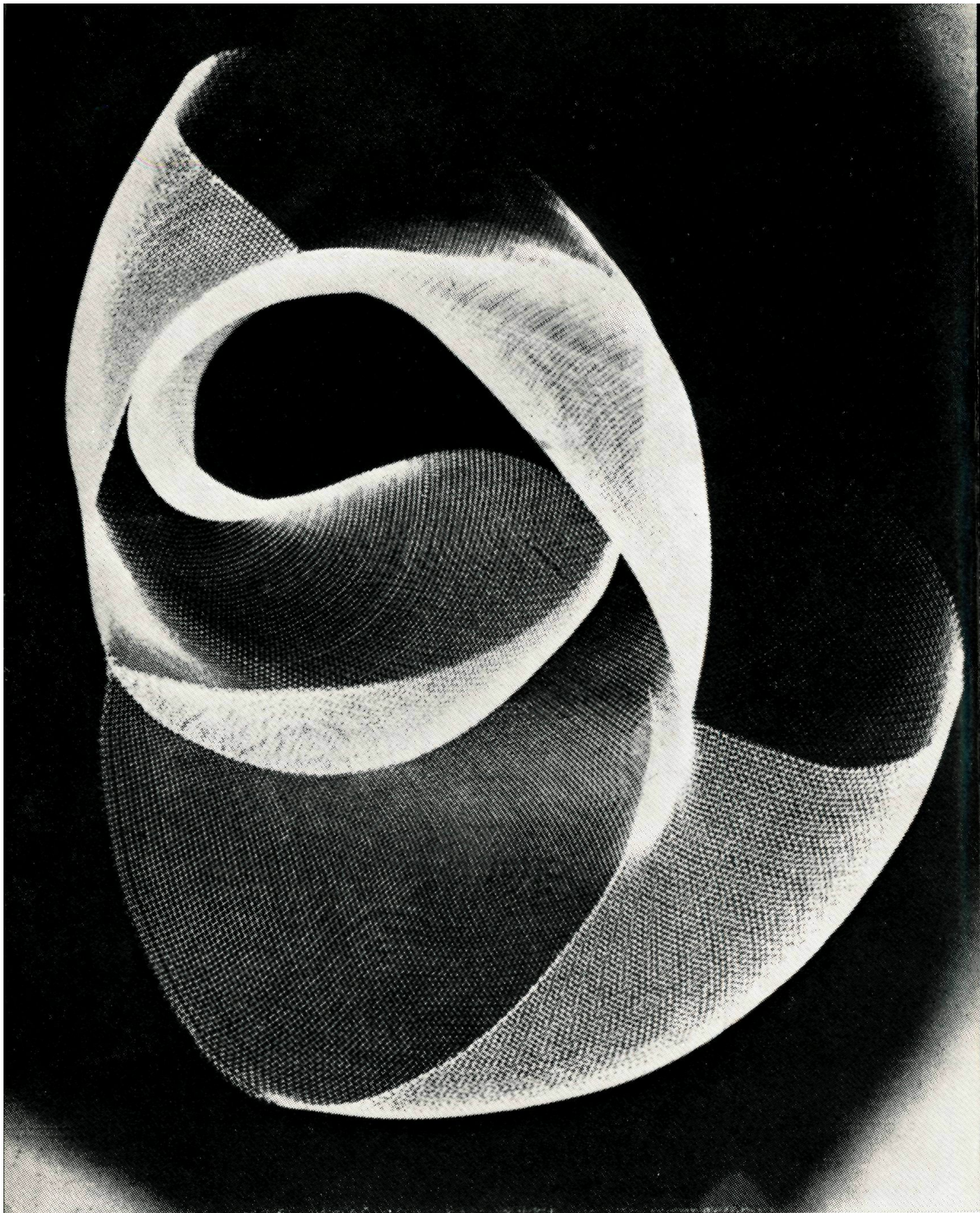
jaargang 11 1971/1972



Pythagoras

6

wiskundetijdschrift
voor jongeren



Object van de beeldhouwer Bruno Munari. Zie het artikel 'Spelen met een vierkant', op bladzijde 136 en volgende.

Het meten van oppervlakten°

Voor de meest uiteenlopende figuren, begrensd door rechte of kromme lijnen heeft men formules afgeleid om de oppervlakte te berekenen. Er zijn echter een aantal gevallen, waarin deze formules ons volkomen in de steek laten, terwijl wij toch (om de een of andere, meestal praktische reden) de oppervlakte van een figuur willen weten. De bioloog interesseert de oppervlakte van een blad, een schoenfabrikant wil de oppervlakte van een schoenzool kennen, de carrosseriebouwer of de plasticfabrikant hebben de oppervlakte van de meest willekeurige figuren nodig voor hun prijscalculaties, de fysicus wil de oppervlakte weten die door een experimenteel gevonden kromme begrensd wordt en de landmeter moet elke dag oppervlakten noteren van percelen, die hij in kaart gebracht heeft (figuur 1). Van de praktische methoden, waarvan men zich bedient om de oppervlakte van willekeurige gegeven figuren te meten, zullen we er enige behandelen en daarbij vooral veel aandacht besteden aan een volwaardig instrument waarop wij die oppervlakte zonder meer kunnen aflezen: de poolplanimeter van Amsler.

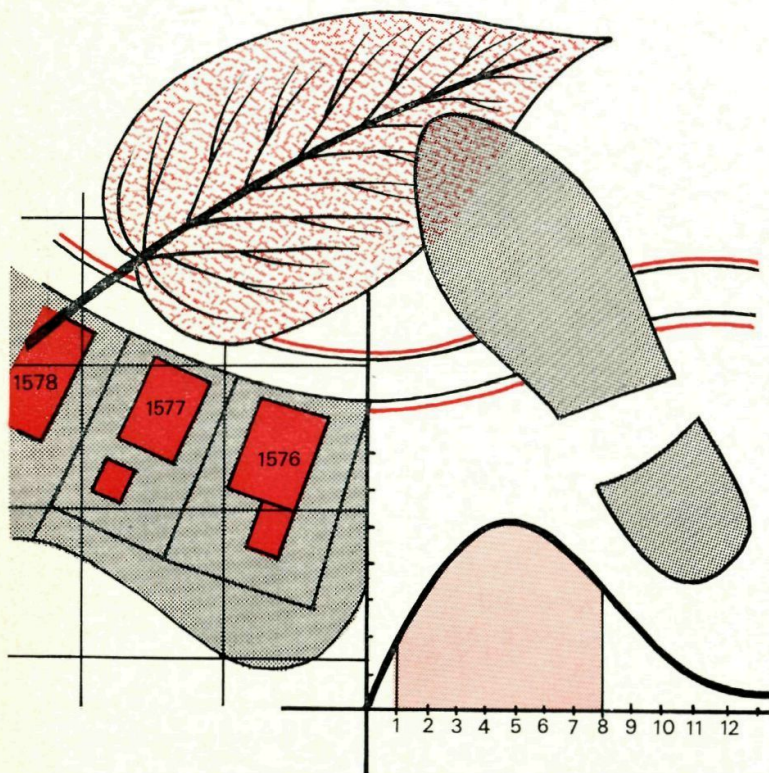


fig. 1

Vierkantjes en lijntjes

In figuur 2 willen we de oppervlakte weten van de figuur $ABCD$, waarin CD een willekeurige kromme is. Neem een stuk transparant papier met roosterverdeling en leg dit over de figuur (het roosterpapier is in figuur 2 rood getekend). Tel nu het aantal vierkantjes (a) dat helemaal binnen de figuur ligt en tel ook het aantal vierkantjes dat gedeeltelijk binnen en gedeeltelijk buiten de figuur ligt (b). De gevraagde oppervlakte is dan bij benadering gelijk aan $a + \frac{1}{2}b$. De verklaring daarvan ligt voor de hand. Het is ook duidelijk, dat de nauwkeurigheid van de meting toeneemt, als wij de vierkantjes kleiner maken.

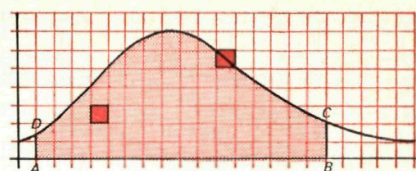


fig. 2

In figuur 3 is dezelfde kromme getekend. Op de figuur is een transparant met verticale lijntjes gelegd, die op een afstand b van elkaar getekend zijn. We meten nu de lijnstukjes $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. De oppervlakte van de figuur is nu $b(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

De verklaring volgt uit het kleine figuurtje, dat je links onder in figuur 3 ziet; a_1 en a_2 begrenzen een figuur die bij benadering een trapezium is met evenwijdige zijden a_1 en a_2 en de hoogte b , zodat de oppervlakte ervan bij benadering is: $\frac{1}{2}b(a_1 + a_2)$. Tel nu de oppervlakten van alle trapezia die je zo krijgt op en je vindt de bovenstaande formule.

Voor deze methode is de toepasselijke naam: methode van de *planimeterharp* in gebruik.

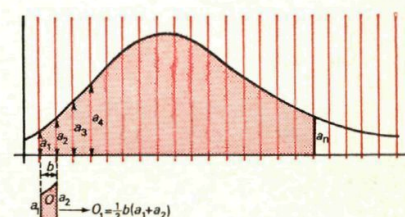


fig. 3

Vervormen en schatten

We kunnen ook een heel andere weg inslaan, en de te meten oppervlakte eerst veranderen in een andere, die minder moeilijkheden geeft. In figuur 4a gaat het om de oppervlakte van ABC , waarin AC een kromme is. We tekenen nu een horizontale lijn ED , zo, dat de oppervlakte van APE gelijk is aan die van PDC . Dit is een kwestie van schatten, en daar volgt al uit dat deze methode niet erg nauwkeurig kan zijn. Of liever, dat nauwkeurigheid van deze methode direct samenhangt met onze vaardigheid om van twee figuren te kunnen constateren of ze dezelfde oppervlakte hebben of niet. De oppervlakte van ABC is nu gelijk aan de oppervlakte van de rechthoek $ABDE$.

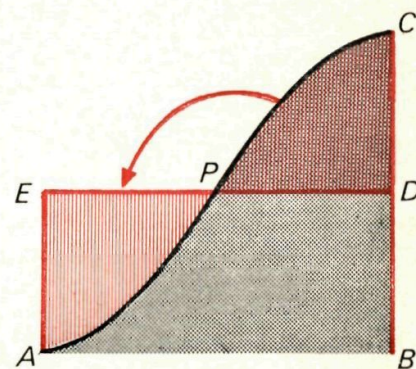


fig. 4a

Figuur 4b laat zien hoe we op deze manier de oppervlakte onder een kromme benaderen. We trekken eerst de loodlijn PQ door het hoogste punt van de kromme, daarna AB . Nu volgt onze eerste schatting van gelijke oppervlakten, waarna we AC en BD kunnen trekken. Tenslotte trekken we EF .

De oppervlakte van de figuur $RDSP$ (waarvan SPR een kromme is), is nu gelijk aan de oppervlakte van de rechthoeken $RCFE$ en $CDBA$.

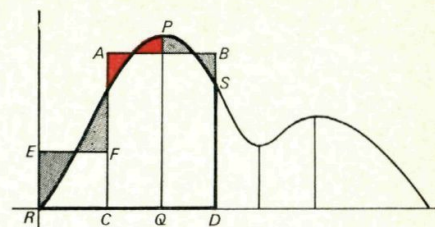


fig. 4b

Indirecte methoden

Voor we de poolplanimeter bespreken, moeten we eerst nog wijzen op indirecte methoden van oppervlakte-meting, die in verschillende gevallen zeer praktisch kunnen zijn en ook voldoende nauwkeurig. De bekendste indirecte methode is *wegen*!

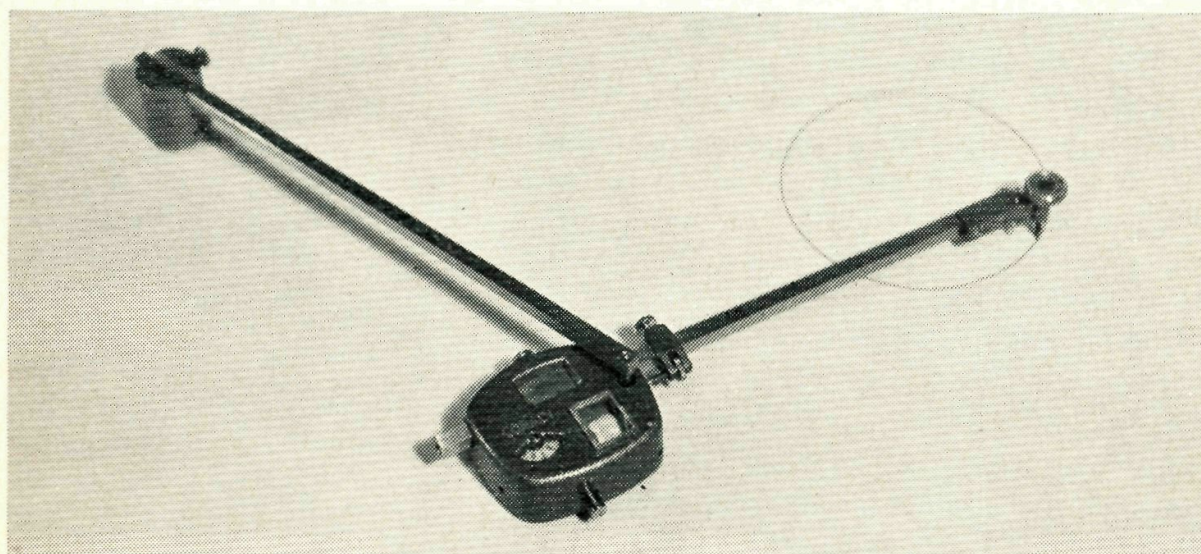
Teken de figuur over op een plaat van homogeen materiaal die overal even dik is (bijv. op een plaat koper). Zaag de figuur uit en weeg dat stuk (a). Weeg ook 1 cm^2 van de plaat (b). De oppervlakte van de figuur is dan $a:b$.

De poolplanimeter van Amsler^{oo}

Dit instrument vinden we op de tekenkamers van wegen- en waterbouwkundigen, van scheepswerven, bij cartografen etc.

Je kunt er snel en nauwkeurig de oppervlakte van allerlei recht- en kromlijnige figuren mee meten (figuur 5).

fig. 5



Je hoeft niets anders te doen dan met de schrijfstift (op de foto aan het einde van de stang helemaal rechts) over de omtrek van de figuur te gaan. Als je weer bij het uitgangspunt gekomen bent, lees je op een schaalverdeling de oppervlakte af.

De poolplanimeter bestaat uit twee stangen (figuur 6a en b), de schrijfarm AB en de poolarm AP , die bij A scharnierend met elkaar zijn verbonden. De poolarm kan draaien om P , maar P staat vast t.o.v. het tekenvlak. Om dit laatste te bereiken is bij P een zware, massieve cilinder aangebracht die aan de onderkant nog van een scherp uitstekende naaldpunt voorzien is. Aan de schrijfarm is ook nog een rol met telwerk bevestigd, die over het papier glijdt. Het aantal omwentelingen van de rol is maatgevend voor de oppervlakte die de schrijfstift omschreven heeft.

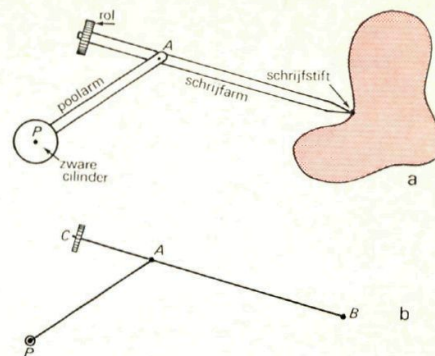


fig. 6a en 6b

Aan de hand van figuur 7 en 8 zullen we de werking van deze planimeter verklaren. In figuur 7 zijn alleen de poolarm (PA) en de schrijfarm (AB) getekend. De uitgangsstand is PAB . De schrijfstift volgt de omtrek van het ruitvormige figuurtje.

We letten nu op de oppervlakte die door de schrijfarm beschreven wordt (zie figuur 8):

- van 1 naar 2. Poolarm en schrijfarm bewegen naar boven, de schrijfarm beschrijft een parallellogramachtige figuur (rood gearceerd)
- van 2 naar 3. Alleen de schrijfarm beweegt en beschrijft een cirkelsector (rood gearceerd).
- van 3 naar 4. Poolarm en schrijfarm bewegen. De laatste beschrijft weer een soort parallellogram (nu zwart gearceerd).
- van 4 naar 1. Alleen de schrijfarm beweegt en beschrijft een cirkelsector (zwart gearceerd).

Rekenen we de van beneden naar boven beschreven oppervlakte positief (rood gearceerd) en van boven naar beneden negatief (zwart gearceerd) dan is de som van de door AB beschreven oppervlakten juist gelijk aan die van de figuur (1, 2, 3, 4) die de schrijfstift heeft omschreven.

We moeten nu nog nagaan of we de som van deze oppervlakten kunnen aflezen aan het aantal omwentelingen van de rol die aan de schrijfstift vastzit.

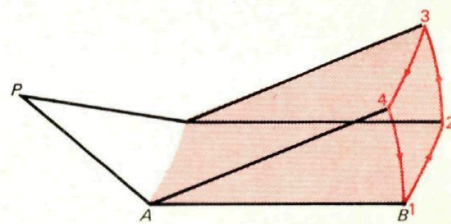


fig. 7

In figuur 8 a t/m d zijn de verschillende standen van de planimeterarmen afzonderlijk weergegeven:

8a, van 1 naar 2. De schrijfarm beschrijft de oppervlakte $h_1 \cdot a$. Daarin is h_1 ook de door de rol afgerolde afstand.

8b, van 2 naar 3. De schrijfarm beschrijft de oppervlakte p , die ook weer tot uitdrukking komt in de afstand die de rol verder rolt.

8c, van 3 naar 4. De schrijfarm beschrijft nu de oppervlakte $-h_2 \cdot a$. Hierin is h_2 weer de door de omtrek van de rol afgelegde weg. Omdat de rol nu terugdraait is die afstand $-h_2$.

8d, van 4 naar 1. De schrijfarm beschrijft een cirkelsector die even groot is als bij 8b, maar nu in tegengestelde richting, ook de rol draait dan evenver terug. Deze oppervlakte is daarom $-p$.

De totale oppervlakte (dus die van het ruitvormige figuurtje, beschreven door de schrijfstift) is nu:

$$h_1 \cdot a + p - h_2 \cdot a - p = (h_1 - h_2)a$$

En $h_1 - h_2$ kunnen we op de rol aflezen.

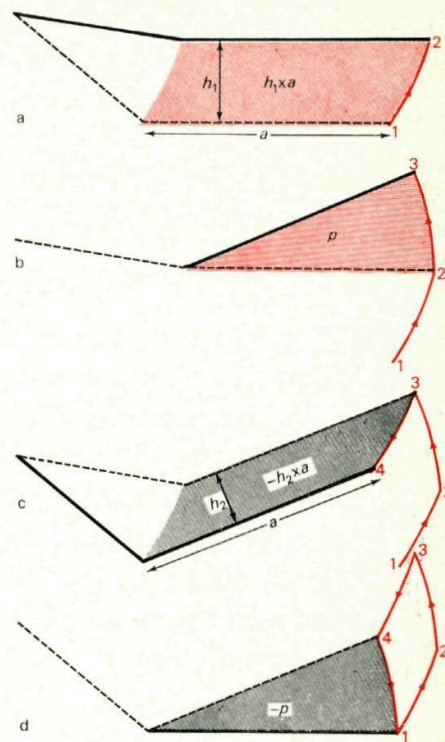


fig. 8a, b, c en d

Maak zelf een model van een planimeter

Een planimeter is een precisieinstrument, dat honderden guldens kost. Zonder een draaibank en veel ervaring en tijd hoef je niet te proberen een planimeter na te maken. De volgende bouwbeschrijving is voor degenen die graag knutselen en toch zelf wel eens zo'n planimeter willen maken. Verwacht echter niet dat het resultaat een precisieinstrument zal zijn.

Zelfbouwplanimeter^o

A. Middeldorp

Een gemakkelijke manier om een eenvoudige planimeter te bouwen, is gebruik te maken van lego-bouwstenen. Deze zijn wellicht in de speelgoedkast van een jonger broertje te vinden.

Zoals in figuur 9 *a* en *b* te zien is, werd de rollende arm gemaakt van vier smalle strips. Op de laatste strip is aan het eind een bouwsteen met één wieltje gemonteerd. Het wieltje is voorzien van een plastic of rubber bandje. Vlak achter het wielblokje is een draaischijf vastgedrukt, dat is een legosteek bestaande uit twee ronde schijfjes, die ten opzichte van elkaar kunnen draaien. Inplaats daarvan kan ook met lego-wiel-schijfjes een draaibaar systeem gemaakt worden. Je zult dan de opbouw een beetje moeten wijzigen.

Aan de bovenste cirkel van de draaischijf bevestig je de tweede arm, die uit drie strips is opgebouwd. Aan het andere eind van die tweede arm wordt ook een draaischijf gemonteerd. Deze komt te rusten op een bouwsteen (A in de tekening), zodat hij even hoog ligt als de andere draaischijf, waardoor de arm horizontaal blijft. Aan die bouwsteen kun je gemakkelijk de draaischijf vasthouden, omdat deze tijdens het meten op zijn plaats moet blijven.

Tenslotte moet je aan het begin van de rollende arm bij B nog een klein vierkant steentje bevestigen, dat dient als 'schrijfstift'. Op het loopwielkje maak je aan één kant een merkteken. Je kunt b.v. een klein reepje papier tussen wieltje en bandje klemmen, of aan de zijkant een papiertje plakken. In figuur 10 zie je een foto van de zelfgebouwde planimeter. En nu maar meten!

Leg op een vlakke tafel een flink stuk papier. Is het niet al te stevig, hecht het dan vast met een stukje plakband. Teken op het papier een vierkant van 10×10 cm.

Houd je planimeter bij A vast, zodat dit deel op dezelfde plaats blijft. Neem nu B in de andere hand en volg met één hoekpunt van het kleine blokje de hele omtrek van het vierkant. Zorg ervoor, dat het merkteken van het wieltje bij het begin van een meting steeds op dezelfde plaats is, bijv. aan de bovenkant.

Tijdens de beweging van de schrijfstift B zal het wieltje links- of rechtsom draaien, of ook wel eens vrijwel stilstaan (bij schuiving evenwijdig aan de wielas). Het gaat er nu om, hoeveel omwentelingen (of gedeeltelijke omwentelingen) het wieltje uiteindelijk heeft gemaakt vanaf de beginstand. Draait het b.v. eerst een kwartslag naar links en dan een kwartslag naar rechts, dan vallen deze omwentelingen tegen elkaar weg. Dit zou b.v. gebeuren, als je eenzelfde lijn heen en terug beschrijft. Die lijn heeft dan ook geen oppervlakte. De

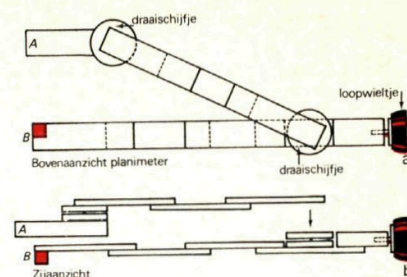


fig. 9a en 9b

waarnemingen gaan het gemakkelijkst, als je met z'n tweeën bent. Eén beweegt dan de arm en de ander houdt het loopwiel in de gaten.

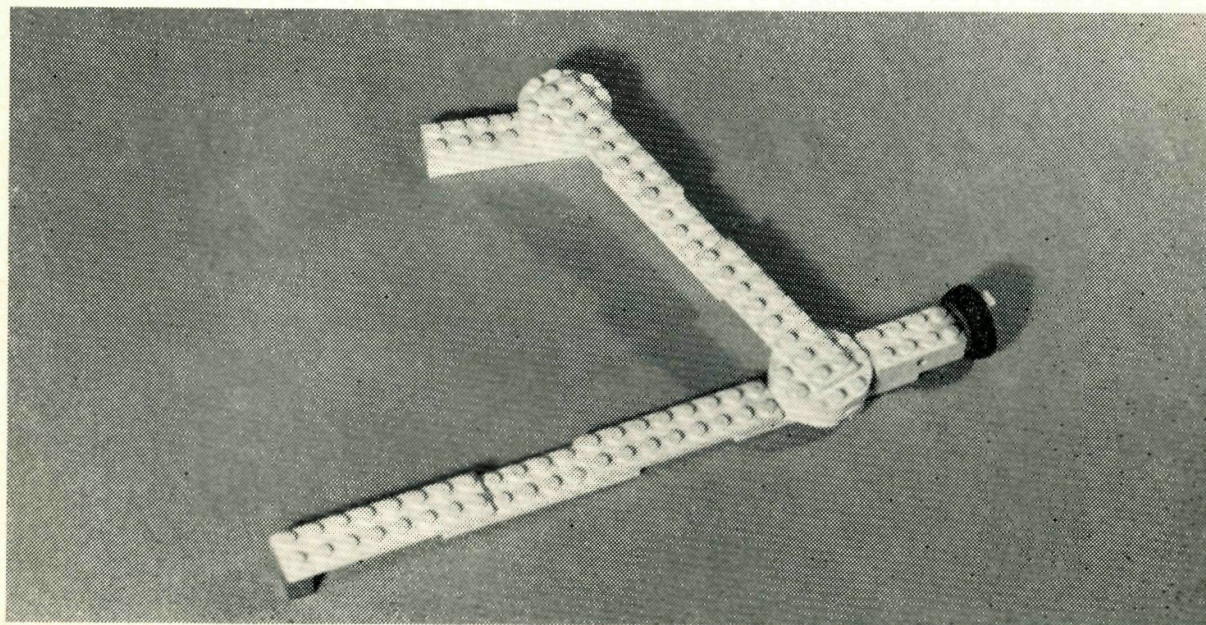
Als je bijv. waarneemt, dat het wielje een halve omwenteling maakt als je het getekende vierkant beschrijft, dan komt de oppervlakte van 1 dm^2 overeen met een halve omwenteling. Is het niet precies een halve of hele omwenteling, dan doet dit er niets toe.

Alleen is het een lastig gereken. Je kunt die omwentelingsnelheid gemakkelijk wat variëren, door één of beide armen te verlengen of te verkorten. Dit gaat eenvoudig door de legoblokjes één of meer gaatjes op te schuiven. Probeer hierna bijv. een tweemaal zo groot oppervlak enz. Om ook andere oppervlakken te meten, moet je een verdeling op het wielje maken. Plak hiertoe een cirkel op het wielje, waarvan de omtrek in 10 delen verdeeld is.

Door vergelijking met het meetresultaat van de vierkante decimeter, kun je uitrekenen met welk oppervlak één tiende omwenteling overeen komt. Teken hierna een willekeurig getrokken, gesloten kromme lijn, dan kun je het hierdoor omsloten oppervlak meten. Teken je die lijn op millimeterpapier, dan is de oppervlakte tevens te bepalen met de andere in dit artikel genoemde methode, zodat je de uitkomst kunt vergelijken met die van je planimeter.

Je zult dan wel tot de ontdekking komen, dat het geen precisieinstrument is, maar het geeft je wellicht toch een goed inzicht in de werking.

fig. 10



Twee probleempjes°

De eigenwijze secondenwijzer

Figuur *a* geeft schematisch de wijzerplaat van mijn polshorloge weer. Het was me al vele malen opgevallen, dat de secondenwijzer de merkstrepen langs de rand sneed. Figuur *b* en *c* geven de situatie weer op tijdstippen die precies 1 seconde uit elkaar liggen.

Ik vond dit vreemd, omdat ik iets verwachtte zoals in figuur *d* en *e* getekend is.

De oplossing is heel eenvoudig, je vindt hem op pag. 141. Maar probeer eerst zelf eens te vinden hoe het zit, want als je de oplossing erbij ziet, ga je je misschien afvragen hoe iemand zo dom kan zijn om hier een probleem van te maken!

Alleen van links komende auto's verblinden!

Goed afgestelde autokoplampen hebben een vrij smalle lichtbundel, zodat tegenliggers elkaar niet verblinden. Nu is het vreemd, dat auto's die bij een bocht van links komen de tegemoetrijdende bestuurder wel even verblinden terwijl auto's die van rechts de bocht indraaien, dat niet doen.

In figuur *f* zijn beide situaties in één schetsje verenigd. Wat ik hierboven signaleerde is beslist waar en vele automobilisten zullen dat wel eens opgemerkt hebben. Toch duidt het schetsje op een volkomen symmetrische situatie, zodat daaruit niet duidelijk wordt dat auto *A* de autobestuurder in *C* eerder zou verblinden dan auto *B*.

De oplossing vind je op pag. 141.

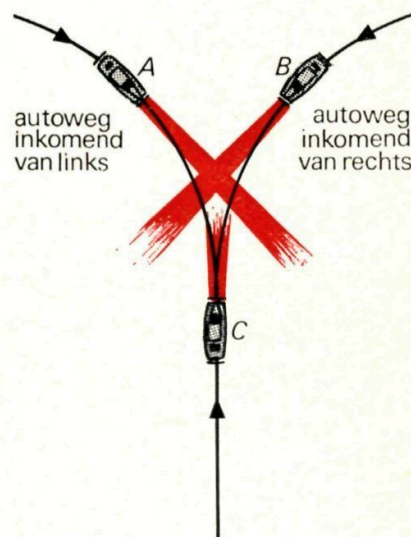
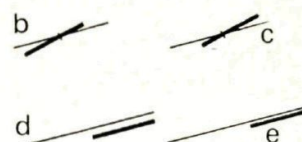
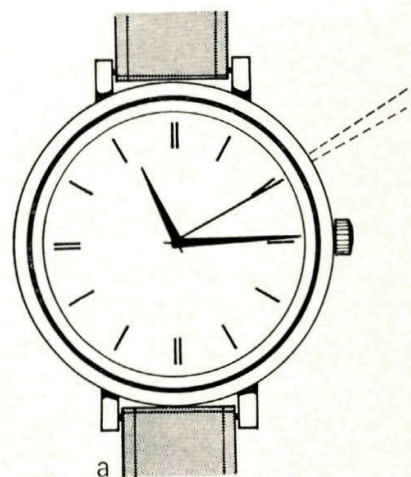


fig. f

Montage van onmogelijke figuren°

Onmogelijke figuren zijn 'schijnbouwsels'. Het zijn tekeningen op een vlak die door ons geïnterpreteerd worden als ruimtelijke figuren. Dat is op zichzelf niets bijzonders. Dit doet elke tekening van een ruimtelijke figuur. Het bijzondere van onmogelijke figuren is, dat ze een ruimtelijke figuur suggereren, die niet kan bestaan. Zodra iemand aan de hand van een onmogelijke figuur een drie-dimensionaal bouwsel wil maken, merkt hij, dat twee of meer stukken van het bouwsel, die op de tekening één doorlopend geheel vormen, nu los in de ruimte komen te hangen.

In vorige jaargangen van Pythagoras zijn heel wat van zulke figuren aan de orde geweest en een samenvatting ervan vind je in Pythagoras Festival* pag. 133 t/m 150. Fons van der Linden is nog een stap verder gegaan en heeft bouwdozen gemaakt waarmee een groot aantal onmogelijke (en ook mogelijke!) figuren in elkaar gezet kunnen worden. Denk hierbij niet aan meccano, sio, lego, of andere bouwdoosystemen, want daarmee zijn alleen bestaانبare ruimtelijke figuren in elkaar te zetten. Zijn bouwdozen bestaan natuurlijk uit vlakke elementen; ze zien eruit als legpuzzels. Voor een bespreking in dit artikel hebben we 3 puzzels uit het vele materiaal gekozen. Wie er meer van wil weten kan contact opnemen met de uitvinder.**

We beginnen met de onmogelijke driebalk, figuur 11 (een uitvinding van Penrose, die door M.C. Escher in zijn prent WATERVAL is gebruikt).

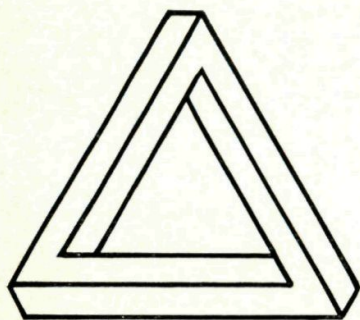


fig. 11

* Pythagoras Festival, uitg. Wolters-Noordhoff

** Fons van der Linden, Baaneind, 12, Enschoot N.B.

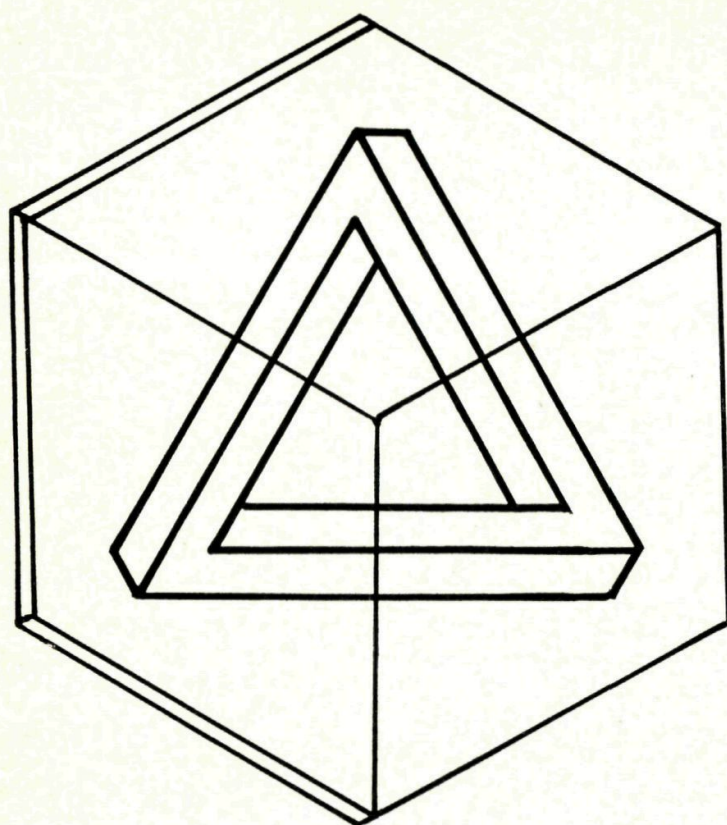


fig. 12

Door de middelloodlijnen van de binnenste gelijkzijdige driehoek te trekken verdelen we de driebalk in drie gelijke delen. Op die manier ontstaan drie congruente ruiten (figuur 12). We kunnen de ruiten nu van plaats verwisselen. Maar omdat het prentje op elke ruit hetzelfde is, ontstaat steeds dezelfde onmogelijke driebalk. Wel mooi, maar saai.

Om variaties mogelijk te maken, moeten we legpuzzelstukjes met andere afbeeldingen erop zien te krijgen. Er zijn vier aanzichten van twee loodrecht op elkaar staande balken mogelijk; we noemen ze *a*, *b*, *c* en *d* (zie figuur 13); *c* en *d* zijn elkaars spiegelbeeld.

De onmogelijke driebalk van figuur 12 was een combinatie: *ddd*; en die van figuur 11: *ccc*. Hoeveel verschillende figuren kunnen we met deze vier verschillende legpuzzelstukken samenstellen?

De basishoek links kan op 4 manieren gekozen worden; bij elk van deze keuzen kan ook de basishoek rechts op 4 manieren gekozen worden. De basishoeken kunnen dus op 4×4 manieren gekozen worden. Tenslotte zijn er voor de tophoek ook nog 4 mogelijkheden die met alle vorige combinaties gebruikt kunnen worden. In het geheel zijn er dus $4^3 = 64$ mogelijkheden.

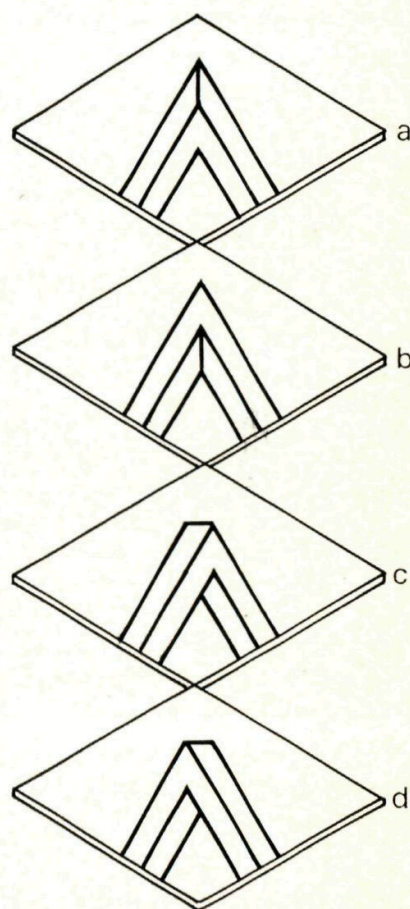


fig. 13

Figuur 14 geeft een aantal van deze mogelijkheden. Sommige zien er uit als normale ruimtelijke figuren, andere zijn onmogelijke figuren.

Als je de legpuzzel zelf wilt maken, dan heb je van elke vorm drie exemplaren nodig (drie *dezelfde* figuren kunnen namelijk in één bouwset voorkomen). In het geheel zijn dus 12 ruitjes nodig. Je kunt dit aantal verminderen tot 6, als je de voor- en de achterzijde van een tekening voorziet.

Van de 64 mogelijkheden bij de schikking van de driehoeken blijven er 24 over als de gedraaide herhalingen worden uitgeschakeld. Bij deze 24 komen 8 paren symmetrische figuren voor.

In figuur 14 worden de bovenste twee rijen gevormd door de driehoeken die géén symmetrische pendant hebben (ze zijn zelf symmetrisch).

De onderste twee rijen zijn de driehoeken waarvan in een volledige serie van 24 ook de symmetrische vormen opgenomen moeten worden. De 16 driehoeken van figuur 14 zijn dus alle wezenlijk verschillend.

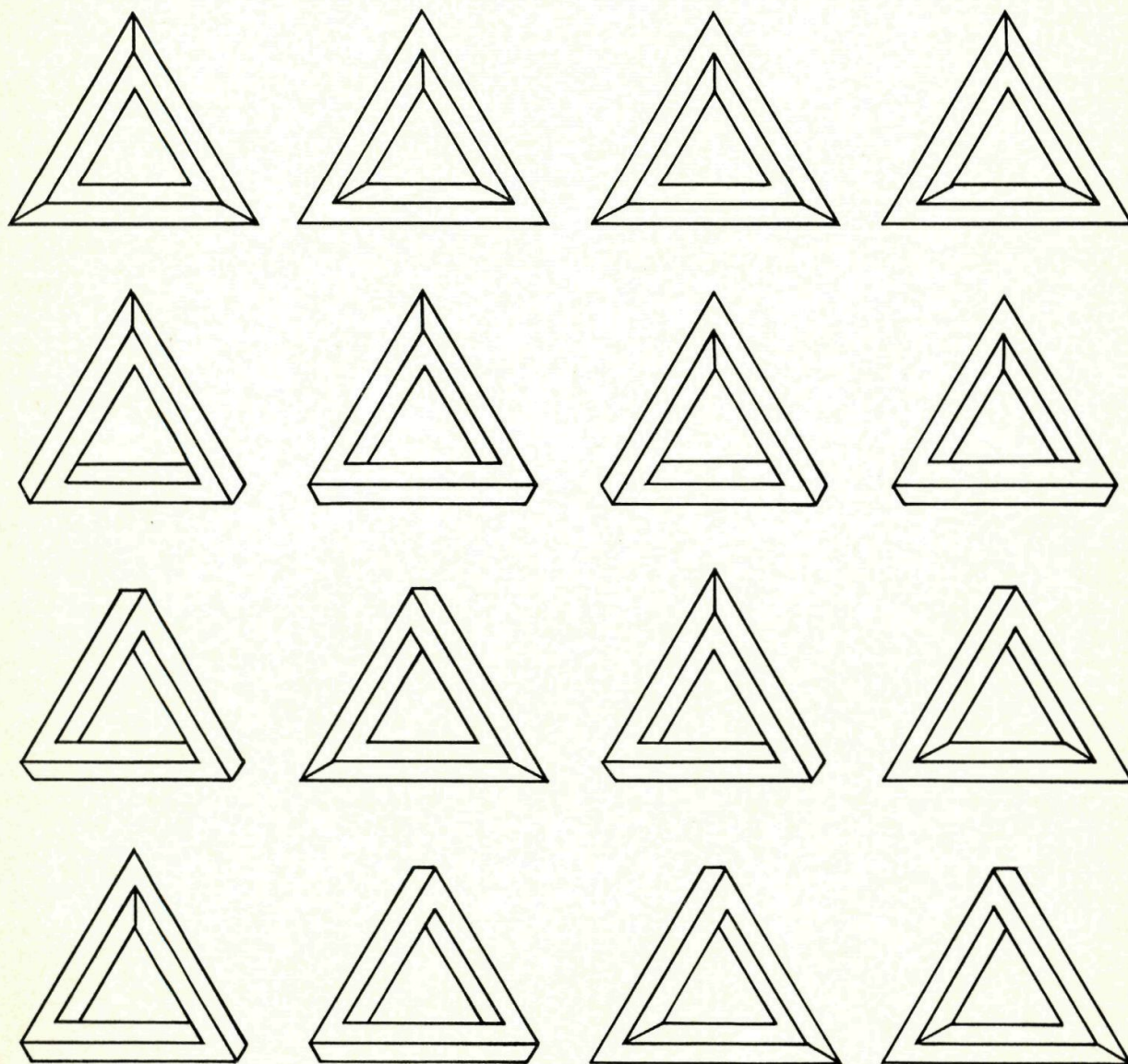


fig. 14

De tweede bouwdoos is al veel ingewikkelder. Ze stelt je in staat allerlei kubussen en kuboïde vormen samen te stellen.

Onder een kuboïde vorm verstaan we de onmogelijke figuur, die lijkt op een kubus, maar waarbij de hoekpunten op een onmogelijke wijze met elkaar verbonden zijn. De populaire naam voor een kubus, waarvan alleen de ribben aanwezig zijn is: kratje.

De kuboïde vormen hebben de naam *gekke kratjes* gekregen.

Figuur 15 laat een normaal kratje zien. Het heeft 8 hoekpunten. In elk hoekpunt komen precies drie balken bijeen en ze staan loodrecht op elkaar.

Elk van die hoekpunten kan op 2 manieren getekend worden, nl. van binnen gezien en van buiten gezien. Elk hoekpunt moet dus in twee vormen voorkomen. We gaan nu de figuur (zie figuur 15) zo in 8 stukken snijden, dat op elk stuk één hoekpunt voorkomt. De stukken waarop dezelfde (binnen- en buiten)hoek voorkomen moeten dezelfde vorm hebben en boven- en onderhelft moeten onderling verwisselbaar zijn. Zo ontstaan langs de rand zes stukken en twee in het centrum. Om de variatiemogelijkheden nog groter te maken, snijden we de twee stukken in het centrum nog eens in tweeën, zodat de kruisende balken gescheiden worden van de hoekpunten.

Elk kratje is nu samengesteld uit 6 grote en 4 kleine stukjes.

Wil je alle 4096 variaties van mogelijke en onmogelijke kratjes kunnen maken, dan heb je 20 legpuzzelstukjes tweemaal nodig.

In de kratjes van figuur 15 en figuur 16 zijn ze allemaal gebruikt.

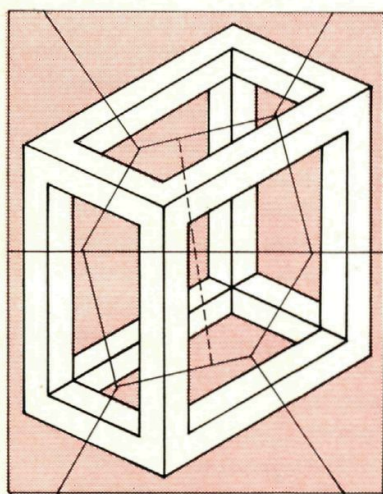


fig. 15

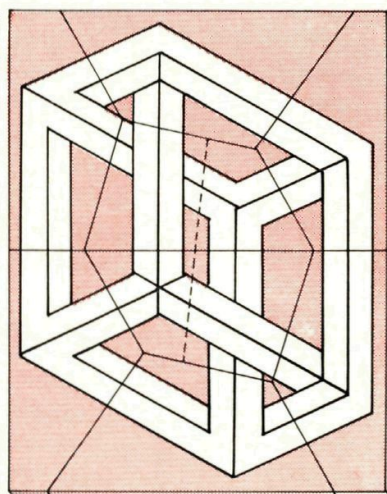
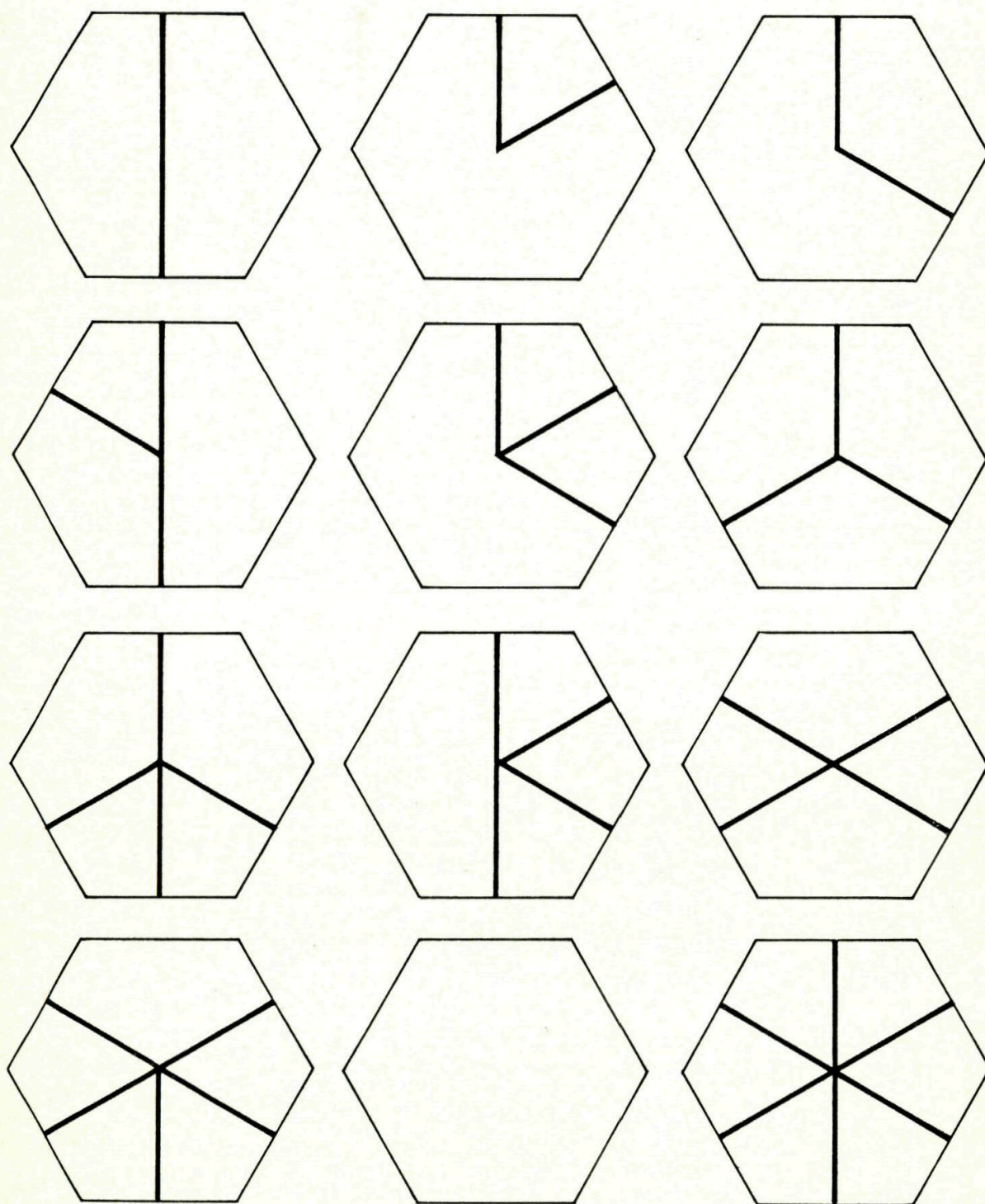


fig. 16

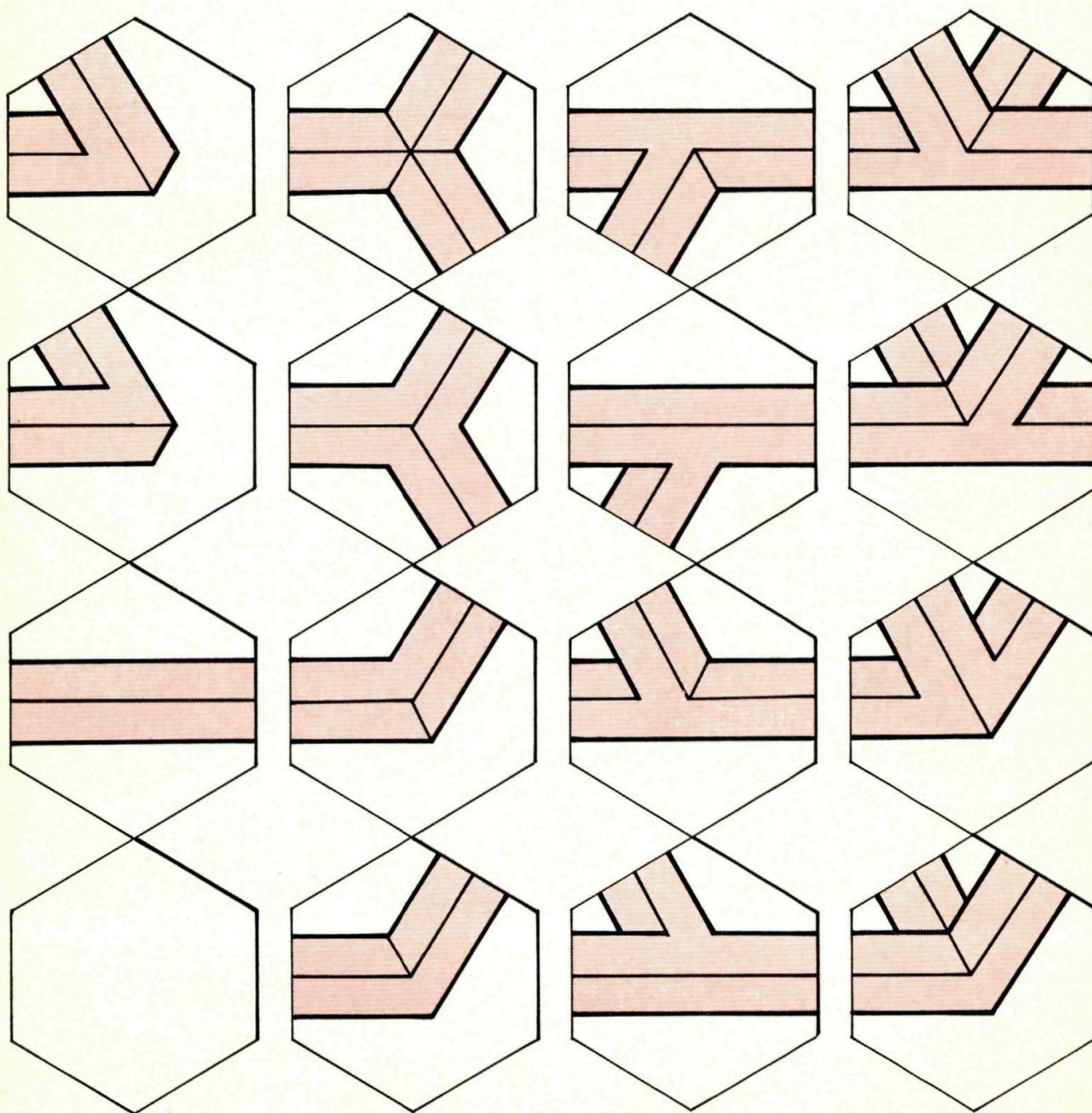
Het kratje werd voor Fons van der Linden aanleiding tot het bedenken van een bouwdoos voor bijzonder ingewikkelde ruimtelijke of quasi-ruimtelijke structuren. Hij ging daarbij uit van legpuzzelstukken met de vorm van een regelmatige zeshoek. In elke zeshoek zijn balken getekend die aansluitpunten op twee of meer zijden hebben. In figuur 17 is dat schematisch weergegeven. Van elk der situaties in deze figuur zijn meerdere balkvormen mogelijk.

fig. 17



Figuur 18 geeft het hele arsenaal. Van elk der getekende kaartjes kun je een onbegrensd aantal gebruiken. Maar als je er mee wilt spelen, begin dan met van elk kaartje 3 exemplaren te maken. Een van de abstracte schilderijen die je op die manier kunt samenstellen is in figuur 19 weergegeven.

fig. 18



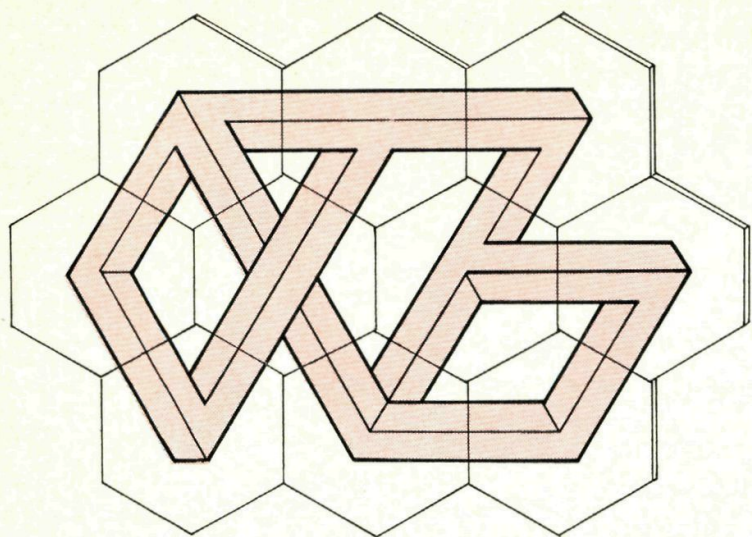
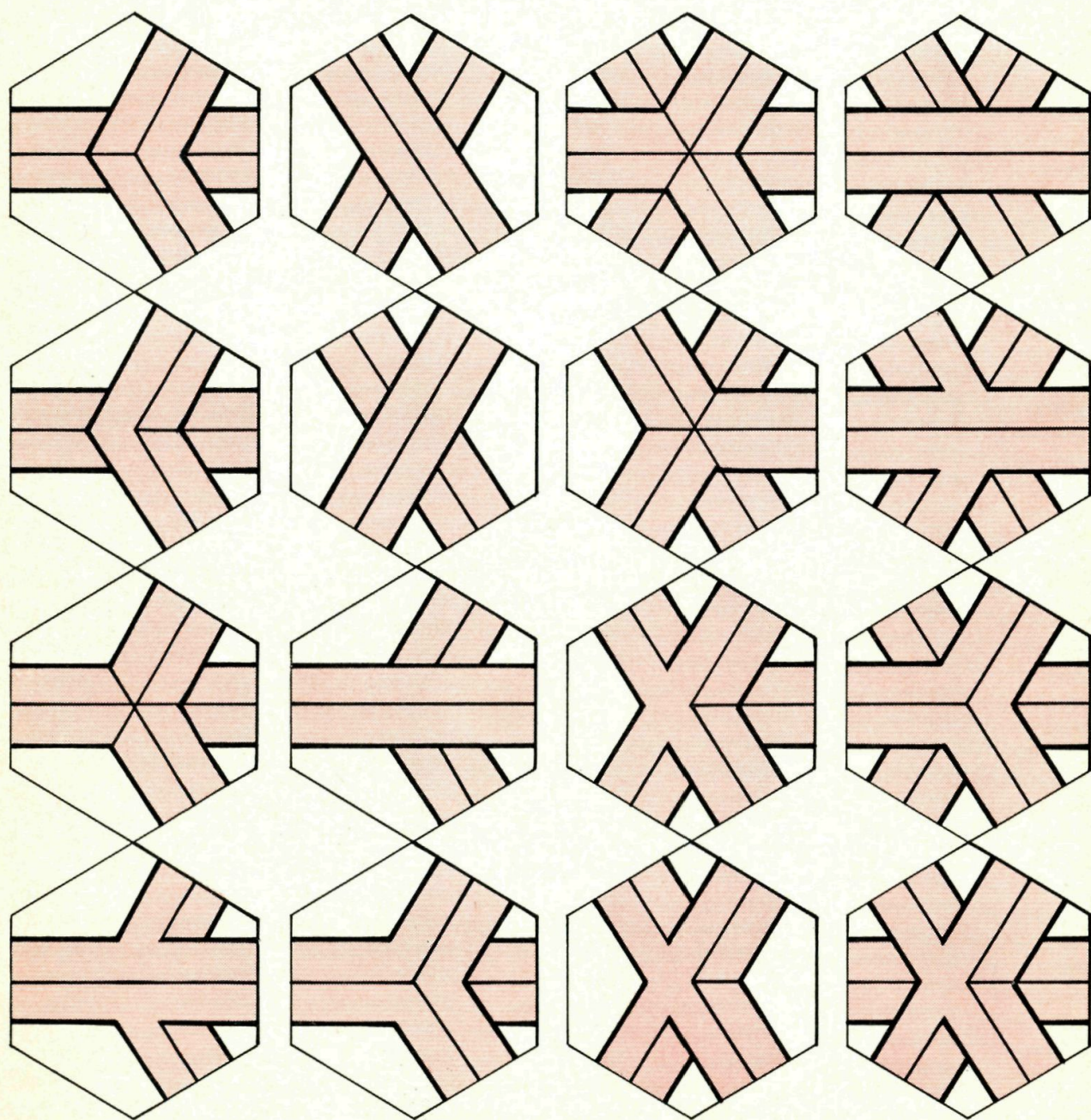


fig. 19



Spelen met een vierkant°

De beeldhouwer Bruno Munari schreef een boekje: 'de ontdekking van het vierkant', waarin hij laat zien tot welke wonderlijke vormen we kunnen komen als we uitgaan van het vierkant. We reproduceren hier enige figuren uit dit boekje en geven er enig commentaar bij.

In de natuur zien we vierkanten als zijvlakken van een aantal kristallen. Bekijk keukenzout maar eens onder de loupe! De hier afgebeelde (fig. 20) fluorietkristallen, zijn met elkaar vergroeid maar de vierkanten zijn nog duidelijk zichtbaar.

Als we een tetraëder (regelmatig viervlak) op een bepaalde manier doorsnijden (figuur 21) dan ontstaan twee gelijke delen en het snijvlak is een vierkant.

De Japanse slaapmat (tatami) is twee maal zo lang als breed en we kunnen hem opgebouwd denken uit twee vierkanten (figuur 22). De traditionele Japanse huizen zijn helemaal op deze tatami-formule gebouwd, zodat je op de vloer altijd een aantal van deze matten kunt leggen, die de vloer geheel bedekken. De figuur geeft daarvan enige voorbeelden.



fig. 20

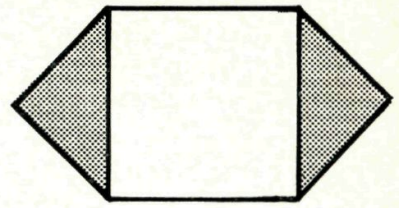
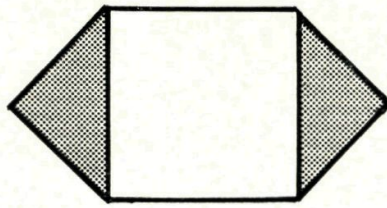
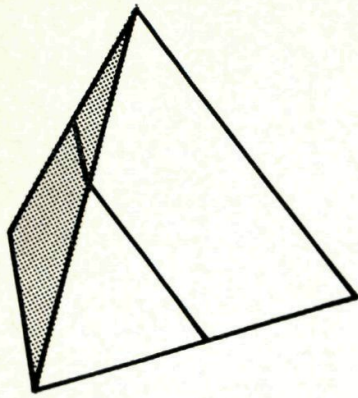


fig. 21

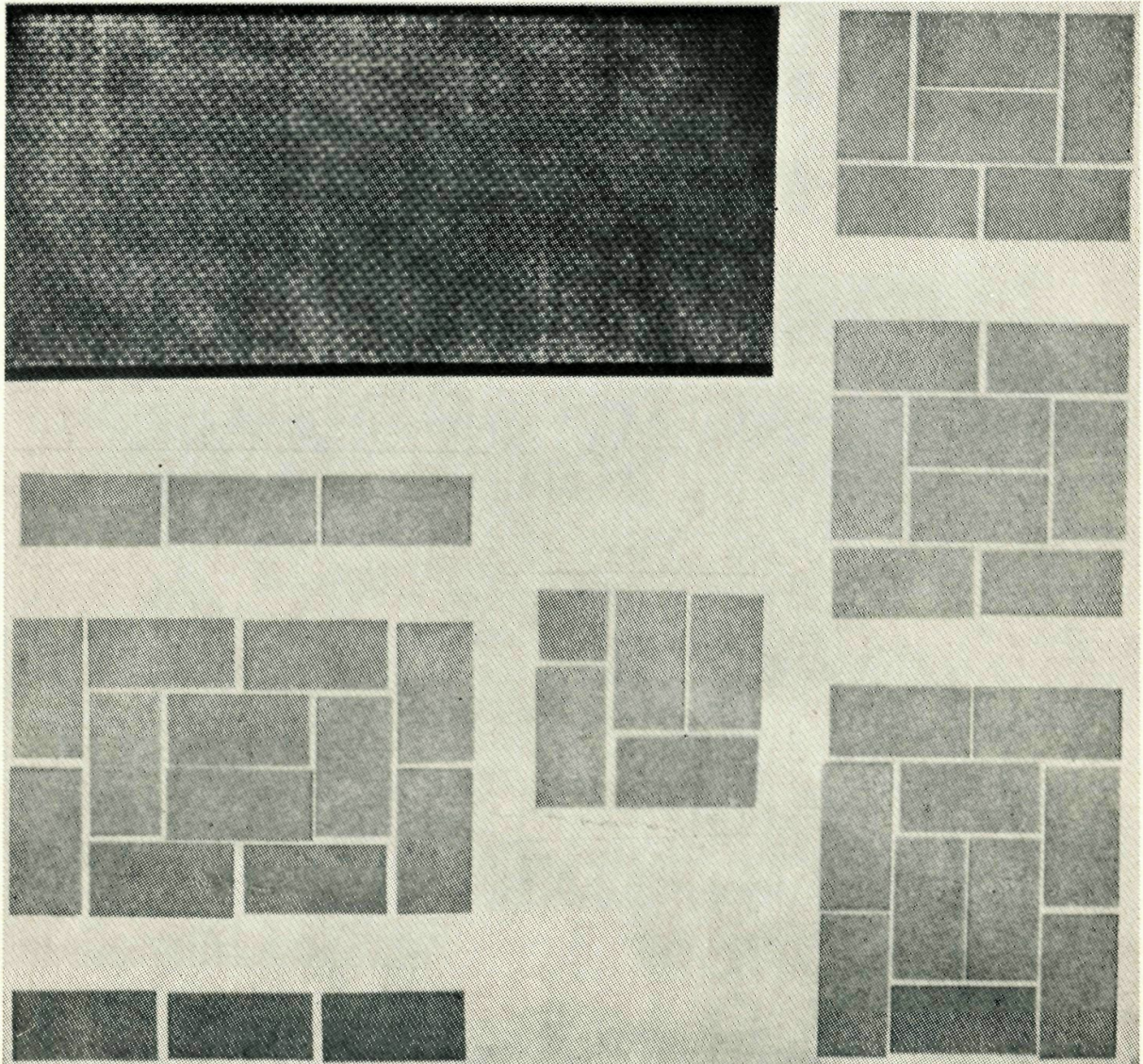


fig. 22

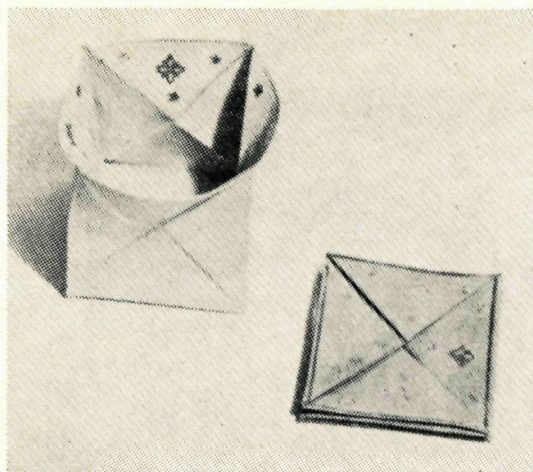


fig. 23

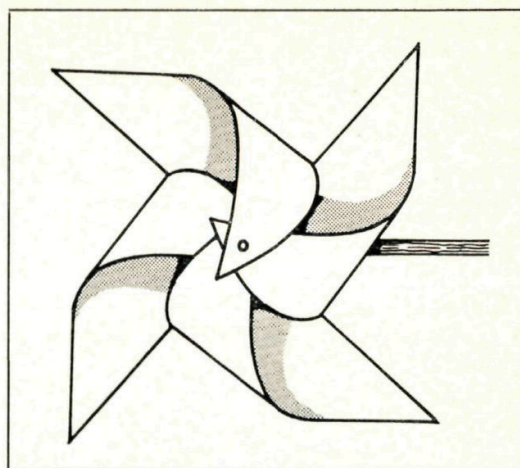


fig. 25

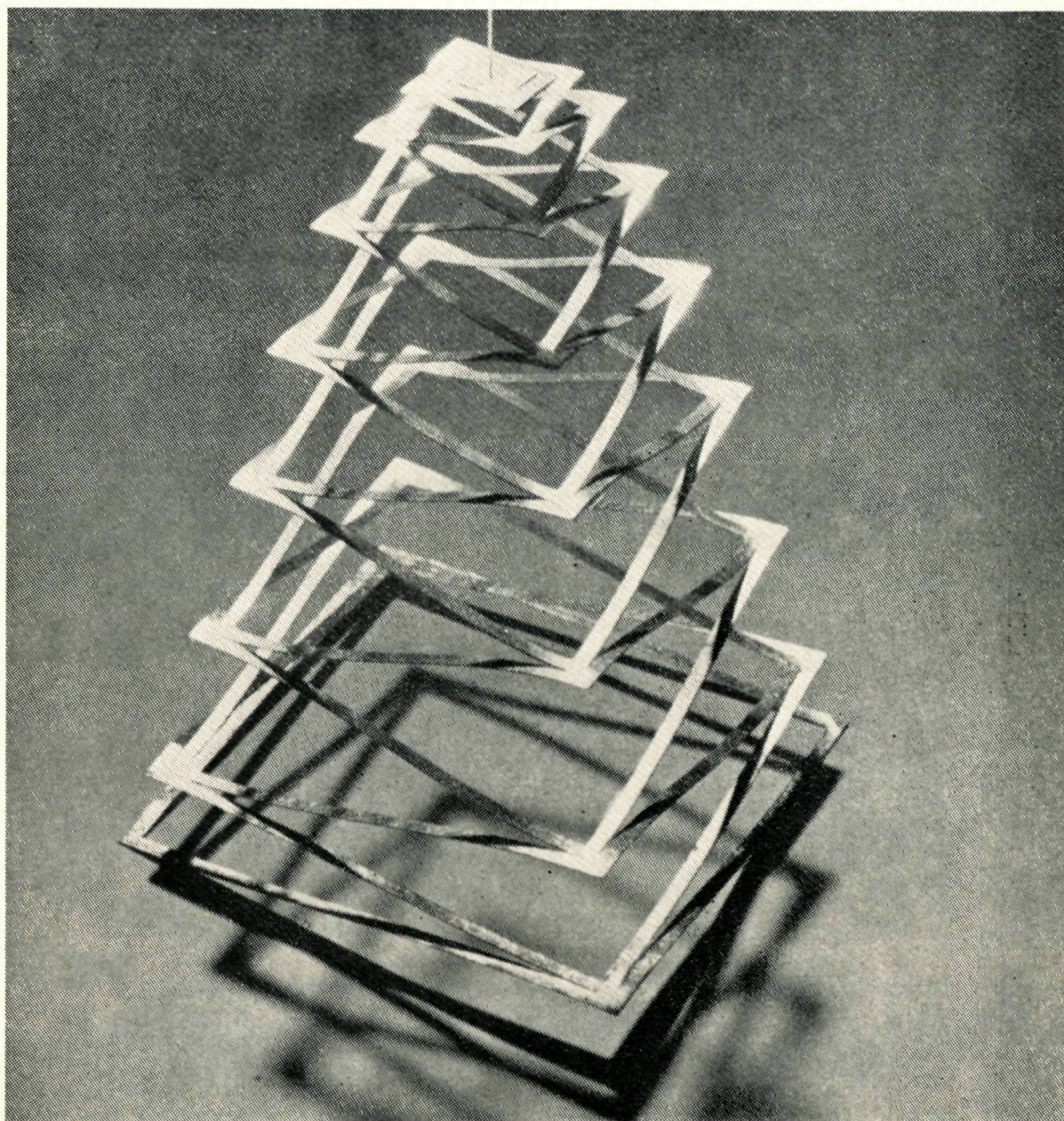


fig. 24

Een bijzonder aardige vondst is het venetiaanse beursje (figuur 23), dat je dicht kunt doen, door de opstaande wanden langs de diagonalen te vouwen. Het is gemakkelijk van papier of stijf linnen na te maken.

De feestelijke pyramide van figuur 24 is opgebouwd uit een groot aantal steeds kleinere vierkanten.

Het hele geval was oorspronkelijk slechts één vierkant stuk papier. Het is gemakkelijk te maken evenals het bekende windmolentje van figuur 25, dat ook geknipt is uit één vierkant stuk papier.

Met de moderne dakconstructies, waarvan figuur 26 het schema geeft, lijken we al ver van het thema vierkant verwijderd.

Toch bestaan ze elk uit vier vierkanten die alle op dezelfde manier een beetje vervormd zijn. Alleen de wijze waarop ze aan elkaar verbonden zijn, verschilt van dak tot dak. Zulke constructies lenen zich uitstekend voor betonbouw en ze worden dan ook in de moderne architectuur veel toegepast.

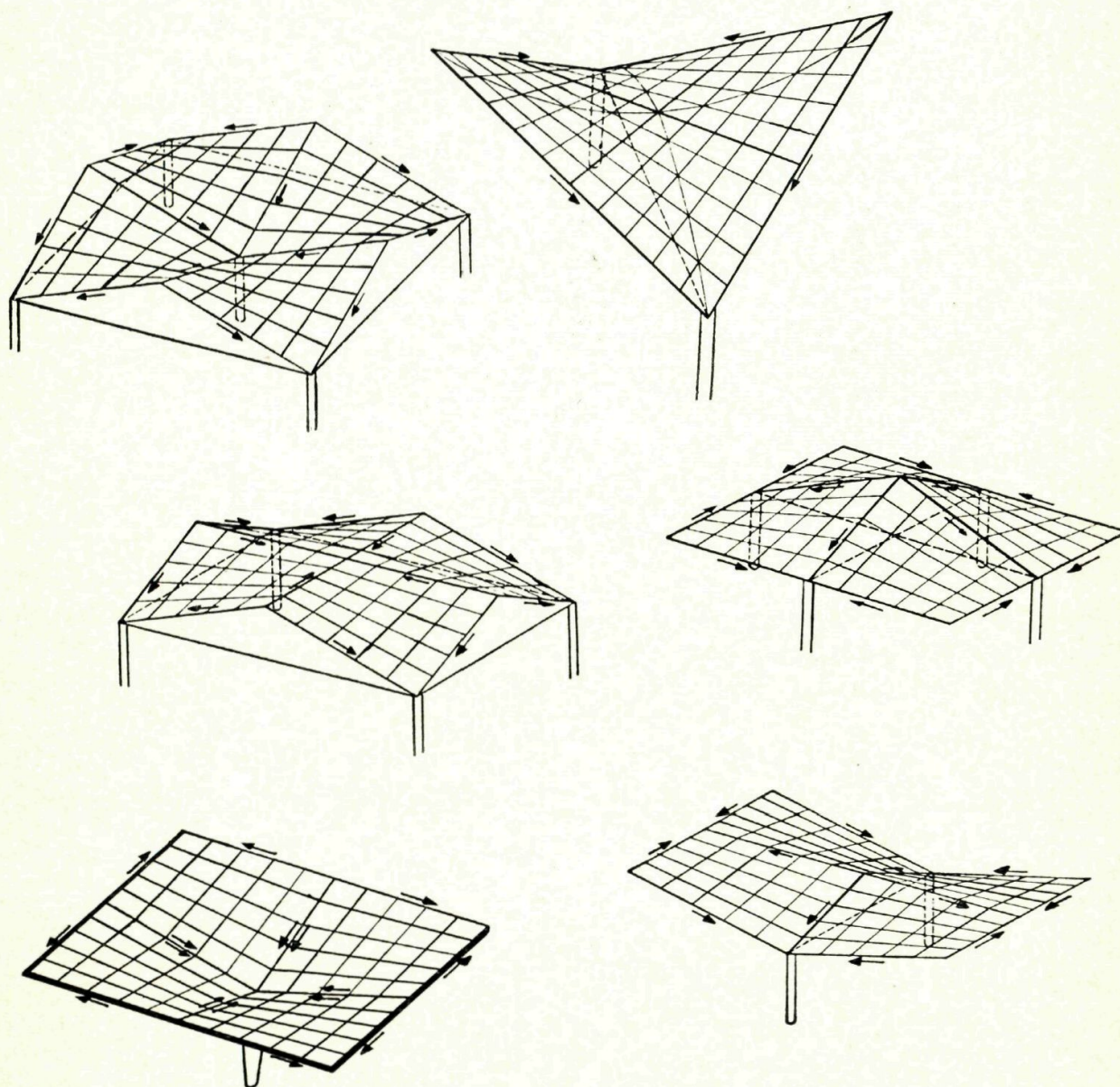


fig. 26

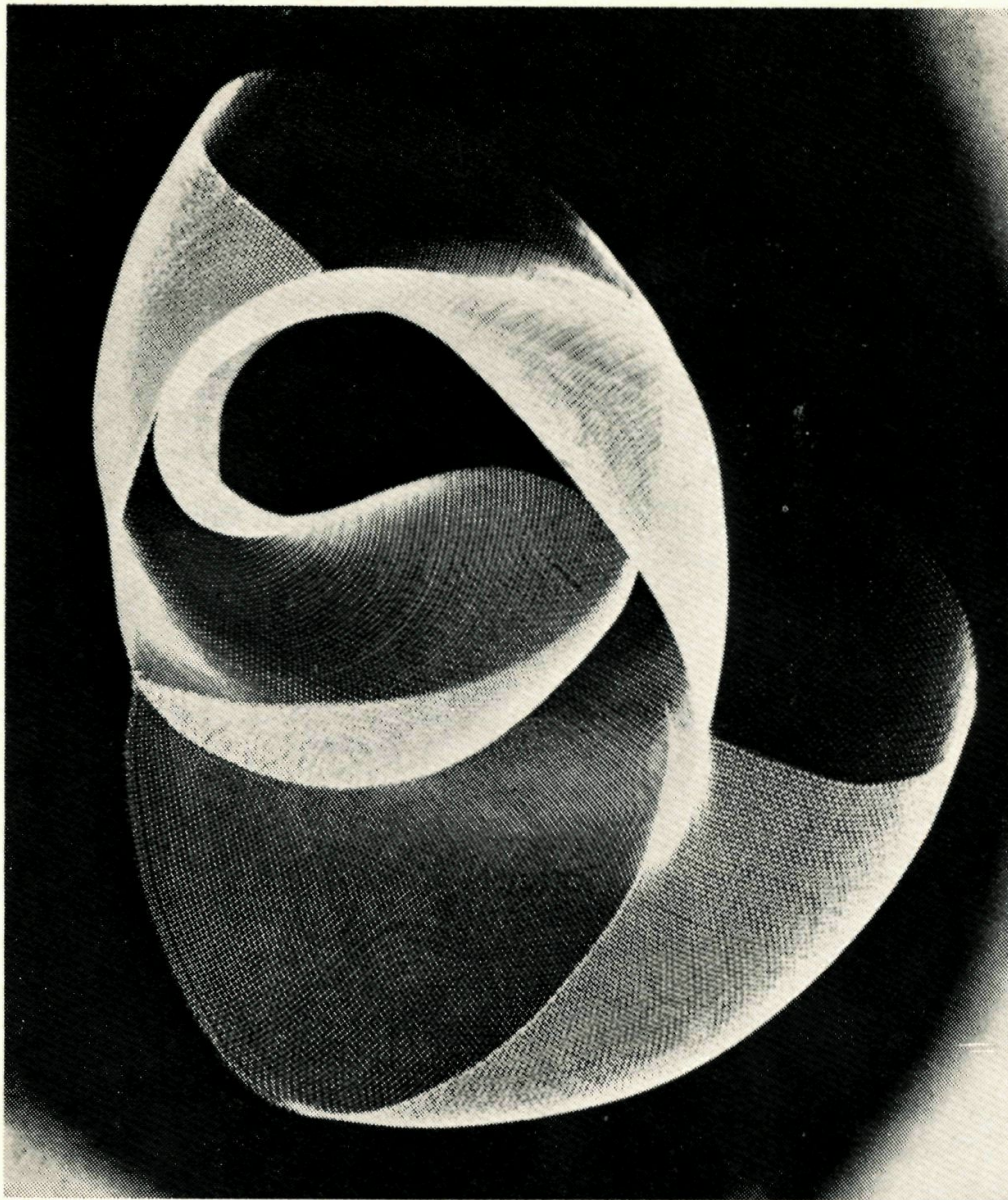


fig. 27

Tot slot (figuur 27) een object door Munari zelf ontworpen. Het lijkt een volkomen vrije ruimtelijke vorm van gevlochten ijzerdraad. Toch is het ontstaan uit een vierkant. Het constructievoorschrift vind je in figuur 28a, b, c en d, waarin de verschillende fasen zijn geschetst die van het vierkant tot de ruimtelijke vorm leiden. Als je deze vorm zelf wilt maken, moet je zorgen, dat het uitgangsvierkant niet te klein is (als je horretjesgaas bij een ijzerhandel haalt, neem dan minstens een stuk van 50×50 cm), anders lukt het niet om de beide punten C aan elkaar vast te krijgen.

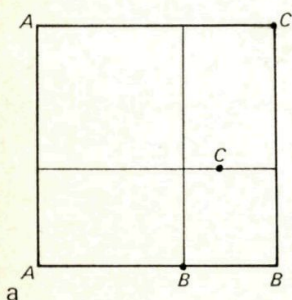


fig. 28a

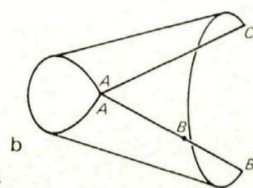


fig. 28b

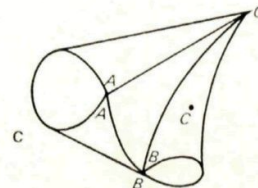


fig. 28c

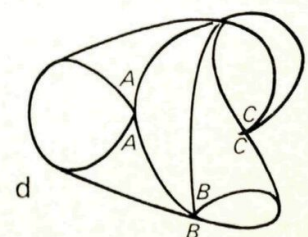


fig. 28d

Oplossing van de twee probleempjes

De eigenwijze secondenwijzer

Zolang je het probleem tweedimensionaal blijft zien is het onoplosbaar. De secondenwijzer ligt echter ca $\frac{3}{4}$ mm boven de wijzerplaat, zoals in figuur 29a overdreven getekend is. In deze stand is de secondenwijzer precies evenwijdig met het tijdstreepje en geeft het ook die tijd aan.

Enige seconden later is de stand zoals in figuur 29b is getekend en het is zonder meer duidelijk waarom nu streepje en secondenwijzer elkaar schijnen te snijden.

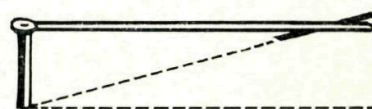
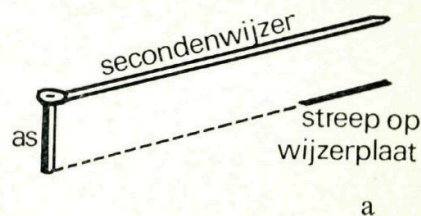


fig. 29b

Auto's die van links komen verblinden

Als we hier de werkelijke toestand in beeld brengen, gaat de symmetrie geheel verloren. In figuur 30a bevind ik me op de as van de rechterweghelft in P . De lichtbundel van een tegemoetkomende auto in A (getekend als een raaklijn aan de kromming van de wegas) is op mij gericht en verblindt mij.

Als de tegenligger in B aangekomen is, treft de lichtbundel mijn wegas in Q en verblindt me niet meer.

Omdat de lichtbundels enige breedte hebben, duurt de verblinding iets langer dan de figuur suggereert.

In figuur 30b is de situatie getekend voor auto's die mij van rechts tegemoetkomen. Hier treedt de verblinding klaarblijkelijk niet op.

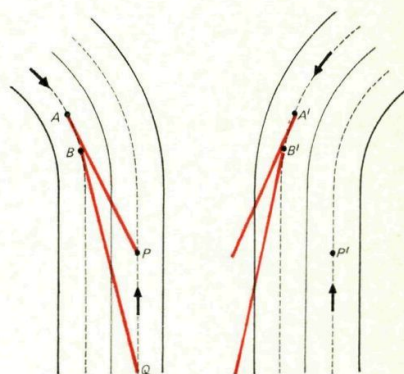


fig. 30a en 30b

Vande redactie

Ook deze jaargang heeft de redactie weer veel prettige reacties van de lezers mogen ontvangen. Hartelijk dank daarvoor, prettige vakantie en tot de volgende jaargang!

De lootprijs voor de Denkertjes uit nummer 3 is gewonnen door R. van Damme, Breda en voor nummer 4 door J. Hendriks, Boksmeer.

G. Roelvink, Amersfoort (355)
J. v.d. Rij, Rhenen (331)
H. Bernsen, Oss (328)
A. Verschoren, Ommel-Asten (324)

H. Zantema, Kimsverd (311)
P. de Munck, Antwerpen (304)
R. Bisseling, Ulft (303)

Oplossingen van de denkertjes uit nummer 3

21 12 keer

22 1 keer horizontaal, waardoor twee congruente cilinders ontstaan.

Nog 4 keer zoals de figuur aangeeft.

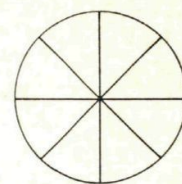


fig. 31

23 $10 - 1 = 9$

$10^2 - 1^2 = 99$

$60^2 - 51^2 = 999$

$560^2 - 551^2 = 9999$

$5560^2 - 5551^2 = 99999$

24 Figuur 2 stelt het schaakbord voor. Op elk veld geeft het getal aan, hoeveel zetten men kan doen vanuit dat veld. Totaal: $4.2 + 8.3 + 20.4 + 16.6 + 16.8 = 336$.

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

fig. 32

25 W.G.R.B.Z. Neem de witte als eerste kraal. De overige vier kunnen gerangschikt worden op $4! = 24$ manieren. Aan de armband kunnen de kralen in twee richtingen geteld worden. Er zijn 12 verschillende mogelijkheden.

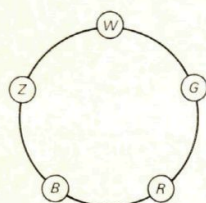


fig. 33

26 Neem weer een der kralen als eerste. De overige $(n - 1)$ kan men op $(n - 1)!$ manieren rangschikken. Ook weer delen door 2. Er zijn $\frac{(n - 1)!}{2}$ mogelijkheden.

27 Figuur 37 laat de constructie zien. De volgorde is:

- Pas af een lijnstukje $AP_1 = BS = x$
- Trek cirkel (P_1, x)
- Door S rechte $l \parallel AB$. Dat geeft punt Q_1
- Parallellogram BRQ_1S
- In vierhoek AP_1Q_1R is $AP_1 = P_1Q_1 = Q_1R = x$
- Vermenigvuldig de vierhoek met faktor $\frac{AQ}{AQ_1}$
- $AP = PQ = QB$

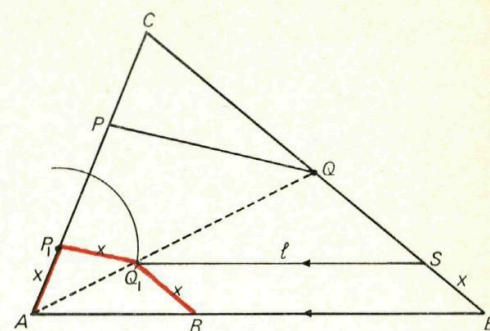


fig. 34

28 Stel het getal van drie cijfers $a \ b \ c$. Hierin is $a > c$.

Volgens de operatie komt er:

a	b	c	
c	b	a	
$a - 1 - c$	9	$10 + c - a$	—
$10 + c - a$	9	$a - 1 - c$	+
10	8	9	

De uitkomst is 1089, onafhankelijk van a, b en c ($a > c$).

29 De werkelijke rijtijd is 80 minuten. De rijtijd over de afstand van A naar C is $\frac{4}{9} \times 80 = 35\frac{5}{9}$.

Rijtijd over de afstand van C naar B is $\frac{5}{9} \times 80 = 44\frac{4}{9}$.

De bus uit B komt $8\frac{8}{9}$ minuut later in C aan dan de bus uit A . Deze laatste wacht nog $1\frac{1}{9}$ minuut voor hij verder rijdt. De bussen ontmoeten elkaar dus in C .

30 a Stel de leeftijd van de vader $\overline{xy}$. Die van de dochter is dan $\overline{yx}$. Op de verjaardag is de vader $(10x + y)$ jaar en de dochter $(10y + x)$ jaar.

Verschil $10x + y - 10y - x = 9x - 9y = 9(x - y)$. Dat is een negenvoud.

b De bijzondere cijfervolgorde komt slechts een keer voor, als $x - y$ zo groot mogelijk is. Hier dus $x - y = 9$. Vader is 90 jaar en de dochter is 09 jaar.

Oplossingen van de Denkertjes uit nummer 4

31 Snijdt de cirkel met middellijn PQ de gegeven cirkel C in het punt S , dan is de driehoek bepaald door S , het snijpunt van SP en C en het snijpunt van SQ en C een oplossing. Is d de afstand van het middelpunt van cirkel (C, r) en het midden van lijnstuk PQ dan is het aantal oplossingen 2, 1 resp. 0 als PQ groter, gelijk, resp. kleiner is dan $2(r - d)$.

32 Is $g \in \{1, 2, 3, 4\}$ en $k \in \mathbb{N}$ dan is g^{4k} een vijfvoud plus 1. Voor n is te schrijven $4k + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$$s = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n = 1 + 2^{4k} \cdot 2^r + 3^{4k} \cdot 3^r + 4^{4k} \cdot 4^r =$$

$$= 1 + (5k_1 + 1)2^r + (5k_2 + 1)3^r + (5k_3 + 1)4^r = 5m + R,$$

hierbij is $m \in \mathbb{N}$ en $R = 1 + 2^r + 3^r + 4^r$.

Conclusie: s is alleen dan deelbaar door 5 als R deelbaar is door 5. Is n deelbaar door 4, dan geldt $r = 0$ en $R = 4$. Is n niet deelbaar door 4, dan is $r = 1, 2$ of 3 en $R = 10, 30$, resp. 100 .

33 Er geldt $0 \leq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$.

Dus $0 \leq 1 + 2(ab + bc + ca)$ of $ab + bc + ca \geq -\frac{1}{2}$.

Voorts $0 \leq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$.

Dus $0 \leq 2 - 2(ab + bc + ca)$ of $ab + bc + ca \leq 1$.

34 8^n .

35 (zie fig. 35) De oplossingsverzameling is in rood aangegeven.

III is een deel van de parabool met OA als richtlijn en B als brandpunt.

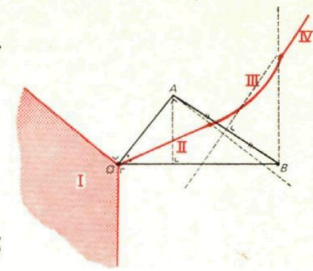


fig. 35

36 We proberen een verdeling van V waarbij *niet* twee getallen met hun verschil in één verzameling voorkomen. Het getal 2 in A dwingt 1 en 4 in B , nu moet 3 in A worden geplaatst. Voor 5 is dan geen plaats meer in A wegens $5 - 3 = 2$ maar ook geen plaats meer in B wegens $5 - 4 = 1$.

37 Aantal posities

$$18(64 - 22) + 22(64 - 24) + 12(64 - 26) + 4(64 - 28) = 2576.$$

38 Het aantal lagen in een rechthoekige stapel is ten hoogste gelijk aan het aantal sinaasappels op de kortste zijde van het grondvlak. De winkelier kiest dus voor een *vierkant* grondvlak. Zo'n stapel van n lagen is opgebouwd uit

$$k^2 + (k + 1)^2 + \dots + (k + n - 1)^2 = nk^2 + n(n - 1)k + \frac{1}{6}n(n - 1)(2n - 1)$$

sinaasappelen, de bovenlaag bestaat uit een vierkant van k^2 sinaasappelen. Bij gegeven n is dit aantal minimaal als $k = 1$.

Een driehoekige stapel van n lagen is opgebouwd uit

$$\frac{1}{2}l(l + 1) + \frac{1}{2}l(l + 1)(l + 2) + \dots + \frac{1}{2}l(l + n - 1)(l + n) =$$

$$\frac{1}{2}nl^2 + \frac{1}{2}n^2l + \frac{1}{6}n(n - 1)(n + 1)$$

sinaasappelen, de bovenlaag bestaat uit een gelijkzijdige driehoek van $1 + 2 + 3 + \dots + l = \frac{1}{2}l(l + 1)$ sinaasappelen.

Bij gegeven n is dit aantal minimaal als $l = 1$.

Voor de som s_n van beide aantallen geldt

$$s_n = n\{k^2 + (n - 1)k + \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{2}nl + \frac{1}{6}n(n - 1)\} = 4550.$$

Bij gegeven n is s_n minimaal voor $k = l = 1$ nl.: $\frac{1}{2}n(n + 1)^2$, de op één na kleinste waarde is $\frac{1}{2}n(n^2 + 3n + 4)$, bereikt als $k = 1$ en $l = 2$. Hieruit volgt $n < 20$; bovendien moet n een deler zijn van $9100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, de grootste deler kleiner dan 20 is 14; voor $n = 14$, $k = 6$ en $l = 10$ geldt:

$$s_{14} = 14(36 + 13 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 14 \cdot 13) = 4550.$$

Het gevraagde aantal lagen is dus 14.

39 Kies een rechthoekig coördinatenstelsel XOY zó dat de coördinaten van Zandhuizen $(0; 0)$ en die van Veenoord $(11, 2; 0)$ zijn. Het punt G waar de tramlijn de zand-veengrens snijdt heeft de coördinaten $(a; b)$ waarvoor geldt:

$$a^2 + b^2 = 25 \wedge (a - 11, 2)^2 + b^2 = (7, 8)^2, \text{ dus } a = 4 \wedge b = 3.$$

Voor de punten van de zand-veengrens geldt:

$$y - 3 = 1(x - 4) \text{ of } y = x - 1.$$

De kosten $K(x, x - 1)$ van de verbinding via het punt $(x; x - 1)$ van de zand-veengrens bedragen $10^6 \sqrt{x^2 + (x - 1)^2} + v \sqrt{(x - 11, 2)^2 + (x - 1)^2}$.

Hierin is v de kostprijs per strekkende kilometer in het veen. Voor $x = 4$ bereikt deze functie een minimumwaarde, dus $K'(4; 3) = 0$ ofwel

$$10^6 \cdot \frac{4 + 4 - 1}{5} + v \cdot \frac{4 - 11, 2 + 4 - 1}{7, 8} = 0$$

Hieruit volgt $v = 2, 6 \cdot 10^6$.

De aanlegkosten in het veen bedragen $f 2600$ per strekkende meter.

40 De kans op deelbaarheid door 11 is $5:63$ en dat is minder dan $1:11$. Ook de kans op deelbaarheid door 37 is eveneens kleiner dan $1:37$ nl. $1:40$.

De redactie bereikten geen verdere onderzoeken van inzenders.

Inhoud

Het meten van oppervlakten° 121

Twee probleempjes° 128

Montage van onmogelijke figuren° 129

Spelen met een vierkant° 136

Oplossing van de twee probleempjes° 141

Oplossingen van de denkertjes uit nummer 3 142

Oplossingen van de denkertjes uit nummer 4 143

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Amersfoort.
A. F. VAN TOOREN, Leusden-C.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, besteld via één der docenten, f 4,50 per jaargang. Voor anderen f 7,00. Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelten ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

