

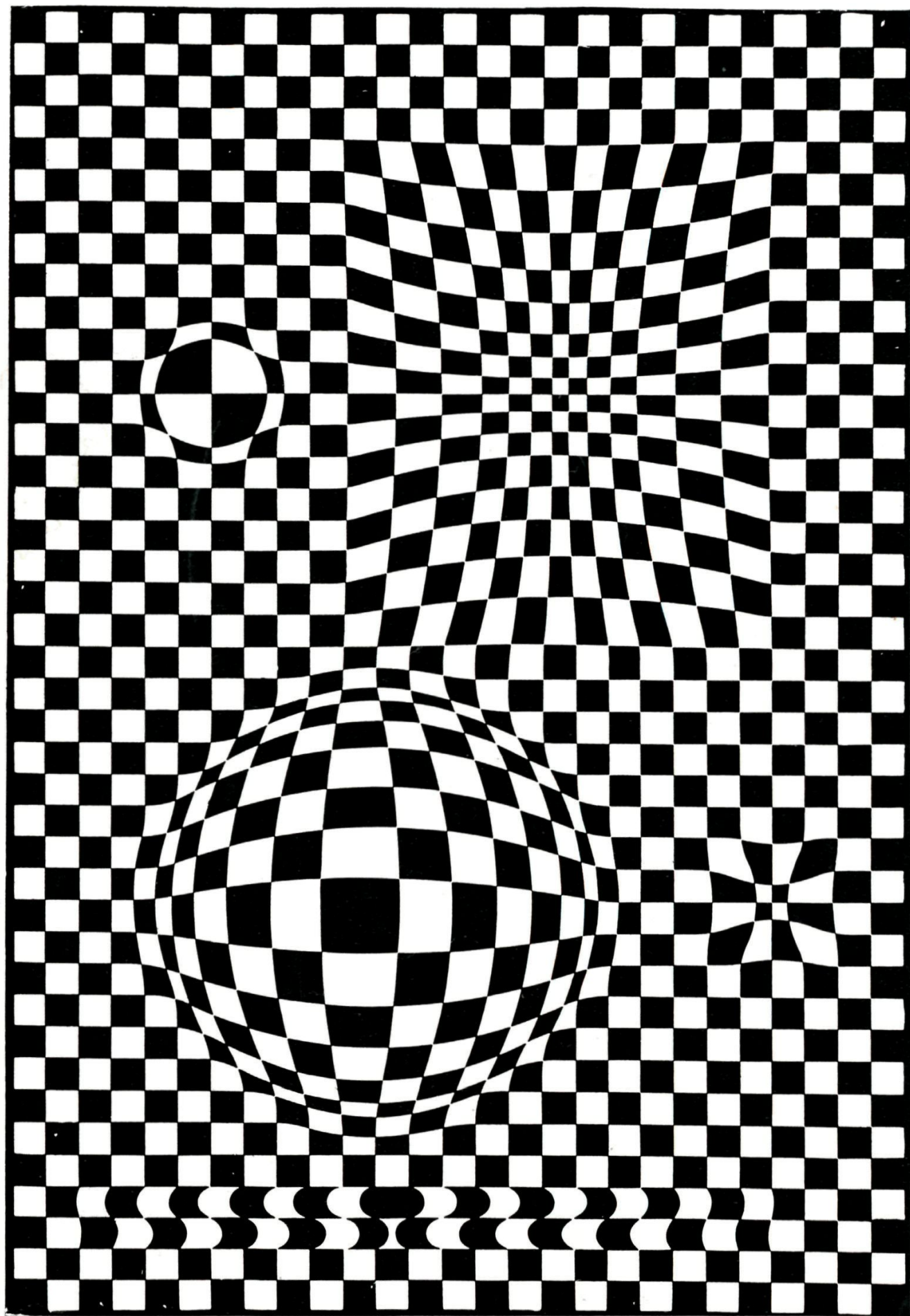
jaargang 12 1972/1973



Pythagoras

1

wiskundetijdschrift
voor jongeren



Pythagoras komt vierkant voor zijn veelzijdigheid uit!

Aan het begin van de nieuwe jaargang wenst de redactie alle lezers graag een succesvol schooljaar, studiejaar of wat anders van toepassing mag zijn.

Onder het motto dat hierboven zo kernachtig is weergegeven hopen we weer een afwisselende en aantrekkelijke jaargang te kunnen bieden, met voor elk wat wils.

Speciaal de nieuwe lezers willen we in het bijzonder begroeten en veel genoeg met het lezen van ons wiskundetijdschrift voor jongeren toewensen.

Je zult merken dat sommige artikelen gemakkelijk te volgen zijn, andere kosten wat meer moeite.

Om je hierop enigszins voor te bereiden vind je bij de titels een aanduiding van de graad van moeilijkheid: °, °° of °°. Hoe meer rondjes, hoe moeilijker. Maar laat je niet te gauw afschrikken, het kan tenslotte ook meevallen. Ook de puzzeltjes en probleempjes zijn niet alle even moeilijk. Maar dat zul je wel merken als je probeert ze op te lossen.

Niet alles zal je even sterk interesseren, maar hopelijk bevat wel elk nummer iets van je gading.

Denkertjes

In elk nummer vind je een aantal Denkertjes. De oplossingen van de Denkertjes uit de eerste vier nummers kun je inzenden naar het redactiesecretariaat:

Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Onder de goede inzenders wordt een boekenbon verloot. Je dingt al mee naar die boekenbon wanneer je één Denkertje goed hebt opgelost, het is dus niet nodig om alle oplossingen te vinden. Wel is nodig dat de oplossingen in duidelijk leesbaar handschrift geschreven zijn. (Typen mag ook.)

Behalve de oplossing dient ook de redenering, die tot die oplossing leidt, te worden vermeld.

We ontvangen je oplossingen graag op bloknotenvellen, met links bovenaan op elk blad je naam, adres, woonplaats, leeftijd, leerjaar en school.

De oplossingen van de Denkertjes in dit nummer inzenden voor 15 november 1972.

Oude nummers en jaargangen

Voor zover de voorraad strekt zijn oude nummers en oude jaargangen bij de uitgever verkrijgbaar, de prijs bedraagt f 1,50 per nummer en f 7,— per jaargang.

Uit de eerste acht jaargangen is een selectie samengesteld en in boekvorm verschenen onder de titel Pythagoras-festival. De prijs van deze uitgave, die verkrijgbaar is bij de uitgever en de boekhandel, bedraagt f 11,—.

Bijdragen

De redactie ontvangt graag bijdragen in de vorm van artikelen of Denkertjes ter beoordeling. Ook op- of aanmerkingen over de inhoud worden op prijs gesteld. Zoveel mogelijk wordt geprobeerd om alle briefschrijvers te antwoorden, helaas lukt dit niet in honderd procent van de gevallen.

Laat eens wat van je horen!

Het vierkant en de twaalfhoek

Hoe moet je een vierkant in stukken knippen, zodat je er een regelmatige twaalfhoek van kunt leggen?

De oplossing zie je in figuur 1. De getrokken cirkel is de omgeschreven cirkel van de regelmatige twaalfhoek. De stippellijnen zijn hulplijnen bij het construeren van de verdeling.

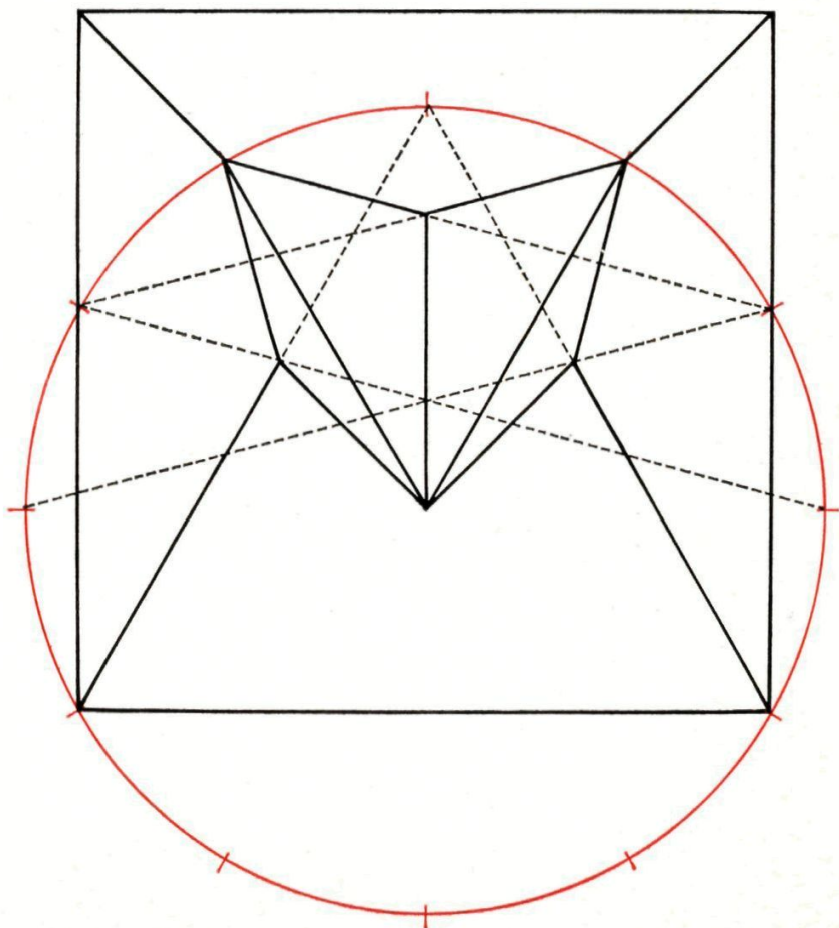


Fig. 1

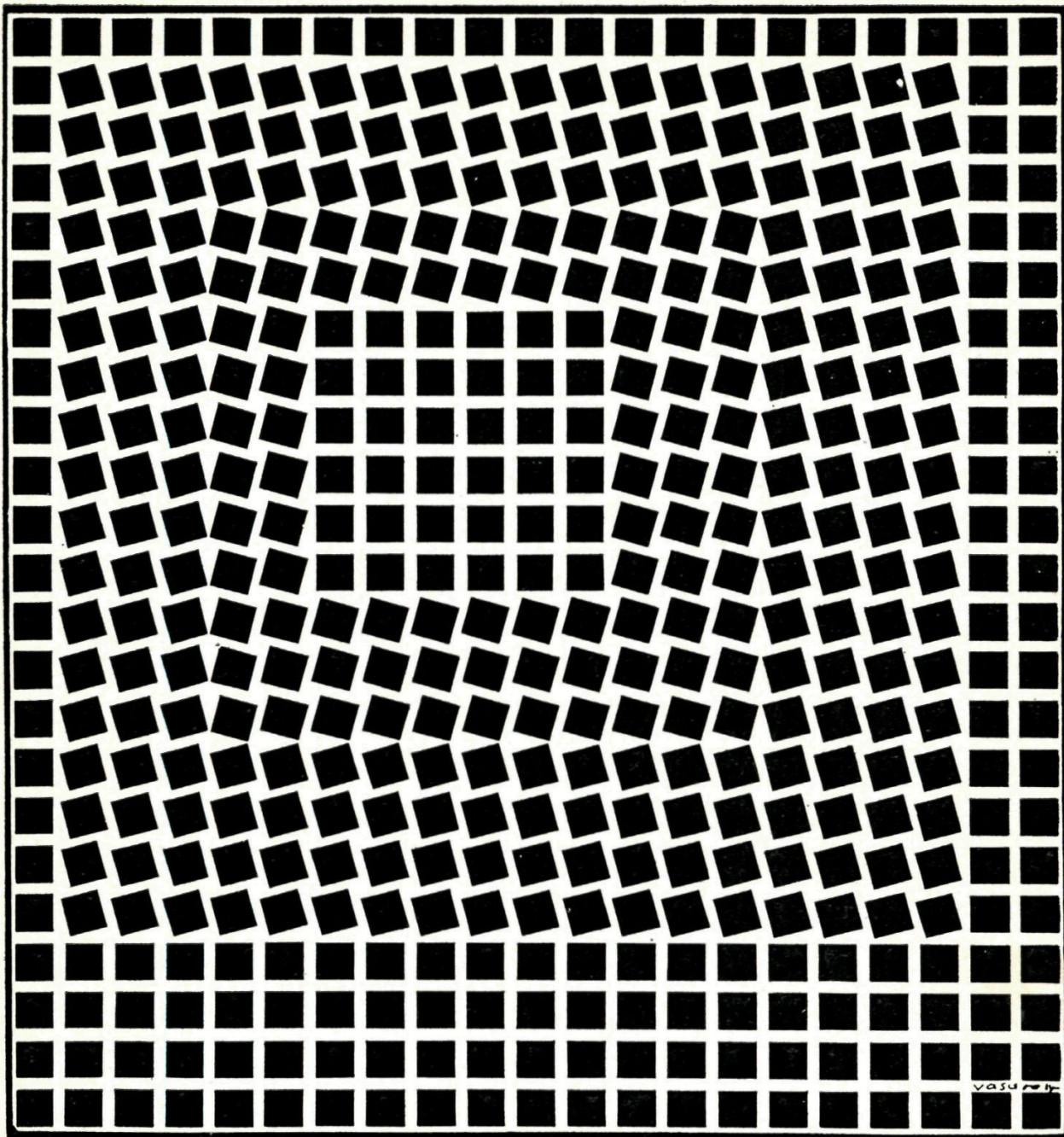


Fig. 2

Victor Vasarely, Eridan C, 1968

Algoritmen en blokschema's°°

Algoritme van Euclides

- 1 Neem twee natuurlijke getallen (ongelijk aan nul).
- 2 Bepaal de rest, bij deling van het grootste getal (het deeltal) door het kleinste getal (de deler).
Als de rest nul is ben je klaar.
- 3 Als de rest niet nul is dan wordt deze de nieuwe deler; de (oude) deler wordt het nieuwe deeltal.
- 4 Herhaal 2 en 3 tot je rest nul krijgt.

Wat hierboven staat is een soort rekenrecept. Zoals een recept in een kookboek omschrijft wat je moet doen om een bepaald gerecht te bereiden, zo omschrijft dit rekenrecept wat je moet doen om een bepaalde berekening uit te voeren. Een dergelijk recept heet een algoritme. Reeds op de lagere school heb je te maken gehad met algoritmen bij het rekenen, een voorbeeld hiervan is de staartdeling.

Een algoritme geeft aan *wat* je moet doen. Er staat niet bij *waarom* je het moet doen en waarom het *juist* is wat je doet. Bij het uitvoeren van een algoritme hoef je nauwelijks na te denken, wel moet je met grote nauwkeurigheid werken. Dit maakt algoritmen bij uitstek geschikt voor verwerking door computers, vooral wanneer de berekening een *repetierend karakter* draagt, zoals in het bovenstaande voorbeeld. Het aantal instructies is erg klein, maar sommige moeten meerdere keren worden uitgevoerd.

Alvorens een computer een algoritme kan uitvoeren, moet hij eerst over een programma beschikken, waarin de handelingen die hij moet verrichten zijn omschreven. Deze omschrijving dient zeer nauwkeurig te zijn, anders komt er niets van terecht. Zo zijn de vier opdrachten bovenaan deze bladzijde bij lange na niet nauwkeurig genoeg om de algoritme waarop ze betrekking hebben goed weer te geven.

Misschien heb je zelf ook niet begrepen wat nu precies de bedoeling is. We geven daarom een paar voorbeelden:

Voorbeeld A

- 1 We nemen de natuurlijke getallen 154 en 84.
- 2 De rest bij deling van 154 door 84 is 70.
De rest is niet nul, dus zijn we niet klaar.
- 3 De nieuwe deler is 70, het nieuwe deeltal 84.
- 4 (2) De rest bij deling van 84 door 70 is 14
(3) Nieuwe deler: 14, deeltal 70
(2) De rest bij deling van 70 door 14 is 0. Klaar.

Voorbeeld B

We nemen de natuurlijke getallen 47880 en 247.

We schrijven de berekening zo op:

$$47880 = 247 \times 193 + 209$$

$$247 = 209 \times 1 + 38$$

$$209 = 38 \times 5 + 19$$

$$38 = 19 \times 2 + 0$$

Je zult je inmiddels zeker afvragen waar we nu eigenlijk mee bezig zijn. Waarvoor dient deze algoritme?

Welnu, we zullen opheldering verschaffen.

Kijk nog eens naar 154 en 84. Ontbinding in factoren levert $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ en $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$. De grootste gemene deler van beide getallen is dus $2 \cdot 7 = 14$ en dit is precies de laatste rest die we kregen bij de berekening, voordat de rest nul was. De grootste gemene deler van 47880 en 247 is 19, zoals je kunt nagaan door beide getallen in factoren te ontbinden.

Het is niet moeilijk de juistheid van de algoritme te bewijzen. In de laatste regel van het tweede voorbeeld staat dat 19 een deler is van 38. In de voorlaatste staat aan de rechterkant van het gelijkteken een tweeterm, waarvan beide termen deelbaar zijn door 19. Ook 209 is dus deelbaar door 19. Op dezelfde wijze zijn ook 247 en 47880 deelbaar door 19. Het bewijs dat 19 inderdaad de grootste gemene deler is van 47880 en 247 laten we aan de lezer over.

De manier van berekening van de grootste gemene deler van twee getallen met achtereenvolgende delingen heet de algoritme van Euclides en is te vinden in één van de delen van de 'Elementen', waarin hij ongeveer 300 jaar v. C. de destijds bekende wiskunde heeft vastgelegd.

De term algoritme is overigens van recenter datum. Het woord stamt, net als het woord algebra, uit het Arabisch.

Al-Khowarizmi was de naam van een Perzisch wiskundige, die omstreeks 825 n.C. een boek onder de titel 'Hisab al-jabr wa'l muqābala' het licht deed zien. De vertaling van deze titel is, zoals je natuurlijk al direct dacht, zoveel als 'Wetenschap van restauratie en oppositie'. Hiermee bedoelde Al-Khowarizmi aan te geven dat hij een boek over algebra had geschreven. Uit de naam van de schrijver kun je met wat fantasie het woord algoritme afleiden, uit een deel van de titel van het boek de term algebra.

Blokschema's

We keren nog even terug naar de berekening van de grootste gemene deler van 47880 en 247. Hoe zou je een computer het repeterende karakter van de berekening duidelijk kunnen maken?

We stellen $x_0 = 47880$ en $x_1 = 247$. De rest bij de eerste deling noemen we x_2 , het quotiënt q_1 .

Dus

$$x_0 = x_1 \cdot q_1 + x_2$$

Zo kunnen we verder gaan

$$x_1 = x_2 \cdot q_2 + x_3$$

$$x_2 = x_3 \cdot q_3 + x_4$$

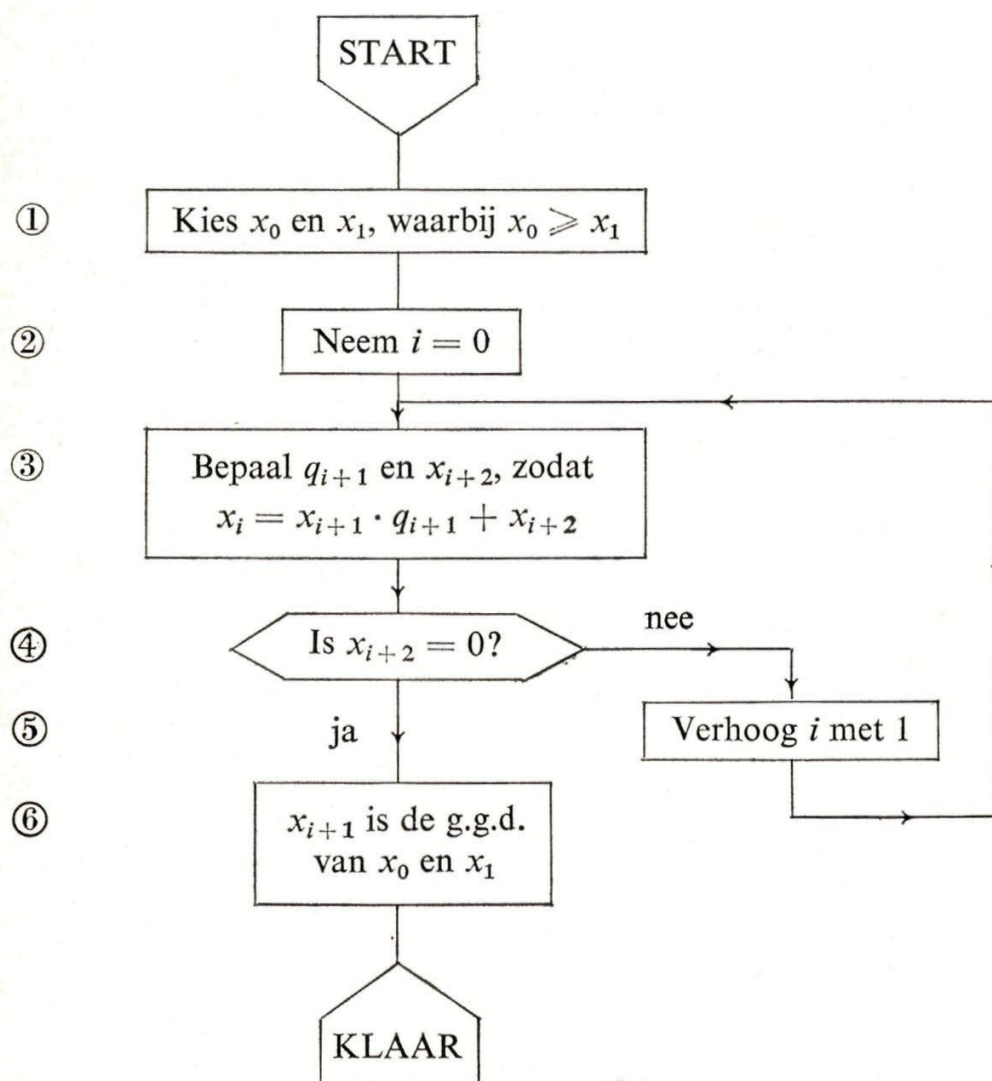
met $x_2 = 209$, $x_3 = 38$ en $x_4 = 19$

Meer algemeen kun je nu schrijven:

$$x_i = x_{i+1} \cdot q_{i+1} + x_{i+2}$$

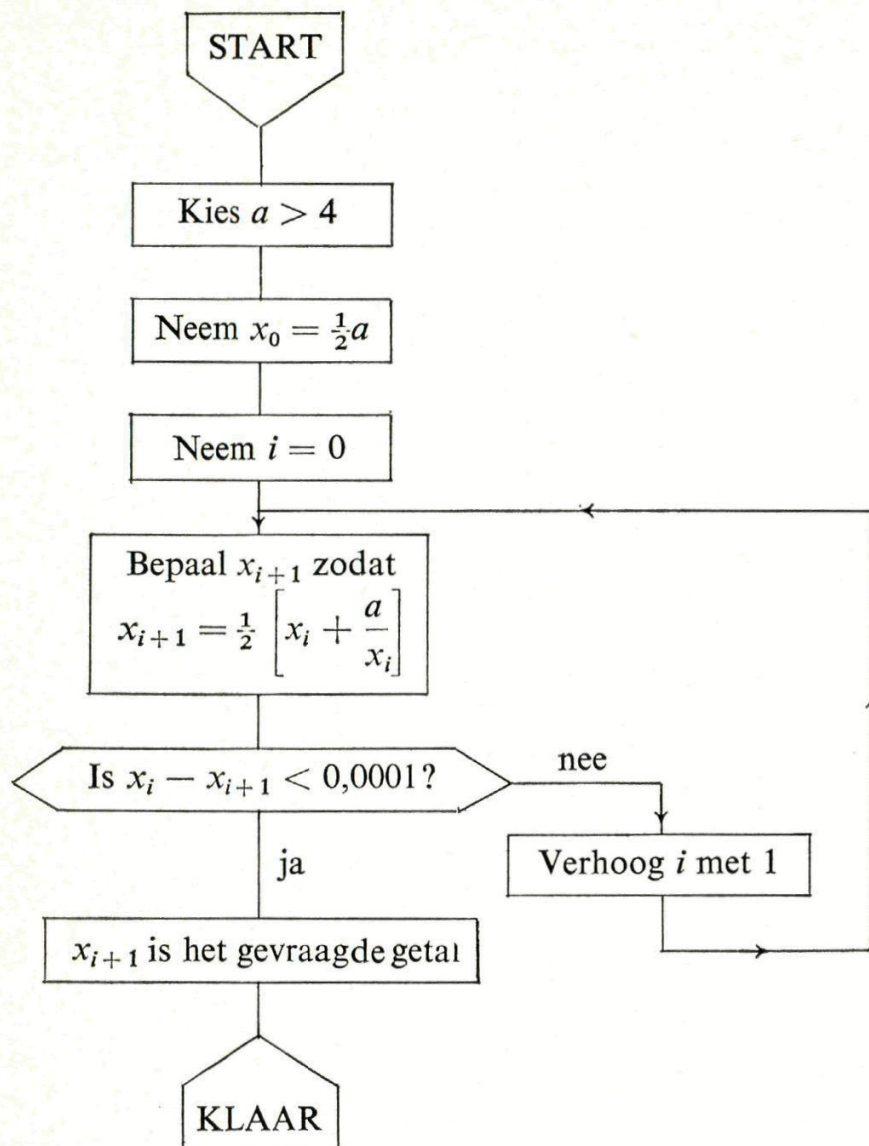
Voor $i = 0$ krijg je de eerste regel, voor $i = 1$ de tweede en voor $i = 2$ de derde.

We kunnen de algoritme nu schematisch weergeven, in een zogenaamd blokschema:



Het herhalingskarakter van de berekening komt tot uiting in de 'lus' die in het blokschema zit. Na het uitvoeren van de deling in blok ③ kom je bij de vraag in ④. Is het antwoord op de vraag nee, dan ga je via ⑤ terug naar ③ en voert weer een deling uit, waarbij i met één verhoogd is.

Algoritme van Newton.



In de vorm van een blokschema is hierboven een algoritme weergegeven, die een bijzonder geval is van een door Newton gevonden methode voor het berekenen van wortels van een vergelijking. In de Denkertjes 9 en 10 word je uitgenodigd te onderzoeken wat je met deze algoritme kunt doen.

Heb je een algoritme eenmaal in een blokschema weergegeven, dan is het meestal niet moeilijk meer om er een computerprogramma bij te maken. Het hangt af van de programmeertaal waarmee je de betreffende computer moet 'aanspreken' hoe zo'n programma er uiteindelijk uit gaat zien.

Victor Vasarely en Bridget Riley°

Door hun eenvoud en duidelijkheid hebben eenvoudige figuren als driehoek, vierkant en cirkel de mensheid in alle tijden geboeid en gediend als basis voor zowel technische constructies als kunstzinnige uitingen.

Zo deed nog niet lang geleden de zogenaamde op-art van zich spreken, waarbij, uitgaande van eenvoudige geometrische figuren, allerlei optische effecten worden verkregen. De werkstukken maken een beweeglijke, om niet te zeggen onrustige indruk, die zowel intrigerend als irriterend kan zijn.

Ook in andere moderne richtingen wordt veel met rechte lijnen en eenvoudige figuren gewerkt.

Een van de belangrijkste kunstenaars op het gebied van de op-art is de in 1908 in Hongarije geboren Victor Vasarely. Hij woont al sinds 1930 in Frankrijk. Vasarely is een voorvechter van het betrekken van bredere lagen van de bevolking bij de kunst en van het op ruime schaal reproduceren van kunstwerken.

'De idee, dat de kunstenaar voor een kleine elite werkt, die meent de cultuur in pacht te hebben, is voorbij en verouderd.'

Over de persoon en het werk van Vasarely zijn een aantal uitgaven verschenen, maar niet in het Nederlands.

We noemen twee boeken geschreven door Werner Spies, een grote uitgave, verschenen bij Verlag Dumont-Schauberg te Keulen, getiteld Victor Vasarely (DM 120,—) en een kleinere, verschenen bij Verlag Gerd Hatje, Stuttgart, getiteld Vasarely (DM 16,50).

Naast Vasarely treedt de laatste jaren ook de Engelse schilderes Bridget Riley op de voorgrond met prachtige composities. Zij kreeg o.a. in 1968 de grote, internationale prijs van de Biennale in Venetië.

Hiernaast vind je een afbeelding van haar *Bewegingen in vierkanten*, 1961, 122 × 120 cm.

Ezelsbruggetje?

Eén van de **twee** drielingen **vierde** de **vijfde** van de **zesde** maand hun **zevende** verjaardag.

Hoogachtend,
uw toegenegen
Tienus

(Gelezen in Wiskobas Bulletin, jaargang 1, nr 5)

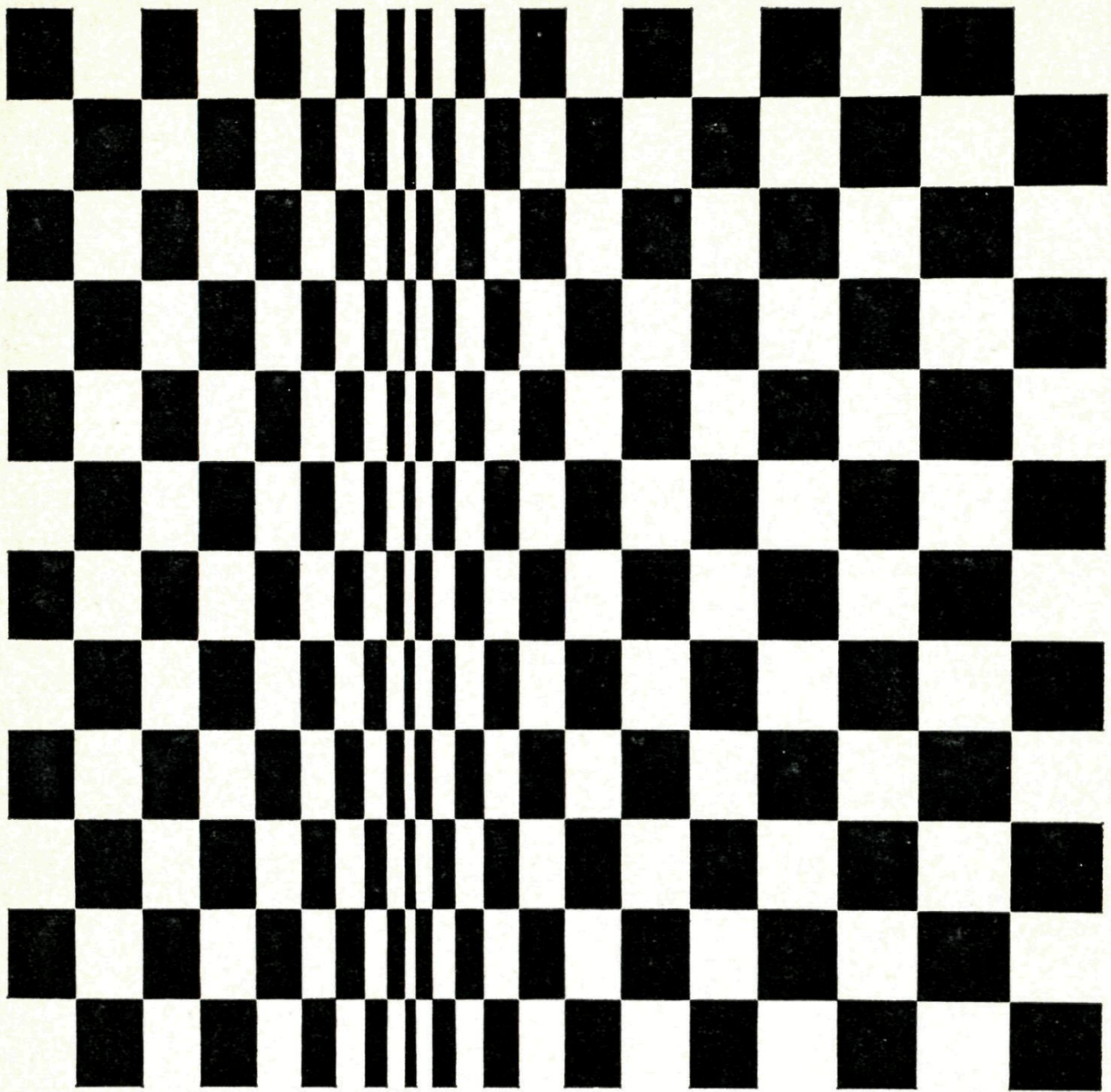


Fig. 3

Bewegingen in vierkanten, Bridget Riley

Rekenen met Pythagoras^{oo}

Van de onderstaande drie rechthoekige driehoeken kende je er beslist wel één en misschien zelfs twee.

Het zijn voorbeelden van rechthoekige driehoeken met zijden, die gehele getallen als maatgetallen hebben. Er zijn oneindig veel van dergelijke 'Pythagoreïsche drietallen' zoals 3, 4, 5 en 5, 12, 13 en 8, 15, 17. In dit artikel zullen we ze allemaal bepalen.

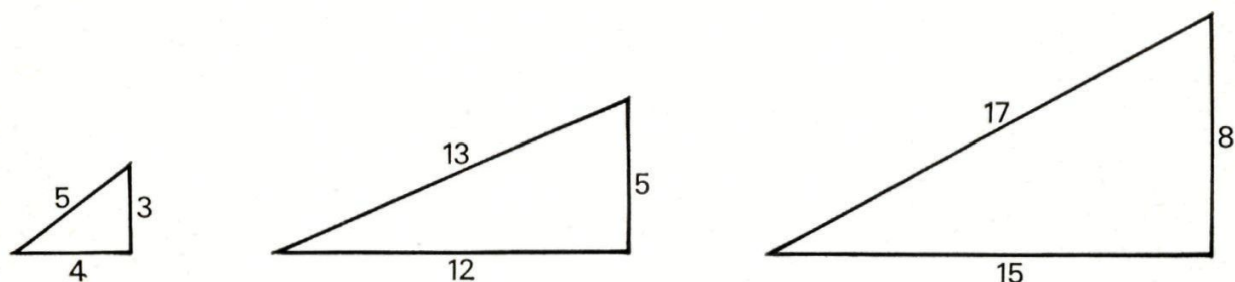


Fig. 4

Het gaat ons dus om de oplossingsverzameling van de vergelijking

$$a^2 + b^2 = c^2$$

waarin a , b en c positieve gehele getallen zijn. Laten we nu eerst eens de bewering bekijken, die hierboven al gedaan werd, dat deze oplossingsverzameling oneindig veel drietallen als elementen heeft. De waarheid van die bewering is heel eenvoudig in te zien. Bedenk maar dat (bijvoorbeeld) met 3, 4, 5 ook 6, 8, 10 en 9, 12, 15 en, in het algemeen, ook $3k$, $4k$, $5k$ er toe behoren. Die k daarin stelt natuurlijk een geheel getal voor dat groter dan 1 is. Zo heb je onmiddellijk al oneindig veel Pythagoreïsche drietallen. Om nog maar niet eens te spreken over drietallen van de vorm $5k$, $12k$, $13k$ en $8k$, $15k$, $17k$.

Natuurlijk zijn wij het meeste geïnteresseerd in Pythagoreïsche drietallen a , b , c waarin a , b en c niet veelvouden van hetzelfde getal k zijn. Zulke drietallen zullen we 'primitief' noemen. En dat er van die primitieve drietallen òók oneindig veel zijn, dat is niet zo gemakkelijk in te zien.

In een primitief Pythagoreïsch drietal a , b , c kunnen a en b niet allebei even getallen zijn. Want uit $c^2 = a^2 + b^2$ zou dan volgen dat ook c even was, zodat a , b en c alle drie veelvoud van $k = 2$ zouden zijn.

Het is echter evenmin mogelijk in een primitief drietal a , b , c dat a en b allebei oneven zijn. Was dat namelijk wel het geval, dan zouden a en b te schrijven zijn in de vorm $a = 2p + 1$, $b = 2q + 1$ (met gehele p en q). En daaruit zou volgen

$$a^2 + b^2 = (4p^2 + 4p + 1) + (4q^2 + 4q + 1) = 2(2p^2 + 2p + 2q^2 + 2q + 1)$$

We zien daaruit dat $a^2 + b^2$ dan wel veelvoud van 2 is, maar niet veelvoud van 4 is. Dus kan $a^2 + b^2$ dan niet het kwadraat van een geheel getal zijn.

In een primitief Pythagoreïsch drietal a , b , c is dus van de getallen a en b er één even en één oneven. Dat heeft tot gevolg dat c oneven is.

Laten we veronderstellen dat a oneven is en b even (door verwisseling van a en b is

dat zonodig te bereiken). En laten we in plaats van $a^2 + b^2 = c^2$ schrijven

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

Omdat c oneven en b even is, zijn de factoren $c + b$ en $c - b$ in het rechterlid allebei oneven. Ze zijn dus niet allebei veelvoud van het even priemgetal 2.

Maar ze kunnen evenmin allebei veelvoud van een of ander oneven priemgetal zijn. Want dan zouden hun som en verschil $2c$ en $2b$ ook allebei veelvoud van dat priemgetal zijn. Dus zouden c en b zelf er veelvoud van zijn. En dat terwijl ook $a^2 = (c + b)(c - b)$ en dus ook a veelvoud van dat priemgetal zouden zijn. Dat alles houdt immers in dat a, b, c geen primitief drietal is.

Conclusie: $c + b$ en $c - b$ zijn oneven getallen zonder gemeenschappelijke priemdelers.

Het produkt van die $c + b$ en $c - b$ dient echter het kwadraat van een geheel getal a te zijn. Dat nu kan alleen als $c + b$ en $c - b$ zelf kwadraten zijn.

We schrijven dus $c + b = m^2$ en $c - b = n^2$. Daar lossen we uit op $c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$ en $b = \frac{1}{2}(m^2 - n^2)$. En uit $a^2 = (c + b)(c - b)$ volgt dan dat $a = mn$.

We krijgen dus alle primitieve Pythagoreïsche drietallen door alle mogelijke paren oneven getallen m, n zonder gemeenschappelijke priemdelers te kiezen (waarin dan $m > n$ moet zijn) en te berekenen

$$a = mn, \quad b = \frac{1}{2}(m^2 - n^2), \quad c = \frac{1}{2}(m^2 + n^2)$$

Een aantal van de 'kleinste' primitieve drietallen zie je in de onderstaande tabel:

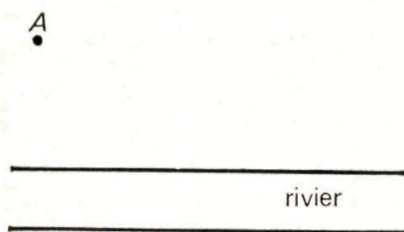
m	n	a	b	c
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
5	3	15	8	17
7	1	7	24	25
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	1	9	40	41
9	5	45	28	53
9	7	63	16	65

Tot slot volgen hier nog enkele beweringen, die bedoeld zijn als uitdaging om de ingeslagen weg alleen nog wat verder te verkennen:

- in elk primitief Pythagoreïsch drietal is één van de getallen een veelvoud van 5;
- de som van de drie getallen van een primitief Pythagoreïsch drietal kan een derdemacht zijn; de kleinste van die derdemachten treedt op in het drietal 11375, 3672, 11953;
- er zijn slechts 7 Pythagoreïsche drietallen, waarvan één van de drie getallen gelijk is aan 100;
- in elk primitief Pythagoreïsch drietal is b een veelvoud van 4; er is slechts één zo'n drietal waarin a en c priemgetallen zijn en b het viervoud van een priemgetal (en dat staat in de tabel hierboven).

Denkertjes

- 1 Bepaal de kortste weg van stad A naar stad B , als de richting van de brug over de rivier loodrecht staat op de evenwijdige oevers.



B Fig. 5



- 2 Van vier op elkaar volgende natuurlijke getallen is het eerste een elfvoud, het tweede een zevenvoud, het derde een vijfvoud en het vierde een viervoud. Bereken het kleinste viertal met deze eigenschap.
- 3 Knip een gegeven vierkant zo in stukken, dat je van die stukken een rechthoek kunt leggen waarvan de zijden de verhouding 2 hebben.
- 4 De weg van stad A naar stad F voert achtereenvolgens langs de dorpen B , C , D en E en is 53 km lang. Gegeven is dat $AB = 2 \cdot EF$, dat $AB > BC > CD > DE > EF$ en dat elk van deze vijf stukken een geheel aantal kilometers lang is. Wat kun je uit deze gegevens over die vijf stukken te weten komen?

(uit Matematika v. Skole, Moskou).



Robert Fischer en Boris Spasski achter het schaakbord

Fig. 6

Schaken en wiskunde°

Sinds het behalen van het wereldkampioenschap in 1935 door M. Euwe heeft de schaaksport in ons land niet zo vaak de voorpagina gehaald als tijdens de match Spasski-Fischer dit jaar.

Niet alleen afgebroken stellingen en partijverlopen, maar vooral ook de grillen en nukken van de Amerikaanse uitdager Robert Fischer kregen ruime aandacht van de pers, waardoor 1972 wel een zeer spectaculair schaakjaar genoemd mag worden.

Voor Pythagoras is dit aanleiding om ook eens wat aandacht aan het schaakspel te geven, maar dan natuurlijk op wat andere wijze dan in de vorm van een partij-analyse of iets dergelijks.

Het boeiende en intrigerende van het schaakspel wordt veroorzaakt door het onvoorstelbaar grote aantal mogelijke stellingen. (Een stelling is een situering van de stukken op het bord; na iedere zet ontstaat een nieuwe stelling).

Over het schaken is bijna een even onvoorstelbaar groot aantal boeken geschreven, waarin openingen, middenspelen, eindspelen, problemen en wat dies meer zij, worden besproken en uiteengegafeld. Sommige varianten zijn tot tien of zelfs twintig zetten diep op hun voor- en nadelen bekeken, maar in vrijwel iedere partij komt er een moment waarop van de bekende wegen wordt afgeweken en nieuwe mogelijkheden worden onderzocht.

Alleen in een toernooi, wanneer beide spelers daar belang bij hebben, wordt wel eens na een klein aantal zetten tot remise besloten.

Om een indruk te krijgen van de mogelijkheden willen we eens het aantal stellingen dat na een paar zetten kan ontstaan proberen uit te rekenen.

Al na de tweede zet van wit worden de problemen zo groot dat de moed om verder te gaan ons ontbreekt.

Wit begint.

We gaan uit van de beginstelling. (fig. 7)

Het aantal mogelijke openingszetten dat wit ten dienste staat is nog wel te overzien. Hij kan immers met een groot deel van zijn stukken nog niets uitrichten, omdat ze ingeklemd staan tussen hun burens. Alleen de twee paarden hebben daar geen last van: die springen over de voor hen staande pionnenrij heen. Zo kan het paard op veld b_1 (Pb_1) naar de velden a_3 en c_3 , het paard op g_1 (Pg_1) kan naar f_3 en h_3 .

Er zijn dus vier paardzetten mogelijk.

Ook kan wit met elk van zijn pionnen spelen en wel naar keuze, één of twee plaatsen recht vooruit. Dat levert 16 mogelijke zetten, met de paardzetten levert dat een totaal van 20.

Voor het begin van de partij kan wit dus kiezen uit 20 mogelijke zetten. Deze zijn niet allemaal even aantrekkelijk, zoals we nog wel zullen zien.

Zwart antwoordt.

Na de eerste zet van wit zal de zwartspeler in diep gepeins verzinken over zijn antwoord. Maar al spoedig komt hij er achter dat hij precies evenveel mogelijkheden heeft als wit, dus ook 20.

Elk van de 20 zetten van wit kan worden gevolgd door elk van de 20 van zwart. Dat levert $20 \times 20 = 400$ mogelijke stellingen na slechts één zet van elk der spelers!

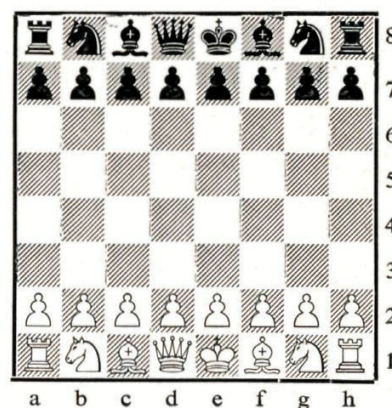


Fig. 7

Wit gaat door.

Na de eerste zet van zwart zal wit in het algemeen nog niet in moeilijkheden verkeren. Voor ons stapelen de problemen zich echter al snel op. Het aantal tweede zetten is niet in alle stellingen gelijk: het hangt zowel van de eerste zet van wit zelf als van die van zwart af.

Dit wordt ons te machtig en naar goed wiskundig gebruik vereenvoudigen we het probleem daarom eerst wat. We doen net of zwart geen zet heeft gedaan. (Dat maakt het voor wit ook veel eenvoudiger om te winnen.)

Het wordt nu een kwestie van tellen en wat doorzettingsvermogen. Stel wit is begonnen met de pion van a_2 naar a_4 te verplaatsen (fig. 8).

Hij kan nu als tweede zet:

- 1 doorgaan met deze pion (alleen naar a_5 , 1 mogelijkheid)
- 2 met een andere pion spelen (1 of 2 plaatsen naar voren, 14 mogelijkheden)
- 3 een paard spelen (Pa_3 , Pc_3 , Pf_3 of Ph_3 , 4 mogelijkheden)
- 4 de toren op a_1 één of twee plaatsen naar voren zetten (twee mogelijkheden)

Samen: $1 + 14 + 4 + 2 = 21$ mogelijke vervolg zetten.

In plaats van 1. a_4 had wit ook 1. a_3 kunnen spelen. Het aantal tweede zetten is dan bijna gelijk aan het vorige geval, alleen Pa_3 en Ta_3 vervallen, omdat de pion in de weg staat.

Nu 1. b_4 (fig. 9).

Mogelijk zijn $1 + 14$ pionzetten, 4 paardzetten en 2 loperzetten (Lc_1 kan naar b_2 en naar a_3). Totaal:

$1 + 14 + 4 + 2 = 21$ mogelijkheden.

Bij 1. b_3 blijft dit aantal precies gelijk.

Dan 1. c_4 . Behalve de pion- en paardzetten zijn nu ook 3 damezetten mogelijk: Dd_1 kan naar c_2 , b_3 en a_4 .

Samen: $1 + 14 + 4 + 3 = 22$.

Bij 1. c_3 vervalt alleen Pc_3 , dus 21.

1. d_4 . Nu wordt het druk. De loper op c_1 kan eruit, (d_2 , e_3 , f_4 , g_5 , h_6) de dame kan naar voren (d_2 en d_3) we hebben een extra paardzet (Pb_1 naar d_2) en zelfs de koning doet een duit in het zakje: Kd_2 .

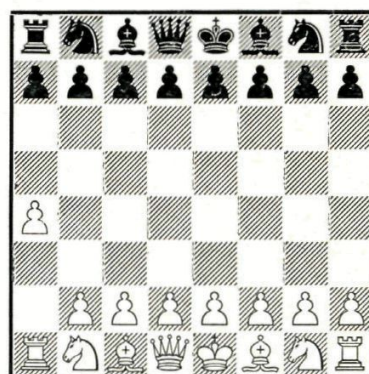


Fig. 8

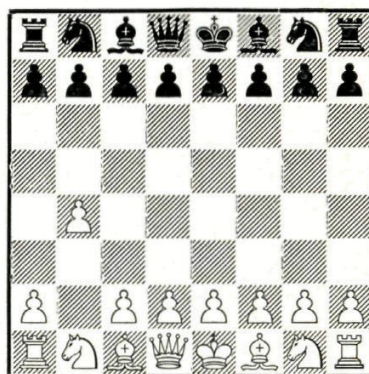


Fig. 9

Totaal: $1 + 14 + 5 + 5 + 2 + 1 = 28$.

Bij 1. d_3 vervalt alleen Dd_3 , dus 27 mogelijkheden.

1. e_4 (fig. 10). Dit wordt de absolute topper: 30 mogelijkheden voor pionnen (15), paarden (5), loper (5), dame (4) en koning (1).

1. e_3 . Doet niet onder! Geen enkele beperking ten opzichte van e_4 , maar wat minder agressief. Vandaar waarschijnlijk dat 1. e_4 wel de meest voorkomende openingszet zal zijn!

Openingen met de f -pion, de g -pion en de h -pion kunnen hier niet tegenop, zoals je zelf kunt nagaan.

We verzamelen de aantallen als volgt:

a_3	a_4	b_3	b_4	c_3	c_4	d_3	d_4	e_3	e_4	f_3	f_4	g_3	g_4	h_3	h_4
19	21	21	21	21	22	27	28	30	30	19	20	21	21	19	21

Zo zien we dat op de 16 verschillende eerste pionzetten voor de tweede zet gekozen kan worden uit 19 tot 30 verschillende mogelijkheden. Allemaal samen leveren ze precies 361 mogelijke tweede zetten.

Nu nog de vier paardzetten, waarmee wit kan beginnen. Neem 1. Pa_3 (fig. 11).

Dit paard blokkeert de a -pion. De andere pionnen kunnen wel uit de voeten (14 mogelijkheden). Pa_3 kan naar b_1 (jawel, weer terug!), b_5 , en c_4 ; Pg , kan naar f_3 en naar h_3 . Dus 5 paardzetten. Tenslotte kan ook de toren op a_1 , een zet doen: naar b_1 .

Totaal 20. Voor Ph_3 geldt hetzelfde.

Pc_3 maakt 14 pionzetten mogelijk en 7 paardzetten, dus 21, evenals Pf_3 .

Aan de 361 mogelijkheden volgend op een pionzet moeten we dus nog 82 toevoegen. Dus 443.

En dat is dan dat!

Na zijn 20 mogelijke openingszetten kan wit vervolgen met 443 mogelijke tweede zetten, als zwart niet meedoet.

Maar zwart doet wel mee! Hij kan voor zijn eerste zet ook kiezen uit 20. Na de tweede zet van wit zijn er dan ongeveer $20 \times 443 = 8860$ stellingen mogelijk geworden.

Ongeveer, want we moeten wat kleine correcties aanbrengen. Dus nog even volhouden!

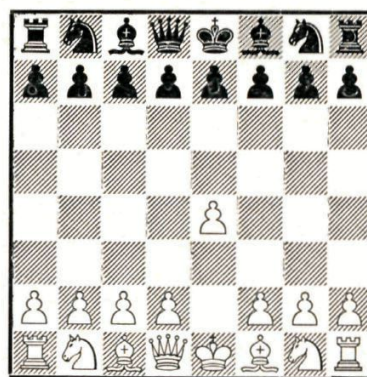


Fig. 10

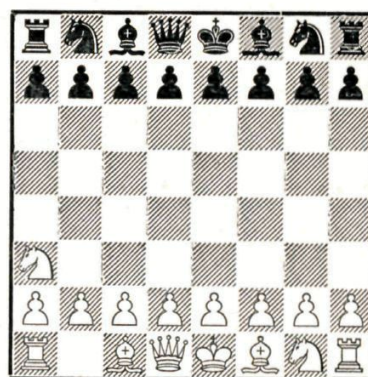


Fig. 11

Stel wit begint met e_4 en zwart speelt e_5 , (figuur 12).
 Er valt nu één mogelijkheid voor wit uit, de pion op e_4 kan namelijk niet een plaats naar voren. Hetzelfde kan zich voordoen bij $a_4, b_4 \dots h_4$ en we trekken daarom 8 af van ons totaal van 8860. Blijft over 8852.

Maar op 1. e_4 kan zwart ook spelen d_5 ! (figuur 13).
 Nu heeft wit een mogelijkheid extra, namelijk $e_4 \times d_5$, dat wil zeggen de pion op e_4 slaat die op d_5 . Hetzelfde kan gebeuren als zwart met f_5 antwoordt.

Dit geldt ook voor 1. b_4, c_4, d_4, f_4, g_4 .

Alleen bij 1. a_4 en 1. h_4 is er maar één extra zet, totaal 14; $8852 + 14 = 8866$.

Nu nog een kleinigheid en we zijn klaar:

Als zwart b_5 speelt, verhindert hij de witte loper naar a_6 te reizen. Dit kost ons een mogelijke tweede zet van wit en hetzelfde geldt voor g_5 . We eindigen daarom op 8864 mogelijke stellingen na de tweede zet van wit.

Je zult het niet erg vinden dat we niet verder gaan met ons onderzoek. Het aantal mogelijke stellingen na de tweede zet van zwart zal niet meer dan 196.249 bedragen (zie Denkertje 7), maar ook niet erg veel minder.

Van al deze bijna 200.000 mogelijke stellingen zijn er vier, waarbij de partij al afgelopen is omdat de witte koning mat staat. Dus zwart wint in twee zetten! (De matzet is in alle vier de gevallen dezelfde.)

We laten het graag aan je over om uit te zoeken hoe dat kan.

De oplossing staat op pagina 24.

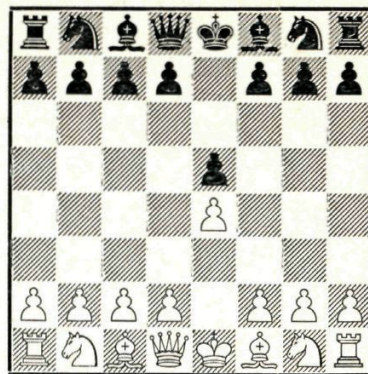


Fig. 12

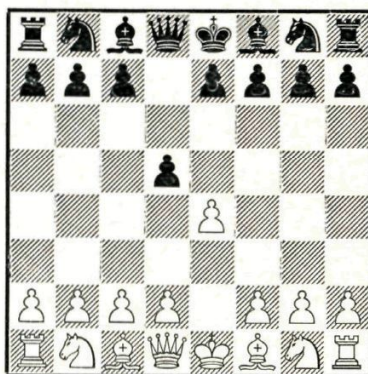


Fig. 13

Denkertjes

- 5 x, y en z zijn natuurlijke getallen groter dan 1. Ook geldt $x \leq y \leq z$. Bepaal de oplossingsverzameling van de vergelijking $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$.
- 6 Hoe kan men 10 bomen planten in vijf rijen, zo, dat op elke rij vier bomen staan?





Wiskunde in blik^{oo}

Ir. H. M. Mulder

Als we iets verzenden, zullen we proberen de verpakkingskosten zo laag mogelijk te houden. Steeds meer artikelen worden in blik verpakt, waarbij men meestal voor het blik de cilindervorm kiest.

De vraag luidt dan: hoe kunnen we met zo weinig mogelijk blik, zoveel mogelijk verpakken.

Meer wiskundig wordt de vraag: welke cilinder heeft veel inhoud en weinig oppervlakte.

Om het probleem te kunnen aanpakken, moeten we de opgave nog scherper formuleren.

Het zou zo kunnen: hoe groot moeten de afmetingen van een cilinder gekozen worden om bij een gegeven inhoud, een zo klein mogelijke oppervlakte te krijgen.

Met afmetingen bedoelen we de straal r en de hoogte h ; met totale oppervlakte, die van bodem en bovenzijde en tevens die van de mantel.

Als je deze mantel uitslaat, ontstaat een rechthoek met een hoogte gelijk aan die van de cilinder en een breedte gelijk aan de omtrek van de bodem of bovenzijde.

De oppervlakte van grond- en bovensirkel is πr^2 ;

de cirkelomtrek $2\pi r$; de manteloppervlakte $2\pi r h$;

de inhoud van de cilinder $\pi r^2 h$.

We moeten dus nu met elkaar vergelijken de inhoud $\pi r^2 h$ en de totale oppervlakte $2\pi r^2 + 2\pi r h$.

We stellen het probleem nog concreter: een cilindervormig blik heeft een inhoud 1 liter (of 1 dm³);

bereken r en h zo dat de oppervlakte (de totale hoeveelheid blik) zo klein mogelijk wordt.

We geven de inhoud aan met I en de oppervlakte met O .

Verder stellen we de verhouding $\frac{h}{r} = x$ of $h = xr$.

Dus $I = \pi x r^3$ waarbij we $I = 1$ dm³ gesteld hebben.

Als maateenheden gebruiken we dus 1 dm, 1 dm² en 1 dm³.

De gegevens zijn dus nu:

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h \text{ en } \pi r^2 h = 1 \text{ en } h = xr$$

$$\text{dus } O = 2(\pi r^2 + \pi r h) = 2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{r}\right) = 2\left(\frac{1}{xr} + \frac{1}{r}\right) = 2\left(\frac{1+x}{xr}\right) = \frac{2+2x}{xr}$$

Samenvattend werken we dus verder met:

$$\pi x r^3 = 1 \quad h = xr \text{ en } O = \frac{2+2x}{xr}$$

We gaan nu een aantal gevallen onderzoeken om te zien wat het gunstigst wordt.

a stel $x = \frac{1}{3}$

dan $\pi \cdot \frac{1}{3}r^3 = 1$ dus $r^3 = \frac{3}{\pi} = 0,955$ dus $r = 0,986$ dm

verder $h = \frac{1}{3}r = 0,332$ dm

en $O = \frac{2 + \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}r} = \frac{8}{r} = \underline{8,13 \text{ dm}^2}$.

b stel nu $x = \frac{1}{2}$ dan vinden we op dezelfde wijze:

$r = 0,860$ dm en $h = 0,430$ dm en $O = \underline{6,96 \text{ dm}^2}$

c $\leftarrow$ bij $x = 1$ dan:

$r = 0,682$ dm en $h = 0,682$ dm en $O = \underline{5,88 \text{ dm}^2}$

d $\leftarrow$ bij $x = 2$ dan:

$r = 0,542$ dm en $h = 1,084$ dm en $O = \underline{5,54 \text{ dm}^2}$

e $\leftarrow$ bij $x = 3$ dan:

$r = 0,474$ dm en $h = 1,422$ dm en $O = \underline{5,66 \text{ dm}^2}$

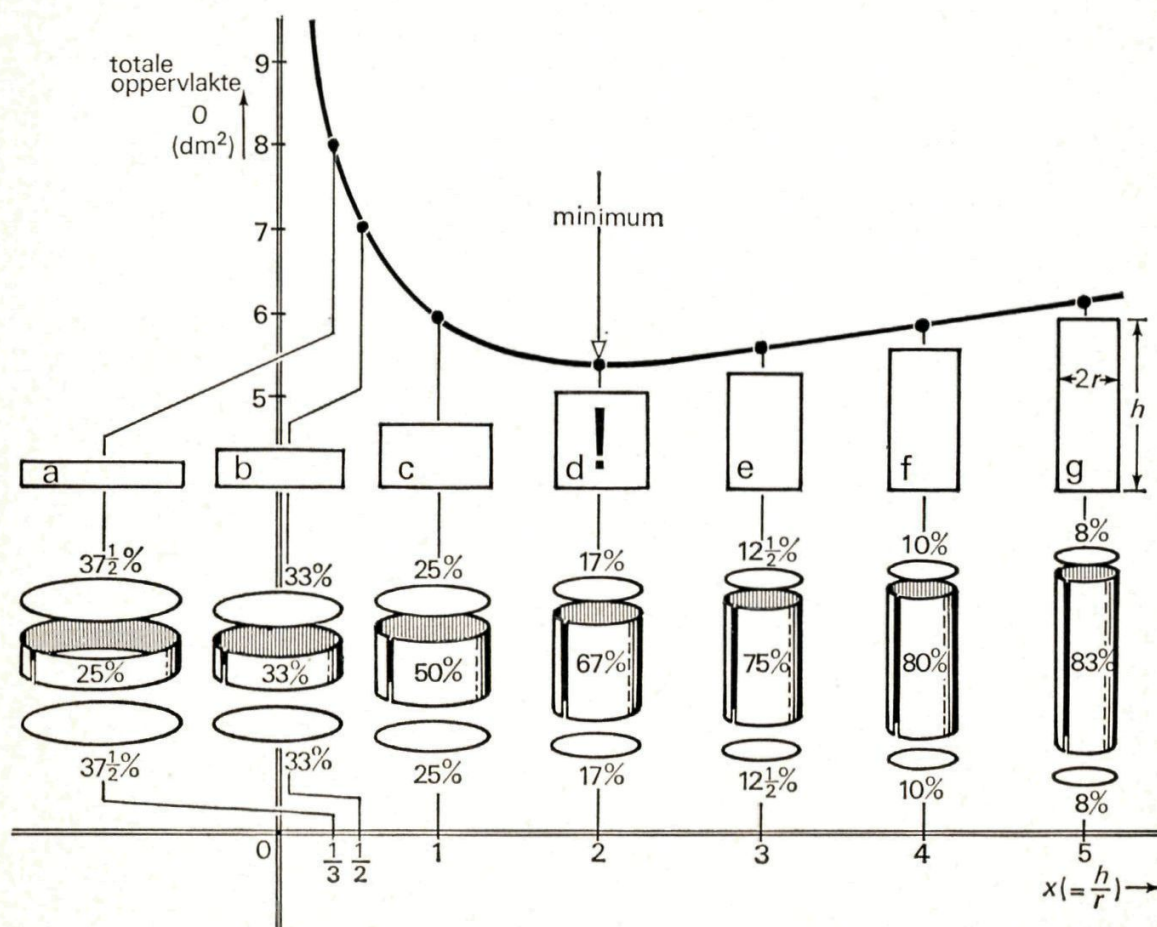
f $\leftarrow$ bij $x = 4$ dan:

$r = 0,430$ dm en $h = 1,720$ dm en $O = \underline{5,81 \text{ dm}^2}$

g tenslotte $x = 5$ dan:

$r = 0,400$ dm en $h = 2,000$ dm en $O = \underline{6,00 \text{ dm}^2}$

Fig. 15



Opvallend is dat bij $x = 2$ de kleinste oppervlakte bereikt wordt. In dat geval geldt $h = 2r$ zodat de doorsnede door de as van de cilinder een vierkant wordt.

In de grafiek is voor de diverse waarden van x de bijbehorende blikvorm getekend en tevens de waarde van de oppervlakte.

De doorsnijding heeft telkens een andere rechthoeksvorm; bij vierkante doorsnijding ontstaat het minimum in de oppervlakte.

Bij alle andere vormen is de oppervlakte dus groter (bij dezelfde inhoud!).

Verder valt in de grafiek op dat de voor $x < 2$ de oppervlakte snel toeneemt; en voor $x > 2$ niet zo snel.

Dat betekent dus: voor plattere blikken gaat een afwijking van de ideale vorm (vierkant) vlug veel geld kosten; bij hogere blikken valt dat juist nogal mee.

Voor de plattere blikken zijn dus relatief duur.

Er zijn natuurlijk nog andere motieven dan alleen de kosten bij het kiezen van een bepaald model.

Sardines worden juist verpakt in erg platte blikken dan kun je er gemakkelijk met een vork iets uitprikken. Uit een hoog blikje kun je gemakkelijker schenken of drinken. Tenslotte gaan we nog even na welk percentage van het blik telkens in bodem en deksel en welk deel in de mantel aanwezig is.

Uit de formules lees je gemakkelijk af:

$$O_1 \text{ (ronde schijven): } O_2 \text{ (mantel)} = r : h = r : xr = 1 : x$$

De percentages zijn in de figuur aangegeven.

Bij platte blikjes zit dus het meeste blik in de beide ronde schijven; bij hogere blikjes juist in de mantel.

Voor x naderend naar nul of oneindig nadert de oppervlakte ook naar oneindig.

Als je meer wiskundige kennis hebt, kun je bewijzen, dat het minimum optreedt voor $x = 2$.

Uit de gegevens volgt

$$r^2 = x^{-\frac{2}{3}} \cdot \pi^{-\frac{2}{3}}$$

$$rh = x^{\frac{1}{3}} \cdot \pi^{-\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } 0 &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ &= 2\pi^{\frac{1}{3}}(x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}) \end{aligned}$$

Differentiëren naar x geeft:

$$0^1 = \frac{2}{3} \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{-2 + x}{x^{\frac{5}{3}}}$$

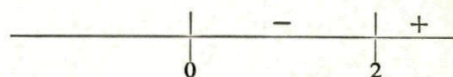
Een extreem treedt op voor

$$\frac{-2 + x}{x^{\frac{5}{3}}} = 0$$

Hierin is $x > 0$

Lettend op de tekenwisseling

blijkt, dat voor $x = 2$ een minimum wordt gevonden.



De 'triple-star' van Penrose°

Je zult allemaal wel eens van die ingenieuze houten puzzels gezien hebben, die maar op één manier in- of uit elkaar zijn te halen.

De kangeroe (figuur 16) is alleen te demonteren als je bij z'n staart begint en dan een bepaalde volgorde aanhoudt.

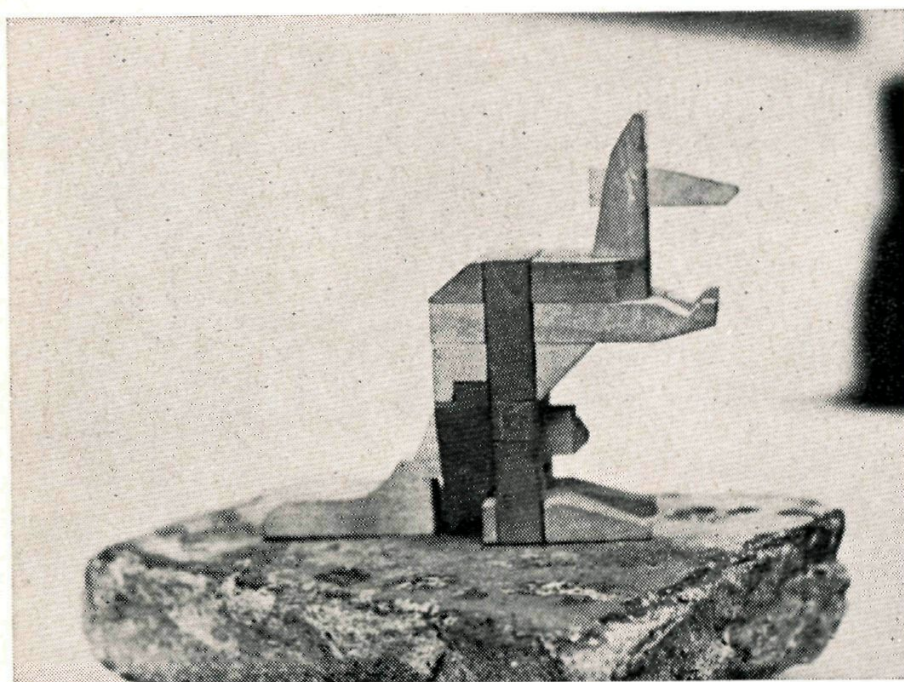


Fig 16

Het demonteren is meestal niet zo moeilijk. Het opbouwen echter wel, omdat één verkeerd ingezet stukje hout de verdere opbouw volkomen kan blokkeren.

De ontwerpers van zulke puzzels moeten een bijzonder goed ruimtelijk voorstellingsvermogen hebben, en wie in staat is snel de opbouw van de puzzel te doorzien heeft dat ook.

De in figuur 17 afgebeelde drie-lagige ster is een vondst van Penrose (die bijvoorbeeld ook als eerste de onmogelijke driebalk publiceerde). De ster gaat alleen in drie stukken uiteen, als je tegelijkertijd op drie hoekpunten een trekkracht uitoefent (zie figuur 18).



Fig. 17

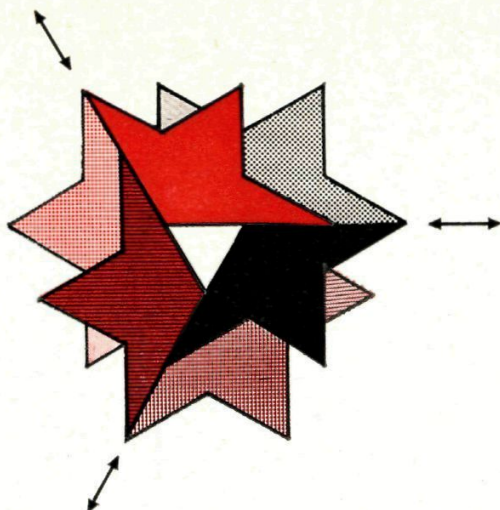


Fig. 18

De drie delen van de ster zijn congruent en elk deel bestaat weer uit drie aan elkaar gelijkde deeltjes, waarvan er zich één in het bovenvlak, één in het middenvlak en één in het onderste vlak bevindt.

Je kunt de puzzel gemakkelijk zelf maken van triplex, of zelfs van heel dik karton. Construeer eerst een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ (figuur 19) en trek de in deze figuur opgenomen verbindingslijnen. Van het rode stukje heb je er 6 nodig en van het rood-gestippelde 3. (Merk op dat de oppervlakte van beide vormen even groot is, namelijk $\frac{1}{3}$ van de oppervlakte van de ster). Figuur 20 laat zien hoe je één puzzelblokje samenstelt.

In figuur 20_a, zie je hoe je het (rode) bovenste stukje hout op het middelste stukje moet lijmen. En figuur 20_b toont hoe onder dit middelste stukje, het onderste vastgelijmd wordt.

Op deze manier maken we nog twee precies eendere blokjes.

Figuur 18 demonstreert hoe je de stukjes in- en uitelkaar moet schuiven. Je zult wel merken dat het nog niet eens zo gemakkelijk gaat, ook al heb je de stukjes bijzonder nauwkeurig samengesteld.

Fig. 19

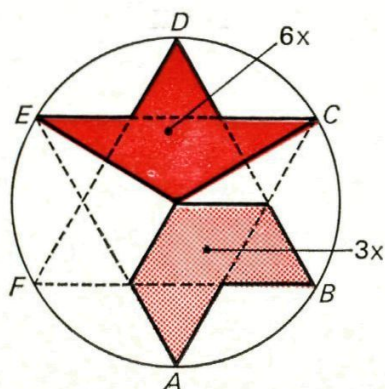
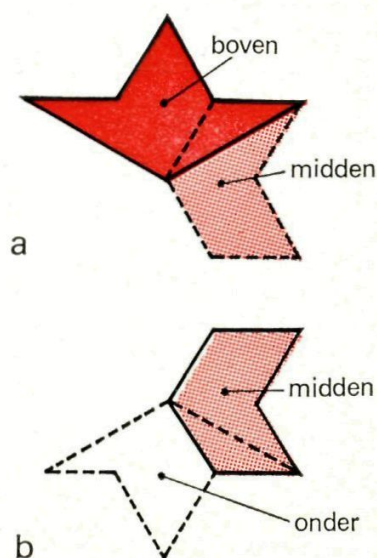


Fig. 20a en b



Denkertjes

- 7 Waarom is het aantal mogelijke stellingen op een schaakbord na de tweede zet van zwart in ieder geval kleiner dan 196.249? Is het werkelijke aantal groter of kleiner dan 175.000? (Zie ook blz. 17)
- 8 Hoe groot is het aantal openingszetten van wit bij het damspel? Hoe groot is het aantal mogelijke stellingen na de eerste zet van zwart?
- 9 Kies in de algoritmen van Newton op blz. 7 voor a het getal 49 en voer de berekening uit. Na hoeveel stappen bereik je het eindantwoord?
- 10 Voer de berekening ook uit voor $a = 3$. Welke verandering moet je nu in het blokschema aanbrengen om niet vast te lopen?



Schaken en wiskunde

Zwart geeft mat in twee zetten.

Zie figuur 21.

De tweede zet van zwart is Dh_4 , waarmee de witte koning mat gezet wordt.

De witte pion op f_3 kan ook op f_4 staan, de zwarte op e_6 kan ook op e_5 staan.

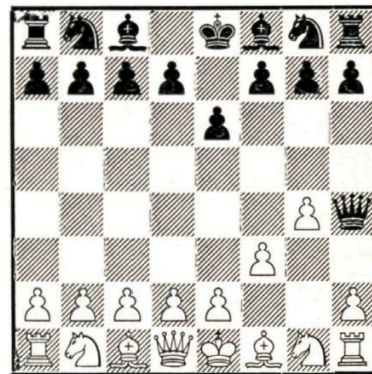


Fig. 21

Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 15 november 1972 worden ingezonden naar het redactie- secretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.

Inhoud:

Van de redactie	1
Algoritmen en blokschema's °°	4
Victor Vasarely en Bridget Riley °	8
Rekenen met Pythagoras °°	10
Schaken en wiskunde °	13
Wiskunde in blik °°	19
De 'triple-star' van Penrose °	22
Denkertjes	12, 17, 24

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Amersfoort.
A. F. VAN TOOREN, Leusden-C.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, besteld via één der docenten, f 4,50 per jaargang. Voor anderen f 7,00. Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelten ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

