jaargang 12 1972/1973

Pythagoras

2

wiskundetijdschrift
voor jongeren

In memoriam M. C. Escher

Maandag 27 maart 1972 stierf Maurits Cornelis Escher; hij was toen 73 jaar. Drie jaar daarvoor had hij zijn laatste grote houtsnede gemaakt: RINGSLANGEN. Mathematisch een bijzonder boeiende prent, en technisch een gaaf meesterwerk, zoals te verwachten zou zijn van een kunstenaar in de kracht van zijn leven. Alleen zijn intieme vrienden wisten, dat deze inspanning gegaan was ten koste van de laatste reserve aan kracht die hij nog bezat.
Vanaf 1937 heeft Escher vrijwel uitsluitend prenten gemaakt met een mathematische inslag. Aanvankelijk wekten die alleen de interesse van wiskundigen en kristallografen. De kunstcritici hadden er nauwelijks aandacht voor. Het grote publiek dacht er anders over en de afgelopen 10 jaar is Escher geworden tot de populairste graficus van onze tijd. Ook in de kunsthandel is er nu opeens veel vraag naar juist het mathematisch getinte werk van Escher. Prenten als BOVEN EN ONDER, KLIMMEN EN DALEN, WATERVAL . . halen op het ogenblik de ongelooflijke veilingprijzen van $ 5000 à 6000 terwijl er toch honderden originele afdrukken van in omloop zijn.

Was Escher een mathematicus? Allerminst in de gebruikelijke zin van het woord. Op de HBS haalde hij vrijwel nooit voldoenden voor de exacte vakken en hij zakte daarom ook voor zijn eindexamen. Het abstracte lag hem niet. Des te meer stelde hij belangstelling in de wetmatigheden van figuren.
In het al puzzelend en tekenend opzoeken daarvan was hij zo bedreven, dat hij (met name op het gebied van de kristallografie) vondsten deed, die pas later door de theoretici werden ontdekt.
Ook de verschillende netwerken, die hij als geraamte voor zijn prenten gebruikte, getuigen van een grote originaliteit en een uitzonderlijk vermogen, om ze consequent door te denken. Wie ze wiskundig wil analyseren, heeft daar heel wat moeite mee.
Escher was mathematicus 'in hart en nieren', maar niet in de huidige betekenis van het woord.
Zijn kunst bestond in het geïnspireerd doorgeven van verbazing over de mathematische wetmatigheden op de beschouwers van zijn prenten.

Ongeveer 15 jaar geleden kwam ik voor het eerst in contact met Escher en de laatste jaren bezocht ik hem vrijwel wekelijks in verband met de voorbereiding voor een boek over zijn werk. Aan dit contact is het te danken, dat in PYTHAGORAS, in de loop van de jaren een aantal artikelen over Escher verschenen. Escher was ten allen tijde graag bereid om over de wiskundige achtergrond van zijn werk te praten. Hij was ook een trouw lezer van Pythagoras, en hij stelde het op prijs, dat zijn werk op deze manier onder de aandacht van veel jonge mensen werd gebracht.
Toen ik hem enige jaren geleden voorstelde een zestal van zijn prenten, afgedrukt op groot formaat, voor de lezers van Pythagoras beschikbaar te stellen, gaf hij daarvoor zonder aarzelen zijn toestemming, ofschoon hij in die tijd nog zeer huiverig stond tegen het reproduceren van zijn werk op groot formaat.

← *Hand met spiegelende bol. M. C. Escher. Litho, 1935*
In de bol de beeltenis van de tekenaar

Als we nagaan welke thema's aan de mathematische prenten van Escher ten grondslag liggen, dan komen we tot de volgende opsomming, waarbij we van elk thema een prent als voorbeeld noemen:

1 De doordringing van meerdere werelden. (DRIE WERELDEN 1955).
2 Het conflict tussen de af-te-beelden derde dimensie en de daarvoor beschikbare tweede dimensie. (TEKENEN 1948).
3 Regelmatige vlakverdeling. (DAG EN NACHT 1948).
4 Nieuwe perspectiefwetten. (BOVEN EN ONDER 1947).
5 Regelmatige veelvlakken. (VEELVLAK MET BLOEMEN 1958; dit is geen prent maar een voorwerp in hout gesneden).
6 Onmogelijke figuren. (WATERVAL 1961).
7 Oneindigheidsbenaderingen. (Cirkellimiet III, 1959).

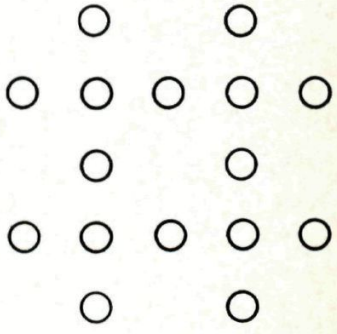
Het is mogelijk achter deze verschillende thema's nog algemenere inspiratiebronnen te zoeken. We zouden dan samenvattend kunnen zeggen: Escher was geboeid door de structuur van het platte vlak, door de structuur van de ruimte en door de relatie die tussen deze beide bestaat voor de tekenaar die deze ruimte af wil beelden op het platte vlak.
Escher heeft niet al zijn ideeën kunnen uitwerken. Soms kon hij er, zelfs na jaren zoeken, geen gestalte aan geven die hem beviel. Hij zei me eens: 'Als je eens wist wat ik 's nachts in mijn verbeelding zag, in het pikkedonker ..... en als ik het de volgende dag op papier wilde schetsen ..... dan bleef er niets van over.' Over een van deze prenten: DE PRENT DIE ESCHER NOOIT MAAKTE, zullen we in het volgende nummer iets vertellen.

Bruno Ernst.

Denkertjes

11 Elk van de zijden en diagonalen van een zestienhoek wordt in één van de kleuren geel, blauw, rood getrokken. Bewijs dat er onder die 120 lijnstukken drie zijn van dezelfde kleur, die een driehoek vormen.

12 Schrijf de natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, ..., 15, 16 in de cirkeltjes zo, dat de som van de vijf getallen op elke rij 39 is.



13 Een typiste tikt zonder spatie de rij van de natuurlijke getallen. Dus 123456789101112 ..... Welk cijfer ontstaat bij de honderdste aanslag?

14 $\sqrt{3\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{27}{8}} = \sqrt{9 \cdot \frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$
Let op de structuur van deze wortelvorm. Die structuur is ook te vinden in:
$\sqrt{2\frac{2}{15}} = 2\sqrt{\frac{2}{15}}$
$\sqrt{2\frac{2}{7}} = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$
$\sqrt{2\frac{2}{127}} = 2\sqrt{\frac{2}{127}}$
Probeer de algemene formule te vinden van deze structuur.

De meetkunde van de Wankelmotor[oo]

Nee, over techniek schrijven wij niet. Omdat het boven onze pet gaat. Tot voor kort meenden we nog dat vleugelmoeren en schroefbouten alleen maar in de vliegtuigbouw gebruikt werden!
Het is dus niet omdat wij in een NSU of in een MAZDA rondtuffen, dat die Wankelmotor ons boeit. Zijn fraaie meetkundige vormgeving doet dat.
Bij de traditionele motor gebeuren de belangrijkste dingen in een cilinder. De overeenkomstige ruimte bij een Wankelmotor mag je gerust ook een cilinder noemen. Zijn doorsnede is echter geen cirkel, maar een cycloïde. Dat is de tweezijdig symmetrische gesloten kromme in de stripfiguur op deze twee bladzijden. Binnen die cycloïdale ruimte draait een rotor rond, waarvan de doorsnede de vorm van een gelijkzijdige driehoek heeft. De drie overblijvende kamers bevatten het gasmengsel.

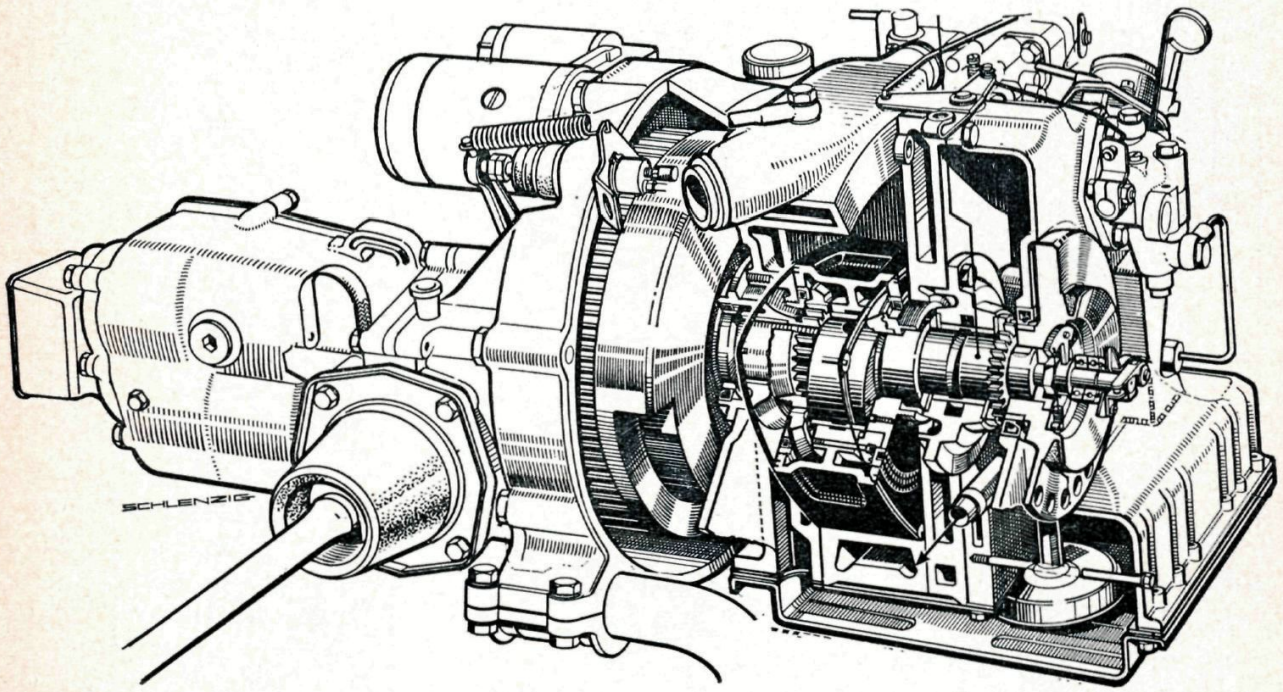


Fig. 1

In de eerste figuur van het stripverhaal heeft de bovenste van de drie kamers minimaal volume. Daarin is het gasmengsel dus samengeperst en daarin gebeurt dan ook de ontsteking.
Als gevolg daarvan gaat het volume van die kamer nu toenemen. In de tiende figuur is dat volume maximaal geworden. De kamer bevindt zich daar links van de rotor.

Nu wordt het afgewerkte gasmengsel door de volumevermindering van de gevolgde kamer naar buiten geperst. Dat is nog niet afgelopen in de laatste figuur, nummer 15. Maar zie je wel, dat figuur 15 volkomen gelijk is aan figuur 3? Stap dus terug naar het begin van de strip en let nu op de kamer, die daar links van de rotor zit. In figuur 9 (of 21, zo je wilt) heeft die kamer

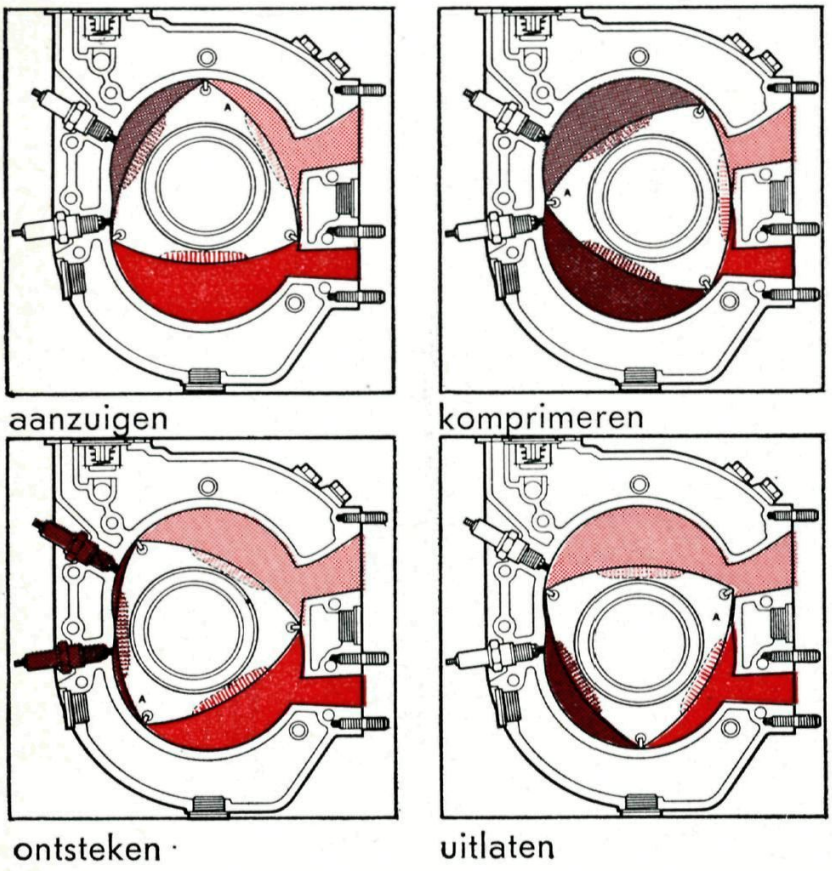


Fig. 2

minimaal volume gekregen en is de uitlaatfase voltooid. Hij ligt daar onder de rotor.
Nu wordt er vervolgens weer een vers gasmengsel aangezogen in de figuren 9 tot en met 15 en 3 tot en met 6. In figuur 6 bevindt de beschouwde kamer zich rechts van de rotor.
En tenslotte wordt dat gasmengsel samengeperst in de figuren 6 tot en met 15 en dan is de begintoestand weer opnieuw ontstaan.
Tegelijkertijd speelt hetzelfde verhaal zich ook in de andere twee kamers af, dat spreekt wel vanzelf!

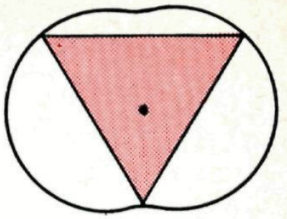


Fig. 3

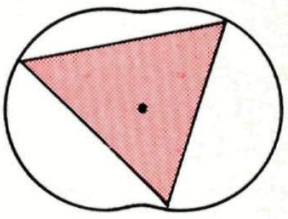


Fig. 4

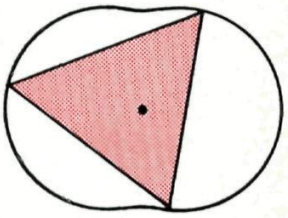


Fig. 5

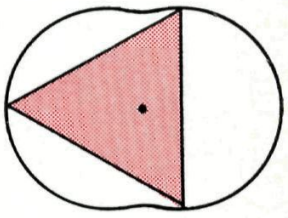


Fig. 6

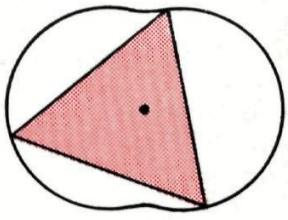


Fig. 7

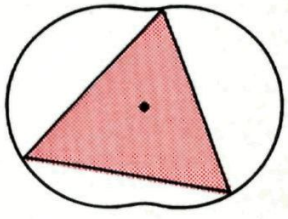


Fig. 8

Ziezo, als je dit een technisch verhaal wilt noemen dan doe je dat maar. Maar nu komt er dan ook beslist niets meer in diezelfde geest. Wil je er meer van weten, dan probeer je maar het nummer van augustus 1972 van de *Scientific American* te pakken te krijgen, want daar staat een helder artikel in over alle mogelijke technische com- en implicaties van deze Wankelmotor.
Hoe krijgt die driehoekige rotor nu zijn merkwaardige draaiende en schommelende beweging?

Wel, eigenlijk voert hij twee bewegingen tegelijk uit! In de eerste plaats roteert de gelijkzijdige rotor met een bepaalde, constante (hoek)snelheid om zijn zwaartepunt Z. Maar dat zwaartepunt blijft daarbij niet op zijn plaats liggen: het beschrijft met een andere constante hoeksnelheid een cirkel om een vast punt O.
Bij het bestuderen van deze situatie gaan we uit van figuur 17, waarin de rotor dezelfde stand heeft als in figuur 3 van de strip op de vorige bladzijden.
Roteren we de driehoek in tegenwijzerzin over 30°, terwijl we het zwaartepunt op zijn plaats laten, dan ontstaat figuur 22. Laten we het zwaartepunt een boog van 90° van zijn cirkel beschrijven zonder de driehoek te draaien, dan ontstaat figuur 23. En voeren we beide bewegingen tegelijk uit, dan ziet de eindtoestand eruit zoals in figuur 18. Die komt overeen met figuur 6 van de strip. De stripfiguren 4 en 5 tonen tussenstanden. In figuur 4 bijvoorbeeld is de driehoek over 10° gedraaid, terwijl het zwaartepunt een boog van 30° aflegde.

De rij figuren van 17 tot en met 21 zal nu wel duidelijk zijn. In elke volgende figuur is de driehoek over 30° gedraaid, terwijl het zwaartepunt van die driehoek zich tegelijk over 90° van zijn cirkel verplaatste.
Vergelijken we nu figuur 21 met figuur 17, dan zien we dat de driehoek weer op dezelfde plaats is teruggekeerd. Maar hij is er in een andere stand komen te staan. Als we de beweging voortzetten, dan slaat hoekpunt C nu de weg in die eerst door A werd gevolgd. En na een poosje zal ook B diezelfde weg gaan volgen. Zo hoort het ook bij een Wankel-rotor. Elk van de drie hoekpunten moet dezelfde kromme beschrijven, de cycloïde die de cilinderwand bepaalt.

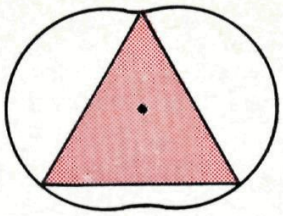


Fig. 9

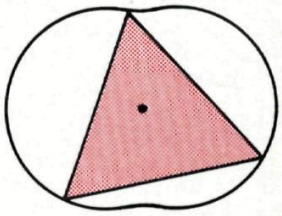


Fig. 10

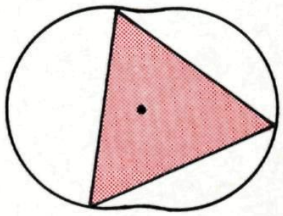


Fig. 11

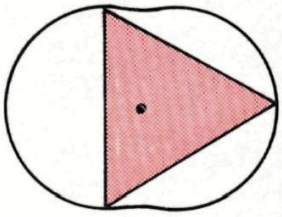


Fig. 12

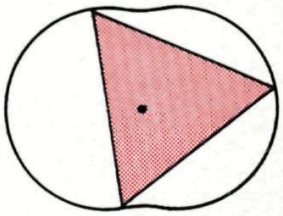


Fig. 13

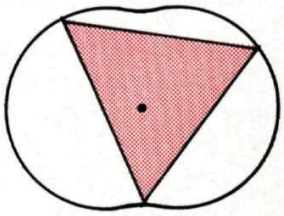


Fig. 14

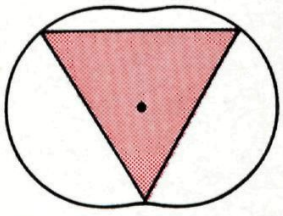


Fig. 15

Nu gebeurt dit beslist niet 'vanzelf'. We hebben heel doelbewust de hoeksnelheid van het zwaartepunt driemaal zo groot gemaakt als die van de driehoek, net als in technische uitvoeringen van de Wankelmotor. Daarmee bereiken we immers dat na een volledige omloop van het zwaartepunt de driehoek gedraaid is over 120° en dus weer dezelfde plaats inneemt.

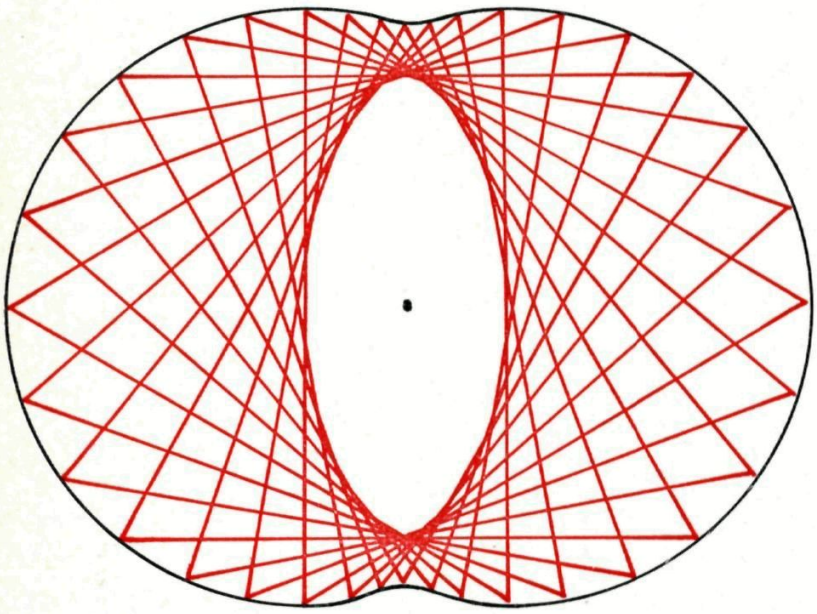


Fig. 16

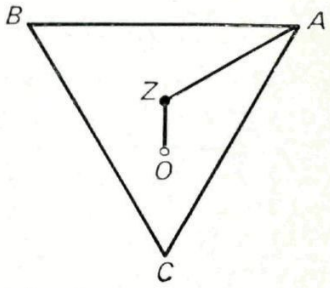


Fig. 17

Hetzelfde doel hadden we ook wel op andere manieren, met andere verhoudingen van de hoeksnelheden, kunnen bereiken. Bijvoorbeeld door drie omlopen van het zwaartepunt dezelfde tijd te laten duren als 240° draaien van de driehoek. Dan zou de hoeksnelheid van het zwaartepunt $4\frac{1}{2}$ maal zo groot zijn als die van de driehoek. Ben je niet nieuwsgierig hoe die cycloïde er dan gaat uitzien? Wel, wat let je om eens wat te gaan experimenteren!

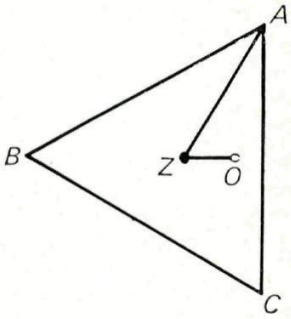


Fig. 18

Er is trouwens nog een andere experimenteermogelijkheid aanwezig: je kunt de verhouding van de lengten van de lijnstukken OZ en ZA veranderen. Ook daarbij staan je wel wat verrassingen te wachten wat de vorm van de bijbehorende cycloïden betreft. En dat heeft dan weer gevolgen voor de ontwerpers en constructeurs van de Wankelmotoren!

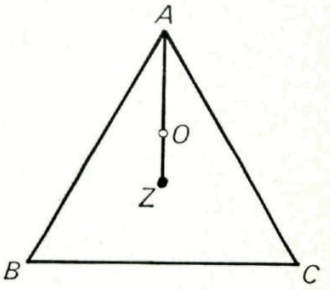


Fig. 19

Denk je bijvoorbeeld de figuren 17 en 19 eens met de punten O boven op elkaar gelegd. In figuur 17 ligt de zijde AB op een afstand $OZ + \frac{1}{2}ZA$ boven het vaste punt O. En in figuur 19 ligt het punt A op een afstand $ZA - OZ$ boven O. Als nu $ZA - OZ$ kleiner is dan $OZ + \frac{1}{2}ZA$ dan betekent dit dat bij het op elkaar passen van de twee figuren de A van figuur 19 binnen de driehoek ABC van figuur 17 komt te liggen! Anders gezegd: de driehoek van figuur 17 komt ten dele buiten de cycloïde te liggen. En dat is natuurlijk technisch onmogelijk (zoals de Meester uit de strip Kappie altijd zegt).
In de techniek van de Wankelmotoren is dus een eis, dat $ZA - OZ > OZ + \frac{1}{2}ZA$
en dit leidt tot $ZA > 4OZ$. Het blijkt nu uit berekeningen, die een beetje te moeilijk zijn om ze hier op te nemen, dat dit niet alleen nodig is maar ook voldoende om tot een uitvoerbare constructie te komen.
Toch zal men in de praktijk ZA niet veel langer maken dan $4OZ$. Van de verhouding ZA/OZ hangt namelijk de (vergeef het ons) compressie-verhouding van de motor af. En die wordt kleiner naarmate ZA/OZ groter wordt.

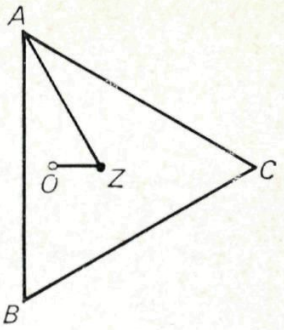


Fig. 20

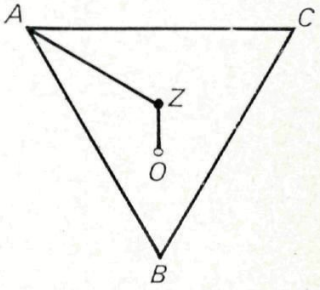


Fig. 21

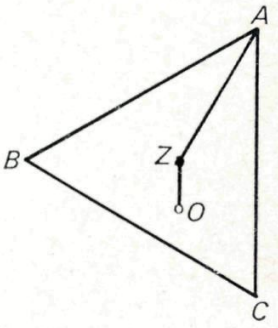


Fig. 22

En deze opmerking is dan de derde in dit artikel, die aanleiding zou kunnen zijn tot wat eigen werk! Je zou een stel vergelijkingen van de Wankel-cycloïde kunnen opstellen en dan met kennis van integraalrekening (als je die al verworven hebt!) de minimale en maximale oppervlakten van de drie kamers kunnen uitrekenen, om daarmee de compressieverhouding te berekenen. Theoretisch kan die in de buurt van 9 liggen; praktisch is dat echter niet zo best realiseerbaar.

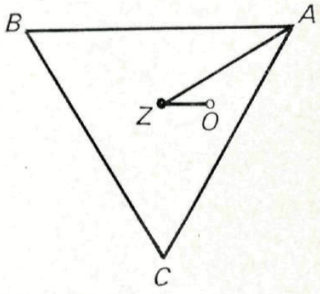


Fig. 23

De geschiedenis van de Wankelmotor begon in het jaar 1926. Een Spirograph zal de Duitse technicus Wankel niet bezeten hebben, want dat dure speelgoed was toen nog niet te koop. Maar we kunnen wel aannemen, dat hij op de een of andere manier door het spelen met twee gelijktijdig uitgevoerde cirkelbewegingen geboeid moet zijn geweest. Hij zou zijn uitvinding nooit gedaan hebben als hij naast zijn wiskundige kennis ook niet een dosis speelsheid had bezeten. Geloof je ook niet?

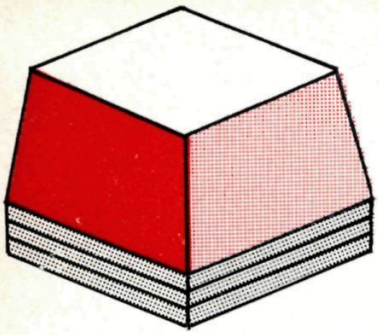


Fig. 24

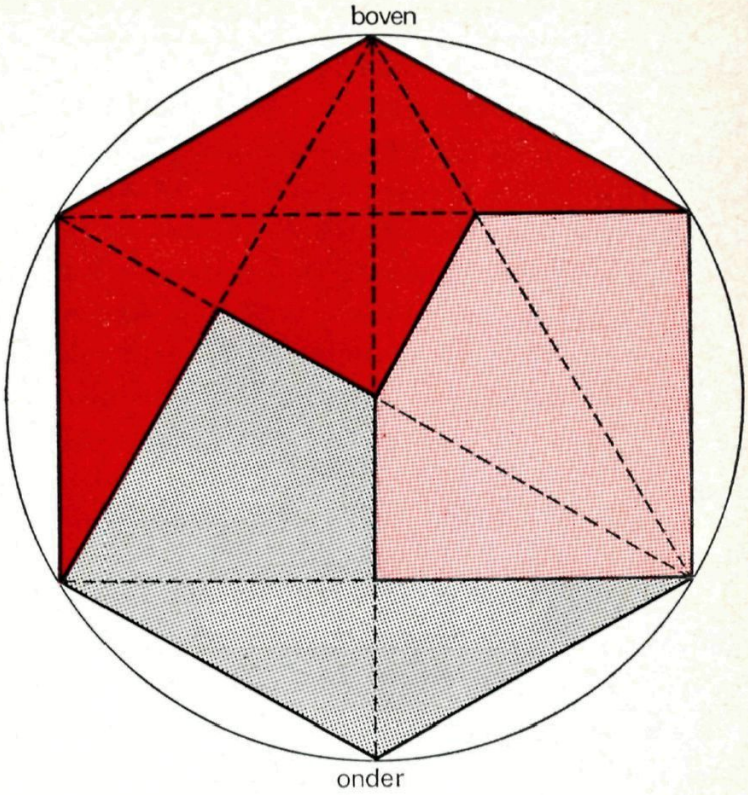


Fig. 25

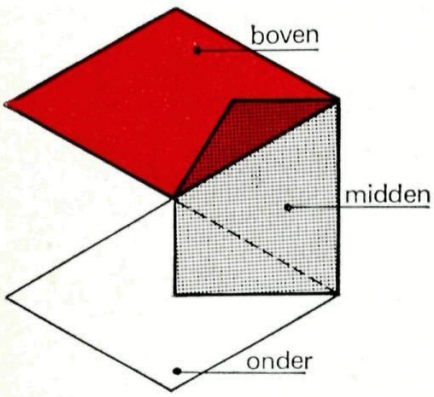


Fig. 26

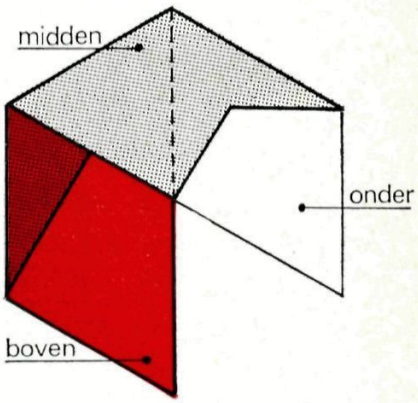


Fig. 28

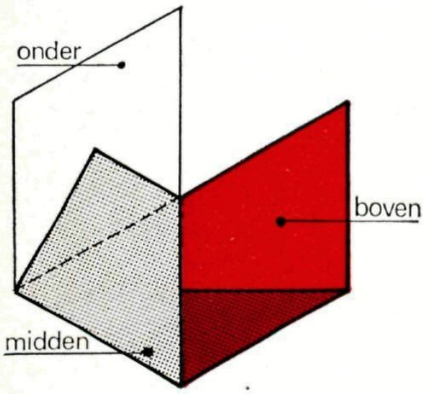


Fig. 27

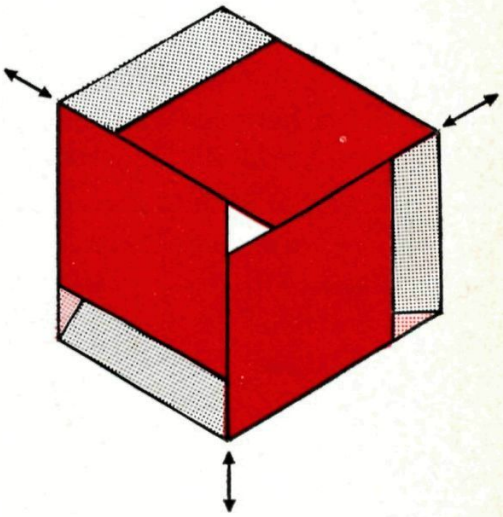


Fig. 29

De 'sandwich zeshoek' van Penrose°

In het voorgaande nummer hebben we een ruimtelijke puzzel van Penrose gemaakt, die uit drie congruente delen bestond.
In figuur 24 zie je nog een andere puzzel van Penrose: een drie-lagige zeshoek. De boven- en onderzijde bestaan elk uit drie ruiten. De middelste laag is echter op een ingewikkelde manier ingedeeld. Omdat elk puzzelstukje een deel van de bovenlaag, een deel van de middenlaag en een deel van de onderlaag bevat, en de middenlaag van elk deeltje verschillend is, zijn hier de drie puzzelblokjes (in tegenstelling tot de deeltjes van de 'triple-star') niet congruent. De vorm van de delen van de middenlaag vinden we in figuur 25. Construeer eerst een regelmatige zeshoek en trek de in figuur 25 aangegeven verbindingslijnen. Zo vind je vanzelf de exacte vorm van de deeltjes der middenlaag.
De boven- en onderlaag geeft geen problemen, die zijn opgebouwd uit ruiten.
Figuur 26, 27 en 28 laten zien hoe de uitgezaagde stukjes triplex op elkaar geplakt moeten worden, om de drie verschillende delen van de puzzel te krijgen. De middenlaag is steeds in dezelfde stand als in figuur 25 weergegeven.
Figuur 29 laat zien, hoe de zeshoek in- en uit elkaar geschoven moet worden.

Denkertjes

15 Van een oneindige rij getallen (zonder begin en zonder eind) zijn drie dingen gegeven:
   a het getal 1 komt in die rij voor,
   b er staan 50 opvolgende getallen in, die een som van 600 hebben,
   c elk getal van die rij is 1 minder dan het produkt van zijn twee buren.
   Kan je die rij getallen nu vinden?

16 Je hebt vijf lijnstukken. Bij elke keuze van drie lijnstukken uit dat vijftal kun je een driehoek maken, waarvan die drie de zijden zijn. Bewijs dat er onder al die driehoeken ten minste één scherphoekige is.
(Olympiade D.D.R.)

17 Construeer alle vijfhoeken met zijden 1, 1, $\sqrt{2}$, 2, 2 en hoeken 90°, 90°, 90°, 135°, 135° (in de een of andere volgorde). (Matematikai Lapok, Hongarije)

Meetkunde, anders dan anders[ooo]

Een vriend van mij is grafisch ontwerper. Hij kreeg laatst een opdracht voor een kleuterboekje. Je kent dat soort boekjes wel: fleurige bladzijden met plaatjes, die in een lange rij met elkaar verbonden zijn en op harmonika-manier binnen het omslag samengevouwen kunnen worden.
Dit boekje moest gebruikt worden bij het leren lezen. Op de bladzijden moesten letters afgedrukt worden. En dan ging het om het kennen van die letters en vooral om het herkennen ervan. Het was niet nodig, dat alle letters uit het alfabet er in voorkwamen.
Er werden wel een paar andere eisen gesteld om de ouders de gelegenheid te geven een vraag-en-antwoord-spelletje te spelen met de kleuters:

(I) Elk tweetal bladzijden moest precies één gemeenschappelijke letter bevatten.
(II) Bij elk tweetal in het boekje voorkomende letters moest er precies één bladzijde zijn, waar die twee letters allebei op staan.
(III) Bij de in het boekje voorkomende letters moesten er vier zijn, waarvan geen enkel drietal samen op één bladzijde stond.

De eisen kosten mijn vriend enkele uren probeer- en piekerwerk. Hij was er erg trots op tenslotte aan alle eisen voldaan te hebben. Het resultaat bevatte zeven bladzijden en zeven verschillende letters. Het zag er ongeveer zo uit:

A V T	V S K	T R K	V P R	A S R	P A K	S P T

Fig. 30

Er was inderdaad aan de drie eisen voldaan.
Op de bladzijden twee en vijf bijvoorbeeld staat de letter *S* gemeenschappelijk en zo heeft elk paar bladzijden een gemeenschappelijke letter. Het letterpaar *A*, *R* komt alleen maar op de bladzijde vijf voor en zo heeft elk letterpaar zijn eigen bladzijde. En geen enkel van de vier drietallen (*S*, *R*, *K*), (*P*, *R*, *S*), (*K*, *P*, *S*), (*K*, *P*, *R*) uit het viertal *K*, *P*, *R*, *S* is te vinden op een van de bladzijden.

Mijn vriend was niet zo'n klein beetje verwonderd toen ik hem vertelde, dat hij een meetkundeboek voor kleuters gemaakt had. Meetkunde gaat toch over punten en lijnen en zo, zei hij.
Maar ik legde hem toen uit, dat het ons wiskundigen weinig of niets kan schelen wat je je voorstelt bij die woorden. Bij 'punten' mag je best denken aan 'letters' en bij 'lijnen' aan 'bladzijden'.

Vlot werden toen de drie eisen vertaald in de meetkundetaal:

(I) Elk tweetal lijnen heeft precies één gemeenschappelijk punt.
(II) Door elk tweetal punten gaat precies één lijn.
(III) Er zijn vier punten, waarvan er geen drietal op één lijn ligt.

De eerste eis van dit drietal bracht oude herinneringen aan de schooltijd bij mijn vriend naar boven. Hij merkte op dat er in mijn meetkunde geen evenwijdige lijnen waren, dat deze meetkunde anders dan anders was.
Ik gaf dat toe en vertelde, dat er allerlei verschillende soorten meetkunde bestaan. De meetkunden, die aan de drie bovenstaande eisen (of axioma's) voldoen, heten 'projectieve meetkunden'. Die leer je niet op school. En dat is misschien wel een beetje jammer, want ze zijn erg boeiend. Een van de aardigheden is, dat er projectieve meetkunden zijn met slechts eindig veel punten en lijnen. En daarvan is dan dat kleuterboekje de kleinste.
Boeiend, daar twijfelde hij wel wat aan. Voor hem begon de meetkunde vroeger boeiend te worden, toen er cirkels op het toneel verschenen. En die miste hij hier wel een beetje. Dat je door elk drietal punten een cirkel kon maken, als die drie punten tenminste niet op een lijn lagen, dat was een verrassing geweest, herinnerde hij zich nog. En dan dat gedoe met raaklijnen en zo ....
Nou, en toen liet ik hem drie punten opzoeken, die niet op een lijn liggen. Hij koos het drietal A, S, T. We gingen de figuur bestuderen, die deze drie punten bevat en geen andere. We vonden, dat de bladzijde-lijnen 1, 5, 7 elk twee gemeenschappelijke punten met die figuur hebben. Ook dat de bladzijde-lijnen 2, 3, 6 elk een punt met die figuur gemeenschappelijk hadden en dus best raaklijnen genoemd mochten worden. En tenslotte bleek lijn 4 een lege doorsnede met de figuur A, S, T te hebben.
Zelfs mijn vriend was toen bereid toe te geven, dat er cirkels aanwezig waren in zijn zevenpunts-projectieve meetkunde.

Zou je je wat verder in de eindige projectieve meetkunden willen verdiepen? Dat kan best. Hieronder staan een paar suggesties voor eigen activiteiten.

1 Je zou eens kunnen nagaan dat de eindige projectieve meetkunde met zeven punten en zeven lijnen inderdaad, zoals hierboven gezegd werd, de kleinste is.
2 Waarschijnlijk lukt het ook wel om te bewijzen dat in zo'n meetkunde op elke lijn evenveel punten liggen en door elk punt even veel (net zo veel) lijnen gaan.
3 Daarna kan je de kleinste eindige projectieve meetkunde op één na opzoeken.
4 In een projectieve meetkunde, waarin op elke lijn n punten liggen, zoek je n punten die niet op een lijn liggen. Het is niet zo gek dat n-tal punten een 'cirkel' te noemen om verschillende redenen, die je best zelf kunt vinden.

Laat eens wat horen van de resultaten van je onderzoekingen.

Fig. 31

Met een trainer zoals hiernaast beschreven wordt zou je als rechtgeaard voetballer je hoofd verliezen!

De trainer kon niet tegen verliezen°

Er was weer eens een voetbalrel in ....
Nee, we verklappen niet in welk land die voetbalrel was. Maar in Nederland was deze in elk geval niet, wees daar maar zeker van. Bij ons zou zo'n rel gewoonweg niet kunnen gebeuren. Als je verder leest, dan zal je het daar mee eens zijn.
De reglementen van de bekercompetitie zijn bijvoorbeeld in dat land heel anders dan bij ons. Maar bovendien, zulke belabberde trainers hebben wij niet. Zo onsportief, zo kleinekinderachtig! Nee, bij ons is dat niet denkbaar. In de verste verte niet denkbaar. Gewoon onbestaanbaar. Punt.
Elke club speelde in die bekercompetitie precies één keer tegen elke andere club. En dat was dan een wedstrijd van d'r op of d'r onder. Gelijkspel werd door de reglementen uitgesloten. Zonodig werd de speeltijd verlengd om elke partij vijf penalty's te laten nemen. En dat gebeurde dan eventueel nog eens en nog eens, net zo lang tot er een winnaar was. Al moest het daardoor duren tot middernacht, tot de volgende morgen toe, dat maakte niks uit. Een winnaar moest er zijn. Zo is dat.
Zie je wel. Zo'n reglement hebben wij hier niet. Maar zo'n trainer is er bij ons ook niet te vinden. En om die trainer ging nou juist die hele rel. Want wat had die . . . (dit woord mag er van de redactie niet in). Ik zeg dus, wat had die . . . na afloop van de competitie tegen die journalist gezegd? Ik zal het hier volkomen l-e-t-t-e-r-l-ij-k herhalen. Hij zei:

'Goed, we hebben dus een paar wedstrijden verloren. Eigenlijk moest ik niet 'goed' zeggen, maar 'niet goed'. Want we hadden geen enkele van die wedstrijden behoeven te verliezen. Geen enkele, meneer'. Niet één!
Neem nou bijvoorbeeld die wedstrijd tegen Baltic, meneer. Die verloren we. Maar nou vraag ik u meneer. Hebben wij niet met 3–0 gewonnen van Transfer? En heeft Transfer niet met 2–1 gewonnen van Baltic? O, zo! Het was dus niet nodig geweest, dat wij na verlenging met 4–7 van Baltic verloren, nietwaar? Precies, dat bedoel ik nou net!
En zo is het nou ook met die andere wedstrijden die we verloren hebben. Precies net eender. Van hen moesten wij zo nodig verliezen. Maar we wonnen wel van iemand, die van hen gewonnen had. En dus hadden wij van hen moeten winnen, meneer. MOETEN, meneer, met hoofdletters. Van elke hen, waarvan wij zo nodig moesten verliezen, hadden we moeten winnen!
Wat zegt u, meneer? O, hoe dat komt? Nou zal ik u één ding zeggen meneer! Hebt u mij ooit binnen de lijnen gezien tijdens een wedstrijd? Juist meneer, ik stond erbuiten, ik wel. En wie waren er binnen de lijnen, meneer? Wie dragen er dus de verantwoordelijkheid? Dat is toch zo klaar als een klontje, meneer?'

Nou ja, zo ging het nog een onverkwikkelijke poos door in die televisie-uitzending. En daardoor barstte de rel los.
De kranten stonden de volgende dagen vol ingezonden stukken van supporters, die

het voor hun helden opnamen tegen de trainer, die niet tegen zijn verlies kon. Als leeuwen hadden ze gevochten voor elke overwinning! Als watergeuzen hadden ze elke nederlaag geprobeerd te voorkomen. Alles hadden ze gegeven, letterlijk alles! En nou werden ze door zo'n stuk ... van een trainer gewoonweg eventjes door de modder gesleurd. Vernederd! Onteerd!
Dat kan bij voetbal natuurlijk niet, dat is toch duidelijk? Een voetballer moet er tegen kunnen met zijn snuit in de modder te vallen. Maar er doorheen gesleurd te worden, dat hoeft hij niet te nemen. O, zo!
Het vuurtje werd lekker aangestookt door die éne sensatiekrant, die er in slaagde exclusieve blikseminterviews te krijgen met alle andere trainers. Wat die zeiden kwam allemaal op hetzelfde neer:

'Er is geen speld tussen de door onze collega genoemde feiten te krijgen. Elke verliswedstrijd kan hij wegredeneren door te wijzen op een club, waarvan zij wonnen en die dan ook nog won van die tegenstander waarvan zij verloren. Dat klopt gewoonweg allemaal als een bus.
Dat is bij onze club niet zo. Wij kunnen niet bij elke nederlaag dat smoesje gebruiken om ons schoon te praten. Maar we zouden dat ook niet willen, al zouden we die gelegenheid hebben, net als hij. Want wat onze jongens gepresteerd hebben ...'

En dan kwam die modder weer voor de dag.
Enfin. We zullen het verhaal hier maar staken, want het is al niet mooi en het wordt er niet mooier op. Want dat nou uitgerekend net de trainer van ..... zo kleinzielig deed!

Die stippeltjes vormen het probleem! Het gaat hier om een probleem uit de voetballogica. We vragen niet naar de naam van de club. Maar we vragen je om een BEWIJS! Zou je alsjeblieft eens even volkomen logisch willen beredeneren, dat op die stippeltjes ingevuld moet worden de naam van de bekerwinnaar? Ja wel, van de bekerwinnaar, van de club, die helemaal bovenaan de ranglijst kwam te staan!
De oplossing vind je in het volgende nummer.

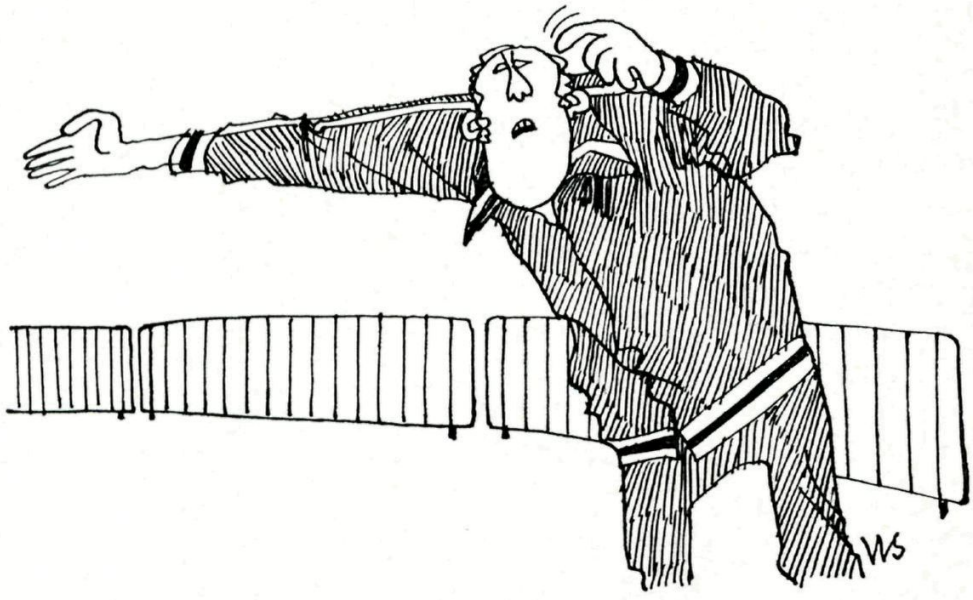


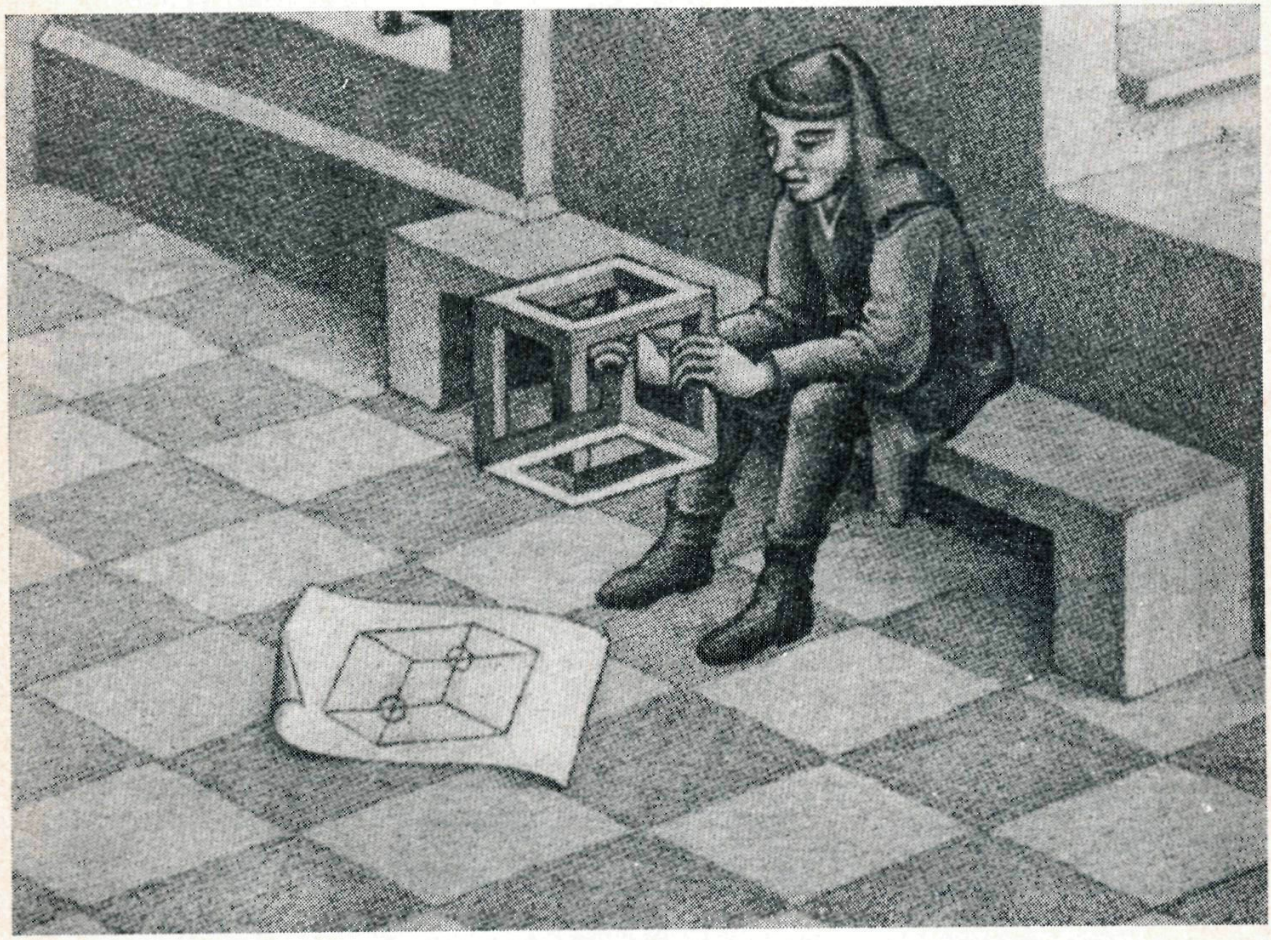
Fig. 32

Een ruimtelijk gesloten kuboïde°

Figuur 33 toont een detail van de litho BELVEDERE (1958) van M. C. Escher. De jongeman houdt een vorm in de hand, die lijkt op een kubus, de ribben ervan zijn echter op een vreemde manier met elkaar verbonden. We zullen deze, op een kubus lijkende vorm, een kuboïde noemen.

Hoe we tot een kuboïde kunnen komen zien we in figuur 34. In fig. 34*a* zijn 12 lijnstukken getekend. We kunnen ze echter moeilijk zien als een vlakke vorm. Ons voorstellingsvermogen geeft kennelijk de voorkeur aan een ruimtelijke interpretatie en we zien een kubus. De ruimtelijke vorm die we zien is echter niet stabiel: de vlakke figuur laat twee voor de hand liggende interpretaties open, naar gelang we punt *P* dichter bij ons

Fig. 33



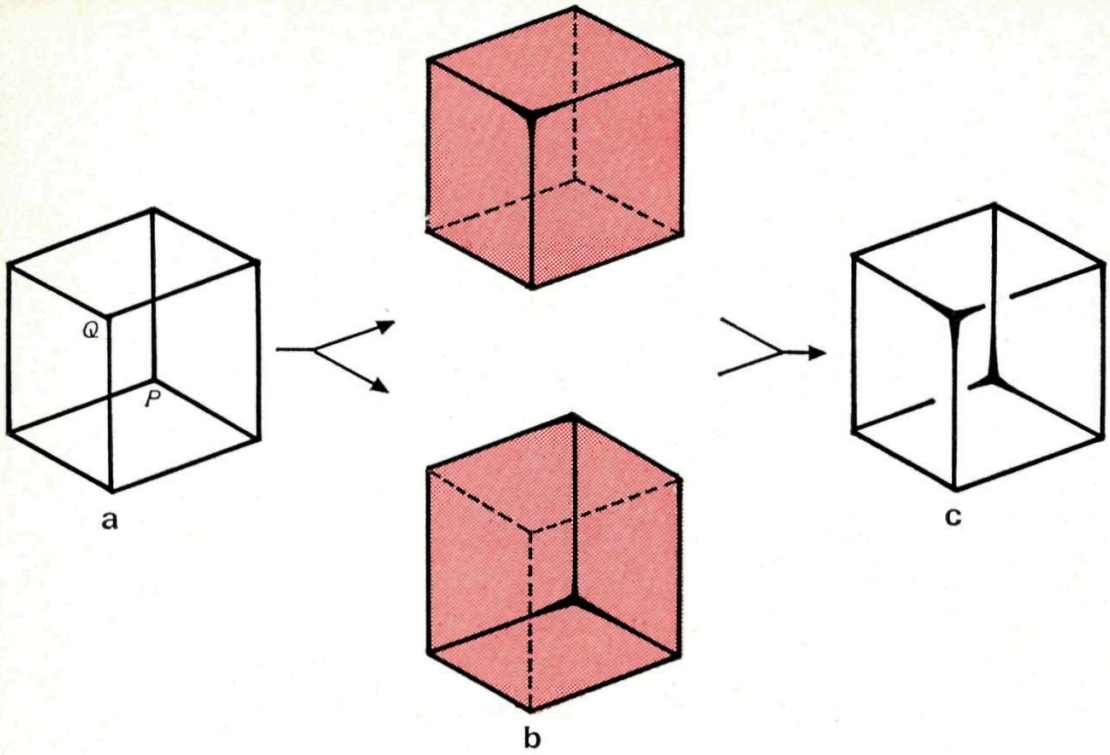


Fig. 34a, b, c

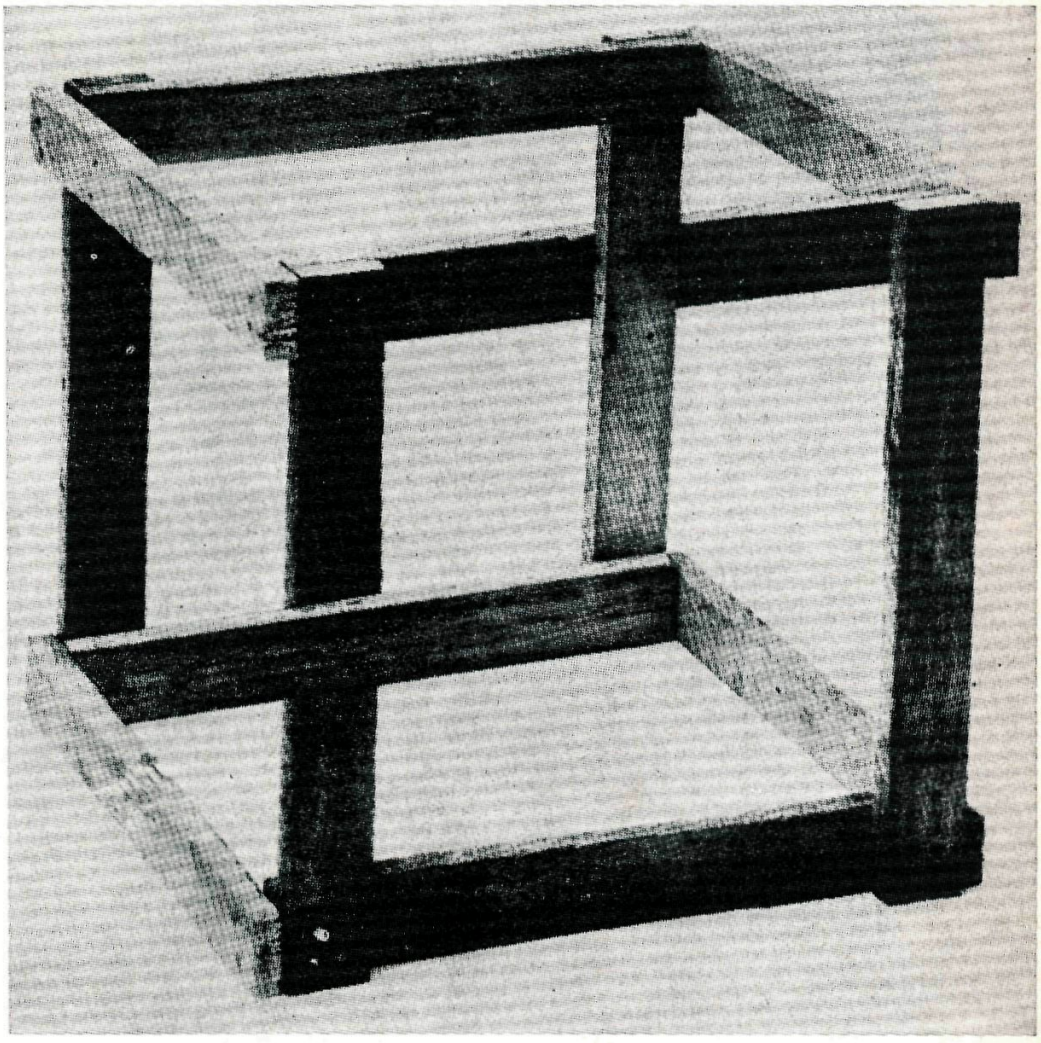
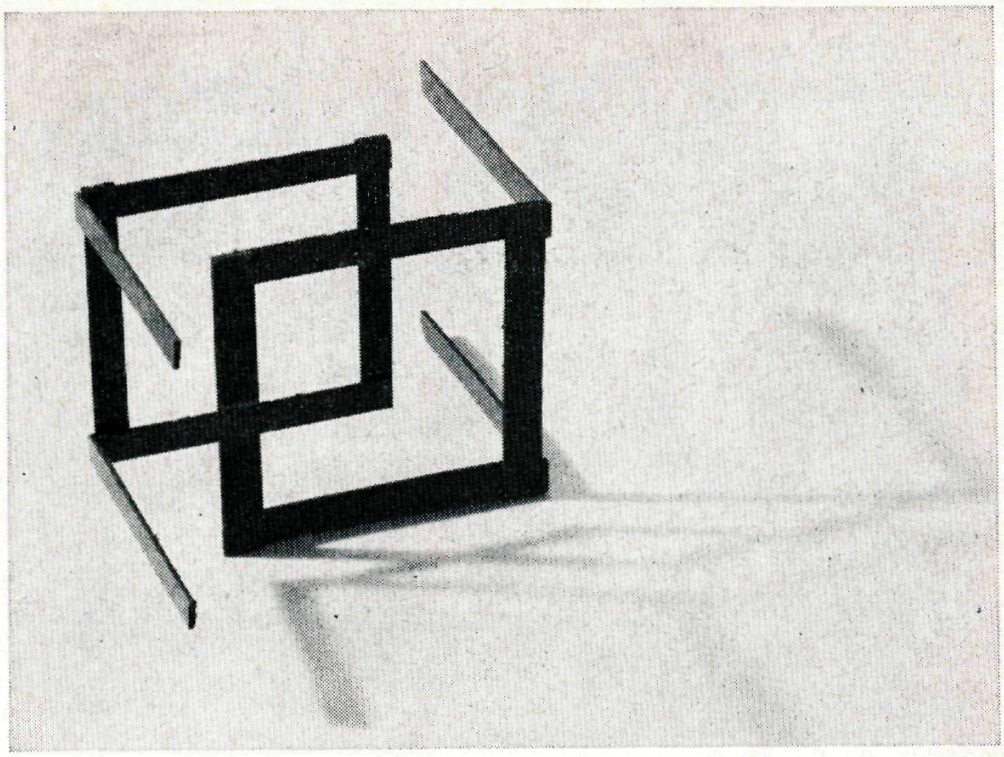


Fig. 35

Fig. 36



denken dan Q, dan wel Q dichter bij dan P. Als we enige tijd naar figuur 34*a* kijken zien we afwisselend deze twee interpretaties. In figuur 34*b* is door accentuering van enige details de interpretatie stabiel gemaakt. Daar zien we dan ook duidelijk twee verschillend georiënteerde kubussen.

Nu is het ook mogelijk door accentuering blijvende verwarring te stichten (figuur 34*c*). Hierin is een deel van de ene interpretatie en een deel van de andere interpretatie verenigd en er is een kuboïde ontstaan.

Nu is het eenvoudig om zo'n kuboïde in een plat vlak te tekenen, maar het is helemaal de vraag of deze vorm ook opgevat kan worden als de projectie van een ruimtelijke figuur, m.a.w. bestaat de kuboïde ook als ruimtelijke figuur.

Een bekende realisatie is die van de oogarts dr. Cochran (figuur 35). Het ziet er indrukwekkend realistisch uit. Als de ruimtelijke constructie echter vanuit een ander standpunt gefotografeerd wordt, zien we twee losse stukken (figuur 36).

Om te komen tot één ruimtelijk gesloten figuur, gaan we uit van figuur 37. We zien duidelijk de kuboïde, maar we stellen ons nu voor, dat $ABCGHE$ een vlakke zeshoek is, die op de grond ligt. Van de punten D en F

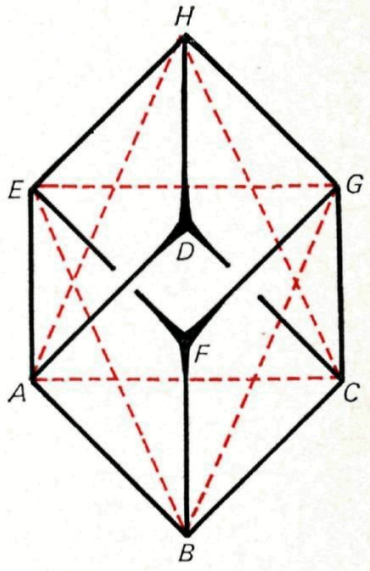


Fig. 37

nemen we aan, dat ze boven het vlak van tekening liggen. We kunnen nu *F* door stokjes verbinden met *B*, *G* en *E*, zodat er een viervlak ontstaat met *BGE* als grondvlak en *F* als top. Op dezelfde manier verbinden we *D* met *A*, *C* en *H*.
Bij de practische uitvoering van dit idee merken we dat de opstaande stokjes elkaar in de weg zitten. Deze moeilijkheid is op te lossen door niet vast te houden aan een vlakke zeshoek *ABCGHE*. Enige oplossingen in die richting zijn gegeven door D. Baas Becking, een cineast uit Canberra. Ze leiden tot bijzonder fraaie gesloten ruimtelijke vormen, die vanuit één bepaald ge-

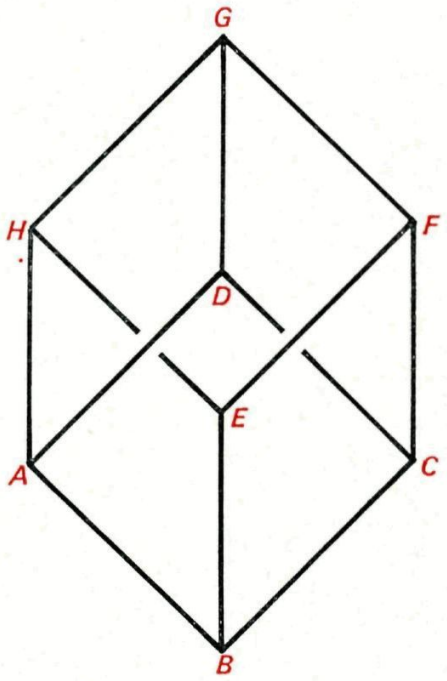


Fig. 38

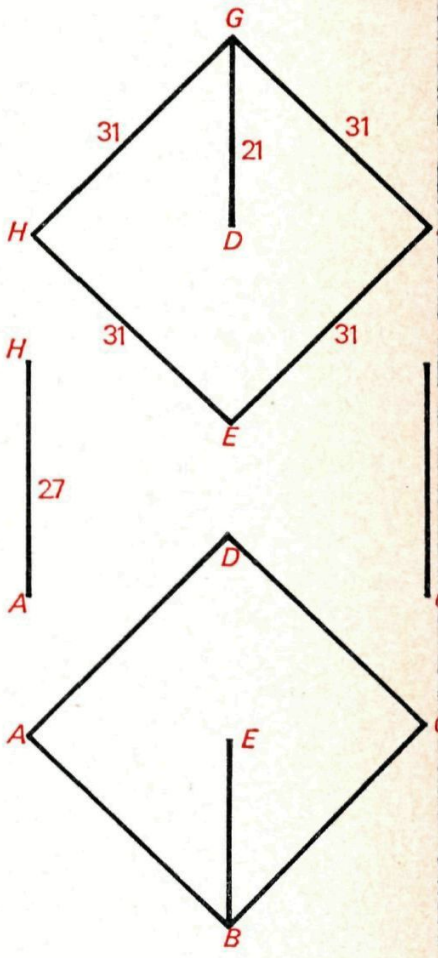


Fig. 39

Fig. 38 *Zo ziet het model er uit als een kuboïde.*
Fig. 39 Het *model bestaat uit vier losse stukken: het vierkant ABCD, waaraan een stukje diagonaal BE. Alle genoemde punten liggen in één vlak. Hetzelfde geldt voor het vierkant HEFG en het stukje diagonaal GD. Als men het vierkant ABCD bij B nog open laat, kan het andere vierkant erin gestoken worden. De punten EE en DD worden dan tegen elkaar aangebracht en beide figuren worden zo gedraaid, dat A boven H en C onder F komt. Daarna worden de losse draadstukken AH en FC op de juiste plaatsen vastgesoldeerd aan de vierkanten.*

zichtspunt een volmaakte kuboïde te zien geven. In mini-uitvoering heeft D. Baas Becking ze reeds toegepast als oorhangers. Bij de onderschriften van de volgende figuren staan de constructievoorschriften van één der modellen. De opgegeven maten zijn in millimeters; vanzelfsprekend kan het model vergroot of verkleind worden.
Wie wat kan solderen, kan zijn eerste exemplaren het beste maken van dik alpaca-draad of koperdraad. Grote gedeelten kunnen dan eerst met een tang in vorm worden gebogen, zodat nog maar weinig soldeerplaatsen overblijven.

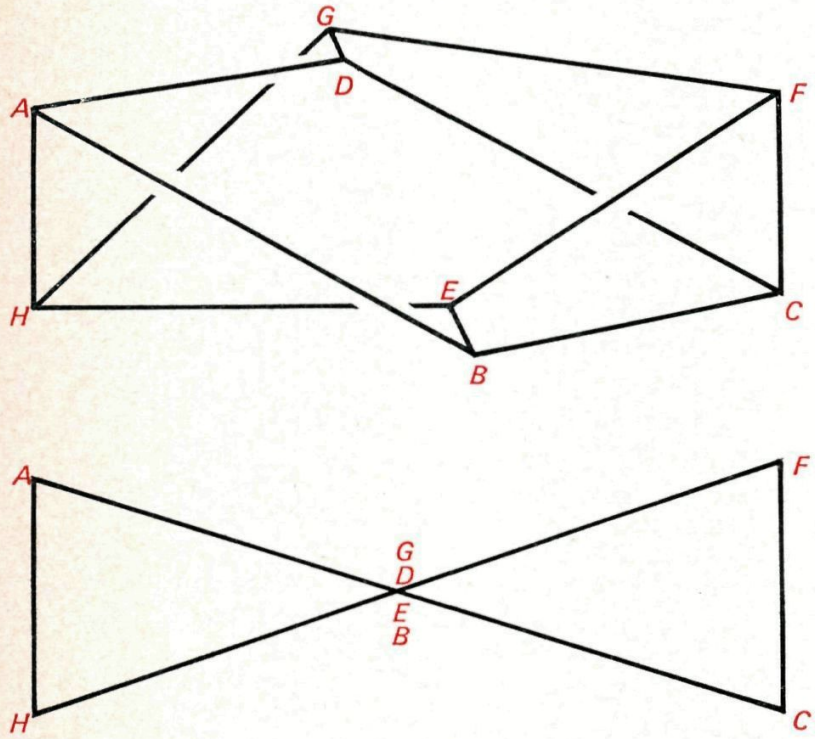


Fig. 40 *Onder een bepaalde hoek zien we de ruimtelijke figuur zoals hier is afgebeeld.*
Fig. 41 *Als we de figuur zo kantelen, dat de we punten B, E, D en G in elkaars verlengde zien, krijgen we dit beeld.*

Een speelkaartenprobleem Latijnse vierkanten°

G. Krooshof

In een spel speelkaarten komen vier azen, vier heren, vier vrouwen en vier boeren voor. Het is mogelijk deze zestien kaarten zo in een vier-bij-vier-schema te leggen, dat in elke rij en elke kolom van het schema juist één aas, één heer, één vrouw en één boer ligt. Probeer het maar eens voordat je naar de volgende figuren kijkt.

In de figuren 42 en 43 stelt *A* een aas, *H* een heer, *V* een vrouw en *B* een boer voor. Je ziet dat in beide figuren aan de hierbovengenoemde eis is voldaan.

A	H	V	B
H	V	B	A
V	B	A	H
B	A	H	V

Fig. 42

A	H	V	B
H	A	B	V
V	B	A	H
B	V	H	A

Fig. 43

We hebben in deze twee figuren nog geen rekening gehouden met de 'kleuren' van de kaarten, het probleem wordt moeilijker als de eis wordt gesteld dat in elke rij en elke kolom niet alleen van elke soort kaart, maar ook van elke kleur kaart er juist één voorkomt.
Dit probleem kan worden opgelost door een schema te maken waarin de vier kleuren aan de gestelde eis voldoen en dat op een van de schema's in figuur 42 en 43 te leggen. In figuur 44 stelt *s* voor schoppen, *h* harten, *r* ruiten en *k* klaver.

s	h	r	k
r	k	s	h
k	r	h	s
h	s	k	r

Fig. 44

Leg je nu het schema van figuur 44 op dat van figuur 42, dan zul je al gauw bemerken, dat deze twee schema's samen niet een juiste oplossing geven. Van enkele kaarten zouden er twee moeten voorkomen, bijvoorbeeld tweemaal schoppenaas, tweemaal

hartenaas, tweemaal ruitenvrouw en tweemaal klavervrouw.
De schema's van de figuren 43 en 44 leveren samen wel een goede oplossing:

sA	*hH*	*rV*	*kB*
rH	*kA*	*sB*	*hV*
kV	*rB*	*hA*	*sH*
hB	*sV*	*kH*	*rA*

Fig. 45

De schema's van de figuren 42 tot en met 45 worden wel Latijnse vierkanten genoemd en wel van de vierde orde, omdat ze vier maal vier elementen bevatten.

Latijnse vierkanten kunnen op allerlei terrein een rol spelen. Stel bijvoorbeeld dat op een proefboerderij vier soorten tarwe onderzocht worden, noem ze *A*, *H*, *V* en *B*. Worden ze op vier stroken naast elkaar uitgezaaid, dan kan kwaliteitsverschil van de bodem in deze stroken invloed op de opbrengst hebben. Die kwaliteitsverschillen worden minder van invloed wanneer de vier tarwesoorten uitgezaaid worden volgens een der schema's van figuur 42 of figuur 43.

°°In de rest van dit artikel wordt besproken hoe je verschillende Latijnse vierkanten kunt maken van orde vijf. Daarvoor moeten we eerst een klein uitstapje maken naar een onderdeel van de algebra, dat heet *rekenen naar de modulus 5* of ook wel kortweg *rekenen modulo 5*.
Bij het rekenen modulo 5 verdelen we de verzameling van de natuurlijke getallen in vijf deelverzamelingen. In de eerste daarvan stoppen we alle getallen die bij delen door 5 het getal 0 als rest laten. Dat zijn dus onder andere 0, 5, 10, 15, 20, enz. De tweede deelverzameling bevat alle getallen die bij delen door 5 het getal 1 als rest laten.
Dus bijvoorbeeld 1, 6, 11, 16, enz. Het zal nu wel duidelijk zijn dat de getallen van de derde deelverzameling 2 als rest laten, die van de vierde 3 als rest en die van de vijfde 4 als rest, telkens bij delen door 5.
Deze vijf klassen geven we aan door rode getallen 0, 1, 2, 3 en 4.

0	1	2	3	4
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29

enz.

Fig. 46

Met de optelling $2 + 4$ bedoelen we nu:
Pak een of ander getal uit de verzameling 2 bijvoorbeeld 17 en tel er een van de getallen uit de verzameling 4 bij op, bijvoorbeeld 9. Je krijgt dan de optelling
$17 + 9 = 26$.
26 zit in de deelverzameling 1, daarom zeggen we $2 + 4 = 1$
Ga even na dat ieder getal uit verzameling 4 opgeteld bij een willekeurig getal uit de verzameling 2 een uitkomst oplevert die in verzameling 1 zit.

Voor het optellen modulo 5 kan nu de volgende tabel worden gegeven:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Fig. 47

Latijnse vierkanten van de orde 5 kunnen we maken door uit te gaan van het volgende schema waarin zestien getallenparen (x, y) staan.
Daarin zijn x en y elementen van de verzameling $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

(0, 4) (1, 4) (2, 4) (3, 4) (4, 4)

(0, 3) (1, 3) (2, 3) (3, 3) (4, 3)

(0, 2) (1, 2) (2, 2) (3, 2) (4, 2)

(0, 1) (1, 1) (2, 1) (3, 1) (4, 1)

(0, 0) (1, 0) (2, 0) (3, 0) (4, 0)

Fig. 48

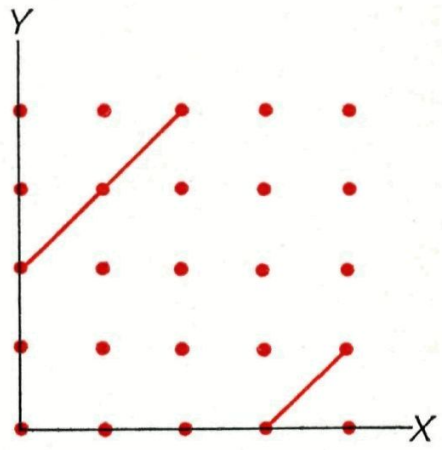


Fig. 49

Je kunt de getallenparen als coördinaten van punten beschouwen. Zie de figuur naast het schema. Deze punten liggen op 'rechte lijnen'.
Getekend is de 'lijn' met vergelijking

$$y = x + 2 \quad \text{(mod. 5)}$$

Stel je de punten van de lijn met vergelijking $y = x$ (mod. 5) voor door P, die van de lijn met vergelijking $y = x + 1$ (mod. 5) door Q, enz. dus R van $y = x + 2$, S van $y = x + 3$ en T van $y = x + 4$ (alles mod. 5) dan krijg je het volgende schema, dat een Latijns vierkant van de orde vijf is.

T	S	R	Q	P
S	R	Q	P	T
R	Q	P	T	S
Q	P	T	S	R
P	T	S	R	Q

Fig. 50

Ga je uit van de vergelijkingen $y = 4x$, $y = 4x + 1$, $y = 4x + 2$, $y = 4x + 3$ en $y = 4x + 4$ (alle vergelijkingen modulo 5) dan krijg je het volgende Latijnse vierkant:

T	P	Q	R	S
S	T	P	Q	R
R	S	T	P	Q
Q	R	S	T	P
P	Q	R	S	T

Fig. 51

Leggen we de vierkanten van figuur 50 en figuur 51 op elkaar dan ontstaat er opnieuw een Latijns vierkant. (In figuur 52 is dit zo gezet dat de letters van figuur 50 als kleine letters zijn gegeven, om ze te onderscheiden van die van figuur 51.)

tT	sP	rQ	qR	pS
sS	rT	qP	pQ	tR
rR	qS	pT	tP	sQ
qQ	pR	tS	sT	rP
pP	tQ	sR	rS	qT

Fig. 52

°°°Ieder van de 'punten' in dit schema is namelijk snijpunt van een lijn met vergelijking $y = 4x + k$ en een lijn met vergelijking $y = x + l$ (beide vergelijkingen modulo 5). Als voorbeeld berekenen we het snijpunt van de lijnen $y = 4x + 4$ en $y = x + 1$.

In dit snijpunt is $4x + 4 = x + 1 \pmod 5$

$\Leftrightarrow \quad 3x + 3 = 0 \pmod 5$

$\Leftrightarrow \quad 3x = 2 \pmod 5$

We moeten nu voor x een zodanig getal vinden dat het drievoud daarvan zit in de deelverzameling van de natuurlijke getallen waartoe ook 2 behoort. Kiezen we $x = 4$ dan is aan deze voorwaarde voldaan.
Bij $x = 4$ behoort $y = 0$.
Het gezochte snijpunt is dus het punt (4, 0). Kijk in figuur 48 waar het ligt en dan in figuur 52 hoe het daar is aangeduid.
In figuur 50 worden de punten die liggen op de lijn $y = x + 1$ aangegeven door Q. In figuur 51 zijn de punten van de lijn $y = 4x + 4$ aangegeven door T. Het punt (4, 0) is in figuur 52 aangegeven door qT. Dat klopt dus.

Tenslotte:
Rekenen we modulo 6 dan kunnen we Latijnse vierkanten maken van de orde zes. Een combinatie van twee daarvan levert echter geen Latijns vierkant op. Proberen we bijvoorbeeld het snijpunt te berekenen van de lijnen met vergelijkingen $y = 4x + 4$ en $y = x + 1$ (beide modulo 6) dan vinden we niet één maar drie snijpunten, nl. de punten (1, 2), (3, 4) en (5, 0).

Leonard Euler (1707–1783) stelde het volgende probleem op:
Hoe kan men 36 officieren van 6 regimenten en 6 rangen in een vierkant opstellen, zodat elke rij en elke kolom juist één officier van elke rang en van elk regiment bevat? Het is niet mogelijk aan deze eis te voldoen. Voor zestien officieren van vier rangen en vier regimenten zou het mogelijk geweest zijn. Ook voor vijfentwintig officieren van vijf rangen en vijf regimenten.

Denkertjes

18 Een auto is twee maal zo oud, als de banden waren, toen de auto zo oud was, als de banden nu zijn. Als de banden zo oud zijn, als de auto nu is, zal de leeftijd van de auto en de banden samen $11\frac{1}{4}$ jaar zijn. Hoe oud zijn auto en banden nu?

19 Een klok heeft 6 seconden nodig om 6 uur te slaan. Hoeveel seconden heeft die klok nodig om 12 uur te slaan?

20 Binnen een cirkel met straal 3 cm liggen 17 punten. Bewijs dat er twee bij zijn waarvan de afstand kleiner dan 2 cm is. (Matematikai Lapok, Hongarije)

Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 15 januari 1973 worden ingezonden naar het redactiesecretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.

Inhoud:

In memoriam M. C. Escher 25

De meetkunde van de Wankelmotor °° 27

De 'sandwich zeshoek' van Penrose ° 33

Meetkunde, anders dan anders °°° 34

De trainer kon niet tegen verliezen ° 37

Een ruimtelijk gesloten kuboïde ° 39

Een speelkaartenprobleem. Latijnse vierkanten ° 44

Denkertjes 26, 33, 48

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Amersfoort.
A. F. VAN TOOREN, Leusden-C.
R. H. PLUGGE, Amstelveen.
G. A. VONK, 's-Gravenhage.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, besteld via één der docenten, *f* 4,50 per jaargang. Voor anderen *f* 7,00.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58. Groningen.
Bij elke 20 abonnementen of gedeelten ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.