

jaargang 12 1972/1973



# Pythagoras

3

wiskundetijdschrift  
voor jongeren







# Het meetsnoer rond de aarde°

In het jaar 1500 verliet een koetsje Parijs in noordelijke richting. Een zekere Fernel leunde uit het wagentje met zijn ogen strak gericht op een van de wielen. Omstanders staarden naar hem en straatjongens schreeuwden hem na, maar zijn blik bleef hangen aan het wiel. Zijn lippen bewogen terwijl hij alsmaar bleef tellen. Wat deed deze zonderling?

Hoe vreemd het ook mag klinken, hij mat de aarde.

Eigenlijk heeft de mens zich van oudsher afgevraagd wat de grootte van de aarde is, hoewel hij eeuwenlang de gedachte om de aarde echt te meten heeft verworpen.

## Eratosthenes

Pas nadat een idee over de bolvorm van de aarde was ontstaan bij de oude Grieken begonnen plannen tot meten te rijpen. Ongeveer 200 voor Chr. lukte het Eratosthenes een berekening te maken voor de omtrek van de aarde en hij kwam op 250.000 stadiën.

Om nu na te kunnen gaan hoe goed of slecht het resultaat van Eratosthenes wel was, zullen we toch de lengte van de stadie uit die tijd moeten kennen. Het enige wat we helaas weten is, dat de stadie verdeeld werd in 600 voet. Maar hoe groot is de Griekse voet drie eeuwen voor Christus? Toen het stadion van Olympia in Griekenland werd opgegraven, bleek het zeshonderdste deel overeen te komen met schoenmaat 47. We kunnen moeilijk aannemen, dat de Grieken op zulk een grote voet leefden. Maar dit stadion heet dan ook uitgezet te zijn door de halfgod Hercules persoonlijk.

Metingen aan de honderdvoetige tempel: het Parthenon, en de piramide van Cheops waarvan Herodotus de basislengte in voeten noemt, geven eveneens verschillende lengten voor de Griekse voet. Nemen we de stadie op 185 m (van Dale's handwoordenboek, 4e druk), wat allerm minst zeker is, dan komt Eratosthenes' schatting van de aardomtrek op ruim 46.000 km.

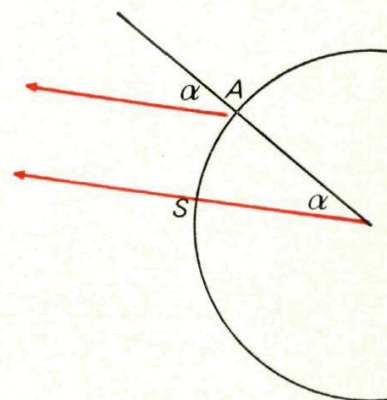


Fig. 1.



Hoe Eratosthenes' meting tot stand kwam, was in het kort zo.

Het was bekend dat op een bepaalde dag van het jaar om 12 uur de zon precies boven Syene in Zuid Egypte stond, omdat deze daar zonder schaduw op de bodem van een diepe put scheen. Op hetzelfde moment stond in Alexandrië de zon een hoek  $\alpha$  uit het zenith (zie fig. 1.). Eratosthenes bepaalde deze hoek als  $\frac{1}{50}$  van een cirkelomtrek, zodat ook de afstand Syene tot Alexandrië het vijftigste deel van de aardomtrek was. De nauwkeurigheid van de uitkomst is natuurlijk in hoge mate afhankelijk van de nauwkeurigheid waarmee de afstand van Syene tot Alexandrië bekend was.

Elke landmeting op aarde moet uitgaan van een bekende afstand, de basislijn. En als er geen basislijn beschikbaar is, moet deze alsnog gemeten worden.

De basislijn Alexandrië-Syene ( $AS$  in de figuur) werd door Eratosthenes te groot aangenomen.

Berekeningen van latere waarnemingen, of geknoei met de cijfers van Erathostenes, geven resultaten te zien, die weer veel te laag uitvallen, zoals 240.000 stadiën (ruim 33.000 km). Jammer genoeg accepteerde ook de grote Ptolemeus deze gekrompen schatting en zo bleef de wereld te klein totdat na Columbus' reis bleek dat Amerika niet het verwachte Indië was en de wereld dus weer groeide in de gedachten van de mensen.

### Kalief Almamoun

Na de activiteiten van de Grieken duurde het tot 800 na Chr. voordat weer pogingen in de richting van het meten van de aarde werden gedaan. In Arabië dit keer, in opdracht van Kalief Almamoun. Hij verzamelde twee ploegen astronomen die in de vlakten van Mesopotamië een basislijn zouden uitzetten. Er waren hier geen bergen die metingen konden verstoren. Vanuit een zeker startpunt zou de ene ploeg in noordelijke en de andere ploeg in zuidelijke richting een afstand uitzetten totdat aan het eindpunt een afwijking van  $1^\circ$  van het oorspronkelijke zenith kon worden geconstateerd. De afstand  $BC$  tussen de eindpunten behoefde alleen maar met 180 vermenigvuldigd te worden om de omtrek van

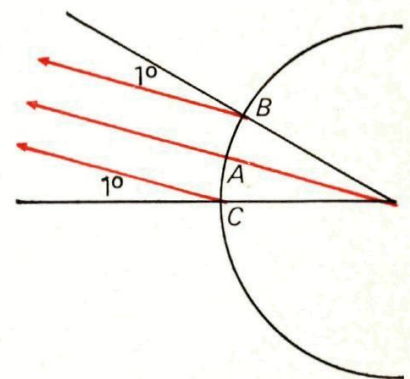


Fig. 2



de aarde weer te geven. Bovendien had de kalief een controle op het werk van zijn ploegen, omdat de afstanden  $AB$  en  $AC$  ongeveer gelijk moesten zijn. Nu bleek het verre van gemakkelijk met behulp van meet-snoeren en primitieve instrumenten een afstand van 110 km in rechte lijn uit te zetten. De lengten van  $AB$  en  $AC$  bleken zoveel te verschillen dat het vertrouwen van kalief Almamoun in astronomen en in wiskunde voor zijn verdere leven diep geschokt was.

Daarna verstreken weer eeuwen voordat een nieuwe meetpoging werd ondernomen. In 1500 telde Fernel het aantal wielomwentelingen, vermenigvuldigde dat met de omtrek van het wiel en verkreeg daarmee een basislijn waarvan de lengte redelijk bekend was. Zijn hoekmetingen vielen ook nogal gelukkig uit, zodat zijn resultaat niet slecht genoemd kan worden.

### Snellius

In 1580 werd in Leiden het wonderkind Willebrord Snell (Snellius) geboren. Op twaalfjarige leeftijd bleek hij de toenmalige wiskunde onder de knie te hebben en hij had daarna nog 34 jaar om bezig te zijn met het verder ontwikkelen van de wetenschap. Het vlakke land van Holland gaf alle gelegenheid tot het uitzetten van de goede basislijn. Hij wijdde daar bovendien de nieuwe methode van landmeten in: de triangulatie.

Ergens tussen Leiden en Zoeterwoude zette hij een baan  $AB$  uit, een kilometer of iets meer, en toen hij die gemeten had, borg hij zijn meetketen op. Van de uiteinden van zijn basis trok hij lijnen naar de toren van het Leidse Raadhuis ( $C$ ) en de kerktoeren van Zoeterwoude ( $D$ ) – denkbeeldige lijnen, die denkbeeldige driehoeken vormden, en met een toestel, waarvan sterrenkundigen zich plachten te bedienen, mat hij de hoeken van deze figuren bij  $A$  en  $B$ .

De driehoeken  $ABC$  en  $ABD$  zijn nu volledig bepaald en daarna  $\triangle CAD$  ook.

Hieruit blijkt dat Snellius uit deze gegevens de afstand Leiden-Zoeterwoude kon berekenen. Nu beklom Snellius de torens van Leiden en Zoeterwoude, trok nieuwe lijnen, naar Wassenaar en Voorschoten, en mat in nieuwe driehoeken de hoeken, en in Wassenaar en



Fig. 3 Snellius



Voorschoten deed hij hetzelfde, om Den Haag aan te sluiten aan zijn net. En verder reisde hij: naar Gouda, Dordrecht, Rotterdam, van de ene kerktoeren naar de andere, om hoeken te meten en afstanden te berekenen. Ook Utrecht kwam aan de beurt, Montfoort, Woerden, Haarlem, Amsterdam, Alkmaar, Bommel, Willemstad, Breda, Bergen op Zoom. En toen Snellius in Oudewater kwam, bezocht hij daar zijn familie en zijn moeder, en twee bladzijden van zijn relaas wijdt de Bataafse Eratosthenes aan deze plaats, waar zijn vader geboren was, en hij vertelt tussen de berekeningen door van Oudewaters lotgevallen in de tachtigjarige oorlog.

38.650 kilometer was volgens Snellius de omtrek der aarde, vier percent minder dan volgens moderne metingen. Misschien kunnen je die vier percent niet veel schelen. Toch was dit resultaat een schrale beloning voor veel moeite: Snellius immers heeft zijn hoeken met veel groter nauwkeurigheid dan vier percent gemeten. Zijn hoekmetingen en afstandsbe-  
palingen, die alles overtroffen wat vóór hem gepesteed was, werden door een onbegrijpelijke fout geschonden: de poolhoogten, die hij te Alkmaar en Bergen op Zoom bepaalde, waren zeer onnauwkeurig. Misschien heeft hij daar met een ondeugdelijk instrument gewerkt – dat lijkt de enig mogelijke verklaring.

En daarmee lijkt het eind van het verhaal gekomen. Instrumenten en metingen kunnen nog wat nauwkeuriger worden, maar nieuwe ontwikkelingen lagen er niet meer in het verschiet. Totdat de Franse astronoom Richer naar het eiland Cayenne in Guiana reisde. Hij had een klok bij zich die in Parijs een wonder van nauwkeurigheid was geweest, maar in Cayenne bleek hij  $2\frac{1}{2}$  minuut per etmaal achter te lopen. Ook andere mensen hadden dit verschijnsel wel geconstateerd maar er verder geen aandacht aan geschonken. Toen het omstreeks 1670 onder astronomen bekend werd en bovendien door hen werd gecontroleerd, begonnen zij over de oorzaak na te denken.

## Newton

Het was echter Newton die de oorzaak zocht in de vorm van de aarde. De klok liep achter omdat de slinger langzamer bewoog, blijkbaar door een ge-

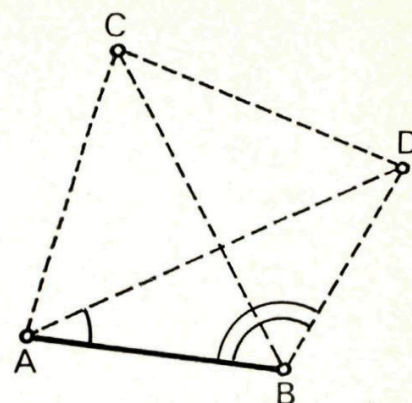


Fig. 4



wijzigde zwaartekracht. Dit kon het gevolg zijn van twee zaken, door één van deze of een combinatie ervan. Mogelijk is er minder zwaartekracht omdat men zich op de evenaar verder van het middelpunt van de aarde bevindt, wat dus een ontkenning van de bolvorm is. Misschien komt het omdat men op de evenaar een grotere snelheid heeft ten gevolge van de draaiing van de aarde, zodat een grotere middelpuntvliedende kracht een gedeelte van de aantrekkingskracht van de aarde opheft. Newton besloot in ieder geval aan te nemen dat de aarde dikbuikig is aan de evenaar en derhalve een afplatting aan de polen vertoont.



Fig. 5 Newton

### Expedities

Dit werd algemeen geaccepteerd tot het begin van de 18e eeuw. De wetenschap werd in 1718 opgeschrikt door de resultaten van metingen van vader en zoon Cassini op de meridiaan (een cirkel door noord- en zuidpool) door Parijs, waaruit bleek dat de kromming van de aardbodem aan de noordzijde sterker was dan aan de kant van de evenaar. De aarde was dus afgeplat aan de evenaar en had uitstulpingen aan de polen! De discussies laaiden op. Uitstulpingen of afplattingen aan de polen? De Parijse Academie voor Wetenschappen rustte in 1735 twee expedities uit om de kromming te meten in de tropen en in het hoge noorden. De laatste expeditie deed haar werk in Lapland. Afgezien van de barre kou in de winter en de hinder van vliegen en muggen in de zomer, had deze ploeg het betrekkelijk gemakkelijk. Zij hadden resultaten binnen 16 maanden. De tropenexpeditie toog naar Quito in Equador en zij bleven daar tien jaar. Ze hadden problemen met hun instrumenten en werden gehinderd door het bergachtige terrein, om nog maar niet te spreken over de vijandigheid van de bewoners van het doorkruiste gebied, die overtuigd waren van de kwade bedoelingen van de landmeters. De gebruikte instrumenten hadden maar al te veel weg van een nieuw soort vuurwapen. Onderlinge ruzies in de groep vertraagde de voortgang nog sterker. Het resultaat na al die tijd wees overigens wel uit dat de Cassinis onnauwkeurig te werk waren gegaan en dat de aarde wel degelijk een afplatting aan de polen vertoont.

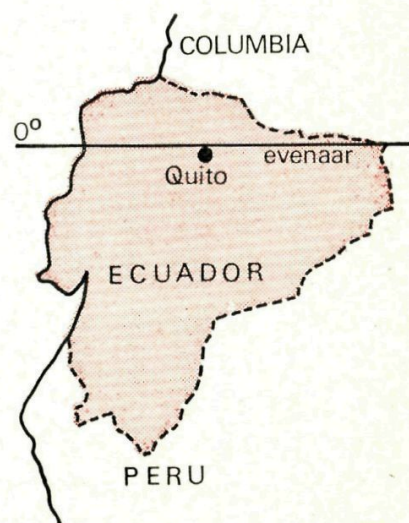


Fig. 6 Equador



## Ellips<sup>ooo</sup>

Op dit moment reikt onze kennis zover dat de punten van een meridiaan voldoen aan de vergelijking

$$\frac{x^2}{6378^2} + \frac{y^2}{6357^2} = 1$$

Een ellips dus, met een lange as van 12756 km en een korte as (de omwentelingsas) van 12714 km. Iemand op de pool bevindt zich dus 21 km dichterbij het aardmiddelpunt dan iemand op de evenaar, als zij zich tenminste beiden op zeeniveau bevinden.

We hebben ons bij deze beschouwingen niets aange trokken van bergen en dalen, omdat deze afmetingen in het niet vallen bij die van de gehele aarde. Zelfs de hoogste berg (Mount Everest) verheft zich minder dan 9 km boven de zeespiegel en dat is ongeveer 1 ‰ van de straal van de aarde.

Hoewel we nu met onze ruimte reizen volledig overtuigd zijn van de bolvorm van de aarde, heeft hierover toch bij veel mensen twijfel geheerst. En erg verwonderlijk is dat niet, want met het blote oog is de bolling niet of nauwelijks waar te nemen. Bij een afstand  $CD$  op aarde bestaat er een opwaartse bolling die in het midden een hoogte  $b$  heeft. Als we de doorsnede van de aarde weer even als een zuivere cirkel aannemen, dan geldt in de figuur dat  $a^2 = bc$ , zodat  $b = \frac{a^2}{c}$ . In de vol-

gende getallen voorbeelden zal  $b$  zo klein zijn dat we voor  $b$  wel de middellijn van de aarde mogen nemen.

$$b = \frac{(\frac{1}{2}CD)^2}{12750} = \frac{CD^2}{51000} \text{ in kilometers}$$

Over een afstand van 10 km, die we bij helder weer nog wel kunnen overzien, bolt de aarde  $\frac{100}{51000}$  km, dus maar ongeveer 2 m. Een zuiver rechte lijnverbinding tussen twee steden op een afstand van 300 km, bijvoorbeeld Groningen en Maastricht, loopt halverwege  $\frac{300^2}{51000}$  km, ongeveer  $1\frac{3}{4}$  km onder de grond.

Tenslotte nog dit. Je weet waarschijnlijk wel dat de meter in 1798 is vastgesteld als het veertigmiljoenste deel van de al eerder genoemde meridiaan door Parijs.

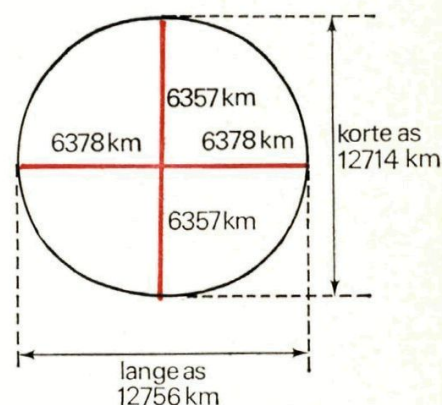


Fig. 3



De lengte van deze meridiaan zou dus 40000 km moeten zijn. Uit latere metingen bleek deze lengte 40009,152 km te zijn, zodat onze meter eigenlijk  $\frac{1}{5}$  mm te kort is. Het aanpassen van onze standaard lengtemaat zou weinig nut, maar wel veel moeilijkheden met zich meebrengen. We leven daarom maar verder met ons metertje.

## Denkertjes

- 21 Bewijs dat de volgende uitspraak voor elke positieve en gehele  $n$  waar is:

Er bestaat een getal van  $n$  cijfers, die elk gelijk zijn aan 1 of aan 2, dat deelbaar is door  $2^n$ .

- 22 Bacteriën vermenigvuldigen zich door splitsing en virussen vermenigvuldigen zich ten koste van bacteriën.

In een kolonie van  $n$  bacteriën komt een virus terecht. Het dringt onmiddellijk een bacterie binnen. Deze bacterie sterft dan en er komen twee virussen uit voor de dag. Het hele proces duurt precies een minuut.

In diezelfde minuut hebben alle andere bacteriën zich in twee nieuwe bacteriën gesplitst.

Na die minuut zijn er dus 2 virussen en  $2n - 2$  bacteriën.

In de volgende minuut infecteren die twee virussen onmiddellijk elk een bacterie en verdubbelen zo weer hun aantal. Ook verdubbelen de niet geïnfecteerde bacteriën hun aantal. Aan het eind van die tweede minuut zijn er dus 4 virussen en  $4n - 8$  bacteriën. In de derde minuut herhaalt het drama zich, en zo verder.

Vraag: zijn na verloop van tijd alle bacteriën dood of is dat niet het geval?

- 23 Boven een rechthoekig tafelblad  $ABCD$  zweeft een wiskundig aangelegde vlieg  $V$ , zo, dat  $AV^2 + CV^2 = BV^2 + DV^2$

Welke baan beschrijft die vlieg? Beschouw de vlieg  $V$  als een punt  $V$ .

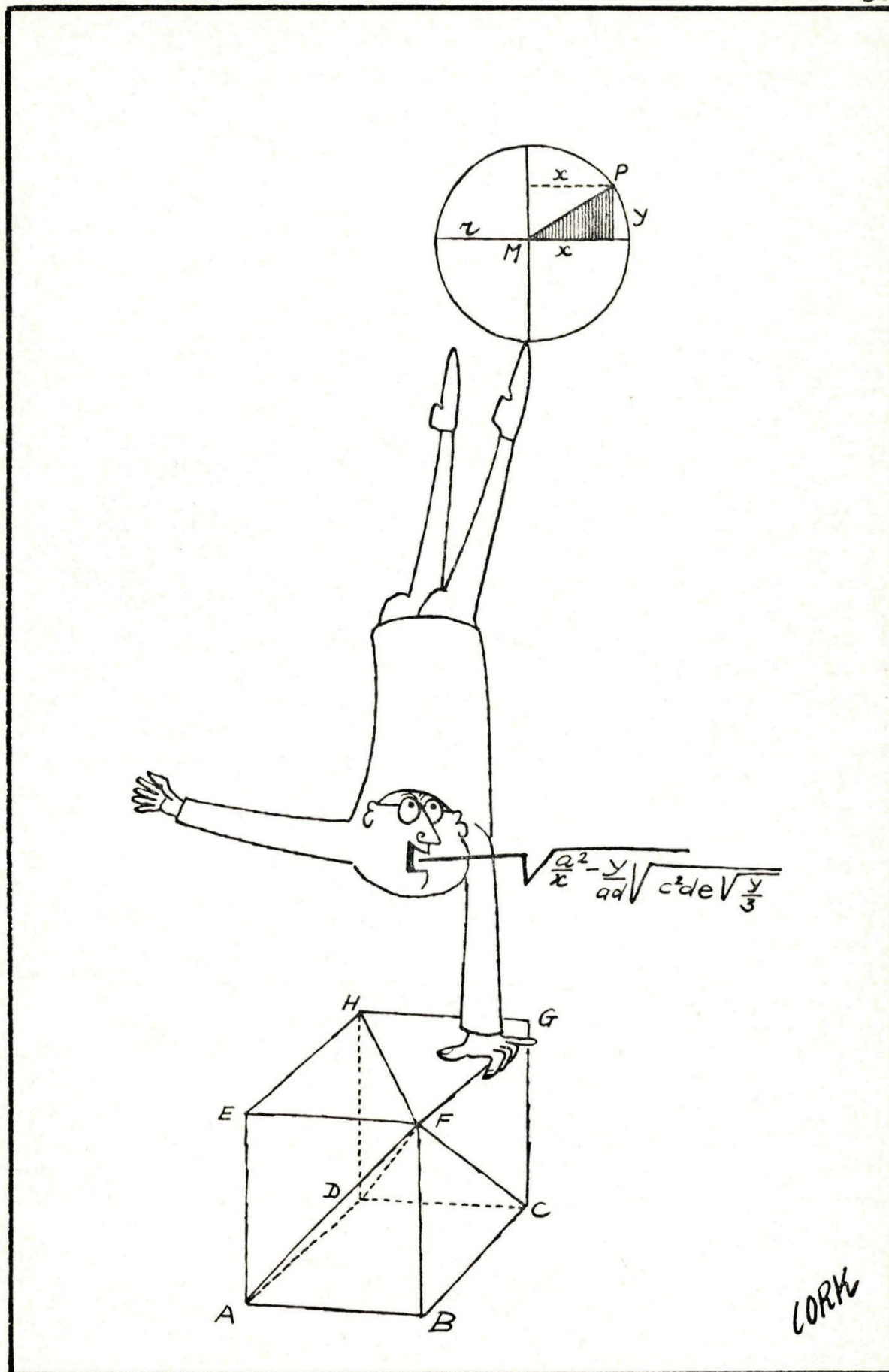
- 24 Als  $a \neq b \neq c$ , bewijs dan  $a^2 + b^2 + c^2 > bc + ca + ab$ .

- 25 Een driehoek heeft zes elementen: de drie hoeken en de drie zijden.

Kun je twee driehoeken tekenen, die vijf van de zes elementen gelijk hebben, maar het zesde niet?









# Verzamelingen lijnstukken binnen een kubus<sup>oo</sup>

Om een kubus te tekenen op een stuk papier moet je de werkelijkheid wel wat geweld aandoen. Je kunt nu eenmaal niet een voorwerp dat lengte, breedte en hoogte bezit goed weergeven op een plat vlak met alleen maar lengte en breedte. Maar we zijn voldoende gewend aan deze onvolkomenheid, dat we in de figuren hiernaast toch gemakkelijk kubussen herkennen. In het volgende gaan we allerlei verzamelingen lijnstukken in een kubus tekenen en je zult zien dat juist doordat die in een plat vlak worden getekend er bijzonder fraaie figuren ontstaan.

Om een en ander overzichtelijk te houden moeten eerst enkele afspraken gemaakt worden:

- 1 Een punt in de ruimte wordt aangeduid met behulp van  $x$ -,  $y$ -, en  $z$ -coördinaten. Zo is in figuur 8 het punt  $(4, 3, 3)$  getekend.
- 2 Een kubus wordt zo geplaatst, dat een hoekpunt samenvalt met de oorsprong. De drie ribben vanuit dat hoekpunt strekken zich uit langs de coördinaatassen.
- 3 In figuur 9 is lijn  $l$  de drager van ribbe  $BC$ . Voor de punten van  $l$  geldt, dat de  $x$ -coördinaten constant 4 zijn en de  $z$ -coördinaten constant 0 zijn. De punten van  $l$  vormen de verzameling  

$$V = \{(x, y, z) \mid x = 4 \wedge z = 0 \wedge y \in \mathbb{R}\}$$
 Ribbe  $BC$  is een deel van lijn  $l$ . De punten van deze ribbe vormen dus een verzameling, die deelverzameling is van  $V$ . Dat is  

$$\{(x, y, z) \mid x = 4 \wedge z = 0 \wedge 0 \leq y \leq 4 \wedge y \in \mathbb{R}\}$$
 Omdat in de volgende tekeningen uitsluitend punten *op* of *binnen* de kubus gebruikt worden, kunnen nadere begrenzingsen zoals  $0 \leq y \leq 4$  weggelaten worden.
- 4 Om de figuren niet te ingewikkeld te maken, worden alleen punten gebruikt, waarvan de coördinaten gehele getallen zijn.

De punten van ribbe  $AB$  behoren tot de verzameling  $\{(x, y, z) \mid y = 4 \wedge z = 0\}$  Die van ribbe  $EF$  zijn elementen van de verzameling  $\{(x, y, z) \mid y = 4 \wedge z = 4\}$  In figuur 10 is in het voorvlak van de kubus punt  $A$  verbonden met punt  $F$ . Dus punt  $(0, 4, 0)$  met punt  $(4, 4, 4)$ .

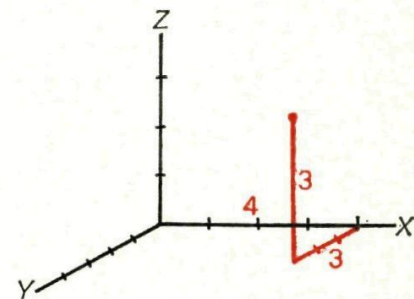


Fig. 8

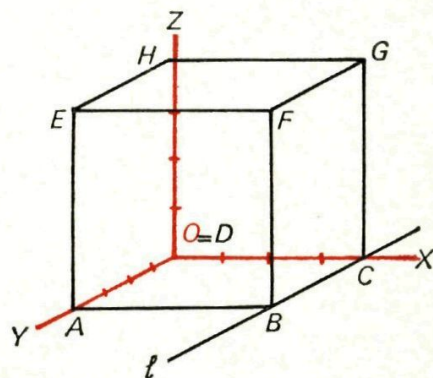


Fig. 9

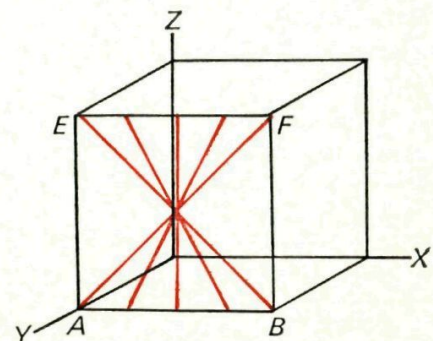


Fig. 10



We zullen dat lijnstuk noteren als  $l_0 = \begin{pmatrix} 0, 4, 0 \\ 4, 4, 4 \end{pmatrix}$

De verbindingslijnen in dat voorvlak gaan door één punt.

Er zal dan ook een verband bestaan tussen de coördinaten van de punten op die ribben. Dat verband wordt beter zichtbaar in de volgende kolom:

| punten op $AB$ | op $EF$     | lijnstukken                                              |
|----------------|-------------|----------------------------------------------------------|
| $(0, 4, 0)$    | $(4, 4, 4)$ | $l_0 = \begin{pmatrix} 0, 4, 0 \\ 4, 4, 4 \end{pmatrix}$ |
| $(1, 4, 0)$    | $(3, 4, 4)$ | $l_1 = \begin{pmatrix} 1, 4, 0 \\ 3, 4, 4 \end{pmatrix}$ |
| $(2, 4, 0)$    | $(2, 4, 4)$ | $l_2 = \begin{pmatrix} 2, 4, 0 \\ 2, 4, 4 \end{pmatrix}$ |
| $(3, 4, 0)$    | $(1, 4, 4)$ | $l_3 = \begin{pmatrix} 3, 4, 0 \\ 1, 4, 4 \end{pmatrix}$ |
| $(4, 4, 0)$    | $(0, 4, 4)$ | $l_4 = \begin{pmatrix} 4, 4, 0 \\ 0, 4, 4 \end{pmatrix}$ |

De  $y$ - en  $z$ -coördinaten zijn constant. De  $x$ -coördinaten in elk tweetal bij elkaar behorende punten zijn samen 4. De  $x$ -coördinaat in de eerste kolom stellen we gelijk  $k$ , dan is die van de tweede kolom gelijk  $4 - k$ .

In figuur 10 is dus in het voorvlak getekend de verzameling lijnstukken  $l_k = \begin{pmatrix} k, 4, 0 \\ 4-k, 4, 4 \end{pmatrix}$ . Hierin is

$$0 \leq k \leq 4 \text{ en } k \in \mathbb{N}$$

In de volgende figuren zijn kleinere maateenheden genomen. De figuren worden er mooier door. In figuur 11 zijn getekend de afstanden verzamelingen:

- $\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} 8, k, 0 \\ 8, k, 8 \end{pmatrix}\}$  in het rechter zijvlak
- $\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} 8, k, 0 \\ 0, 8-k, 8 \end{pmatrix}\}$  in een diagonaalvlak
- $\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} 0, k, 0 \\ 0, 8-k, 8 \end{pmatrix}\}$  in het linker zijvlak.

Figuur 12 laat weer een andere variatie zien. Daar zijn getekend de verzamelingen:

- $\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} k, 0, 8 \\ 0, 4, 0 \end{pmatrix}\}$
- $\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} k, 8, 8 \\ 8, 4, 0 \end{pmatrix}\}$
- $\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} 8, k, 8 \\ 4, 0, 0 \end{pmatrix}\}$
- $\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} 0, k, 8 \\ 4, 8, 0 \end{pmatrix}\}$

Ga zelf na, waar ze alle zijn gelegen.

Figuur 13 vertoont een eigenaardig draaiend effect. De kubus met ribbe 14 is weggelaten. De verzameling in het rechter zijvlak is  $\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} 14, 14, k \\ 14, 14-k, 14 \end{pmatrix}\}$

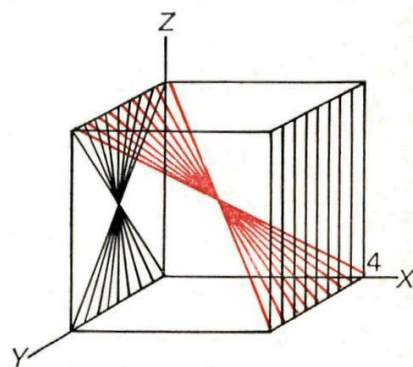


Fig. 11

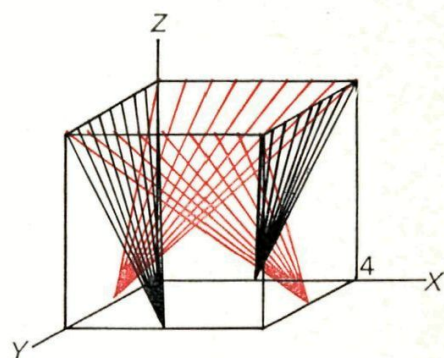


Fig. 12

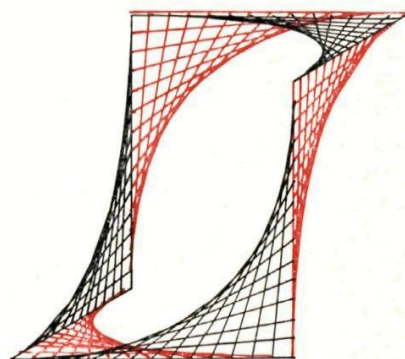


Fig. 13



De andere verzamelingen hebben een soortgelijke gedaante. Wie ze terug wil vinden, kan het beste eerst weer de kubus tekenen.

Bij de vorige figuren lagen alle lijnstukken, die tot een verzameling behoorden in eenzelfde plat vlak. In figuur 14 zijn twee ribben gekozen, die niet in hetzelfde vlak liggen, nl.  $AD$  en  $GH$ . De verzameling is

$\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} 0, k, 0 \\ k, 0, 8 \end{pmatrix}\}$ . De tekening suggereert een gebogen oppervlak. Als *alle* punten op  $AD$  met *alle* punten op  $GH$  op overeenkomstige wijze zouden zijn verbonden, was inderdaad dat gebogen oppervlak tot stand gekomen. De notatie zou zijn

$$\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} 0, k, 0 \\ k, 0, 8 \end{pmatrix} \wedge k \in R \wedge 0 \leq k \leq 8\}$$

Rood getekend is de verzameling lijnstukken

$$\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} 8, k, 0 \\ 0, 0, k \end{pmatrix}\}$$

Natuurlijk behoeven de punten niet altijd op ribben te liggen. In figuur 15 is een kubus gebruikt met de lijnstukken

$$\{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} k, 7, 0 \\ 7, k, 14 \end{pmatrix}\}$$

$$\text{en } \{l_k \mid l_k = \begin{pmatrix} 7, k, 0 \\ k, 7, 14 \end{pmatrix}\}$$

Zodra twee of meer kubussen gecombineerd worden, gaat er een wereld van nieuwe mogelijkheden open. Figuur 17 is het eindresultaat van een verzameling afstanden geconstrueerd binnen het raamwerk van de kubussencombinatie, die te zien is in figuur 16.

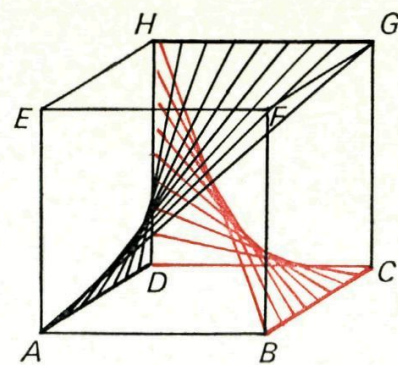


Fig. 14

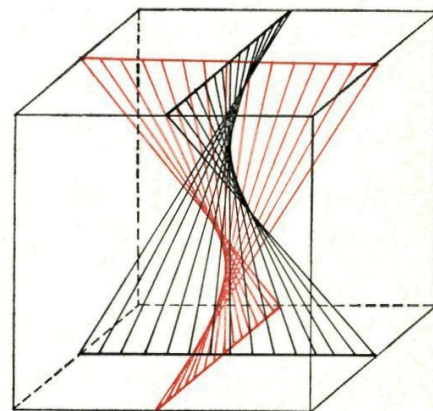


Fig. 15

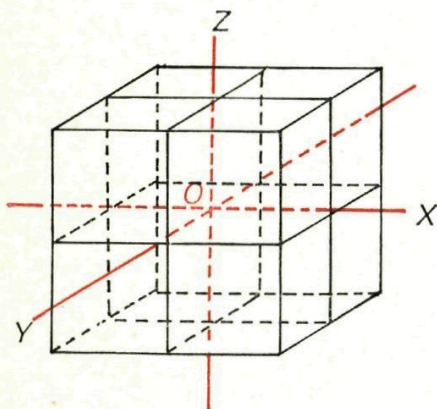


Fig. 16

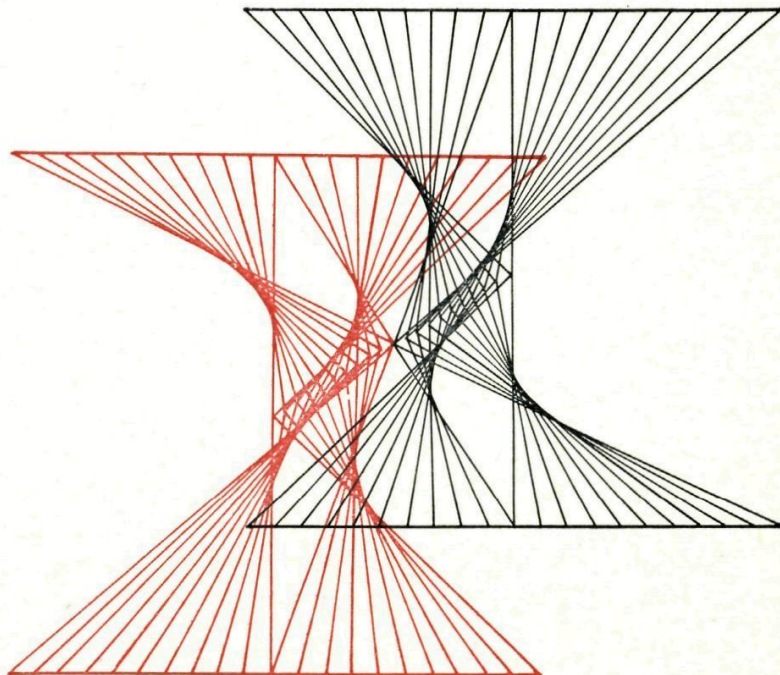


Fig. 17



Eerst zijn getekend de verzamelingen

$$\left\{ I_k \mid I_k = \begin{pmatrix} 0, & k, & 0 \\ -k, & 10, & 10 \end{pmatrix} \wedge k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\left\{ I_k \mid I_k = \begin{pmatrix} 0, & k, & 0 \\ k, & 10, & 10 \end{pmatrix} \wedge k \in \mathbb{N} \right\}$$

Beide verzamelingen zijn gespiegeld in het horizontale vlak door  $O$ . Puntspiegeling in  $O$  maakt daarna de figuur compleet.

Tenslotte laat figuur 18 zien, welke opbouw is gebruikt voor de spits, voltooid in figuur 19. Let in het bijzonder op het volstrekte waarde-teken, dat voorkomt in de coördinaten-aanduiding. Het is trouwens leerzaam om eens alle coördinaten uit te schrijven voor alle  $k$  elementen van de verzameling  $\{-14, -13, -12, -11, \dots, 14\}$ . De verzameling lijnstukken is allereerst

$$\left\{ I_k \mid I_k = \begin{pmatrix} 0, & k, & 0 \\ 7, & 0, & |k| - k \end{pmatrix} \right\}$$

Daarna is gespiegeld in de lijn  $p$ .

Met behulp van de behandelde verzamelingen kan iedere lezer-liefhebber nog lang plezierig bezig zijn met het zelf vinden van figuren. Veel genoeg en veel succes.

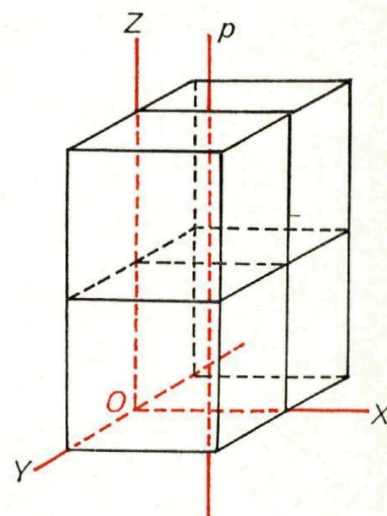


Fig. 18

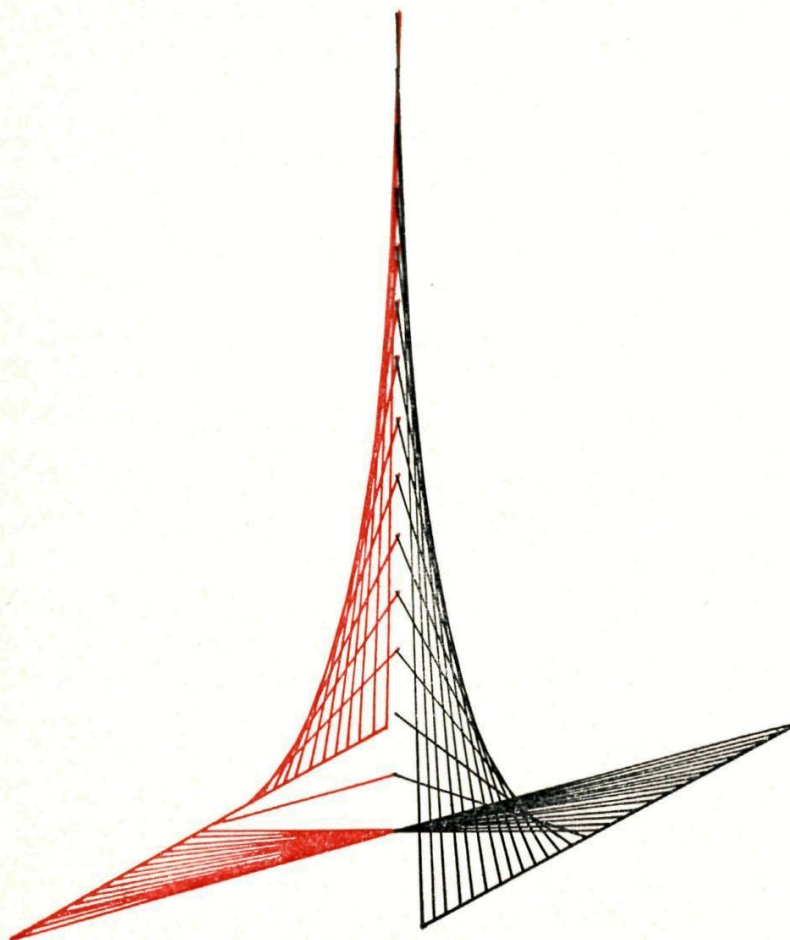


Fig. 19



# Absentencontrole door volledige inductie<sup>oo</sup>

Drs. J. van Dormolen

Toen de wiskundeleraar P. H. Goras van de  $X$ -scholengemeenschap te  $Y$  eens op een avond wat zwaar getafeld had, werd hij 's nachts geplaagd door een boze droom.

Hij droomde dat hij in het vervolg door ziekte van enkele collega's les zou moeten geven aan klassen met maar liefst 183 leerlingen. Koortsachtig woelend probeerde de arme man zich voor te stellen hoe hij dat wel zou moeten aanpakken. Alleen al voor het opnemen van de absenten zou hij zowat het hele uur nodig hebben! Gelukkig wist hij voor dit probleem een oplossing te bedenken, waarna hij een stuk rustiger sliep en de volgende dag toch nog redelijk fris wakker werd.

Wat had de leraar van de  $X$ -scholengemeenschap te  $Y$  in zijn droom bedacht?

Zoals wel vaker in grote groepen het geval is: De leerlingen zouden hun naam verliezen en alleen nog maar met een nummer van 1 tot en met 183 worden aangeduid. Elke leerling zou moeten weten wie zijn opvolger is. Dat is iemand wiens nummer 1 groter is dan zijn of haar eigen nummer. Zo is 46 de opvolger van 45. Maar niet van 44 of 43.

Alleen nummer 183 heeft het gemakkelijk. Die heeft geen opvolger. Bij het begin van de les kijkt elke leerling (behalve dan nummer 183) of zijn opvolger aanwezig is. Zo ja, dan blijft hij rustig zitten, maar als zijn opvolger afwezig is, dan gaat hij staan. De leraar weet dan dat er iets niet in orde is.

*Vraag:* Als leerling nummer 45 niet opstaat, weet de leraar dan dat leerling nummer 46 present is?

*Antwoord:* Nee. De leraar weet alleen: ALS 'Leerling nummer 45 is aanwezig', DAN 'Leerling nummer 46 is aanwezig'.

*Vraag:* Als leerling nummer 121 niet opstaat, weet de leraar dan iets over het al of niet aanwezig zijn van leerling 122?

*Antwoord:* Nee. De leraar weet alleen:

ALS 'Leerling 121 is aanwezig', DAN 'Leerling 122 is aanwezig'

Soortgelijke beweringen zijn waar voor elk van de nummers 1 tot en met 182. We kunnen dus zeggen:

(A) Voor elke  $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 182\}$ :

ALS 'Leerling nummer  $n$  is aanwezig'? DAN 'Leerling nummer  $n + 1$  is aanwezig'.

Zijn we nu klaar? Met andere woorden: Weet de leraar dat er niemand afwezig is, wanneer hij niemand ziet staan?

*Antwoord:* Nee, want als de nummers 1 tot en met 17 afwezig zijn, en verder iedereen present is, zal er niemand opstaan.

*Vraag:* Wat moet de leraar nog doen om er zeker van te zijn dat iedereen aanwezig is?





Fig. 20

*Antwoord:* Hij moet controleren of leerling nummer 1 er is. Hij moet dus weten of de volgende uitspraak waar is:

(E) 'Leerling nummer 1 is aanwezig'.

Als de leraar weet dat beide uitspraken (A) en (E) waar zijn, dan kan hij met stelligheid zeggen:

(C) Voor elke  $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 182, 183\}$ : 'Leerling  $n$  is aanwezig'.

Uit de juistheid van de uitspraken (A) en (E) volgt de juistheid van uitspraak (C).

Op deze praktische en eenvoudige manier zou onze leraar het probleem van de absentencontrole kunnen oplossen. Hoe hij de verdere problemen van het lesgeven aan een klas van 183 leerlingen de baas dacht te worden, vermeldt de historie niet en interesseert ons op dit moment ook weinig.

Veel belangrijker is dat in de gevonden oplossing een veel toegepaste wiskundige bewijsmethode herkend kan worden en wel die van de *volledige inductie*. En daarover zal dan ook de rest van dit artikel gaan.

Eerst nog een tweede voorbeeld en ditmaal niet uit de droomwereld van een wiskundeleraar, maar uit de nuchtere werkelijkheid van de techniek.

Bij grote wedstrijden heeft men tegenwoordig borden met uitslagen, die bestaan uit een groot aantal lampjes. Door de geschikte lampjes aan te doen en andere uit te laten kan men letters en cijfers vormen.



De borden worden gewoonlijk door een computer bediend.

Het is natuurlijk van belang om voor het begin van de wedstrijd zeker te weten dat alle lampjes werken. Maar het is wel erg onpraktisch om iedere keer lampje voor lampje los te schroeven om te kijken of hij het wel doet.

Men zou ook een schakeling kunnen bedenken waarbij alle lampjes van het bord door een druk op een knop aangezet worden. Men kan dan kijken of er een lamp kapot is. Maar stel eens dat men een automatisch waarschuwingssysteem wil hebben. Men zou dat op de volgende manier kunnen construeren. Geef elk lampje een nummer en maak een schakeling zo, dat een lampje automatisch gaat branden als zijn opvolger (dat is een lamp met een nummer, dat 1 hoger is) kapot is.

Neem nu aan dat er 3000 lampjes zijn.

Wat weet ik als lampje nummer 2719 niet brandt?

Is dan lampje 2720 in orde?

Nee, ik weet alleen:

ALS 'Lampje 2719 is in orde', DAN 'Lampje 2720 is in orde'.

Iets dergelijks geldt voor alle andere lampjes (behalve nummer 3000).

We weten dus als er geen lampje brandt:

(A) Voor elke  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2999\}$  geldt:

ALS 'Lampje  $n$  is in orde', DAN 'Lampje  $n + 1$  is in orde'.

Weten we nu dat alle lampjes allemaal in orde zijn, zodra we er geen enkel zien branden?

Nee, want als lampje nummer 1 niet in orde is, kunnen ze allemaal stuk zijn zonder dat we dat in de gaten hebben.

We moeten dus ook nog weten:

(E) 'Lampje 1 is in orde'.

Uit de juistheid van (A) en van (E) volgt de juistheid van de uitspraak: van

(C) Voor elke  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2999, 3000\}$  geldt: 'Lampje  $n$  is in orde'.

Tenslotte nemen we een echt wiskundig voorbeeld.

Te bewijzen: Voor elk geheel positief getal  $n$  geldt  $(1,03)^n \geq 1 + 0,03 n$

$n = 1$ , dan komt er  $(1,03)^1 \geq 1 + 0,03 \cdot 1$ . Dit is waar.

$n = 2$ , dan komt er  $(1,03)^2 \geq 1 + 0,03 \cdot 2$ . Dit is ook waar, reken maar na.

$n = 3$ , levert  $(1,03)^3 \geq 1 + 0,03 \cdot 3$ . Ook waar.

Zo zouden we nog wel een poosje door kunnen gaan en bij elk volgend positief geheel getal, dat we voor  $n$  invullen kunnen constateren, dat de bewering waar is voor dat speciale getal.

Maar we willen bewijzen:

(C) Voor elke  $n \in \mathbb{Z}^+$  geldt:  $(1,03)^n \geq 1 + 0,03 n$

(Met  $\mathbb{Z}^+$  bedoelen we de verzameling van alle gehele positieve getallen.)

De uitspraak (C) is waar als beide volgende uitspraken waar zijn:

(A) Voor elke  $n \in \mathbb{Z}^+$  geldt:

ALS  $(1,03)^n \geq 1 + 0,03 n$ , DAN  $(1,03)^{n+1} \geq 0,03(n+1)$

(E)  $(1,03)^1 \geq 0,03 \cdot 1$

Net als in de beide vorige voorbeelden kunnen we zeggen: Als (A) en (E) in orde zijn, dan is alles, namelijk (C), in orde.



Het enige wat ons nu nog te doen staat is na te gaan of (A) en (E) in orde zijn.

Met (E) hebben we geen enkele moeite. Dat hebben we al eerder gezien.

(A) is wat lastiger, maar we komen er wel uit:

Voor elke  $n \in \mathbb{Z}^+$  geldt:

$$\text{ALS } (1,03)^n \geq 1 + 0,03 n,$$

$$\text{DAN } (1,03)^{n+1} = (1,03)^n \cdot (1,03) \geq (1 + 0,03 n) (1,03)$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } (1 + 0,03 n) (1,03) &= (1 + 0,03 n) (1 + 0,03) = \\ &= 1 + 0,03 n + 0,03 + 0,0009 n \\ &= 1 + 0,03(n + 1) + 0,0009 n \geq 1 + 0,03(n + 1) \end{aligned}$$

voor elke  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Hieruit blijkt:

Voor elke  $n \in \mathbb{Z}^+$ :

$$\text{ALS } (1,03)^n \geq 0,03 n, \text{ DAN } (0,03)^{n+1} \geq 1 + 0,03(n + 1)$$

Bewering (A) is dus ook waar.

Hiermee komen we aan het principe van het bewijzen door volledige inductie.

Het gaat hierbij om het bewijzen van de juistheid van een bewering over alle gehele positieve getallen  $n$ .

Bijvoorbeeld:

Voor elke  $n \in \mathbb{Z}^+$ : Leerling nummer  $n$  is aanwezig.

Voor elke  $n \in \mathbb{Z}^+$ : Lampje  $n$  is in orde.

Voor elke  $n \in \mathbb{Z}^+$ :  $(1,03)^n \geq 1 + 0,3 n$

Een dergelijke bewering kunnen we symbolisch voorstellen met behulp van de letter  $P$ :

(C) Voor elke  $n \in \mathbb{Z}^+ : P(n)$

Voor het bewijs van bewering (C) is het voldoende om te bewijzen:

(A) Voor elke  $n \in \mathbb{Z}^+ : \text{ALS } P(n), \text{ DAN } P(n + 1)$

en (E)  $P(1)$

Wie kans ziet de juistheid van (A) en (E) te bewijzen, is klaar met de bewering (C).

De bewijsmethode door volledige inductie is blijkbaar een manier om langs een omweg een bewering over gehele positieve getallen te bewijzen.





# De grotere familie van de rekenkundige rijen<sup>ooo</sup>

Herhaaldelijk stellen leerlingen de vraag: Zijn er nog andere rijen dan de rekenkundige en meetkundige, die we op school krijgen?

Inderdaad, die zijn er. De gebruikelijke rekenkundige rijen vormen een deelverzameling van een grotere verzameling rijen. Die grotere verzameling wordt hier besproken. Een praktische toepassing zal een voorbeeld van het gebruik laten zien.

Let eens op de getallen 1 2 7 22 56 121 232 ①

We bepalen het verschil van de tweede en de eerste term, het verschil van de derde en tweede, vierde en derde, enz. Er komt:

|   |   |   |    |    |     |     |                |
|---|---|---|----|----|-----|-----|----------------|
| 1 | 2 | 7 | 22 | 56 | 121 | 232 |                |
|   | 1 | 5 | 15 | 34 | 65  | 111 | 1e verschilrij |
|   |   | 4 | 10 | 19 | 31  | 46  | 2e verschilrij |
|   |   |   | 6  | 9  | 12  | 15  | 3e verschilrij |
|   |   |   |    | 3  | 3   | 3   | 4e verschilrij |

De getallen in de vierde verschilrij zijn gelijk. De rij ① heet een *rekenkundige* rij van de *vierde orde*.

De rij 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, ... is van de derde orde.

De rij 3, 8, 15, 24, 35, 48, ... is van de tweede orde.

Algemeen geldt: Een rij getallen heet een rekenkundige rij van de  $n$ -de orde, als de rij van de  $n$ -de verschillen bestaat uit gelijke, van nul verschillende, getallen.

We stellen een rij met alle verschilrijen voor door:

$$\begin{array}{cccccccc}
 t_1 & & t_2 & & t_3 & & t_4 & & t_5 & & t_6 \\
 \Delta^1 t_1 & & \Delta^1 t_2 & & \Delta^1 t_3 & & \Delta^1 t_4 & & \Delta^1 t_5 & & \\
 & \Delta^2 t_1 & & \Delta^2 t_2 & & \Delta^2 t_3 & & \Delta^2 t_4 & & & \\
 & & \Delta^3 t_1 & & \Delta^3 t_2 & & \Delta^3 t_3 & & & & \\
 & & & \Delta^4 t_1 & & \Delta^4 t_2 & & & & & \\
 & & & & \Delta^5 t_1 & & & & & & 
 \end{array}$$

$\Delta^1 t_1$  is dus het eerste getal uit de eerste verschilrij of ook wel differentierij.

$\Delta^1 t_2$  is het tweede getal uit de eerste differentierij, enz.

$t_6$  is uit te drukken in de eerste getallen van elke rij  $t_6 - t_5 = \Delta^1 t_5$

$$\begin{aligned}
 \text{Dus } t_6 &= t_5 + \Delta^1 t_5 \\
 &= t_4 + \Delta^1 t_4 + \Delta^1 t_4 + \Delta^2 t_4 = t_4 + 2\Delta^1 t_4 + \Delta^2 t_4
 \end{aligned}$$







Zo verdergaande komt er tenslotte:

$$t_6 = t_1 + 5\Delta^1 t_1 + 10\Delta^2 t_1 + 10\Delta^3 t_1 + 5\Delta^4 t_1 + \Delta^5 t_1 \quad (2)$$

Let nu eens op de bekende driehoek van Pascal.

|   |   |    |    |   |   |  |   |        |
|---|---|----|----|---|---|--|---|--------|
|   |   |    |    |   |   |  |   | 1e rij |
|   |   |    |    |   |   |  | 1 | 2e rij |
|   |   |    | 1  | 2 | 1 |  |   | 3e rij |
|   | 1 | 3  |    | 3 | 1 |  |   | 4e rij |
| 1 | 4 | 6  | 4  | 1 |   |  |   |        |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |  |   |        |

$$\frac{(n-1)}{1} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \quad \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} \dots (n-1)e \text{ rij.}$$

De coëfficiënten in (2) zijn dezelfde als in een rij van de driehoek van Pascal. Bij  $t_6$  horen de coëfficiënten uit de vijfde rij van de driehoek. Bij  $t_x$  horen de coëfficiënten uit de  $(x-1)$ -ste rij van de driehoek.

$$t_x = t_1 + (x-1)\Delta^1 t_1 + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\Delta^2 t_1 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}\Delta^3 t_1 + \dots$$

Voor een rij van de eerste orde geldt:

$$t_x = t_1 + (x-1)\Delta^1 t_1$$

Immers zijn de getallen in de tweede differentierij en in alle volgende differentierijen gelijk nul.

Voor een rij van de tweede orde geldt:

$$t_x = t_1 + (x-1)\Delta^1 t_1 + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\Delta^2 t_1$$

enz.

Conclusie: Voor een rij van de eerste orde is  $t_x$  van de eerste graad. Voor een rij van de tweede orde is  $t_x$  van de tweede graad;  $t_x$  van een rij van de derde orde is van de derde graad.

De gebruikelijke rekenkundige rij uit het schoolboek komt nu ook te voorschijn. Bijvoorbeeld:

|             |   |   |   |   |    |    |          |
|-------------|---|---|---|---|----|----|----------|
| eerste      | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 ..... |
| verschilrij | 2 | 2 | 2 | 2 | 2  | 2  |          |

$$\text{Dus } t_x = 3 + (x-1) \cdot 2 = 2x - 1$$

Deze vorm is aan een ieder wel bekend en te vinden langs de weg van

$$t_k = a + (k-1)v = 3 + (k-1) \cdot 2 = 2k + 1$$



Nog een voorbeeld: Bepaal  $t_x$  van de rij van de derde orde

-18   4   18   30   46   .....

Er komt: -18            4            18            30            46

22            14            12            16

-8            -2            4

6            6

$$t_x = -18 + (x-1) \cdot 22 + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} \cdot -8 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} \cdot 6$$

Waaruit komt  $t_x = x^3 - 10x^2 + 45x - 54$

### Een toepassing

Om 3, 4, 5 en 6 uur is de waterstand opgenomen. Men vond opeenvolgend 2,16 m, 2,23 m, 2,34 m en 2,50 m.

Gevraagd de mogelijke waterstand om 4.30 uur.

De waarnemingstijden 3, 4, 5 en 6 uur vertonen gelijke verschillen. De waterstanden kunnen beschouwd worden als  $t_1, t_2, t_3$  en  $t_4$  van een rij van nog nader te bepalen orde.

We schrijven weer: 216            223            234            250

7            11            16

4            5

1

Aanvaard de rij als een rij van de derde orde. Dan is

$$t_x = 216 + (x-1) \cdot 7 + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} \cdot 4 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} \cdot 1$$

We weten niet zeker, dat de rij van de derde orde is. Immers tekenen we in een grafiek de punten, die corresponderen met  $t_1 = 216, t_2 = 223$  enz. dan kan door deze punten een onbepaald aantal krommen getekend worden. Hier is dus gekozen een kromme van de derde graad. Men mag echter aannemen, dat als de punten niet te ver uiteen liggen, de gekozen kromme niet te veel zal afwijken van de werkelijke kromme.

De waterstand om 4.30 uur is dan  $t_{2\frac{1}{2}}$ . Substitutie van  $2\frac{1}{2}$  geeft  $t_{2\frac{1}{2}} \approx 2,28$  m

Het verschil tussen de waargenomen getallen moet niet al te groot zijn. Men kan bij *interpoleren* een hoge graad van betrouwbaarheid verwachten. Bij *extrapoleren* niet. Het is dus af te raden om hier bijvoorbeeld  $t_6$  te bepalen. Dat is de waterstand om acht uur.



# Denkertjes



- 26 Een aannemer moet 50 platen beton vervoeren. De lichtste weegt 370 kg. Elke volgende weegt 2 kg meer dan zijn voorganger, zodat de zwaarste 468 kg weegt.

Hij heeft 7 vrachtauto's tot zijn beschikking. Elk daarvan kan 3000 kg vervoeren.

Is het mogelijk die 50 platen beton allemaal tegelijk met die 7 vrachtauto's te vervoeren?

(Kwant, Rusland)

- 27 Gegeven is een willekeurige vierhoek  $ABCD$ .

Men construeert de parallellogrammen  $A'BCD$ ,  $AB'CD$ ,  $ABC'D$  en  $ABCD'$ . Bewijs dat de vier punten  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  niet allemaal buiten vierhoek  $ABCD$  liggen.

(Középiskolai Matematikai Lapok, Hongarije)

- 28 In een restaurant zijn er uitsluitend tafels voor 6 personen.

Er komt een gezelschap van  $N$  personen binnen. Als ze allemaal zitten blijkt geen enkele van hun tafels geheel bezet te zijn. En toch zouden ze niet aan een kleiner aantal tafels kunnen zitten met z'n allen.

Gevraagd: de maximale waarde van  $N$ .

Ook gevraagd: vervang de 6 in de opgave door  $k$  en druk dan de maximale waarde van  $N$  in  $k$  uit.

(prof. dr. H. Freudenthal)

- 29 Behalve de vervanging van  $b + c$  door  $c$ , vindt er in het ge-

bruik van de formule  $b = \frac{CD^2}{51000}$  op pagina 54 nog een benadering plaats. Welke?

- 30 We denken ons ijzerdraad gespannen om de aarde volgens de meridiaan door Parijs. We willen daar nu een hekje van maken door de draad langs paaltjes te spannen op 1 m boven de grond. Er is dan een grotere lengte van de draad nodig. Bewijs dat de berekening van dat meerdere onafhankelijk is van de schatting die men neemt voor de lengte van de meridiaan.



# Oplossingen van de denkertjes uit nummer 1

- 1 Zie figuur 22. Trek  $AA' = a$  loodrecht op de rivierrichting. Wegens  $AT = A'S$  is de route  $ATSB$  de kortste weg.

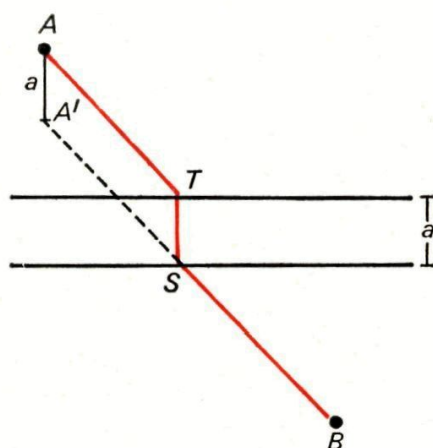


Fig. 22

- 2 Omdat het vierde getal een viervoud is, dus even, is het derde getal een oneven vijfvoud, dus eindigend op 5. Het eerste getal (elfvoud) eindigt dus op een 3, het tweede getal (zevenvoud) eindigt op een 4. Het kleinste viertal dat aan de voorwaarden voldoet is 1133, 1134, 1135, 1136.
- 3 Knip het vierkant langs de diagonalen in vieren en leg van de vier stukken een rechthoek. Zie figuur 23.

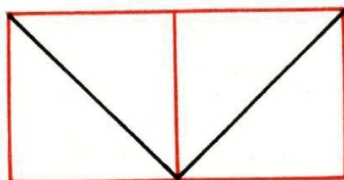
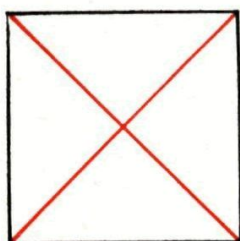


Fig. 23

- 4 Stel  $AB = 2$ .  $EF = 2a$ . De lengte van de weg van  $A$  naar  $F$  is nu minimaal  
 $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + 2a = 6a + 6$  (1)  
 en maximaal

$$2a + (2a - 1) + (2a - 2) + (2a - 3) + a = 9a - 6 \quad (2)$$

Omdat  $AF = 53$  volgt uit de eerste regel dat  $a$  minimaal 7 is en uit de tweede regel dat  $a$  maximaal 7 is. Dus  $a = 7$ . Nu is  $BC + CD + DE = 53 - 21 = 32$ . Hiervoor zijn drie mogelijke oplossingen, namelijk  $13 + 11 + 8$ ,  $13 + 10 + 9$  en  $12 + 11 + 9$



$$5 \quad x \leq y \leq z$$

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

$$\text{Waaruit } \frac{1}{2} \leq \frac{3}{x}. \text{ Dus } x \leq 6$$

Ook geldt  $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$  of  $x > 2$ . Dus  $x \in \{3, 4, 5, 6\}$

$$\text{Neem eerst } x = 3. \text{ Dus } \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}. \text{ Waaruit } y \leq 12$$

Ook  $\frac{1}{y} < \frac{1}{6}$  of  $y > 6$  enz.

Oplossing: (3, 7, 42) (4, 5, 20)

(3, 8, 24) (4, 6, 12)

(3, 9, 18) (4, 8, 8)

(3, 10, 15) (5, 5, 10)

(3, 12, 12) (6, 6, 6)

6 Zie figuur 24.

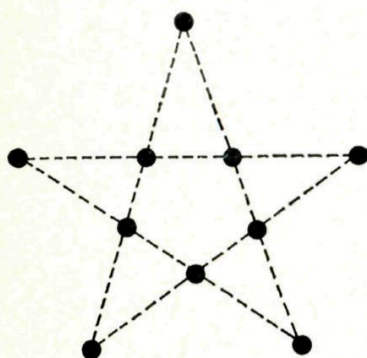


Fig. 24

7 Het aantal mogelijke tweede zetten van wit op het schaakbord is 443. Wanneer zwart hetzelfde aantal tweede zetten tot zijn beschikking zou hebben, zou het aantal mogelijke stellingen daarna ten hoogste  $443 \times 443 = 196.249$  bedragen. In werkelijkheid is het minder, omdat zwart bij zijn zetten gehinderd kan worden door de witte stukken. Op de ruim 8800 stellingen na de tweede zet van wit zijn gemiddeld echter zeker 20 voortzettingen mogelijk, zodat het aantal na de tweede zet van zwart zeker meer dan 175000 bedraagt.

8 Het aantal mogelijke openingszetten op een dambord is 9. Zwart kan hierop eveneens met 9 zetten antwoorden. Dus 81 mogelijke stellingen.

$$9 \quad a = 49 \quad x_0 = 24,50000 \quad x_1 = 13,2500$$

$$x_2 = 8,4740 \quad x_3 = 7,1282$$

$$x_4 = 7,0011 \quad x_5 = 7,0000$$

10 Voor  $a = 3$  wordt  $x_1 = 1,5$  en  $x_2 = 1,75$ . Dus  $x_1 - x_2$  wordt negatief. Om dit te omzeilen moet de betreffende regel in het blokschema van absolute-waardestreven worden voorzien.

$$\text{Is } |x_i - x_{i+1}| < 0,0001?$$



# De trainer kon niet tegen verliezen



## oplossing

De andere trainers hadden gezegd, dat hun nederlagen niet allemaal op die manier weggeredeneerd konden worden (en dat ze dat ook niet zouden willen).

We nemen eens zo'n club en noemen hem  $C_0$ . Hij won van de clubs  $C_1, C_2, \dots, C_m$  en verloor van de rest. De nederlaag tegen  $C_{m+1}$  kan niet weggeredeneerd worden. Wat betekent dat?

Wel, de trainer van  $C_0$  kan niet zeggen: Wij wonnen van  $C_1$  en die won van  $C_{m+1}$  en dus hadden wij ook van  $C_{m+1}$  moeten winnen! Met andere woorden:  $C_1$  verloor van  $C_{m+1}$ ! Met nog andere woorden:  $C_{m+1}$  heeft van  $C_1$  gewonnen.

Maar dat geldt dan ook voor  $C_2$ , voor  $C_3$ , en zo verder tot en met  $C_m$ .

Tel nu eens de winstpuntjes van  $C_{m+1}$ . Juist!  $C_{m+1}$  heeft gewonnen van  $C_0$ , van  $C_1$ ,  $C_2, \dots, C_m$  en misschien nog wel meer. Dus  $C_{m+1}$  heeft ten minste één wedstrijd meer gewonnen dan  $C_0$ . Dus  $C_0$  heeft in de eindrangschikking nog ten minste één club boven zich staan, namelijk  $C_{m+1}$ .

Elke trainer, die niet alle nederlagen kan wegredeneren, heeft op de eindlijst nog iemand boven zich (ook de trainer van een eventuele ongelukkige club, die alle wedstrijden verloren heeft en dus niet eens aan wegredeneren kan beginnen te denken).

Daar volgt uit, dat die ene kleinzielige trainer, die wel alle nederlagen kon wegredeneren, bovenaan geëindigd is! Voila!

Wil je nog wat verder piekeren over dit geval, dan zou je kunnen bewijzen dat er in dat gekke land bijna elk jaar wel een trainer is, die alle nederlagen in de bekercompetitie kan wegredeneren. Alleen dan, wanneer de kampioen domweg alle wedstrijden wint, is dat niet het geval!



*Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 15 februari 1973 worden ingezonden naar het redactiesecretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.*

**Inhoud:**

|                                                 |        |
|-------------------------------------------------|--------|
| Het meetsnoer rond de aarde°                    | 49     |
| Verzamelingen lijnstukken binnen een kubus°°    | 57     |
| Absentencontrole door volledige inductie°°      | 61     |
| De grotere familie van de rekenkundige rijen°°° | 65     |
| Denkertjes                                      | 55, 69 |
| Oplossingen van de Denkertjes uit nummer 1      | 70     |
| Oplossing: De trainer kon niet tegen verliezen  | 72     |



## Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

### REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.  
BRUNO ERNST, Amersfoort.  
A. F. VAN TOOREN, Leusden-C.  
R. H. PLUGGE, Amstelveen.  
G. A. VONK, 's-Gravenhage.

### REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden.

### ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, f 4,50 per jaargang. Voor anderen f 7,00.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff nv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelten ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

