

jaargang 12 1972/1973



Pythagoras

6

wiskundetijdschrift
voor jongeren



De goochelaar in actie

Wiskunde uit de goocheldoos°

Wie heeft er nooit gedroomd het ooit te brengen tot wereldberoemd goochelaar? Meestal komt het niet verder dan een mislukte truc op een verjaarspartijtje en zeker wanneer er duiven, konijnen of eieren aan te pas moeten komen is de kans op een forse afgang levensgroot aanwezig. Aanzienlijk minder riskant zijn de trucs op wiskundige grondslag, waarvan je hier een viertal voorbeelden aantreft. Ze zijn afkomstig uit de bekende goocheldozen, die in de speelgoedhandel te koop zijn, en uit de daarbij horende handleiding.

Toverdobbelstenen

Op de foto zie je vijf dobbelstenen, met elk zes getallen van drie cijfers erop. De stenen zijn in werkelijkheid verschillend gekleurd, maar dat doet verder niet ter zake:

kleur van de steen	getallen op de steen					
rood	186	384	681	483	780	285
zwart	741	345	147	543	840	642
geel	377	278	773	872	971	179
groen	762	168	564	960	663	366
blauw	657	558	954	855	756	459

De bijbehorende handleiding instrueert:

- a** Laat iemand een worp met deze vijf stenen gooien.
- b** Stel er komen boven de getallen 971, 168, 147, 186, 855.
- c** Vraag hem die getallen op te tellen.
- d** Voordat de proefpersoon papier en potlood heeft genomen, heb je zelf onopvallend en snel via hoofdrekenen de som al gevonden. Reken zo:
eenheden van ieder getal optellen $1 + 8 + 7 + 6 + 5 = 27$
dit laatste getal aftrekken van 50 geeft $50 - 27 = 23$
som van de vijf getallen op de stenen is 2327.

Je hebt ogenschijnlijk niet gerekend en toch kun je straks tegen de proefpersoon zeggen of zijn antwoord goed is of niet.

Zie denkertje 53 op blz. 135.

Leeftijd raden

Vraag aan iemand, van wie je de verjaardag niet weet:

- a Neem in gedachten het getal van je geboortemaand. (januari is 1, februari is 2, enz.)
- b vermenigvuldig dat getal met 2.
- c nog 5 optellen.
- d met 50 vermenigvuldigen.
- e leeftijd erbij optellen.

Vraag hem nu het eindgetal bekend te maken. Trek dan in je eigen gedachten daar 250 vanaf. De laatste twee cijfers geven de leeftijd van de proefpersoon. Uit het eerste cijfer, of de eerste twee cijfers, blijkt welke de geboortemaand is.

Voorbeeld

Iemand is 15 jaar en is geboren in de maand augustus. (maand 8)
De proefpersoon rekt:

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 2 = 16 \\ + 5 = 21 \\ \times 50 = 1050 \\ + \text{leeftijd} = 1065 \end{array}$$

getal wordt bekend gemaakt

jij rekt in gedachten $1065 - 250 = 815$

Je weet hieruit leeftijd is 15, de maand is 8.

Zie denkertje 54 op blz. 135.

Welk cijfer is doorgestreept?

Vraag iemand, onzichtbaar voor jou, een getal op te schrijven tussen 1000 en 9999.
Vervolgens:

- a met 9 vermenigvuldigen.
- b één cijfer uit het antwoord wegschrappen.
- c Overige cijfers optellen.

Uitkomst bekend maken en jij rekt in je zelf: bekend gemaakte getal aftrekken van het eerstvolgende grotere getal, dat een negenvoud is. Het verschil wijst het doorgestreepte cijfer aan.

Voorbeeld

De proefpersoon schrijft op 2460

$$\times 9 = 22140$$

hij streept 2 door.

$$\text{som } 2 + 1 + 4 + 0 = 7$$

Proefpersoon maakt dit bekend. Jij rekent in gedachten $9 - 7 = 2$. Je weet nu het doorgestreepte cijfer.

Opmerking

In één geval kan het een keer fout gaan. Stel in bovenstaand voorbeeld is het cijfer 0 doorgestreept. Som $2 + 2 + 1 + 4 = 9$.

Eerstvolgende grotere getal, dat een negenvoud is, is 18. $18 - 9 = 9$. Je zegt, dat het cijfer 9 is doorgestreept. Dat blijkt fout te zijn. Je denkt even goed na en zegt dan: Ik heb me vergist, de nul is doorgestreept. Daarmee heb je het weer goedge maakt. Zie denkertje 55 op blz. 135.

Een getal raden

Zie de foto met de 6 kaarten.

Leg de zes kaarten neer. Vraag de proefpersoon een getal op een kaart in gedachten te nemen. Laat hem aanwijzen op welke *kaarten* dat getal voorkomt (dus niet het getal zelf aanwijzen).



Voorbeeld

Hij heeft 39 in gedachten. Hij wijst dan aan de kaarten, die links bovenaan beginnen met 1, 2, 4 en 32.

Jij telt in gedachten op $1 + 2 + 4 + 32 = 39$. Je hebt daarmee het getal geraden. Zie denkertje 56 op blz. 135.

Ra, ra, hoe zit dat?°

Snij of knip uit millimeterpapier, of roosterpapier, twee rechthoekige driehoeken met rechthoekszijden 3 en 8. Knip ook twee rechthoekige trapeziums, waarvan bij elk de evenwijdige zijden 3 en 5 lang zijn en de hoogte bij elk 5 is. De vier vlakdelen kunnen aaneengepast worden, zoals figuur 3 laat zien. Oppervlakte 64.

Deze driehoeken en trapeziums kunnen ook verenigd worden tot figuur 4, dat is een rechthoek met lengte 13 cm breedte 5 en dus met oppervlakte 65.

De driehoeken en trapeziums hebben in beide gevallen natuurlijk dezelfde oppervlakte en de beide rechthoeken dus ook. Zodoende moeten we besluiten dat $64 = 65$.

Er is natuurlijk iets niet in orde. Waar zit de fout? Probeer die eerst zelf te vinden en als je die niet kunt vinden, helpt pagina 136 je uit de nood.

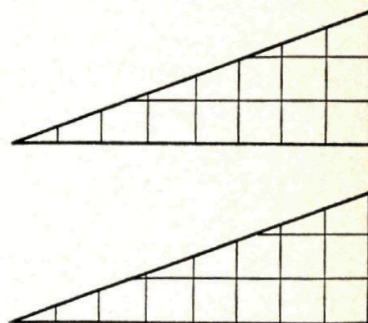


Fig. 1

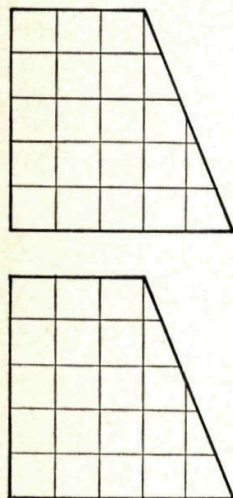


Fig. 2

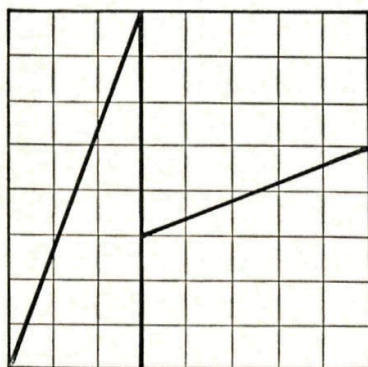


Fig. 3



Fig. 4

Papierformaten°

Het standaardiseren van allerlei maten en eenheden is iets waar in internationaal verband nog steeds hard aan wordt gewerkt en waar voorlopig het einde nog wel niet van bereikt zal zijn. Denk bijvoorbeeld maar eens aan alle munteenheden die er nog zijn. Hoe lang zou het nog duren voor je in de hele wereld met hetzelfde bankbiljet terecht kunt?

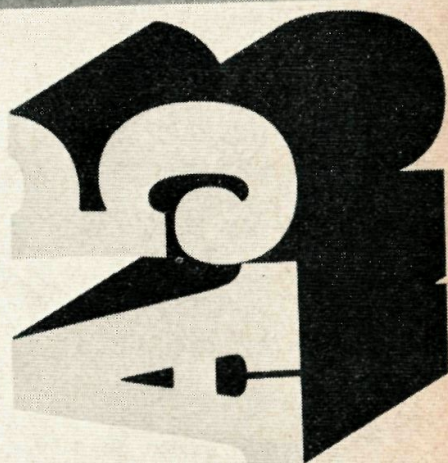
Iets waar je bij het begrip 'standaardisatie' vast niet direct aan denkt is het formaat van vellen papier. Toch is ook hier de standaardmaat een feit, al kun je in Nederland nog allerlei oude formaten met schilderachtige namen tegenkomen. Wat denk je bijvoorbeeld van een vel Adelaar? Of voel je meer voor een vel Klein Royaal? Vanaf de middeleeuwen – de eerste papiermolen werd in 1144 in Spanje gebouwd –

De lengte van A₄ is tweemaal de breedte van A₅

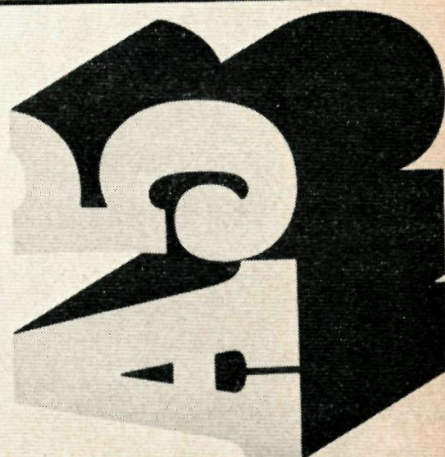
100 vel schrijfpapier
een van Stolk & Reese produkt



100 vel schrijfpapier
een van Stolk & Reese produkt



100 vel schrijfpapier
een van Stolk & Reese produkt





*De lengte van A_5 is even groot
als de breedte van A_4*

hebben allerlei fabrikanten hun eigen formaten gehanteerd bij de papierfabricage. In onderstaande tabel zijn een aantal hiervan opgenomen, met hun afmetingen in centimeters:

Klein Mediaan	40×55
Register Mediaan	42×52
Post	44×56
Mediaan	47×56
Groot Mediaan	47×62
Royaal	50×65
Klein Royaal	52×62
Olifants	62×75
Adelaar	75×100

De namen van de standaardpapiermaten zijn aanzienlijk prozaïscher. Zij bestaan namelijk uit een rij, met als termen $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$

Een gewoon schrijfblok, zoals je dat bij de kantoorboekhandel koopt, is formaat A_4 , een klein schrijfblok A_5 .

Hoe komt men aan deze rij?

Op de foto hiernaast zie je dat de lengte van een A₅-blok even groot is als de breedte van een A₄-blok. En de lengte van een A₄-blok is tweemaal de breedte van een A₅-blok, zoals de foto op blz. 125 laat zien.

Stel een A₅-blok heeft lengte a en breedte b , dan heeft een A₄-blok lengte $2b$ en breedte a .

Bovendien blijkt op onderstaande foto dat beide blokken gelijkvormig zijn, dus

$$a : b = 2b : a$$

dus $a^2 = 2b^2$

$$a = b\sqrt{2} = 1,414b$$

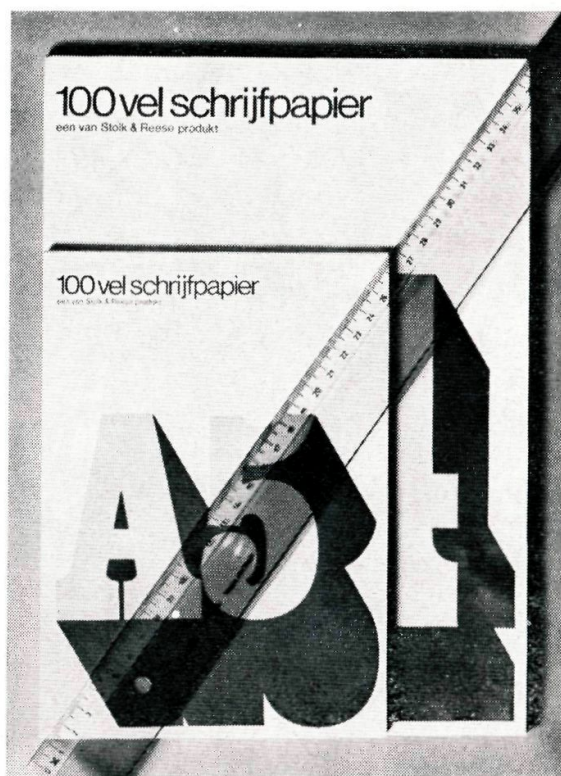
Dit geldt voor de hele rij:

Alle A-formaten zijn onderling gelijkvormig en opp A₀ = 2 opp A₁ = 4 opp A₂ = ... Nu weten we dus hoe de samenhang tussen de termen in de rij is, als we ook nog de grootte van de eerste term kennen zijn we volledig geïnformeerd.

Welnu: opp A₀ = 1 m².

De oppervlakte van een A₄-schrijfblok is dus $\frac{1}{16}$ m² = 625 cm². Met het vorenstaande laten lengte en breedte zich nu berekenen, waarbij een rekenliniaal goede diensten kan bewijzen.

De invoering van de A-rij is in Zwitserland, Duitsland en Zweden verder gevorderd dan in ons land. Alleen overheidsinstellingen en diverse ondernemingen hebben gebruik van de A-rij voorgeschreven. Archieven en dergelijke zijn daarbij aangepast.



A₄ en A₅ zijn gelijkvormig



Hoe hoger, hoe groter en toch gelijk°

Op hoge gebouwen zie je vaak lichtreclames aangebracht. De tekst moet daarbij vanaf de grond natuurlijk goed leesbaar zijn. Om dit te bereiken moeten grotere letters worden gebruikt naarmate ze hoger geplaatst worden.

In figuur 5 is verondersteld dat op ooghoogte een tekst is aangebracht, waarvan de letters 80 cm hoog zijn. Dus $AB = 80$. P is het punt waar het oog zich bevindt. De afstand tot de muur is 30 m.

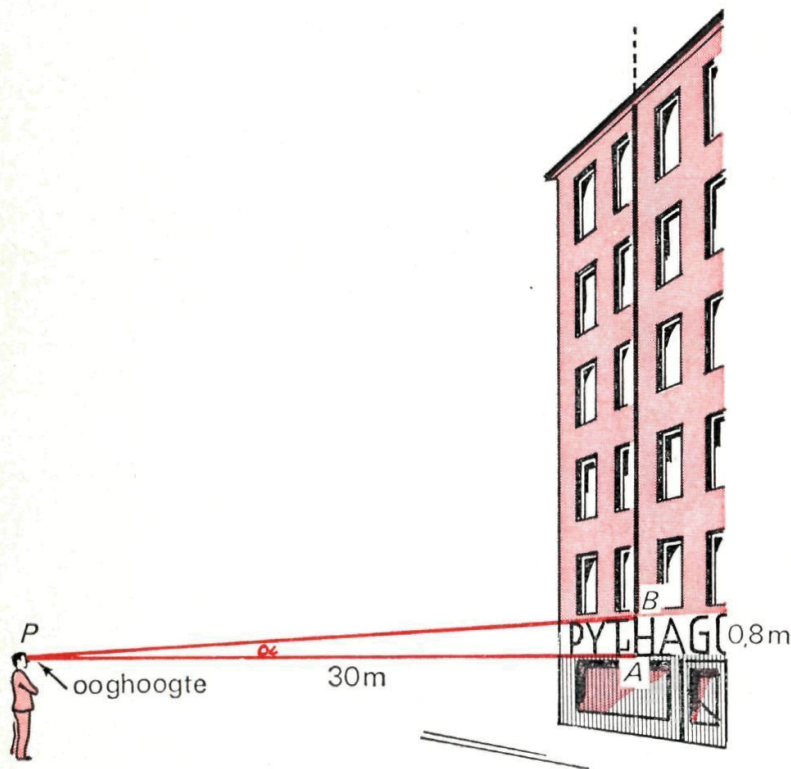


Fig. 5

Hoe groot zouden de letters moeten zijn wanneer ze boven op het gebouw geplaatst zouden worden, op 30 m boven ooghoogte? Dat wil zeggen: Hoe groot zouden de letters moeten zijn om onder dezelfde hoek gezien te worden?

De bedoelde hoek is de hoek APB en de grootte hiervan kun je bepalen door de tangens te berekenen:

$$\tan \alpha = \frac{0,8}{30} = \frac{8}{300} \Rightarrow \alpha = 1^\circ 31' 39''$$

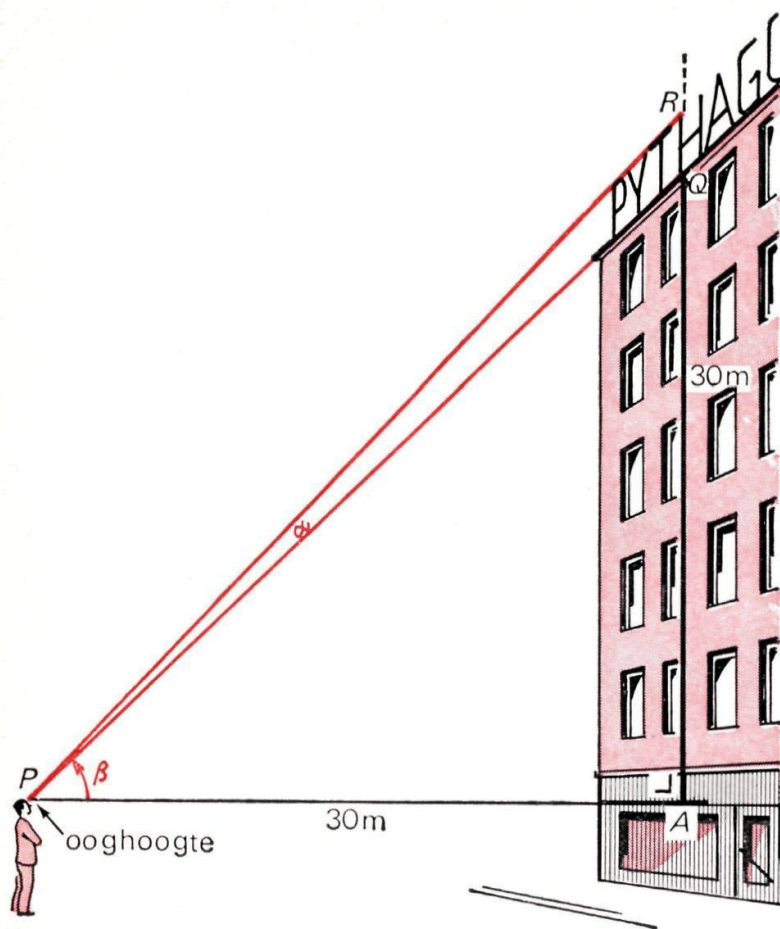


Fig. 6

In figuur 6 is de situatie getekend met de tekst op 30 m boven ooghoogte. Gevraagd wordt de letterhoogte QR als de letters onder dezelfde hoek gezien worden.

$$AQ = AP = 30 \text{ m, dus } \angle QPA = 45^\circ$$

$$\angle RPA = 45^\circ + 1^\circ 31' 39'' = 46^\circ 31' 39''$$

$$\tan 46^\circ 31' 39'' \approx 1,0547 = \frac{AR}{30} \Rightarrow AR = 31,64 \text{ m}$$

De letterhoogte QR is dus 1,64 m, dat is meer dan tweemaal zo groot als op ooghoogte!

Denkertje

51 De vier delen op blz. 124 kunnen zo gegroepeerd worden, dat een figuur ontstaat met oppervlakte 63. Uit die nieuwe figuur en uit de figuren 3 en 4 volgt dan $63 = 64 = 65$.

Probeer die bedrieglijke figuur te vinden.



Een zeilprobleem wiskundig bekeken^{oo}

Een goed zeiler weet zijn weetje. Hij houdt rekening met boottype, met vaar- en windrichting, de vorm van het zeil en andere factoren. Hij weet, ja voelt tijdens het zeilen de telkens veranderende situatie en handelt er naar. Naast een praktische scholing kunnen sommige problemen ook theoretisch wiskundig worden bekeken. In dit artikel gebeurt dat met de vraag:

Welke is de voordeligste stand van het zeil, als de hoek tussen vaar- en windrichting p° groot is.

Zie figuur 7, waar als hoek genomen is de stompe hoek tussen beide richtingen.

Bij het onderzoek wordt een stelling gebruikt, waarschijnlijk reeds geformuleerd door een Grieks koopman, filosoof en wiskundige Thales van Milete, ± 600 v. Chr. De stelling luidt:

Een omtrekshoek op een halve cirkel is recht. Zie figuur 8.

In figuur 9 is een willekeurige zeilstand getekend. Richting en grootte van de windkracht worden aange-

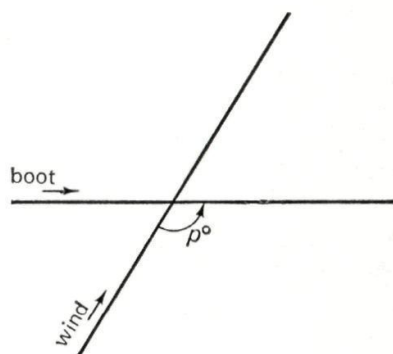


Fig. 7

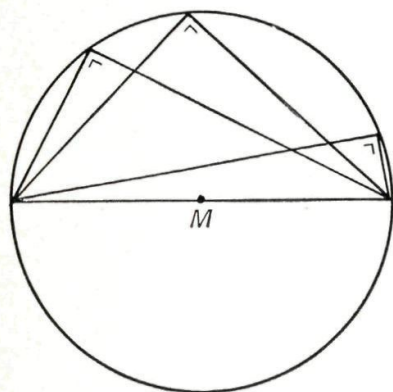


Fig. 8

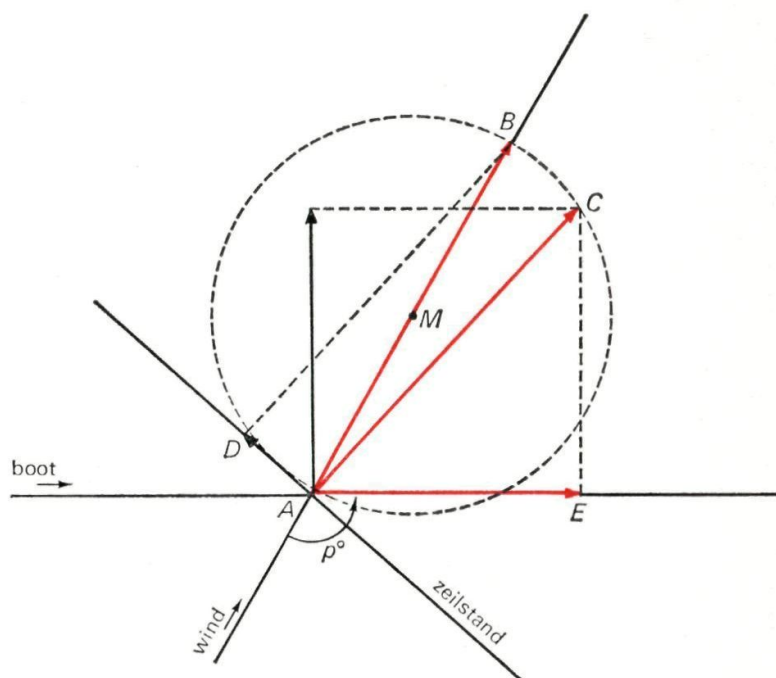


Fig. 9

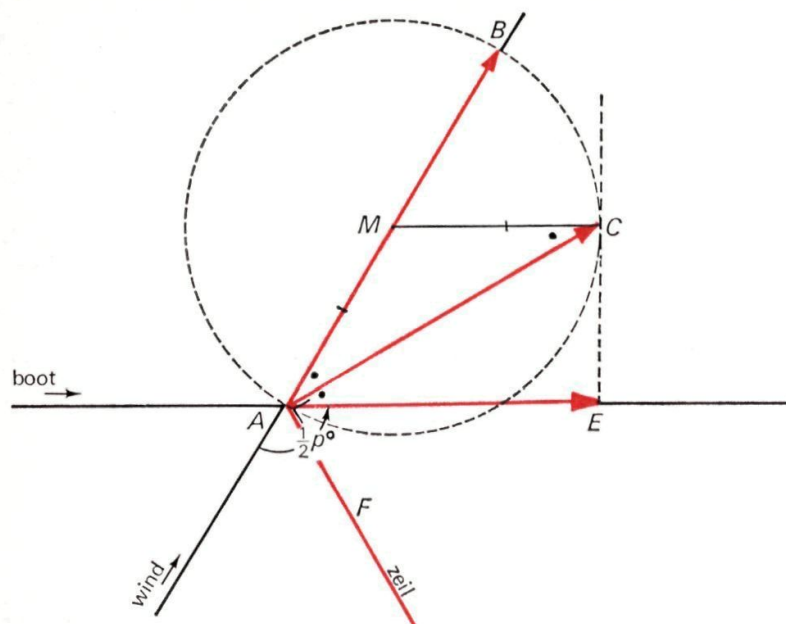


Fig. 10

duid door de vector $\vec{AB}$. Deze vector is ontbonden in de vectoren $\vec{AD}$ (zeilstandrichting) en loodrecht daarop vector $\vec{AC}$.

$ACBD$ is een rechthoek en C ligt op de cirkel van Thales, die lijnstuk AB als middellijn heeft.

Er moet gezocht worden naar de kracht uitgeoefend in de vaarrichting. Deze is getekend als vector $\vec{AE}$, waarbij CE loodrecht op de vaarrichting is. De voordeligste stand van het zeil is die, waarbij de lengte van vector $\vec{AE}$ zo groot mogelijk is. Deze situatie is getekend in figuur 10. Eenvoudig blijkt:

$$\left. \begin{array}{l} AE \parallel MC \\ MA = MC \\ \angle EAM = 180^\circ - p^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \angle CAE = \frac{1}{2}(180^\circ - p^\circ) \\ = 90^\circ - \frac{1}{2}p^\circ \end{array}$$

Wegens AC is loodrecht op de zeilstand, geldt $\angle EAF = \frac{1}{2}p^\circ$

De zeiler heeft dus het meeste voordeel van de wind, als de zeilstand is die van de deellijn van de hoek tussen wind- en vaarrichting.



De bank en de meermin

Oplossing van bladzijde 105 in nummer 5

Zoals je op bladzijde 105 al zag: Het is maar net hoe je het bekijkt.

Als de directeur eerst de nummers 1 en 2 in het water werpt en de meermin geeft nummer 1 terug, waarna nummer 3 en 4 in het water vallen en nummer 2 terugkomt, enzovoorts, dan loopt het heel anders af dan in het eerste geval.

Na 10 keer heeft de meermin teruggegeven de guldens

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

en heeft ze in haar bezit

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

En na 1000 keer heeft ze teruggegeven

1 2 3 4 ... 1000

en nog in haar bezit

1001 1002 ... 2000

Na 1000 keer is ze dus de eerste 1000 guldens definitief kwijt. En op de duur raakt ze zo elke gulden definitief kwijt. Ook de 61788356e? Natuurlijk, want die geeft ze de 61788356e keer terug.

Zodat na aftelbaar oneindig veel keer de bank alle guldens heeft teruggekregen en

de meermin zo arm is als toen ze begon.

Misschien zie je wel kans een andere manier te bedenken, waarbij de bank na afloop van het gooi- en krijgproces aftelbaar oneindig veel guldens in zijn bezit heeft en de meermin ook. Dat kan heus!

Denkertje

52 De rij is gevormd: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$

De beide breuken $\frac{5}{8}$ en $\frac{8}{13}$ (waarin $8 \times 8 = 64$ en $5 \times 13 = 65$) gaven aanleiding tot het maken van de bedrieglijke figuren van blz. 124. Zet de rij voort en vind nog een soortgelijke figurensamenstelling, waaruit (naar het schijnt) de gelijkheid van twee opeenvolgende positieve gehele getallen wordt 'bewezen.'



Van de redactie

Na het aan één onderwerp gewijde vorige nummer, sluiten we de jaargang af met een bonte variëteit aan onderwerpen. Met een variant op 'Music is every where' zouden we kunnen zeggen: 'Wiskunde is waar je kijkt'. Of het nu een speelgoed-goocheldoos is, een zeilboot, of zelfs maar een gewoon schrijfblok. Verder moeten we in dit nummer nog even terug komen op een Denkertje en op het artikel over het schaakspel in het eerste nummer. Zelfs Homerus slaapt wel eens, zullen we in dit verband maar zeggen. Tenslotte vind je weer Denkertjes en de oplossingen van de Denkertjes uit de nummers 3, 4, 5 en 6 van deze jaargang.

De redactie hoopt de lezers ook dit jaar weer een aantal genoeglijke uurtjes bezorgd te hebben en wenst een ieder mooi zomerweer en tot ziens!

Winnaar van de lootprijs uit nummer 2: Pieter De Munck, Antwerpen.

Winnaar van de lootprijs uit nummer 3: Martien Borgdorff, Baarn.

De prijswinnaar van nummer 4 was bij het ter perse gaan van dit nummer nog niet bekend.

Schaken en wiskunde; rectificatie

Onder deze titel hebben we in het eerste nummer van deze jaargang een beschouwing gewijd aan het aantal mogelijke stellingen na een paar zetten vanuit de beginopstelling op een schaakbord. Daarbij werd er vanuit gegaan dat na elke zet een nieuwe stelling ontstaat. Dat is natuurlijk ook wel waar, maar niet al die stellingen zijn verschillend! Of je nu opent met e_4 en dan vervolgt met d_4 als witspeler, of je doet deze zetten in de omgekeerde volgorde, maakt voor de stelling die ontstaat niets uit.

Anders gezegd: We hebben bij onze berekeningen de dubbeltellingen over het hoofd gezien, zoals onder andere werd gesignaleerd door Mark Kramer uit Eindhoven. Deze briefschrijver was overigens zo vriendelijk te veronderstellen dat het wel met opzet gebeurd zou zijn en dat de schrijver niet de kwalificatie 'dom' verdient. De redactie laat dit geheel in het midden.

Nu de correctie. Onderaan blz. 16 staat: 'Na zijn 20 mogelijke openingszetten kan wit vervolgen met 443 mogelijke tweede zetten, als zwart niet meedoet.'

Dit moge waar zijn, die 443 zetten leiden echter niet tot even zovele verschillende stellingen, maar tot 264 stellingen.

Dit aantal kun je vinden door te letten op het aantal mogelijke eindstanden na twee zetten voor elk van de in aanmerking komende stukken:

Twee zetten met dezelfde pion levert twee mogelijke eindstellingen. Totaal 16.

Twee zetten met verschillende pionnen levert vier eindstanden per paar. Er zijn 28 paren, dus 112 eindstanden.

Twee zetten met hetzelfde paard. Per paard zijn zes standen bereikbaar, waarvan één de beginstand is.

Totaal 11. Twee zetten met verschillende paren geeft 4 standen. Paard plus pion. Bij elke stand van het paard zijn vijftien pionstanden mogelijk. Totaal 60.

Loper plus pion. Elke loper kan zeven verschillende plaatsen bereiken. Bij elk daarvan passen twee pionstanden. Totaal $2 \times 7 \times 2 = 28$.

Dame en pion geeft 17 standen, koning en pion 6, toren en pion 6, toren en paard 4. Samen zijn dit 264 verschillende stellingen, na twee zetten van wit.

Na twee zetten van beide spelers (Denkertje 7) ligt het aantal stellingen dus in de orde van grootte van $264^2 \approx 69\,000$.

Denkertjes

53 Bewijs dat de truc voor het vinden van het antwoord bij de toverdobbelstenen op blz. 121 bij elke combinatie van de getallen op de dobbelstenen opgaat.

54 Bewijs dat je de leeftijd steeds juist kunt 'raden', bij de op blz. 122 toegepaste rekenwijze.

55 Bewijs dat op de aangegeven manier steeds het door-gestreepte cijfer kan worden bepaald.

56 Geef de verklaring van een getal raden op blz. 124.

57 Het stelsel niet-lineaire vergelijkingen in x , y en z :

$$2xyz + x^3 + 2x^2z + x^2y + xz^2 + yz^2 = 64$$

$$2xyz + x^2z + x^2y + 2xy^2 + y^2z + y^3 = 64$$

$$2xyz + xz^2 + xy^2 + z^3 + 2yz^2 + y^2z = 64$$

heeft in $\mathbb{N}$ (= verzameling natuurlijke getallen) precies één oplossing. Bepaal deze. (A. van Setten)

58 Men kiest een willekeurig tiental getallen van twee cijfers (gehele getallen tussen 9 en 100). Bewijs dat men uit dat tiental twee deelverzamelingen zonder gemeenschappelijke elementen kan kiezen en wel zo, dat de som van de getallen van de ene deelverzameling gelijk is aan de som van de getallen van de andere deelverzameling.

(Internationale wiskunde-olympiade 1972)

59 Bepaal alle oplossingen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ van het onderstaande stelsel ongelijkheden, waarin x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 positieve reële getallen zijn:

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \quad \text{I}$$

$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \quad \text{II}$$

$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \quad \text{III}$$

$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \quad \text{IV}$$

$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0 \quad \text{V}$$

(Internationale wiskunde-olympiade 1972)



Ra, ra, hoe zit dat?

Oplossing

De rechthoek met zijden 13 en 5 herbergt het bedrog. Zie figuur 11.

$$\left. \begin{array}{l} \tan \alpha = \frac{2}{5} = \frac{16}{40} \\ \tan \beta = \frac{3}{8} = \frac{15}{40} \end{array} \right\} \Rightarrow \tan \alpha \neq \tan \beta \Rightarrow \alpha \neq \beta$$

Hoewel het weinig scheelt, de delen sluiten niet precies aaneen.

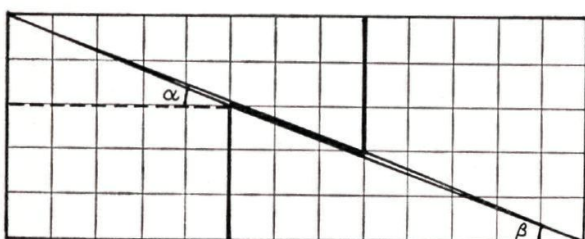


Fig. 11

Het spijt ons!

In Denkertje 11 (nummer 2 van jaargang 12) gleden we uit!

Die opgave was zo bedoeld:

Elk van de zijden en diagonalen van een *zeventienhoek* wordt in één van de kleuren geel, blauw, rood getrokken. Bewijs dat er onder die 120 lijnstukken drie zijn van dezelfde kleur, die een driehoek vormen.

Maar er stond *zestienhoek* in plaats van *zeventienhoek*! En daardoor werd deze opgave veel te moeilijk! Dat spijt ons oprecht.

De oplossing van het bedoelde Denkertje is als volgt:

Kies één van de hoekpunten van die zeventienhoek uit. Er vertrekken uit dat hoekpunt 16 lijnstukken naar de overige hoekpunten. Als je geen van de drie kleuren meer dan vijf keer mag gebruiken, dan kan je ten hoogste 15 lijnstukken in kleur trekken. Dus ... bij die 16 lijnstukken moet er ten minste één kleur ten minste zes keer gebruikt zijn. Laten we aannemen dat er zes gele lijnstukken uit het uitgekozen hoekpunt vertrekken. We gaan nu eens letten op hun zes eindpunten met hun 15 verbindingslijnstukken. Is er onder die verbindingslijnstukken ook maar één geel gekleurde, dan hebben we een gele driehoek te pakken. Daarom gaan we er in wat nu volgt vanuit, dat die zes eindpunten een zeshoek vormen waarvan alle zijden en diagonalen in blauw en rood zijn uitgevoerd.

Kies één van de hoekpunten van die zeshoek uit. Er vertrekken uit dat hoekpunt vijf blauwe en rode lijnstukken naar de andere vijf hoekpunten. Daarbij is één van de kleuren blauw en rood ten minste drie keer gebruikt.

Laten we aannemen dat er drie blauwe lijnstukken uit het uitgekozen hoekpunt van de zeshoek vertrekken naar andere hoekpunten van de zeshoek. We gaan nu eens letten

op hun drie eindpunten met daarvan de verbindingslijnstukken. Is er onder die verbindingslijnstukken ook maar één blauwe, dan hebben we meteen een blauwe driehoek te pakken. En zijn ze allemaal rood, dan hebben we een rode driehoek te pakken! Nou blijkt uit het bovenstaande alleen maar, dat we heus een aardig Denkertje in gedachten hadden. Maar er volgt niet uit, dat de in plaats daarvan afgedrukte opgave beslist fout was!

En eerlijk gezegd . . . weten we dat zelf niet eens! Want we zijn er niet in geslaagd een zestienhoek in drie kleuren te tekenen zonder dat er een éénkleurige driehoek verschijnt!

Is er iemand, die ons helpen kan?

Oplossingen van de denkertjes uit nummer 3

21 Stel, dat er een getal van k cijfers (elk gelijk aan 1 of 2) bestaat, dat veelvoud is van

2^k . Noem het $m \cdot 2^k$.

Hieruit volgt, dat er ook een getal van $(k + 1)$ cijfers (elk gelijk aan 1 of 2) bestaat, dat veelvoud is van 2^{k+1} . Want, als je vóór dat getal van k cijfers een cijfer 1 schrijft, dan krijg je $10^k + m \cdot 2^k = (5^k + m) \cdot 2^k$ en dit is veelvoud van 2^{k+1} als m oneven is. En als je een 2 schrijft vóór dat getal van k cijfers, dan krijg je $2 \cdot 10^k + m \cdot 2^k = (2 \cdot 5^k + m) \cdot 2^k$ en dit is veelvoud van 2^{k+1} als m even is.

Op deze manier construeer je de volgende rij van getallen van k cijfers, die veelvoud zijn van 2^k , voor $k = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cdot 2^1 \\ 12 &= 3 \cdot 2^2 \\ 112 &= 14 \cdot 2^3 \\ 2112 &= 132 \cdot 2^4 \\ 22112 &= 691 \cdot 2^5 \\ 122112 &= 1908 \cdot 2^6 \end{aligned}$$

en zo verder

22 Het aantal bacteriën aan het eind van de k -de minuut bedraagt $(n - k) \cdot 2^k$. Aan het begin van de n -de minuut zijn er dus evenveel bacteriën als virussen en aan het eind van de n -de minuut zijn alle bacteriën dood!

23 Zie figuur 12

$ABCD$ is een rechthoek. Stel $AB = p$ en $BC = q$. Neem A als oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel.

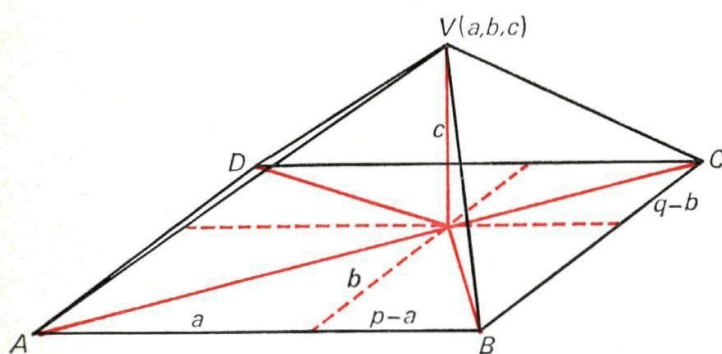


Fig. 12

Stel de vlieg V is op een willekeurige plaats $V(a, b, c)$.

$$\left. \begin{aligned} AV^2 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ VC^2 &= (p - a)^2 + (q - b)^2 + c^2 \end{aligned} \right\} \textcircled{1}$$

$$\left. \begin{aligned} VD^2 &= a^2 + (q - b)^2 + c^2 \\ VB^2 &= (p - a)^2 + b^2 + c^2 \end{aligned} \right\} \textcircled{2}$$

Uit $\textcircled{1}$ en $\textcircled{2}$ volgt $AV^2 + VC^2 = VD^2 + VB^2$

Voor elke plaats van de vlieg is aan de voorwaarde voldaan. De vlieg kan dus elke willekeurige baan beschrijven.

24 $a^2 + b^2 > 2ab$

$$b^2 + c^2 > 2bc$$

$$\frac{a^2 + c^2 > 2ac}{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 > 2ab + 2bc + 2ac} +$$

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$$

25 Zie figuur 13

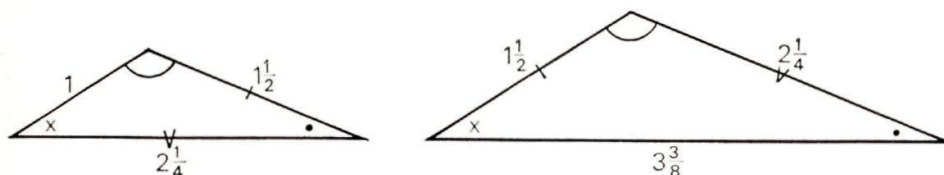


Fig. 13

26 Het totale gewicht van de 50 platen is kleiner dan 21 000 kg, namelijk 20 950 kg. En toch kan het niet!

Als 7 auto's 50 platen vervoeren, dan zal tenminste één van die auto's met 8 platen beladen moeten zijn. En zelfs het lichtste achttal platen gaat het draagvermogen van de auto's te boven! Want $370 + \dots + 384 = 3016$!

27 Hier volgt het bewijs voor het geval, dat vierhoek $ABCD$ geen paren evenwijdige zijden heeft. De andere gevallen worden op soortgelijke manier afgehandeld en zijn zelfs nog gemakkelijker. Zonder de algemeenheid te schaden kunnen we aannemen, dat het snijpunt S van AD en BC aan de kant van CD ligt en dat het snijpunt T van AB en CD aan de kant van AD ligt.

Nu is $\angle ACB = \angle CAD + \angle S$, dus $\angle ACB > \angle CAD$, dus ligt CB' binnen hoek ACB . Op dezelfde manier bewijst je dat AB' binnen hoek BAC ligt.

Samen: B' ligt binnen driehoek ABC (en dus niet buiten vierhoek $ABCD$).

28 N is ten hoogste gelijk aan 25 (maar niet gelijk aan een van de getallen 6, 11, 12, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24).

N is ten hoogste gelijk aan $(k - 1)^2$.

29 Aangenomen wordt bij de berekening dat de aarde een bol is met straal 6375 km.

30 Zie figuur 14

MA is de straal van de aarde

Stel $MA = R$ meter

$AB = 1$ meter

Dus $MB = R + 1$ meter

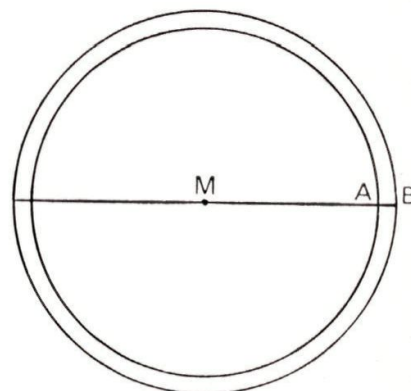
Omtrek van de aarde is $2\pi R$ meter.

Lengte van de ijzerdraad is $2\pi(R + 1)$ meter.

Het verschil is $2\pi(R + 1) - 2\pi R = 2\pi$ meter.

De ijzerdraad is dus ongeveer 6,28 meter langer dan de omtrek van de aarde, onafhankelijk van R .

Fig. 14



Oplossingen van de denkertjes uit nummer 4

31 De algemene formule is $\sqrt[n]{2} \frac{2}{2^n - 1} = 2\sqrt[n]{\frac{2}{2^n - 1}}$

$$\text{Bewijs } 2 \frac{2}{2^n - 1} = 2 + \frac{2}{2^n - 1} = \frac{2(2^n - 1) + 2}{2^n - 1} = \frac{2 \cdot 2^n}{2^n - 1} = 2^n \cdot \frac{2}{2^n - 1}$$

$$\text{Dus } \sqrt[n]{2} \frac{2}{2^n - 1} = \sqrt[n]{2^n} \cdot \frac{2}{2^n - 1} = 2\sqrt[n]{\frac{2}{2^n - 1}}$$

32 De spoorbreedte is 11.

De paren zijn (a, f) (b, g) (c, h) (d, i) (e, j) (f, k) en (h, l) .

De kar is dus zeven maal gepasseerd.

33 Zie figuur 15

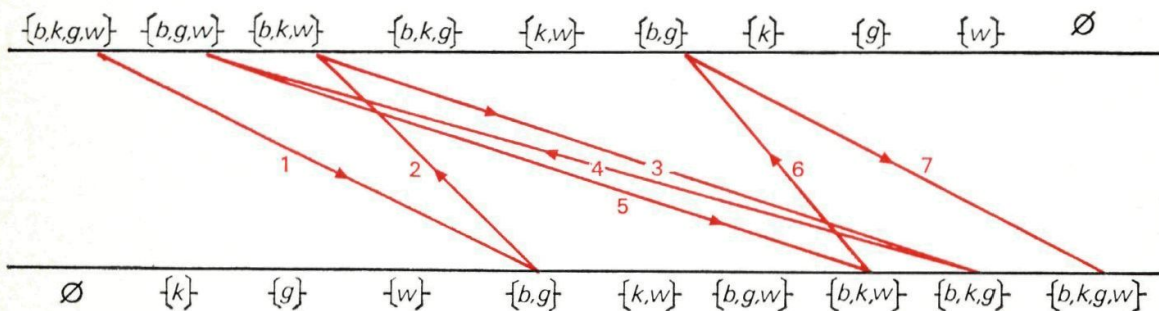


Fig. 15

34 Neem de rij van de priemgetallen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ...

Noem het n^e priemgetal p_n , dan is $t_n = p_n + p_{n+1}$ de n^e term van de gegeven rij

5, 8, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 52, 60, 68

Dus $t_{11} = 68$

35 Er zijn 20 mogelijke paren eindcijfers van kwadraten en daarvan zijn 25 en 56 de enige, waarin een 5 staat.

Laten we 998 vijfen volgen door 25, dan staat er een 'drievoud min één' en dat kan geen kwadraat zijn. Laten we ze volgen door 56, dan staat er een drievoud dat geen negenvoud is, dus weer geen kwadraat!

36 We gebruiken bij het bewijs de getallen

$$p = 5000000000,1234567890$$

$$q = 5000000000,1234567891$$

Nu is $q^2 - p^2 = (q - p)(q + p) = 1,00000000002469135781$ en dit is groter dan 1. Dit betekent dat er tussen p^2 en q^2 een natuurlijk getal ligt. Kies voor a dat natuurlijke getal, dan ligt $\sqrt{a}$ tussen p en q en heeft dus de gewenste eigenschap!

37 De bal is opgebouwd uit 12 regelmatige vijfhoeken en 20 regelmatige zeshoeken.

$$Z = 32, H = 60, R = 90$$

$$32 + 60 = 90 + 2$$

38 Men kan de hele kring zien als een afwisselende opeenvolging van groepjes mannen en groepjes vrouwen. Die groepjes kunnen natuurlijk éénlingen zijn. Er zijn gelijke aantallen van de twee soorten groepjes.

Vrouwen, die rechts naast zich een man hebben, treft men vanzelfsprekend alleen aan in de vrouwengroepjes en wel één per groepje. Net zo vindt men in elk mannengroepje één man, die een vrouw aan zijn rechterhand heeft. Er zijn dus evenveel vrouwen met een man rechts naast zich als mannen met een vrouw rechts naast zich.

Het aantal mensen, die een ander geslacht hebben dan hun rechterbuur, is dus duidelijk even. En n is juist het dubbele van dit even aantal, dus een viervoud.

39 Noem de kans van A op de prijs p .

Als de eerste worp 'munt' is, dan kan A wel inpakken; de prijs is dan voor B of voor C .

Na een eerste worp van 'kruis' redeneert A als volgt: 'Komt er nu weer kruis, dan ben ik binnen; de kans daarop is $\frac{1}{2}$. Komt er echter 'munt' dan sta ik er net eerder voor als aan het begin van het spel; mijn kans op de prijs is dan weer p . Op dit moment is mijn kans op de prijs dus $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p)$.'

Hieruit blijkt: $p = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p)$ of wel $p = \frac{1}{3}$.

De kans van B op de prijs is duidelijk even groot als die van A en bedraagt dus ook $\frac{1}{3}$. Voor C blijft er dan $\frac{1}{3}$ over. En dus is het een eerlijk spel!

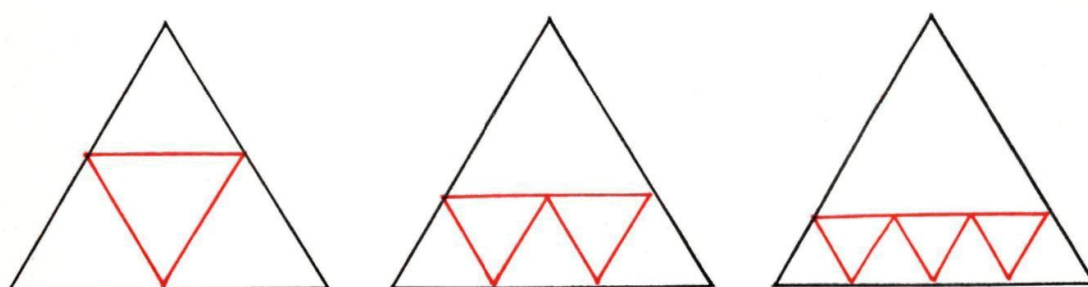


Fig. 16

40 In bovenstaande figuren zijn verdelingen in 4, 6 en 8 driehoeken weergegeven. Door in elk van de figuren één van de driehoeken weer in vieren te verdelen, ontstaan verdelingen in 7, 9 en 11 driehoeken.

Zo voortgaand ontstaan de rijen

4, 7, 10, 13, 16, ...

6, 9, 12, 15, 18, ...

8, 11, 14, 17, 20, ...

Vanaf $n = 6$ komt elk natuurlijk getal n in één van de rijen voor, omdat ze achteréenvolgens uit de drievouden $+ 1$, de drievouden en de drievouden $+ 2$ bestaan.

Oplossingen van de denkertjes uit nummer 5

41 We nummeren spiraalsgewijs, zoals in onderstaande figuur is aangegeven. Het aantal velden blijkt dan a te zijn.

26	25	24	23	22	21
27	10	9	8	7	20
28	11	2	1	6	19
29	12	3	4	5	18
30	13	14	15	16	17
31	32	33	34	35	36

Fig. 17

42 Ja. Het kleinste is 1, dan volgt $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 1155 + 1 = 1156$.

Dan $2 \cdot 1155 + 1$, $3 \cdot 1155 + 1$ enz.

43 Noem V de verzameling van de natuurlijke getallen die we kunnen schrijven in de vorm $p \cdot 100 + q \cdot 101$ ($p, q \in \mathbb{N}$). Dan is $101 \cdot 100 + 0 \cdot 101 = 10100 \in V$. Hierin is $p = 101$ en $q = 0$. Maak p nu 1 kleiner en q tevens 1 groter. Dan zien we, dat $10101 \in V$. Zo gaan we door tot $0 \cdot 100 + 101 \cdot 101$. Hiervoor kunnen we ook schrijven $101 \cdot 100 + 1 \cdot 101$. En nu maken we weer telkens p 1 kleiner en q 1 groter. Zo doorgaande zien we, dat alle natuurlijke getallen vanaf 10100 tot V behoren. Dus is V aftelbaar oneindig. De natuurlijke getallen die niet tot V behoren, zijn alle kleiner dan 10100; deze verzameling is dus eindig.

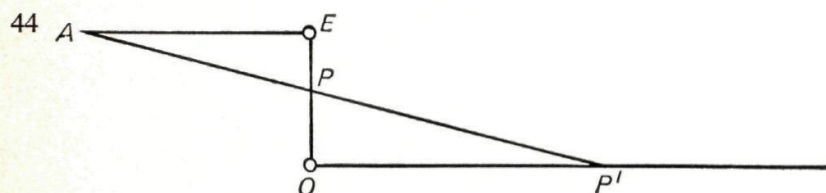


Fig. 18

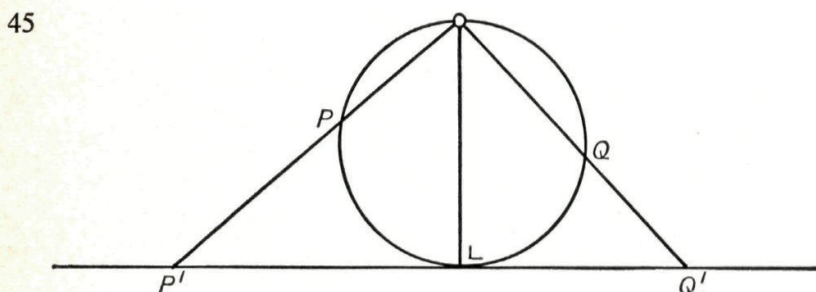


Fig. 19

46 Het helpt niets, als je dat nieuwe reële getal aan de rij toevoegt. Door precies dezelfde redenering bewijs je weer, dat ook de nieuwe rij niet alle reële getallen tussen 0 en 1 bevat.

47 Maak een oneindige rij rationale getallen tussen 0 en 1, b.v.

0,152000000 ...
 0,161616161 ...
 0,034564564 ...
 0,111111111 ...
 ...

en pas het op blz. 109 gevolgde procédé toe. We krijgen dan 0,2752 ...

Dit is inderdaad een getal dat nog niet in de rij voorkomt.

Het is ook een reëel getal tussen 0 en 1. Maar het hoeft niet rationaal te zijn. Er is namelijk geen enkele reden waarom de rij decimalen zou repeteren.

We kunnen dus niet aantonen, dat bij elke rij rationale getallen een *rationaal* getal te vinden is dat nog niet in de rij voorkomt.

48 Onderstel V heeft een kardinaalgetal dat groter is dan alle natuurlijke kardinaalgetallen maar kleiner dan a . Dan kunnen we de elementen van V koppelen met een deel van de elementen van $\mathbb{N}$. Er zijn nu twee mogelijkheden:

a deze deelverzameling heeft een grootste element en is dus eindig; het kardinaalgetal van V is dan een natuurlijk getal;

b de deelverzameling heeft geen grootste element en dan kunnen we de elementen volgens hun grootte in een eindeloze rij rangschikken; hun kardinaalgetal is dus a .

Het kleinste oneindige kardinaalgetal is dus a .

- 49 Een cirkel bestaat uit $c + 1$ punten (denkertje 45). En $c + 1 = c$. Kies op de cirkel een punt A en een omloopsrichting.

Kies in deze richting rondgaande eerst P , dan Q en dan R op de cirkel. Je kunt P kiezen op c manieren, daarna Q op c manieren en tenslotte R op c manieren. Je kunt de drie punten dus kiezen op c^3 manieren en je weet, dat $c^3 = c$. Je kunt dus c driehoeken in de cirkel beschrijven.

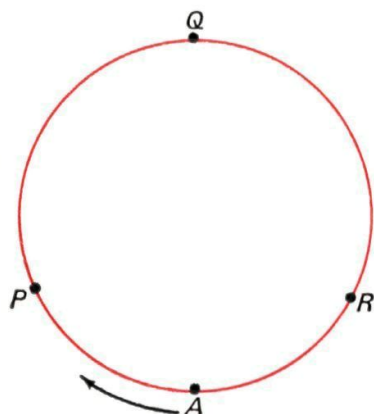


Fig. 20

Om een gelijkzijdige driehoek in de cirkel te beschrijven, hoef je alleen maar punt P te kiezen. Dit kan op c manieren en dus kun je ook c gelijkzijdige driehoeken in de cirkel beschrijven.

- 50 In onderstaande figuur zie je a horizontale lijnen met op elk c punten. In totaal dus $a \cdot c$ punten. Trek nu door elk punt van de x -as een verticale lijn. In de figuur zijn er een paar gestippeld. Zo'n stippellijn snijdt de horizontale lijnen in a punten. Er zijn c van die stippellijnen.

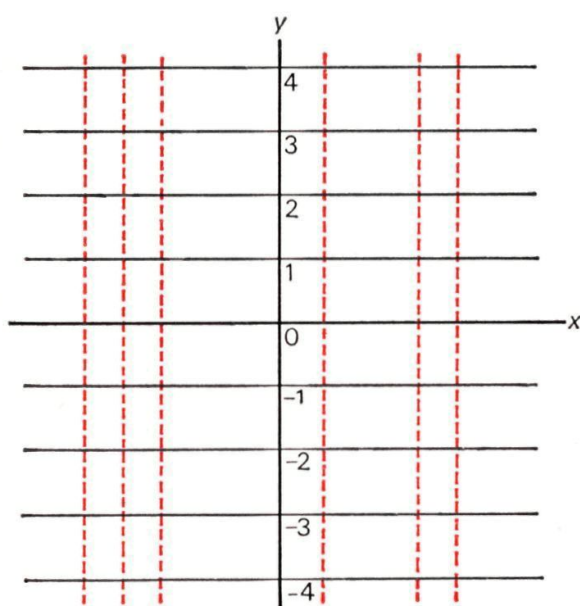


Fig. 21

In totaal krijgen we dus zo $c \cdot a$ snijpunten.

Dit zijn echter precies dezelfde punten als daarnet. En dus is

$$c \cdot a = a \cdot c$$

Oplossingen van de denkertjes uit nummer 6

51 Zie figuur 22

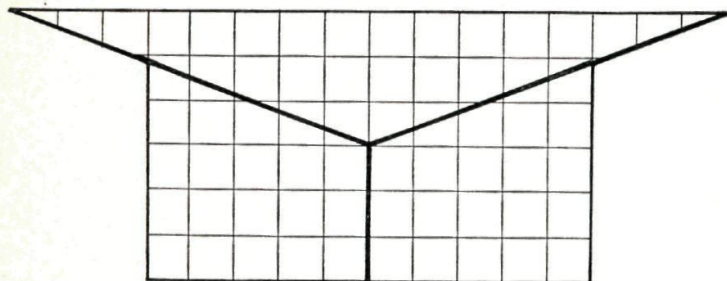


Fig. 22

52 De breuken $\frac{13}{21}$ en $\frac{8}{13}$ wijzen een volgende figuur aan. Twee rechthoekige driehoeken met rechte-hoeksijden 8 en 21. Twee rechthoekige trapeziums, ieder hoog 13 en met evenwijdige zijden 8 en 13.

53 Let op het middelste cijfer van de getallen, die voorkomen op een dobbelsteen.

middelste cijfer	waarde	som eerste en laatste cijfer
bij rood 8	80	7
bij zwart 4	40	8
bij geel 7	70	10
bij groen 6	60	9
bij blauw 5	50	13
	<u>som 300</u>	<u>som 47</u>

Noem de som van de eenheden p dan is de som van de eerste cijfers $(47 - p)$

De som van de vijf getallen bij elke combinatie is dus $(3 + 47 - p) \cdot 100 + p = (50 - p) \cdot 100 + p$

Op de foto:

p is dus $1 + 8 + 7 + 6 + 5 = 27$

De som van alle getallen van deze combinatie is $(50 - 27) \cdot 100 + 27 = 2327$

54 Stel de maand p en de leeftijd q .

De proefpersoon rekent in gedachten:

$$\begin{aligned}
 & p \\
 & \times 2 = 2p \\
 & + 5 = 2p + 5 \\
 & \times 50 = 100p + 250 \\
 & + \text{leeftijd} = 100p + 250 + q
 \end{aligned}$$

Na bekend maken reken je zelf $(100p + 250 + q) - 250 = 100p + q$

Hieruit blijkt, dat de honderdtallen de maand aangeven en de eenheden de leeftijd.

55 Na vermenigvuldiging met 9 ontstaat natuurlijk een negenvoud, bijvoorbeeld bestaande uit de cijfers a, b, c, d en e . Dus $(a + b + c + d + e)$ is een negenvoud. Een cijfer doorstrepen, bijvoorbeeld c . Dus $(a + b + d + e)$ is een negenvoud min c . Neem je dus na $(a + b + d + e)$ het grotere getal, dat een negenvoud is, dan is het verschil uiteraard c , het doorgestreepte cijfer.

$$56 \quad 39 \text{ (tientallig)} = 100111 \text{ (tweetallig)} \\ = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0$$

Let nu op het eerste getal links boven op de kaart.

$$\begin{array}{ll} 1 = 2^0 & 8 = 2^3 \\ 2 = 2^1 & 16 = 2^4 \\ 4 = 2^2 & 32 = 2^5 \end{array}$$

Het getal 39 is geplaatst op de kaarten, die beginnen met

$$\begin{array}{r} 2^5 = 32 \\ 2^2 = 4 \\ 2^1 = 2 \\ 2^0 = 1 \\ \hline \text{som } 39 \end{array}$$

Elk getal kan geschreven worden als de som van machten van 2. Elk getal, kleiner dan 64, vindt dus een plaats op de kaart, die met die macht van 2 begint, die ook in die som voorkomt.

57 Het linkerlid van elke vergelijking heeft 8 termen. $64 = 8 \cdot 2^3$.

Daar elke term 3 factoren heeft kunnen we nu elke faktor gelijk aan '2' nemen. Dus $x = y = z = 2$ is een oplossing en is dé oplossing (eenduidigheid is gegeven).

58 Een verzameling met 10 elementen heeft $2^{10} = 1024$ deelverzamelingen. Eén daarvan is leeg en één is die verzameling zelf. In dit vraagstuk hebben we met die twee uitzonderlijke deelverzamelingen niets te maken; we beschouwen 1022 deelverzamelingen van het tiental natuurlijke getallen. De som van de elementen van zo'n deelverzameling is een geheel getal, minimaal gelijk aan 10 en maximaal gelijk aan $99 + 98 + 97 + 96 + 95 + 94 + 93 + 92 + 91 = 855$. Er zijn dus $855 - 9 = 846$ mogelijke waarden voor die som.

Omdat er meer deelverzamelingen zijn dan mogelijke somwaarden zullen er twee deelverzamelingen met gelijke som bestaan. Verwijderen we daaruit eventuele gemeenschappelijke elementen, dan houden we twee deelverzamelingen over die aan de gestelde eisen voldoen.

59 De som van de linkerleden van de vijf ongelijkheden is om te vormen tot

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(x_3 - x_5)^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2)(x_4 - x_1)^2 + \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2)(x_5 - x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_4^2 + x_5^2)(x_1 - x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_5^2 + x_1^2)(x_2 - x_4)^2$$

waarin elke term niet-negatief is terwijl hun som niet-positief moet zijn. Dit kan alleen maar wanneer elke term gelijk is aan 0, dus als $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

Maar in dat geval blijkt ook aan elk van de vijf ongelijkheden apart voldaan te worden. Elke oplossing van het stelsel heeft dus de vorm (a, a, a, a, a) voor de een of andere positieve a .

Inhoud:

Wiskunde uit de goocheldoos° 121

Ra, ra, hoe zit dat?° 124

Papierformaten° 125

Hoe hoger, hoe groter en toch gelijk° 129

Een zeilprobleem wiskundig bekeken°° 131

Oplossing van het Meermin probleem 133

Schaakprobleem en Denkertje 11 134

Denkertjes 130, 133, 135

Oplossingen van de Denkertjes uit de nummers 3, 4, 5 en 6 137

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Amersfoort.
A. F. VAN TOOREN, Leusden-C.
G. A. VONK, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. OOSTEN, Kamperfoelieweg 44, Paterswolde.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, / 4,50 per jaargang. Voor anderen / 7,00.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

