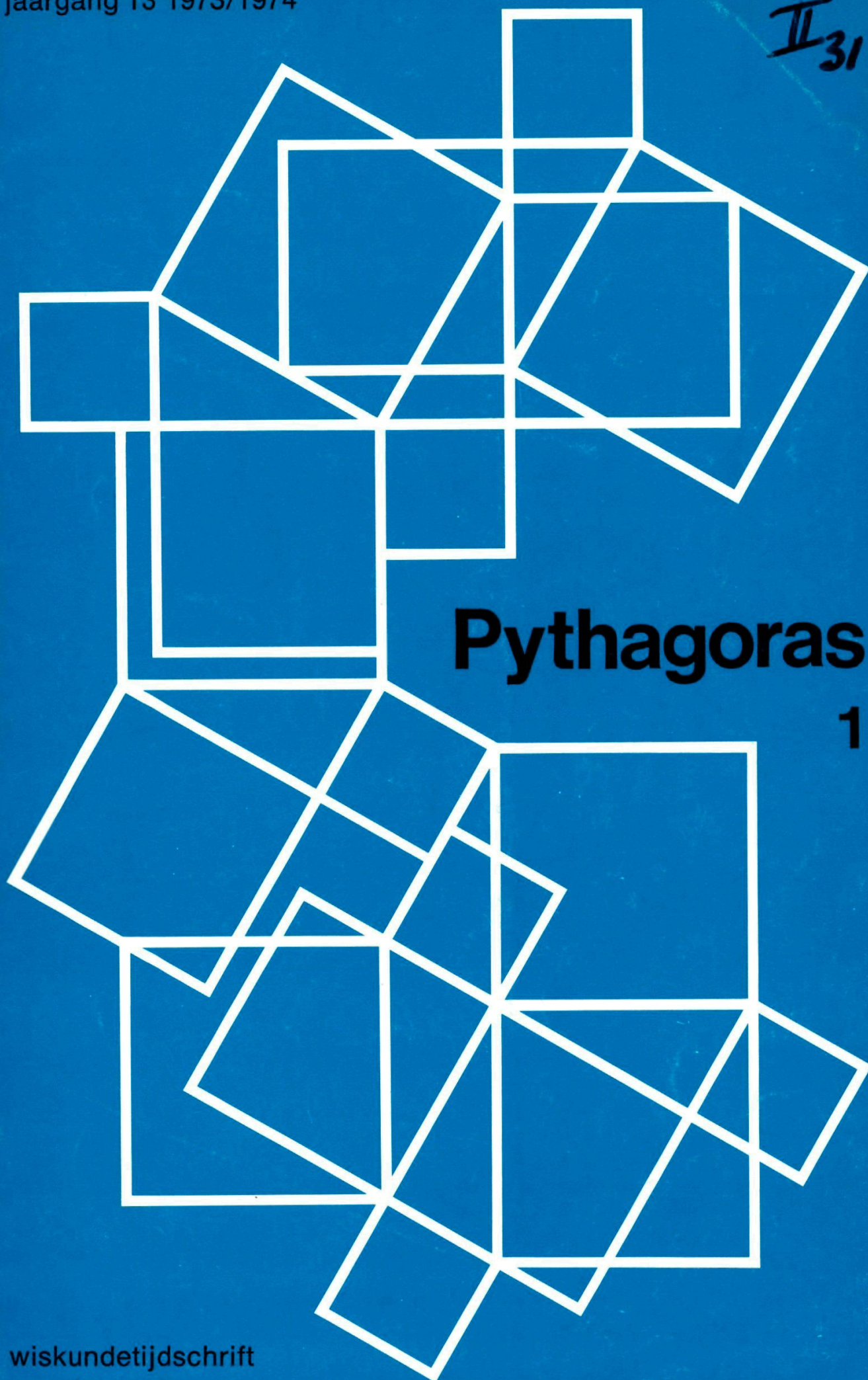


jaargang 13 1973/1974

*II*₃₁



Pythagoras

1

wiskundetijdschrift
voor jongeren



Beste Pythagoreër

Alle oude en nieuwe lezers hartelijk welkom bij de dertiende jaargang van ons blad. We zullen ook dit jaar weer ons best doen je veel leesplezier (en denkplezier!) te bezorgen.

Als je de Pythagorasfolder hebt gekregen ben je vast al aan het puzzelen geslagen; heb je het dwaalspoor ook ontdekt?

Het is onzin te veronderstellen dat die ene gulden 'zoek' zou zijn. De boeren hebben 27 gulden betaald; 2 gulden houdt de knecht. Die 2 gulden werden ten onrechte *opgeteld* bij die 27.

Als je ze aftrekt, kom je op 25, precies wat de handelaar tenslotte voor de zak kunstmest heeft ontvangen.

We hebben trouwens gehoord dat de handelaar erg veel spijt heeft gekregen van zijn knagende geweten. Als hij nl. die 5 gulden wel had gehouden, had hij daarvoor een heel jaar Pythagoras kunnen lezen. (Zijn oudste dochter is namelijk leerlinge van een scholengemeenschap!).

Voor hen die Pythagoras voor het eerst inkijken nog een enkele toelichting:

- de oplossingen van de Denkertjes kun je inzenden naar het redactiesecretariaat: Postbus 58, Groningen.
Onder de goede inzenders wordt een boekenbon verloot. Je dingt al mee naar die boekenbon wanneer je één Denkertje goed hebt opgelost, het is dus niet nodig om alle oplossingen te vinden. Wel is het nodig dat de oplossingen in duidelijk leesbaar handschrift zijn geschreven. (Typen mag ook.) Behalve de oplossingen dient ook de *redenering* die tot die oplossing leidt, te worden vermeld. We ontvangen je oplossingen graag op bloknotenvellen, met links bovenaan op elk blad je *naam, adres, woonplaats, leeftijd, leerjaar en school*.
- de artikelen zijn niet alle even gemakkelijk. We hebben dat door middel van bolletjes aangegeven, zo betekent ° gemakkelijk, °° moeilijker en bij °°° moet je toch behoorlijk doorzetten.
Wil je reageren op artikelen vind je ze bv. te saai, te moeilijk, erg interessant e.d. schrijf de redactie, er zal aandacht aan geschonken worden.
- uit de eerste acht jaargangen is een selectie samengesteld en in boekvorm verschenen onder de titel Pythagoras-Festival. De prijs van deze uitgave, die verkrijgbaar is bij de uitgever en de boekhandel, bedraagt f 11,75.

Ook wegverlichting kan aanleiding geven tot wiskundige bespiegelingen. Zie pagina 12 e.v.

De schoenhandelaar en de zwemmer

Wiskunde is een vak waarin het logisch denken zoveel mogelijk in ere wordt gehouden. Bij het oplossen van problemen is het belangrijk je niet in de war te laten brengen door toevoegingen die alleen maar ten doel hebben om de zaak ingewikkelder te doen lijken dan hij in werkelijkheid is.

Een aardig voorbeeld hiervan is het probleempje van de graanhandelaar dat je in de folder hebt kunnen lezen. We hopen dat je er niet ingelopen bent; mocht dat wel zo zijn dan krijg je bij de volgende twee problemen de kans te bewijzen dat je je lesje hebt geleerd. De oplossing van beide vindt je op bladzijde 24.

Het valse briefje van honderd

Een schoenhandelaar verkoopt aan een klant een paar schoenen voor veertig gulden. De klant betaalt met een briefje van honderd gulden, maar de schoenhandelaar kan dat niet wisselen. Hij gaat ermee naar de slager die tegenover zijn winkel woont, die hem inderdaad kan helpen.

De schoenhandelaar geeft de klant zijn wisselgeld en deze vertrekt tevreden met zijn nieuwe schoenen in een keurige draagtas.

De volgende dag komt de slager bij de schoenhandelaar en zegt: 'Het briefje van honderd dat ik gisteren voor je gewisseld heb is vals!'

De schoenhandelaar moet na zorgvuldige bestudering toegeven dat de slager gelijk heeft. Hij stelt de slager schadeloos met een echt briefje van honderd en blijft zitten met de vraag: Hoe groot is nu de schade die ik geleden heb?

De zwemmer en de bal

De heer Ir. G. Dijkstra te Paterswolde vertelde ons dat hij eens in een rivier ging zwemmen. Hij dook vanaf een brug in het water en zwom stroomopwaarts. Na honderd meter ontmoette hij een bal die in de rivier dreef.

Hij zwom nog een kwartier door, maar besloot toen terug te gaan teneinde de bal uit het water te halen.

Deze was natuurlijk inmiddels met de stroom meegedreven. Precies onder de brug waar zijn kleren lagen haalde de zwemmer de bal in, waarna hij tevreden met zijn nieuwe bezit de wal opklauterde.

Zowel de zwemmer als de rivier hadden een zeer regelmatige dag: ze zwommen respectievelijk stroomden gelijkmatig.

De vraag luidt nu: hoe snel stroomde de rivier?

Doe meer met de conchoïde

°De conchoïde behoort tot de oudste vondsten op het terrein van de wiskunde. Een Grieks geleerde, Nicomedes, ± 200 v. Chr., ontdekte hem bij zijn speuren rondom de problemen van de trisectie van een hoek en de verdubbeling van de kubus. Het uiterlijk van de kromme inspireerde tot de naam conchoïde, letterlijk vertaald: schulp of schelp-trek.

De schoolboeken besteden geen aandacht aan deze grijsaard onder de krommen. Begrijpelijk. Hij past immers niet in de gangbare opbouw van de wiskunde. Maar meer bekeken als solitair is hij toch boeiend. Zowel de vergelijking als de speciale constructie van figuren zijn de moeite van nader onderzoek waard.

In figuur 1 zijn enkele hoofdbestanddelen getekend. A is een vast punt en l is een gegeven rechte lijn. Het loodlijnstuk AA' heeft lengte a .

In figuur 2 verschijnen de punten van de conchoïde. Een lijnenbundel met A als top bepaalt op l de verzameling snijpunten Q . Weerszijden van Q wordt op elk exemplaar van de bundel het constante lijnstuk p afgepast. De conchoïde is de verzameling punten P .

Voor $p < a$ ontstaat figuur 2, voor $p = a$ komt er figuur 3 en voor $p > a$ is figuur 4 het resultaat.

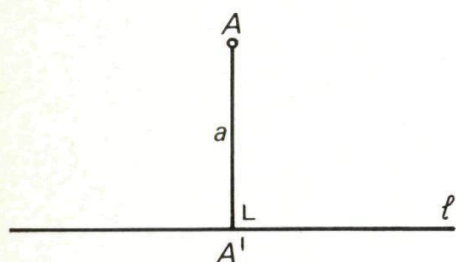


Fig. 1

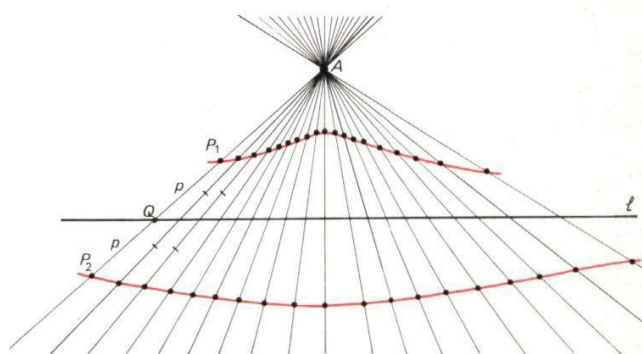


Fig. 2

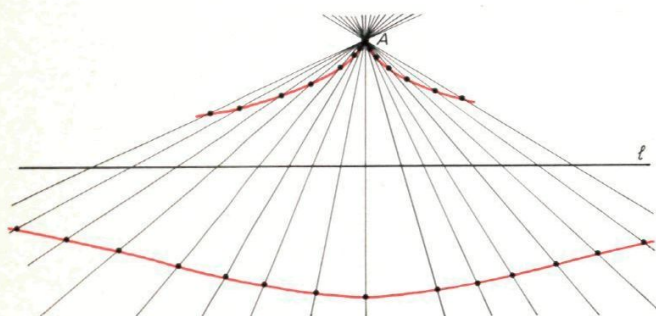


Fig. 3

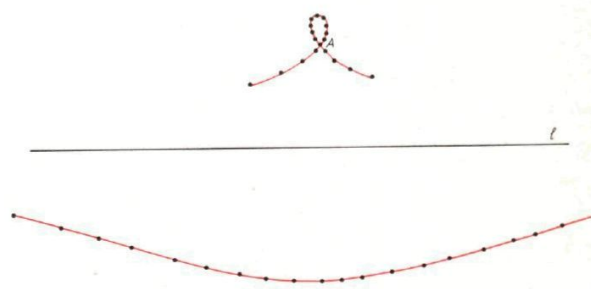


Fig. 4

°°° Poolcoördinaten zijn hier heel geschikt om een vergelijking op te stellen. In figuur 5 is:

AA' is poolas en A is de pool.

$AP = r$, $AP' = r'$ en $\angle A'AQ = \varphi$

$$\left. \begin{array}{l} AQ = \frac{a}{\cos \varphi} \\ AP = AQ - p \\ AP' = AQ + p \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r = \frac{a}{\cos \varphi} - p \\ r' = \frac{a}{\cos \varphi} + p \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$$

1 levert de linkertak en 2 de rechtertak voor $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi < \varphi \leq 2\pi$

AA' kan als x -as genomen worden en A als oorsprong van een rechthoekig assenstelsel.

Substitutie van $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ en $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ en verdere uitwerking geeft zowel voor 1 als voor 2: $(x - a)^2 \cdot (x^2 + y^2) = p^2 x^2$ 3

In figuur 5 is genomen $p = a$. Voor $p < a$ en voor $p > a$ wordt echter dezelfde uitkomst 3 verkregen.

Het merkwaardige is, dat punt $A(0,0)$ altijd een punt van de kromme is. Ook al geldt $p < a$. Ga dat maar eens na.

° Uit de constructies van de figuren 2, 3 en 4 blijkt al, dat de conchoïde niet met passer en liniaal kan worden geconstrueerd. Zodra echter een behoorlijk aantal punten is bepaald, kan de kromme vrij nauwkeurig worden getrokken. Dat bepalen van een voldoende aantal punten kan worden bespoedigd met behulp van een stevige strook papier of bijvoorbeeld een briefkaart. Leg de kaart, waarop punt P is aangegeven, met een hoekpunt op lijn l , langs punt A en neem punt P op het tekenpapier over. Zie figuur 6. Eventueel kan op de kaart nog een tweede punt worden gezet, zodat in één keer twee takken van twee verschillende conchoïden ontstaan.

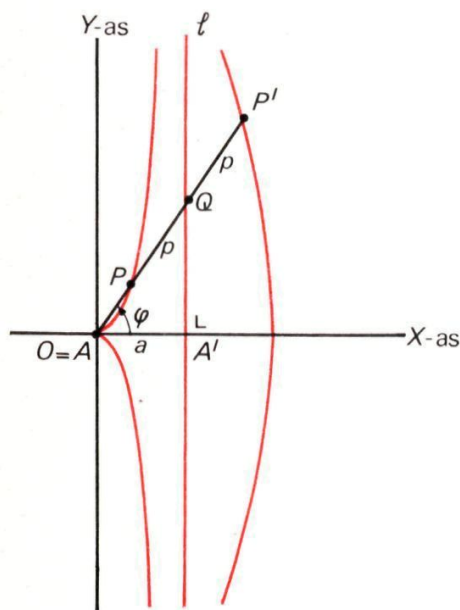


Fig. 5

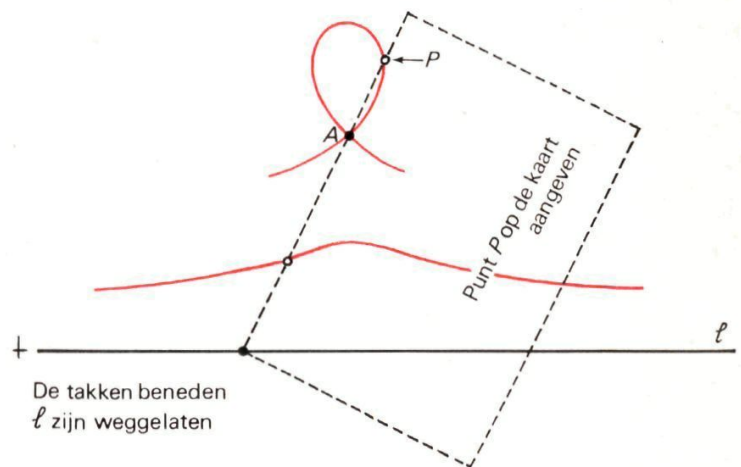


Fig. 6

In de volgende figuren is telkens één tak van de kromme getekend. Het zwaartepunt van de driehoek fungeert als vast punt en de zijden nemen de plaats in van lijn l . Stel nu de lengte van de zwaartelijns in de driehoek gelijk $3a$, en p weer het af te passen lijnstuk.

Figuur 7 ontstaat voor $p < a$, figuur 8 voor $p = a$.

$a < p < 2a$ levert figuur 9 en met

$p = 2a$ komt figuur 10 te voorschijn. In figuur 11 gaat $a < p < 2a$ samen met $p > 2a$.

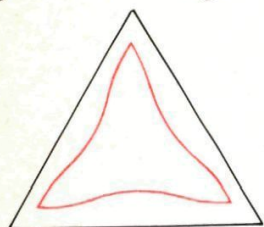


Fig. 7

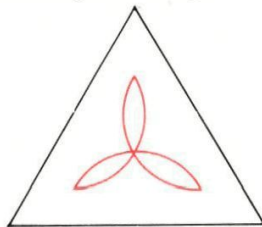


Fig. 8

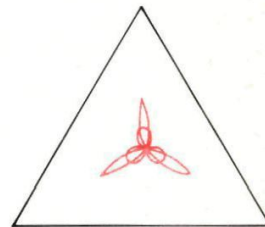


Fig. 9

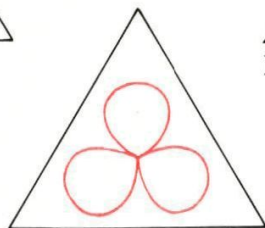


Fig. 10

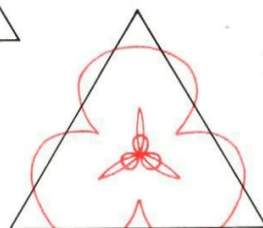


Fig. 11

Het ligt voor de hand combinaties van driehoeken toe te passen. Zie figuur 12. Diverse conchoïdetakken kunnen bepaald worden in hun relatie t.o.v. het zwaartepunt van de grootste driehoek. Maar ook de zwaartepunten van de kleinere driehoeken kunnen betrokken worden in het grotere geheel.

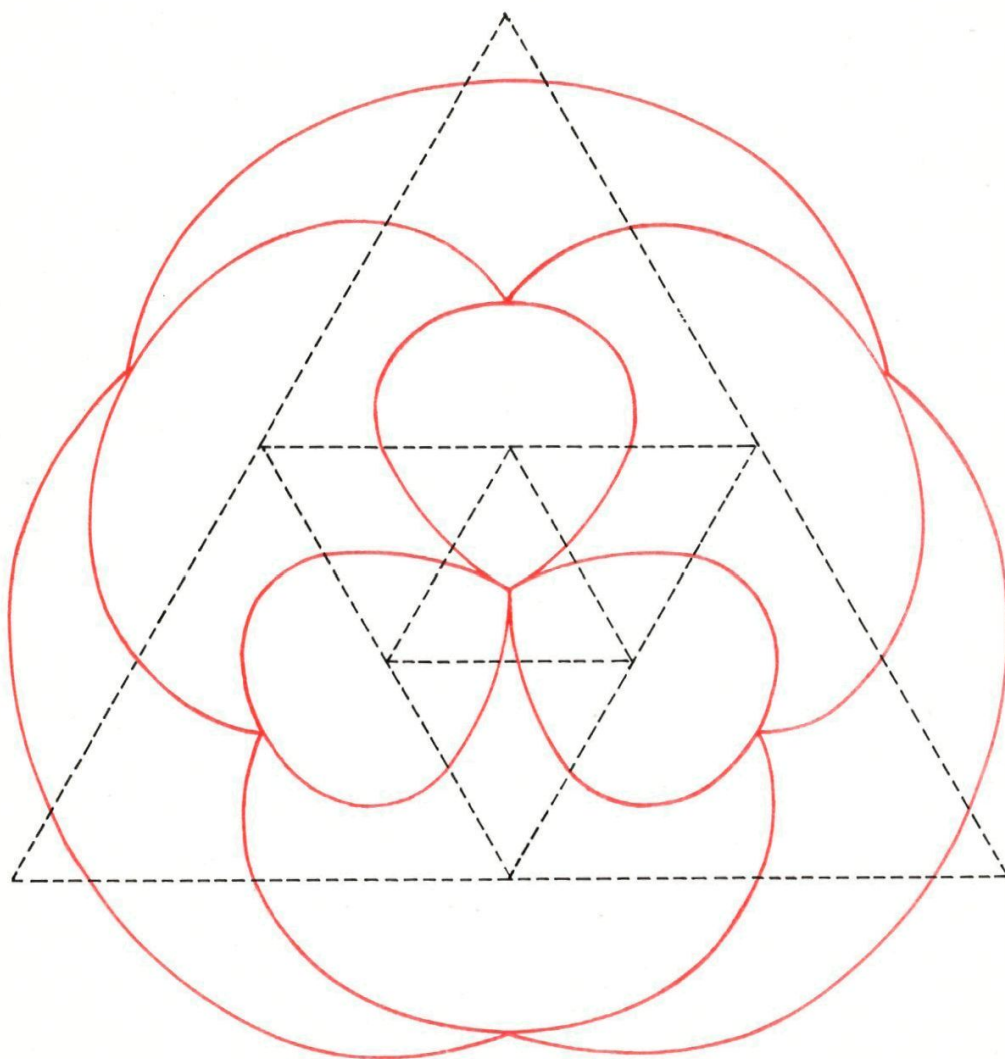


Fig. 12

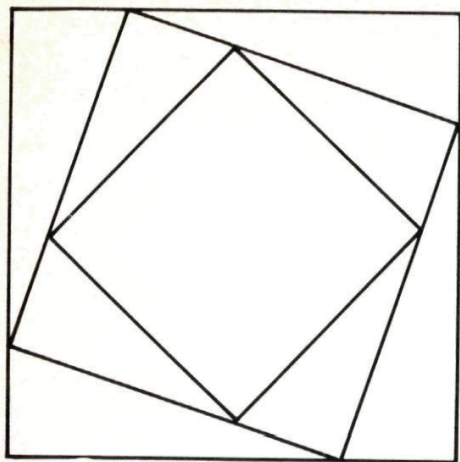


Fig. 13

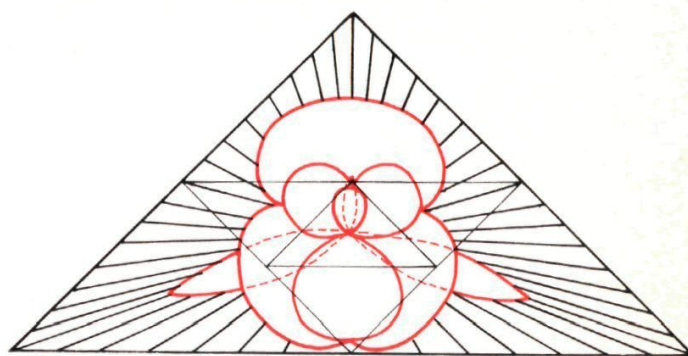


Fig. 14

Neem de vierkanten van figuur 13 eens als basispatroon. Gebruik een soortgelijke door-
eenstrengeling van regelmatige vijfhoeken.

Het is niet beslist noodzakelijk regelmatige figuren te nemen. Een gelijkbenig rechthoeki-
ge driehoek, zoals in figuur 14, geeft weer een heel ander effect.

Bedenk nog, dat er een tweede tak van de conchoïde bestaat. Laat die ook eens meedoen.
Het is duidelijk, dat de conchoïde aanspoort tot zelfwerkzaamheid.

Daarom: Doe-het-zelvers, aan de slag!

Denkertjes

- 1 De nevenstaande figuur wordt begrensd door vier
halve cirkels. Hij moet verdeeld worden in twee con-
gruente stukken.
Kun je dat?
- 2 Uit de gehele getallen $1, 2, \dots, 2n$ wordt een wille-
keurig $(n+1)$ -tal getallen gekozen. Bewijs dat er
onder die $n+1$ getallen twee onderling ondeelbare
zijn (twee, die niet door hetzelfde priemgetal deel-
baar zijn en dus 1 als grootste gemeenschappelijke
deler hebben).
- 3 De vierhoek $ABCD$ in deze figuur is een rechthoek
(en de rest van de gegevens is in de figuur aange-
geven). Bewijs zonder goniometrie te gebruiken, dat
hoek AQD gelijk is aan 45° .

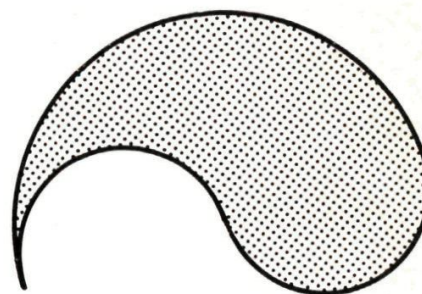


Fig. a

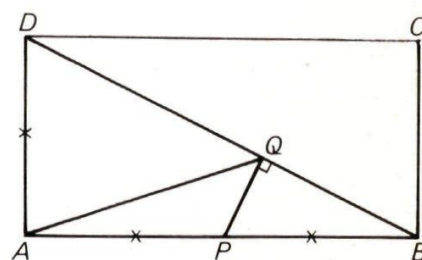


Fig. b

Als je maar genoeg benzine hebt . . . °°

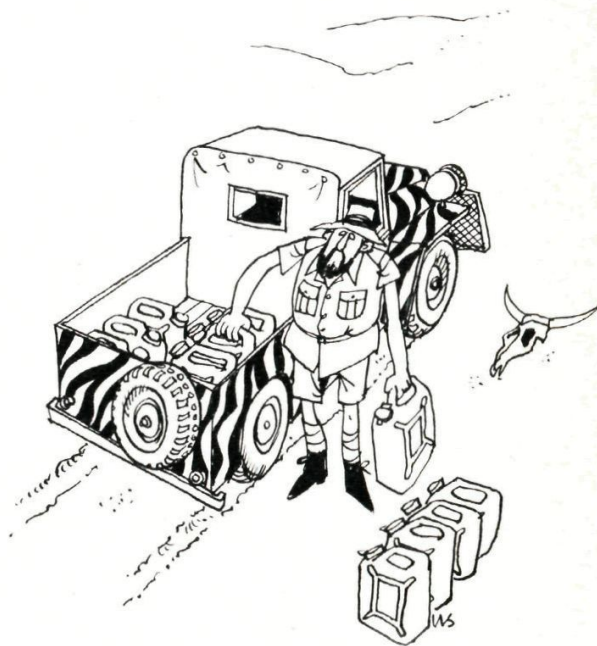
. . . en bovendien ook nog een Landrover, dan kun je elke woestijn oversteken! Hoe breed die woestijn ook zijn mag!

Deze bewering doet je misschien wel denken aan het intrappen van een open deur. Maar vergis je niet! Zo vanzelfsprekend als hij lijkt is deze bewering niet. En er zit genoeg wiskunde aan vast om je een uurtje bezig te houden.

Stel je een reiziger voor, die met zijn Landrover in het aan de rand van de woestijn gelegen stadje *A* naast de plaatselijke benzinepomp staat. Hij wil met zijn voertuig dwars door de woestijn heen naar het stadje *B*, dat aan de overkant van die woestijn ligt. Ook in *B* is er een benzinepomp aanwezig. Maar tussen *A* en *B* in is er alleen maar woestijn; er is nauwelijks een weg van *A* naar *B*, laat staan dat er onderweg benzine gekocht zou kunnen worden!

Voltanken en weg wezen dus? Dat dacht je maar! Want zelfs al laat onze reiziger niet alleen zijn tank vullen, maar laadt hij bovendien ook nog zijn hele Landrover afgeladen vol met blikken benzine, dan nog is die voorraad niet voldoende om er *B* mee te bereiken! In dit artikel laten we je zien, dat het probleem van onze reiziger een oplossing heeft hoe groot de afstand van *A* tot *B* ook is. De grondgedachte van die oplossing is vrij simpel. We geven de reiziger namelijk de volgende raad:

Laad in *A* je Landrover helemaal vol en rijd ermee de woestijn in. Zoek een geschikt plaatsje op en laad daar zoveel blikken benzine af, dat je nog net terug kunt rijden naar *A*. Gooi ze maar gewoon langs de kant van de weg neer, want er komt toch niemand langs die het gebruiken kan! Rijd dan terug naar *A* en koop weer opnieuw zoveel benzine als je laden kunt. Dan weer de woestijn in daarmee om nog wat meer blikken op hetzelfde plekje neer te gooien als appeltje voor de latere motordorst. Weer terug naar *A*, enzovoorts.



Als je genoeg voorraad hebt aangelegd, ga dan niet meer terug maar begin dan op dezelfde manier een benzinedepôt te maken verderop de woestijn in. Met behulp van de in het eerste depôt gemaakte voorraad, natuurlijk.

Dat tweede depôt gebruik je voor het aanleggen van een derde, weer wat verderop gelegen. Van daaruit kom je wel naar een vierde depôt. En zo doorgaande bereik je tenslotte B .

De grote vraag is nu nog: waar maak je die depôts en hoeveel benzine breng je er naar toe? Maar voor we die vraag gaan bestuderen maken we eerst nog een paar afspraken. We voeren namelijk gemakshalve een paar nieuwe eenheden in.

De eerste is een eenheid van hoeveelheid benzine. De grootste hoeveelheid benzine, die we in en op en aan de Landrover kunnen laden, noemen we '1 bak'. En dan gebruiken we ook nog een rare eenheid van afstand: de afstand, die de Landrover kan rijden op 1 bak noemen we '1 ruk'. Onze Landrover verbruikt dus '1 op 1', namelijk 1 bak op 1 ruk!

Figuur 15 geeft aan hoe het reisplan er uit zou kunnen zien voor het staartje van de reis. De punten $D_1, D_2, D_3, \dots$ zijn de plaatsen, waar we depôts willen inrichten. De $r_1, r_2, r_3, \dots$ hebben geen betrekking op de afstanden tussen die plaatsen, dit ter voorkoming van misverstanden. Het zijn de aantallen heenreizen, die we ons voorstellen te maken op de verschillende trajecten van de reis. Dus we zijn bijvoorbeeld van plan r_3 keer in D_3 1 bak benzine op te laden en daarmee naar D_2 te rijden ter bevoorrading van het in D_2 te vormen depôt (en dan moeten we $r_3 - 1$ keer van D_2 naar D_3 terug rijden om nieuwe voorraad op te halen!). Nog een ander voorbeeld: je kunt op je vingers natellen, dat $r_1 = 1$ is!

In feite komt het maken van een reisplan neer op het kiezen van de rij gehele getallen $r_1, r_2, r_3, \dots$. Zo eenvoudig is dat, al komt je dat misschien nu nog wel vreemd voor!

Kijk bijvoorbeeld nog eens naar het traject $D_3 D_2$.

In D_3 willen we r_3 keer 1 bak benzine laden en daar moeten we dus beschikken over een depôt ter grootte van r_3 bakken. Met behulp daarvan moeten we in D_2 een depôt bouwen ter grootte van r_2 bakken benzine. Het verschil van $(r_3 - r_2)$ bakken wordt opgebruikt bij het heen-en-weer rijden tussen D_3 en D_2 . Er zijn r_3 heenreizen op dat traject en $r_3 - 1$ terugreizen, dus dat traject wordt in totaal $2r_3 - 1$ keer afgelegd. Per keer kunnen we dus verbruiken

$$\frac{r_3 - r_2}{2r_3 - 1} \text{ bakken}$$

en dat wil zeggen dat de lengte van het traject $D_3 D_2$ bedraagt $\frac{r_3 - r_2}{2r_3 - 1}$ rukken.

Omdat in B geen depôt gemaakt wordt, is de lengte van het traject $D_1 B$ gelijk aan

$$\frac{r_1 - 0}{2r_1 - 1} = 1 \text{ ruk (omdat } r_1 = 1).$$

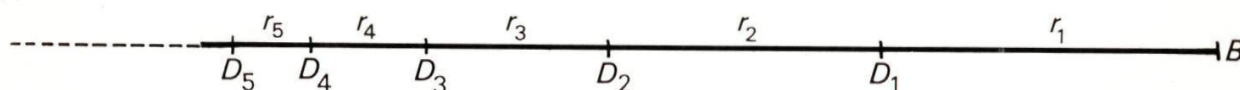


Fig. 15

Als je nu bijvoorbeeld r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 gekozen hebt als stijgend rijtje gehele getallen, dan kan je de lengten van de trajecten $D_5D_4, D_4D_3, D_3D_2, D_2D_1, D_1B$ berekenen en daarmee ook meteen de afstand D_5B . Blijkt die afstand al gelijk te zijn aan AB of groter te zijn dan AB , dan ben je klaar en kan je gaan rijden. En als hij nog kleiner is dan AB , dan kies je ook nog een r_6 en beoordeelt de situatie opnieuw!

Zie je wel, dat het maken van een reisplan neerkomt op het kiezen van een stijgende rij gehele getallen?

Maar nou zit er toch nog een addertje onder het gras, hoe vreemd dat in een woestijn ook klinken moge! En dat addertje heeft een financieel karakter.

Stel bijvoorbeeld, dat in de stijgende r -rij ergens staat

....., 4, 7,

Dat wijst dan op een traject met een lengte van $\frac{3}{13}$ ruk volgens de hierboven afgeleide formule. En aan het begin van dat traject moeten 7 bakken benzine beschikbaar zijn.

Nu vergelijken we dat reisplan met een ander plan. Het verschilt van het vorige alleen doordat er in het r -rijtje tussen die 4 en die 7 nog een 5 of een 6 is gevoegd:

....., 4, 5, 7,

In de plaats van dat ene traject met een lengte van $\frac{3}{13}$ ruk komen nu twee andere, die de lengten $\frac{2}{13}$ ruk en $\frac{1}{9}$ ruk hebben. Alle andere trajecten van het nieuwe reisplan zijn natuurlijk gelijk aan trajecten van het oude plan.

Nu is $\frac{2}{13} + \frac{1}{9}$ groter dan $\frac{3}{13}$. En dat is bijzonder belangrijk! Het betekent namelijk dat in het nieuwe reisplan dat depôt, waar 7 bakken benzine beschikbaar moeten zijn, verder van B af en dichterbij A ligt dan in het oude plan. En dat geldt ook voor alle depôts, die eerder opgebouwd moeten worden. Anders gezegd: het nieuwe reisplan is voor de reiziger financieel gunstiger!

Bij het bouwen van zijn reisplan zal de zuinige reiziger dus niet zomaar een r -rij kiezen, maar hij zal de rij kiezen waarin geen getallen tussengevoegd kunnen worden.

En dat is de rij

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

En bij die rij behoren trajecten (van B af gerekend) met de lengten in rukken

$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \frac{1}{17}, \dots$

En nou komt de wiskundige aap helemaal uit de woestijnmouw kruipen! De bewering, die de eerste twee zinnen van dit verhaal vormt, komt nu op het volgende neer:

Als je de getallen uit deze dalende rij breuken bij elkaar gaat optellen in de volgorde waarin ze staan, dan kom je 'op de duur' boven elk getal uit, hoe groot dat ook gekozen wordt! En is dat nou wel zo vanzelfsprekend? Of niet?

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{3} = \frac{0,333333 \dots}{1,333333 \dots} +$$

$$\frac{1}{5} = \frac{0,2}{1,533333 \dots} +$$

$$\frac{1}{7} = \frac{0,142857 \dots}{1,676190 \dots} +$$

$$\frac{1}{9} = \frac{0,111111 \dots}{1,787301 \dots} +$$

$$\frac{1}{11} = \frac{0,090909 \dots}{1,878210 \dots} +$$

$$\frac{1}{13} = \frac{0,076923 \dots}{1,955133 \dots} +$$

$$\frac{1}{15} = \frac{0,066666 \dots}{2,021800 \dots} +$$

$$\frac{1}{17} = \frac{0,058823 \dots}{2,080723 \dots} +$$

Zie je, hoe langzaam het gaat? Zou je een woestijn over kunnen steken, die 100 rukken breed is? of 1000 rukken breed?

Denk bijvoorbeeld maar eens aan een andere dalende rij, namelijk aan de rij

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

waar in de noemers opvolgende machten van twee staan. Als je de eerste k getallen van deze rij optelt, dan heb je een som verkregen van

$$2 - \frac{1}{2^{k-1}}$$

Dus als dat de woestijnrij was, dan zou je niet eens een woestijn van 2 rukken breed kunnen oversteken!

Maar bij de echte woestijnrij lukt dat wel, dat zagen we al uit de berekening hierboven! En daarvoor geldt heus, dat je bij het sommeren elke grens overschrijdt, als je maar ver genoeg doorgaat. Want zie maar:

de getallen $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{7}$ zijn elk groter dan $\frac{1}{8}$, dus samen groter dan $\frac{1}{4}$;

de 4 getallen $\frac{1}{9}$ tot en met $\frac{1}{13}$ zijn elk groter dan $\frac{1}{16}$ dus samen groter dan $\frac{1}{4}$;

de 8 getallen $\frac{1}{17}$ tot en met $\frac{1}{31}$ zijn elk groter dan $\frac{1}{32}$ dus samen groter dan $\frac{1}{4}$;

de 16 getallen ...

En het is een bekend feit, dat je met kwartjes elk bedrag bij elkaar kunt sparen, hoe groot ook! Zodat je bij het sommeren van de woestijnrij uiteindelijk elk bedrag overschrijdt, hoe groot ook. Als je tenminste door kunt gaan met groepen getallen samen te nemen, waarvan de som groter dan $\frac{1}{4}$ is. Zoek je dat nog even uit voor we je de woestijn in sturen?

Denkertjes

4 Bepaal de worteltrekking:

$$\begin{array}{r} \sqrt{x \ x \ x \ x \ x \ x} = x \ x \ x \\ \underline{x} \\ x \ x \ x \\ \underline{x \ x} \\ 4 \ x \ x \ x \\ \underline{x \ x \ x \ x} \\ \end{array}$$



- 5 Figuur c is een magisch vierkant. De getallen op de bovenste rij hebben 15 als som. In totaal is die som op rijen, in kolommen of op diagonaallijnen 8 keer te vinden. Hoeveel keer komt op soortgelijke manier de som 42 voor in de magische kubus van figuur d?

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Fig. c

- 6 Hier is een rekenalgoritme met voorbeeld:

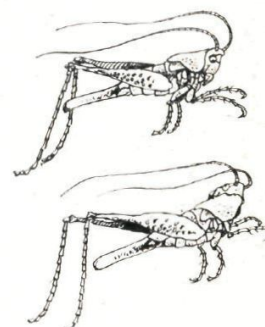
algoritme	voorbeeld
a Neem drie getallen p, q en r elementen van de verzameling $V = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 10 \wedge p \neq q \neq r\}$	2, 5 en 7
b Vorm met p, q en r alle mogelijke getallen van twee cijfers.	25, 27, 52, 57, 72 en 75
c Bepaal de som S_1	308
d Bepaal $S_2 = p + q + r$	$2 + 5 + 7 = 14$
e Bepaal het quotiënt $S_1 : S_2$	$308 : 14 = 22$
Bewijs: $\forall p, q, r \in V$ geldt $S_1 : S_2 = 22$	

10	26	6	24	1	17	8	15	19
23	3	16	7	14	21	12	25	5
9	13	20	11	27	4	22	2	18

Fig. d

- 7 Iemand, die leefde in de 19de eeuw zei eens: Ik was x -jaar in het jaar x^2 .
In welk jaar is die persoon geboren?

- 8 Twee sprinkhanen houden een springrace langs een wedstrijd baan, die 4,65 m lang is. Ze gaan heen en terug. De grootste sprinkhaan maakt uitsluitend sprongen van 30 cm, de kleinste sprongen van 15 cm. Echter, de kleinere neemt twee sprongen voor elke sprong van de grote.
Welke sprinkhaan wint en hoe komt dat?



- 9 a Bepaal twee rechthoeken, waarvan de maatgetallen van lengte en breedte gehele getallen zijn en waarvan de maatgetallen van oppervlakte en omtrek gelijk zijn.
b Bewijs dat er twee en niet meer dan twee van zulke rechthoeken bestaan.

10 $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040 < 10^7$

$8! = 8 \times 7! = 40320 < 10^8$

enzovoort

Dus algemeen $k! < 10^k$.

Echter $k!$ stijgt sneller dan 10^k . Bepaal de kleinste waarde van k zodat $k! > 10^k$.

Grafieken voor wegverlichting^{oo}

Ir. H. M. Mulder

Als de zon schijnt verlicht zij ons aardoppervlak overvloedig en gelijkmatig. Overvloedig, omdat de zon een onvoorstelbaar grote lamp is; gelijkmatig, omdat zij zover van ons af staat.

's Nachts probeert de maan deze moeilijke taak van de zon over te nemen. Dat lukt maar ten dele. Vaak is zij absent en haar licht is weinig overvloedig.

Daarom behelpen we onszelf en proberen met behulp van talloze lampen langs wegen en straten onze weg in het duister te vinden.

Een goed ontwerp, waarbij we enigermate de situatie overdag zouden kunnen benaderen, is niet eenvoudig. Hoe sterk moeten we de lampen kiezen; hoe hoog zullen we de masten maken; hoever plaatsen we ze van elkaar?

De wegverlichting moet enerzijds voldoende sterk zijn, anderzijds voldoende gelijkmatig. Aan dit laatste gaan we wat rekenen.

En als het rekenwerk te moeilijk wordt, gaan we grafisch ofwel tekenend verder.

De grootte waar het hier om draait, is de verlichtingssterkte.

Men bedoelt hiermee de hoeveelheid licht of de lichtstroom die de weg per eenheid van oppervlakte treft.

Deze verlichtingssterkte (E) is natuurlijk allereerst afhankelijk van de lichtsterkte (I) van de gebruikte lamp, maar ook van de afstand (r) van de lamp tot de weg en verder nog van de hoek (α) waaronder het licht van de lamp het wegdeel treft (figuur 16).

Wat is de relatie tussen E enerzijds en I , r en α anderzijds?

In figuur 17 zie je hoe een lamp een plein verlicht. Stel nu eens dat je een plaat karton met oppervlakte A halverwege de lamp en het wegdek houdt.

Op het karton is dan een zekere verlichtingssterkte. Neem het karton nu weg. Dezelfde hoeveelheid licht die eerst het karton trof, valt nu op een deel van het wegdek met oppervlakte $4A$.

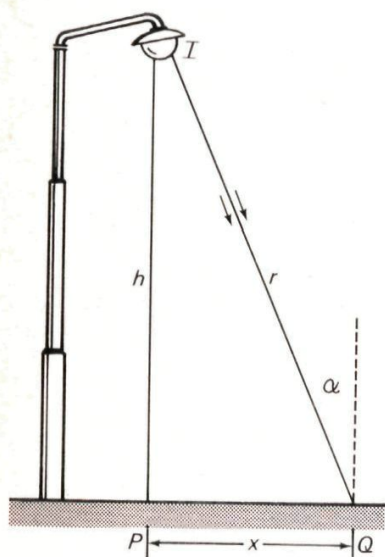


Fig. 16
Verlichtingssterkte

Fig. 17
Verlichtingssterkte in verband met de afstand



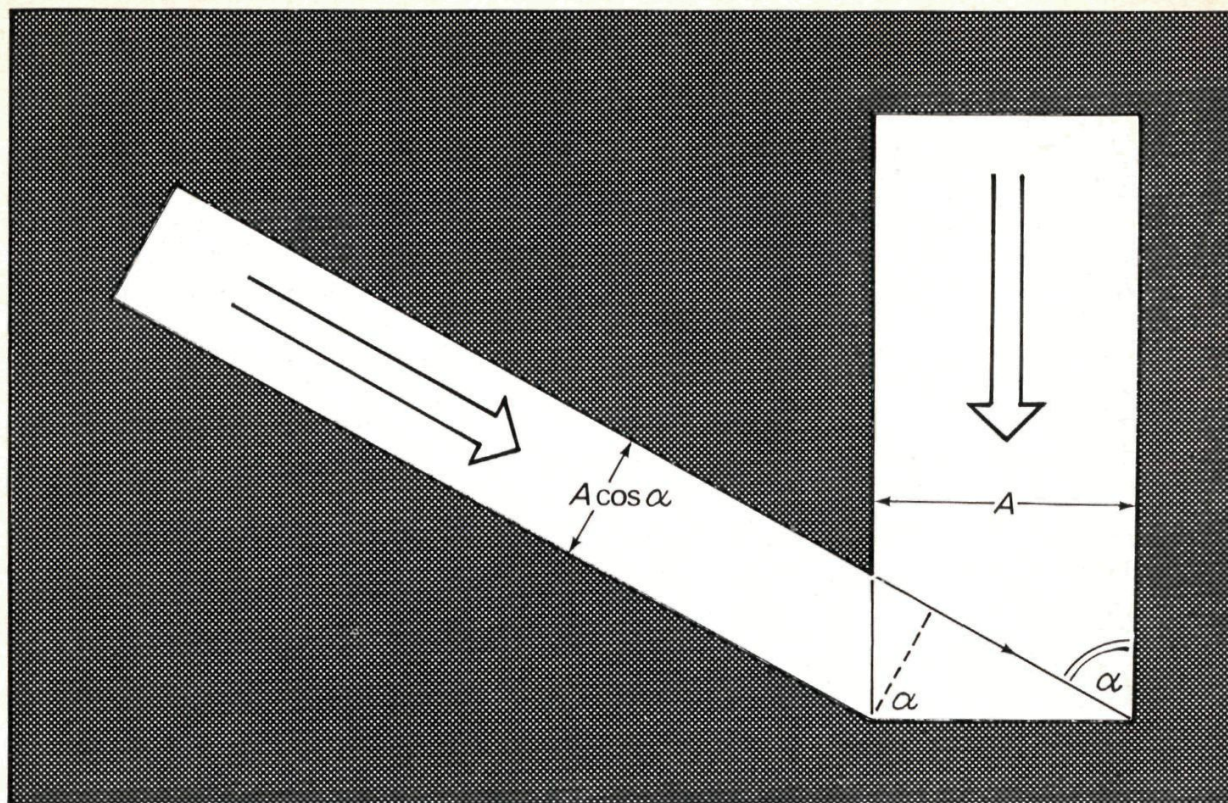


Fig. 18

Verlichtingssterkte in verband met de richting

De verlichtingssterkte op het wegdek is dus 4 x kleiner dan waar eerst de kartonnen plaat werd gehouden.

Bij een 3 x grotere afstand wordt de verlichtingssterkte 9 x zo klein enz.

In het algemeen geldt:

de verlichtingssterkte is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand. (1)

In figuur 18 zie je hoe een verticale bundel een deel van het wegdek met oppervlakte A treft.

We laten nu dezelfde bundel schuin invallen onder een zekere hoek α .

Van deze bundel treft dan een geringere hoeveelheid licht het vlak. De doorsnede van deze bundel is $A \cos \alpha$.

De verlichtingssterkte bij schuin invallende bundel wordt dus verkleind met de factor $\cos \alpha$.

In het algemeen geldt:

verlichtingssterkte is evenredig met $\cos \alpha$. (2)

Tenslotte geldt nog:

verlichtingssterkte is evenredig met de lichtsterkte (I) van de lamp (3)

Samenvattend in één formule: $E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos \alpha$.

We veronderstellen nu verder dat we werken met rotatiesymmetrische lampen, waarbij de lichtstroom in alle richtingen even groot is.

De verlichtingssterkte op straat is natuurlijk het grootst vertikaal onder de lamp (punt P).

We verwijderen ons nu steeds verder van dit punt P en stellen de vraag: hoe groot is de verlichtingssterkte in een willekeurig punt Q op een afstand x van punt P (figuur 16).

We weten inmiddels: $E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos \alpha$ waarbij $\cos \alpha = \frac{h}{r}$.

Hieruit volgt:

$$E = I \cdot \frac{h}{r^3} \text{ en omdat } r = \sqrt{(x^2 + h^2)} \quad E = \frac{I \cdot h}{\sqrt{(x^2 + h^2)^3}}$$

In figuur 19 zie je de grafiek van deze functie.

De grafiek is symmetrisch ten opzichte van de E -as. Er wordt een maximum gevonden voor $x = 0$ ter waarde $\frac{I}{h^2}$. Dit is dus de verlichtingssterkte recht onder de lamp.

De x -as fungeert als asymptoot, hetgeen niet meer wil zeggen dan dat ver van de voet van de lamp het wegdek pikkedonker wordt.

De kromme blijkt een buigpunt te hebben voor $x = \pm \frac{1}{2}h$. Dit betekent dat de verlichtingssterkte vanaf P tot dit punt steeds sneller gaat afnemen en na dit buigpunt juist steeds langzamer.

Je krijgt gemakkelijker inzicht in het verloop van de verlichtingssterkte, als je let op de volgende serie getallen.

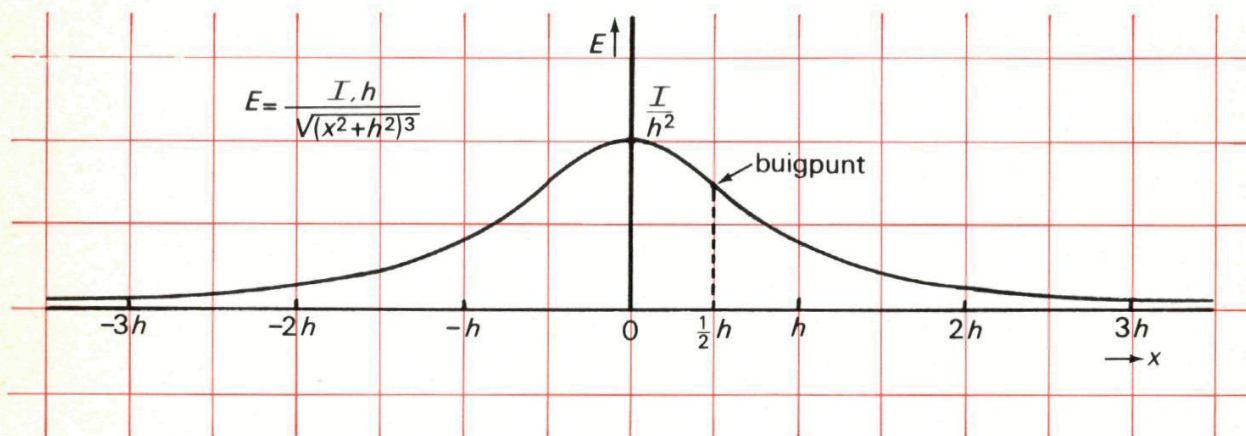
We stellen de waarde van E recht onder de lamp op 100.

Zie nu verder de tabel:

x	E
0	100
$\frac{1}{4}h$	91
$\frac{1}{2}h$	71
h	35
$1\frac{1}{2}h$	17
$2h$	9
$3h$	3

Fig. 19

Verlichtingskromme



Je kunt deze getallen gemakkelijk zelf narekenen met je rekenliniaal.

Voorbeeld:

$$x = 2h \quad x^2 + h^2 = 5h^2 \quad (5h^2)^3 = 125h^6$$

$$\sqrt{125h^6} = 11,4h^3 \quad \frac{1}{11,4} = 0,088 \text{ of } 9\%.$$

We gaan nu eens onderzoeken hoe de zaak verder verloopt als er meer van zulke straatlantaarns op een rijtje langs de weg staan.

Laten we beginnen met 2 stuks zoals in het park van figuur 20.

Elk van beide lampen heeft een eigen verlichtingsgrafiek in verband met de verlichting van de grond. Voor elk punt moeten we dan de E -waarden ter plaatse optellen.

Het eindresultaat hangt sterk af van de afstand van de beide masten. We stellen deze afstand d .

Fig. 20

Situatie bij 2 lichtpunten



In figuur 21 is eerst aangegeven hoe je uit karton een mal kunt knippen, waardoor we de grafieken vlot kunnen schetsen.

Het rekenwerk wordt ons namelijk te ingewikkeld.

Met tekenen kunnen we ook een eind komen.

In figuur 22a is de situatie getekend waarbij de afstand van de masten gelijk is aan driemaal de hoogte ($d = 3h$).

Let speciaal eens op het gebied tussen de masten. Midden er tussen is de verlichtingssterkte wel een derde deel van de waarde recht onder een mast. Als masten ver uit elkaar staan krijgen we in het midden een aanzienlijke verzwakking in de verlichtingssterkte.

We zouden wel een meer gelijkmatige verlichting wensen. Daartoe zouden de palen dichter naar elkaar toe moeten.

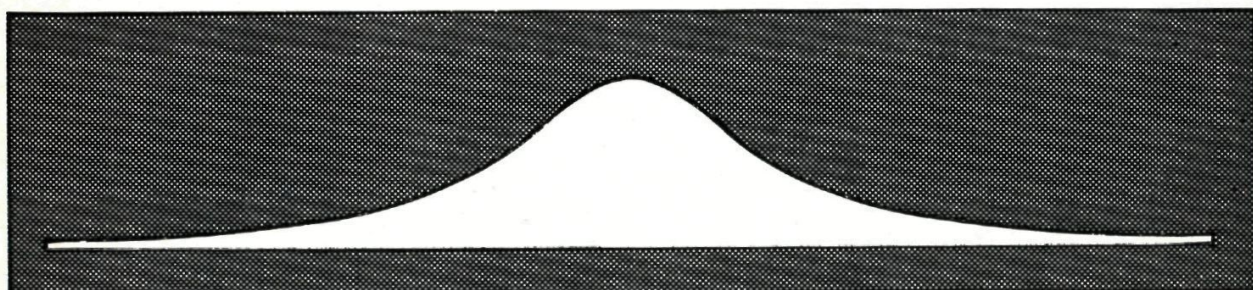
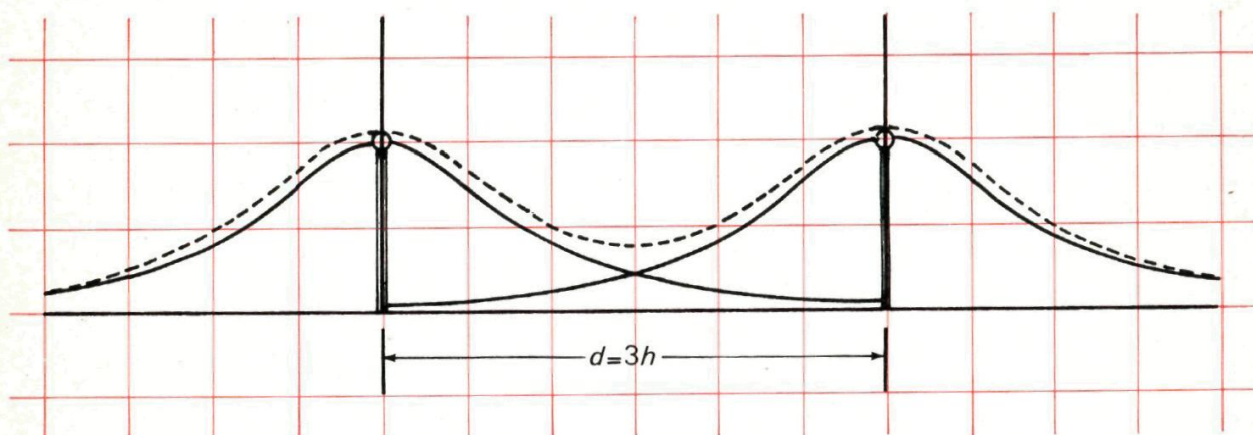


Fig. 21

Mal voor verlichtingskromme

Fig. 22a

$d = 3h$



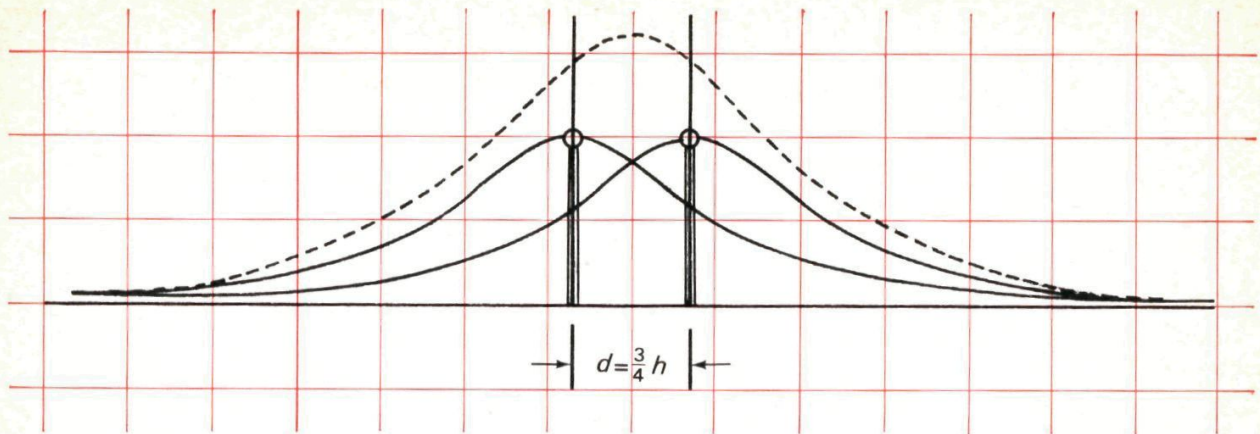


Fig. 22b

$$d = \frac{3}{4}h$$

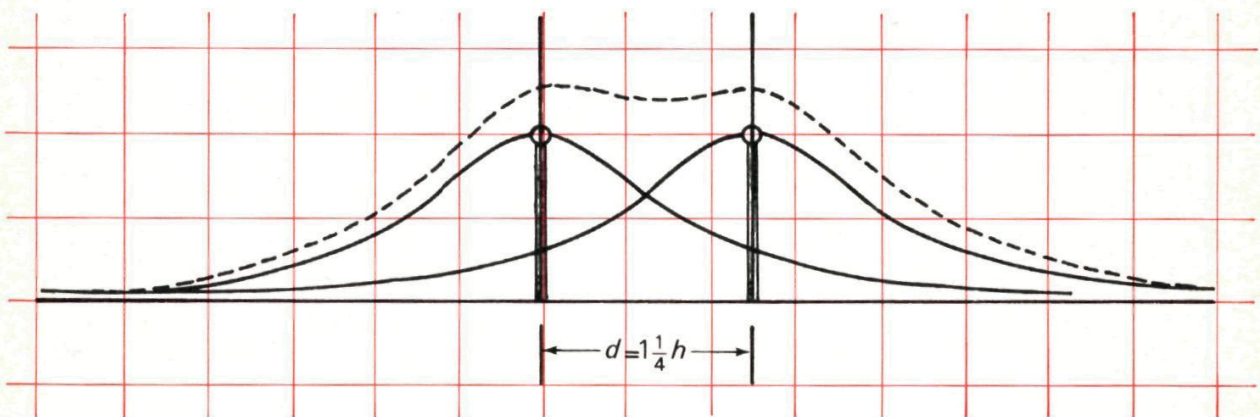


Fig. 22c

$$d = 1\frac{1}{4}h$$

In figuur 22b hebben we de masten erg dicht naast elkaar staan. Hier is gesteld: $d = \frac{3}{4}h$. Als we de grafieken optellen vinden we voor E juist een topwaarde in het midden. Dat betekent dat er midden tussen de masten meer licht is dan recht onder één ervan!

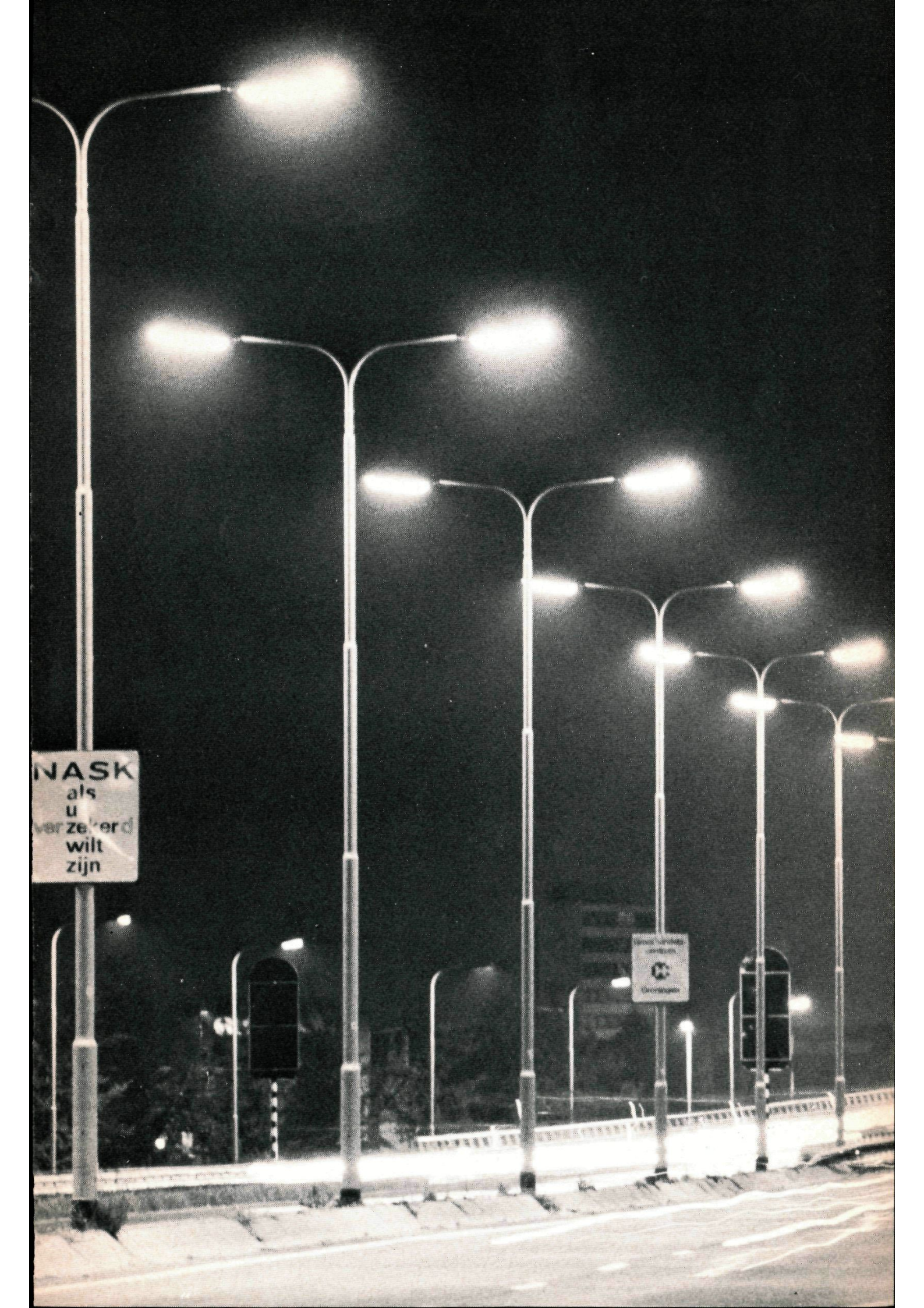
De verlichting op de grond zou zo gelijkmatig mogelijk zijn als we ervoor konden zorgen dat E recht onder een mast even groot zou zijn als midden tussen de beide masten. Daartoe zou je een aantal gevallen grafisch moeten onderzoeken. Door te werken met de grafiekmal is zulk werk weinig tijdrovend.

Teken zelf maar eens een aantal situaties uit.

Neem hierbij $d = h$, $d = 1\frac{1}{4}h$ en $d = 1\frac{1}{2}h$.

De laatste lijkt de meest bevredigende te zijn (figuur 22c).

Als laatste willen we het geval van een groter aantal straatlantaarns nog bekijken. Gebruik daarbij weer de mal.



NASK
als
u
verzekerd
wilt
zijn

Streek- en
Landbouw
Centrum
Groningen

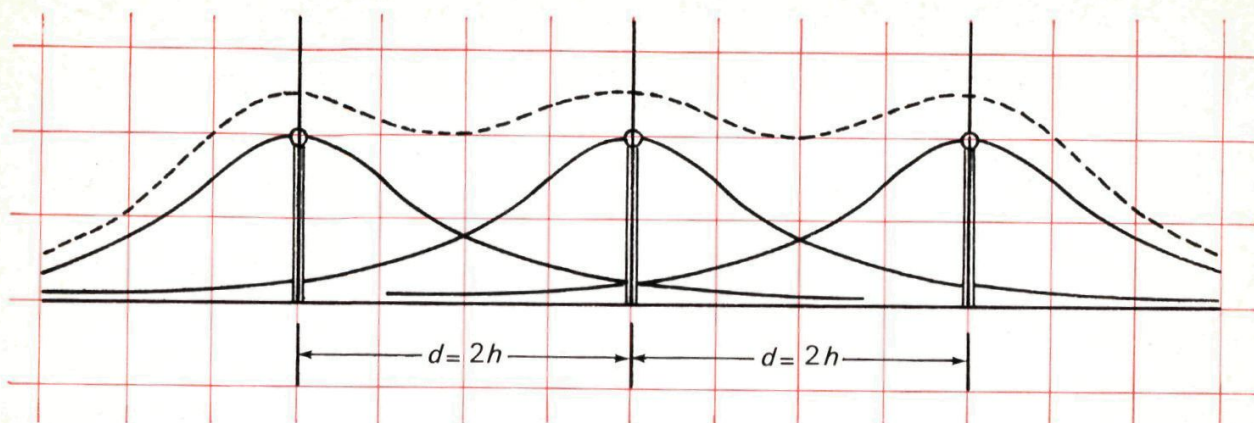


Fig. 23
Situatie bij 3 masten

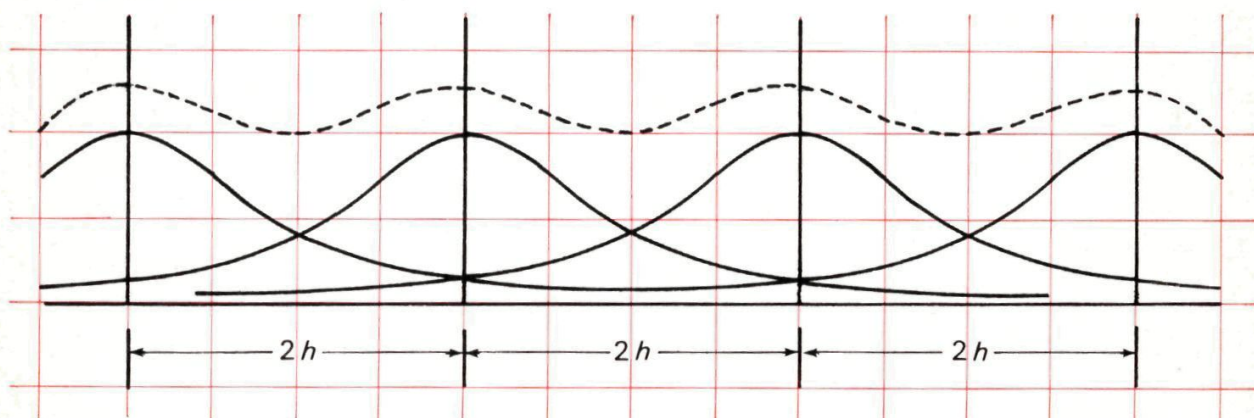


Fig. 24
Situatie bij 4 masten

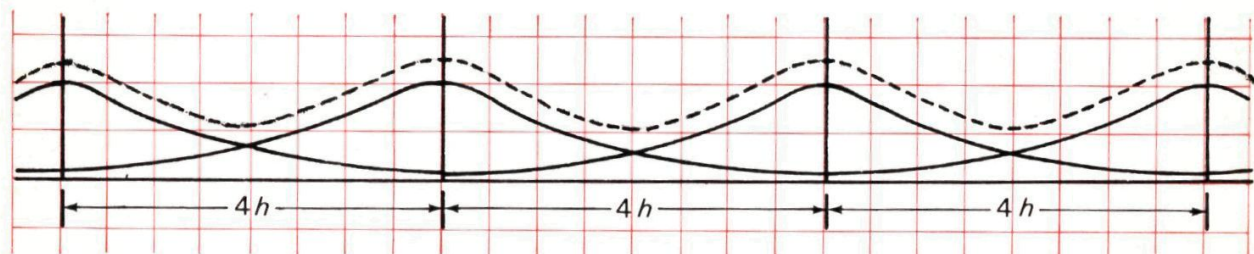


Fig. 25
Graafseweg Nijmegen

In figuur 23 tref je een serie van 3 waarbij $d = 2h$.

De lichtfluctuatie is er betrekkelijk gering.

In figuur 24 staat de toestand bij 4 masten bij $d = 2h$.

In de praktijk werkt men meestal niet zo ideaal. Daar spelen de kosten een hartig woordje mee. Zodoende accepteert men nogal aanzienlijke schommelingen.

Figuur 25 geeft daar een voorbeeld van.

Dit stelt een verlichting voor van de Graafseweg in Nijmegen.

De gegevens zijn de volgende:

$h = 8$ meter $d = 32$ meter dus $d = 4h$

E (maximaal) : E (minimaal) = 26 : 6,6

Opvallend hierbij is hoe snel de invloed van verderstaande lichtpunten afneemt.

Bij $d = 4h$ hebben eigenlijk alleen de direct naburige masten enig effect op de wegdekverlichting.

Een formule voor inhoudsbepaling^{oo}

Ir. H. M. Mulder

De eerste inhoudsformule die je geleerd hebt luidt:

$I = l \times b \times h$, waarbij l , b en h de lengte, breedte en hoogte van het betreffende voorwerp voorstellen.

Maar wat doe je met deze formule als je de inhoud moet kennen van een bal of een wijnvat of een emmer?

We kunnen de formule wat algemener maken door te bedenken dat in plaats van $l \times b$ ook G of wel de oppervlakte van het grondvlak geschreven kan worden.

Dus $I = G \times h$

Terwijl de eerste formule enkel geldt voor een rechthoekig (dus ook vierkant) grondvlak, geldt de tweede uitkomst bij elke vorm van het grondvlak.

De enige voorwaarde is echter nog dat we een lichaam hebben waarbij doorsneden evenwijdig met het grondvlak steeds even groot in oppervlakte zijn.

Dus de formule geldt wel voor een cilinder maar niet voor een kegel. Eenvoudiger gezegd: het vat moet overal even wijd zijn.

En daarmee hebben we dus voor een heleboel lichamen nog geen uitkomsten.

Hoe moet het nu bij een kegel, een emmer e.d.? Toen men lang geleden houten vaten en met name wijnvaten ging maken, was het een heel probleem om de inhoud ervan te berekenen.

Grondvlak en bovenvlak waren evenwijdig en meestal even groot maar in het midden zit een buik en is de doorsnede aanzienlijk groter.

Wanneer we met grondoppervlakte $\times$ hoogte zouden werken, werd de uitkomst veel te klein.

Het middenvlak speelt hier een rol die zelfs veel belangrijker is dan die van grond- en bovenvlak. Voor dergelijke gevallen is een inhoudsformule ontworpen van de volgende vorm:

$$\frac{1}{6}h(G + B + 4M)$$

h stelt de hoogte van het lichaam voor, G de oppervlakte van het grondvlak, B van het bovenvlak en M van het middenvlak.

Je ziet hier dat G en B even belangrijk zijn, maar M viermaal zo gewichtig is.

Deze interessante formule blijkt een grote mate van bruikbaarheid te bezitten.

Hier volgen een aantal gevallen:

1. *kubus* hier geldt $B = G = M$
 $I = \frac{1}{6}h(G + B + 4M) = \frac{1}{6}h(6G) = Gh$
2. *blok* evenzo
3. *cilinder* evenzo
4. *prisma* evenzo
5. *kegel* hier geldt $M = \frac{1}{4}G$ en $B = 0$
 $I = \frac{1}{6}h(G + 0 + G) = \frac{1}{6}h(2G) = \frac{1}{3}Gh$
6. *piramide* evenzo
7. *afgeknotte kegel* (emmer)
als het grondvlak een straal a heeft en het bovenvlak een straal b dan heeft het middenvlak een straal $\frac{1}{2}(a + b)$, zodat
 $G = \pi a^2$ en $B = \pi b^2$ en $M = \frac{1}{4}\pi(a + b)^2$
ofwel $M = \frac{1}{4}(\pi a^2 + \pi b^2 + 2\pi ab) = \frac{1}{4}(G + B + 2\sqrt{GB})$
 $I = \frac{1}{6}h(G + B + G + B + 2\sqrt{GB})$
of $\frac{1}{3}h(G + B + \sqrt{GB})$
8. *afgeknotte piramide* evenzo
9. 'diabolo' (twee kegels met de punt op elkaar; $M = 0$)
inhoud: $\frac{1}{6}h(G + G + 0) = \frac{1}{6}h(2G) = \frac{1}{3}Gh$
10. *bol* met straal R hier geldt $G = B = 0$
en $h = 2R$ en $M = \pi R^2$
inhoud: $\frac{1}{6} \cdot 2R(0 + 0 + 4\pi R^2) = \frac{4}{3}\pi R^3$
11. de formule is ook bruikbaar voor veelvlakken waarvan alle hoekpunten gelegen zijn in twee evenwijdige vlakken G , B en M gemakkelijk te bepalen is.
In de voorbeelden 5 en 10 bleek dat ook voor $G = 0$ en $B = 0$ de formule bruikbaar blijft.
Hier volgt nog een voorbeeld van een dergelijke toepassing.
In een prisma is een viervlak getekend. Welk deel is de inhoud van het viervlak van het totale prisma?

Oplossing:

stel $(ABC) = G$ en $AD = h$

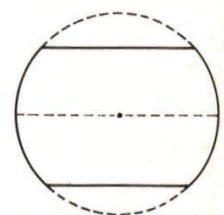
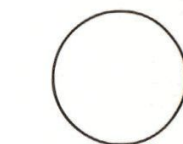
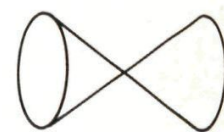
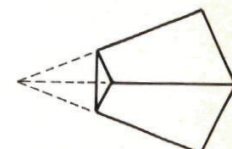
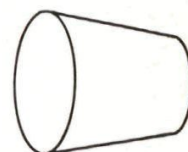
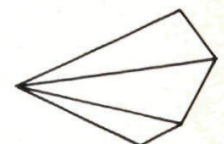
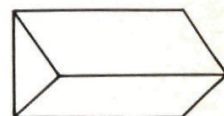
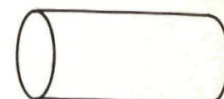
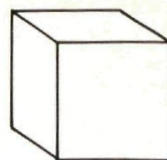
dan inhoud prisma: Gh

Breng bij het viervlak het middenvlak aan.

Dit middenvlak heeft de vorm van een parallellogram. Geprojecteerd op het grondvlak zie je dat de oppervlakte van dit middenvlak $\frac{1}{4}G$ wordt.

Dus inhoud $(DEKL) = \frac{1}{6}h(0 + 0 + 4 \cdot \frac{1}{4}G) = \frac{1}{6}Gh$.

De inhoud van $DEKL$ is dus eenzesde van de inhoud van het prisma.



12. Tenslotte het eerstgenoemde geval van het wijnavat. De inhoud van een vat wordt primair bepaald door de grootte van de bodem en de hoogte, verder door de doorsnede van de bovenrand maar ook door de vorm van het vat. Dit laatste wordt in hoge mate bepaald door de doorsnede halverwege.

Bij nadere bestudering van de formule blijkt dat een doorsnijding door de hartlijn van de ton begrensd wordt door gebogen lijnstukken, die als cirkeldelen worden opgevat.

Een voorbeeld daarvan is een bol waarvan aan weerszijden evenwijdig twee even grote segmenten worden afgesneden. Wat je dan overhoudt lijkt op een wijnavat.

Berekening van de inhoud met formules voor bolsegmenten of ineens toepassing van de 'all-round formule' geeft dan een gelijk resultaat.

°°°Je zult je afvragen hoe een zo algemeen bruikbare formule als $I = \frac{1}{6}h(G + B + 4M)$ af te leiden is.

Dat is niet zo gemakkelijk. Je hebt er zowel differentiaal- als integraalrekening voor nodig en daar houden we ons in Pythagoras meestal verre van. Toch willen we er niet helemaal aan voorbij gaan.

Zoals je weinig problemen hebt met het berekenen van de inhoud van lichamen, die begrensd worden door platte vlakken, zo heb je ook niet veel moeite met de oppervlakte van figuren die begrensd worden door lijnstukken, zoals vierkanten, rechthoeken, ruiten, vliegers enz.

Moeilijker wordt het wanneer één of meer van de 'zijden' kromlijinig zijn.

In de integraalrekening leer je de oppervlakte van een figuur die begrensd wordt door de lijnen $x = a$ en $x = c$, de x -as en de grafiek van een functie $f(x)$ bepalen. Je moet de functie $f(x)$ dan 'integreren'.

Voor de oppervlakte van de gearceerde figuur geldt

$$O = \int_a^c f(x) dx$$

We leiden als voorbeeld een eenvoudige functie, namelijk $f(x) = x^2$ een formule voor de oppervlakte af. De onbepaalde integraal van deze functie bevat als hoofddterm $\frac{1}{3}x^3$ en voor de oppervlakte van de gearceerde figuur krijgen we

$$O = \int_a^c f(x) dx = \int_a^c x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_a^c \\ = \frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{3}a^3.$$

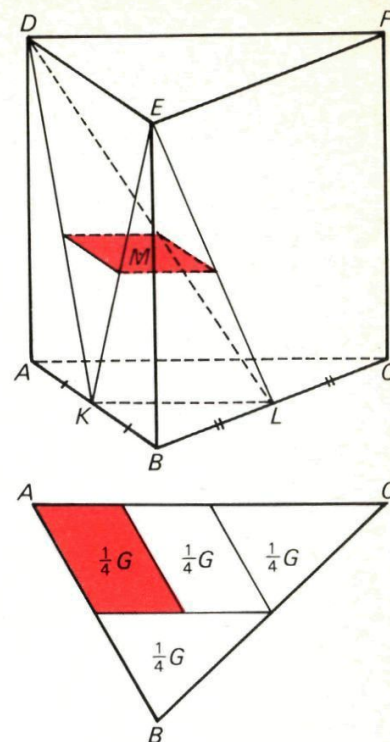


Fig. 30

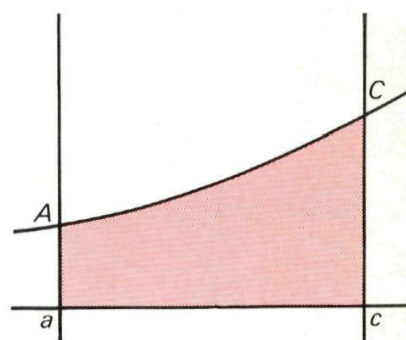


Fig. 31

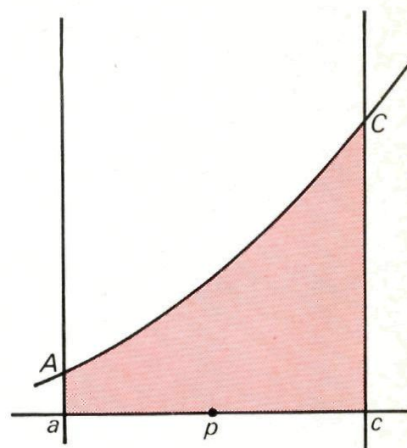


Fig. 32

$c^3 - a^3$ kunnen we ontbinden in factoren:

$$\frac{1}{3}(c^3 - a^3) = \frac{1}{3}(c - a)(c^2 + ca + a^2)$$

Nu kijken we naar het punt p midden tussen a en c .

$$f(p) = f\left(\frac{a+c}{2}\right) = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + 2ac + c^2)$$

Dit kunnen we gebruiken:

$$\begin{aligned} O &= \frac{1}{3}(c^3 - a^3) = \frac{1}{3}(c - a)(c^2 + ca + a^2) = \\ &= \frac{1}{6}(c - a)(2c^2 + 2ac + 2a^2) = \\ &= \frac{1}{6}(c - a)(c^2 + (a + c)^2 + a^2) = \\ &= \frac{1}{6}(c - a)(c^2 + 4p^2 + a^2) \end{aligned}$$

Als we de afstand tussen a en c nu h noemen, en we stellen $f(a) = a^2 = g$, $f(p) = p^2 = m$ en $f(c) = c^2 = b$, dan krijgen we

$$O = \frac{1}{6}h(g + 4m + b)$$

Dit is een eenvoudig geval van de zogenaamde *regel van Simpson*, die veel wordt gebruikt voor het benaderen van oppervlakten. Voor functies van de tweede- en de derde graad geeft deze regel exacte waarden voor de berekende oppervlakten, voor hogere graadsfuncties treden afwijkingen op. Het is niet moeilijk het verband tussen deze regel van Simpson en de inhoudsformule te zien.

De schoenhandelaar en de zwemmer

Oplossingen

Het valse briefje van honderd

Ben je na het verhaaltje een paar keer gelezen te hebben tot de conclusie gekomen dat de enige functie van de slager in dit geval is: Het nodeloos ingewikkelder maken van het probleem?

De slager wordt er niet beter of slechter van.

De klant heeft een paar schoenen en zestig gulden wisselgeld. De schoenhandelaar blijft zitten met een vals briefje van honderd en dat is dus ook zijn schade!

De zwemmer en de bal

Hiermee heb je waarschijnlijk meer problemen gehad. Misschien heb je zelfs wel vergelijkingen in elkaar gezet en opgelost.

Wat zeg je van deze redenering: Nadat de zwemmer de bal ontmoette zwom hij nog een kwartier door. (Dat was gegeven). Om op de terugweg de bal weer in te halen had hij dus weer een kwartier nodig. (Hij zwom zeer regelmatig.) Tussen de twee momenten van ontmoeting ligt dus een half uur.

In die tijd was de bal precies honderd meter met de rivier meegedreven. De stroomsnelheid van de rivier was dus tweehonderd meter per uur.

Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 15 november 1973 worden ingezonden naar het redactie-secretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.

Inhoud:

Van de redactie 1

De schoenhandelaar en de zwemmer 2

Doe meer met conchoïde 3

Als je maar genoeg benzine hebt . . .^{oo} 7

Grafieken voor wegverlichting^{oo} 12

Een formule voor inhoudsbepaling^{oo} 21

Oplossingen van de Schoenhandelaar en de zwemmer 24

Denkertjes 6, 10, 11

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.
BRUNO ERNST, Amersfoort.
W. Kleijne, Heerenveen.
A. F. VAN TOOREN, Leusden-C.
G. A. VONK, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. Oosten, Postbus 58, Groningen.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, f 5,— per jaargang. Voor anderen f 7,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

