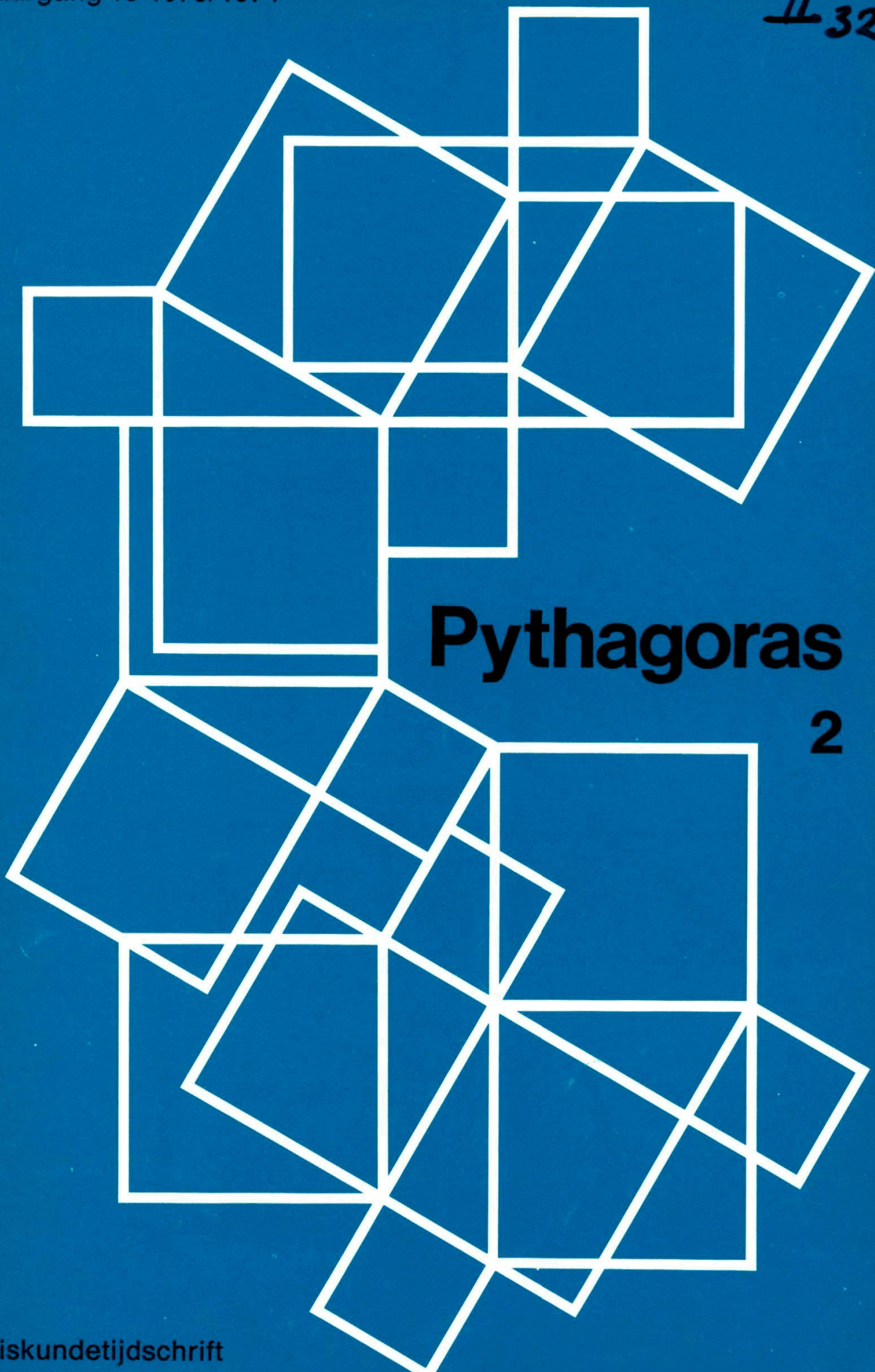


jaargang 13 1973/1974

*II*₃₂



Pythagoras

2

wiskundetijdschrift
voor jongeren



Monumentaal regeloppervlak°

Bepaalde gekromde oppervlakken kunnen gevormd worden uit rechte lijnen (regels). Ze worden *regeloppervlakken* genoemd. Bekende voorbeelden zijn het kegelvlak en het cilindervlak. Ook het vlak gevormd door de lijnen, die twee kruisende lijnen op regelmatige afstanden snijden zal je wel bekend voorkomen (figuur 1).

In vorige jaargangen hebben we wel eens uitvoeriger aandacht gegeven aan regeloppervlakken. Het is niet de bedoeling dit nu weer te doen, maar, zoals dat zovaak gaat met onderwerpen die in Pythagoras aan de orde zijn geweest: We liepen er als het ware weer tegenaan.

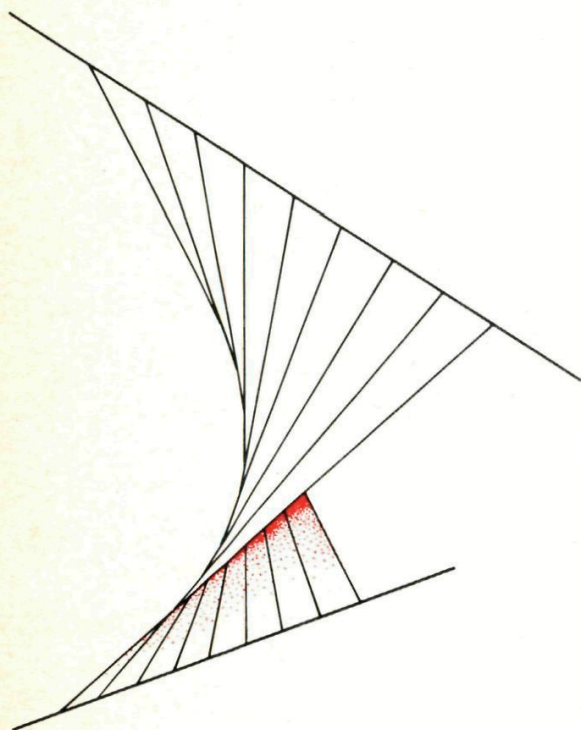
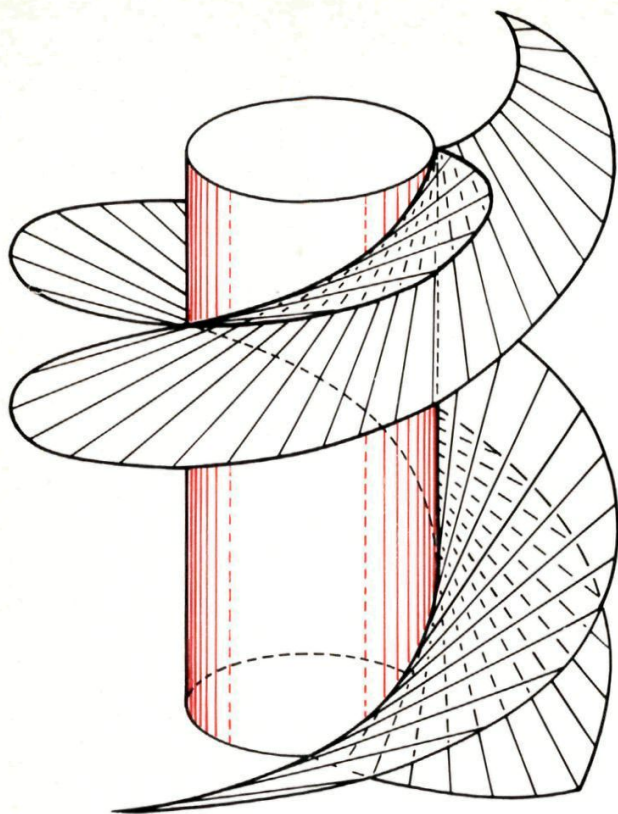


Fig. 1

De foto hiernaast toont de monumentale plastiek van Antoine Pevsner 'Ruimtelijke constructie in de derde en vierde dimensie', geplaatst bij het Congresgebouw in Den Haag.

Pevsner werd in 1886 in Orel, Rusland, geboren en is de oudere broer van de eveneens beroemde Naum Gabo, van wie een plastiek naast de Bijenkorf in Rotterdam staat. Beiden werkten met ruimtelijke experimenten en formuleerden het Constructivistische Manifest in 1920 waarin zij ruimte en beweging tot de belangrijkste elementen van de moderne beeldhouwkunst verklaarden.



In de wiskunde zullen de 'regels' meestal volgens een bepaalde wetmatigheid in de ruimte zijn opgesteld (zoals in figuur 2) maar strikt noodzakelijk is dat niet. De bronskleurige ruimtefiguur in Den Haag bestaat uit twee regeloppervlakken boven elkaar, elk als het ware ontstaan door een rechte gelijkmatig door de ruimte te bewegen tot deze weer in zijn uitgangspositie is teruggekeerd (figuur 3). Ook met dit werk is maar weer bewezen dat kunst en wiskunde heel goed kunnen samengaan.

Fig. 2

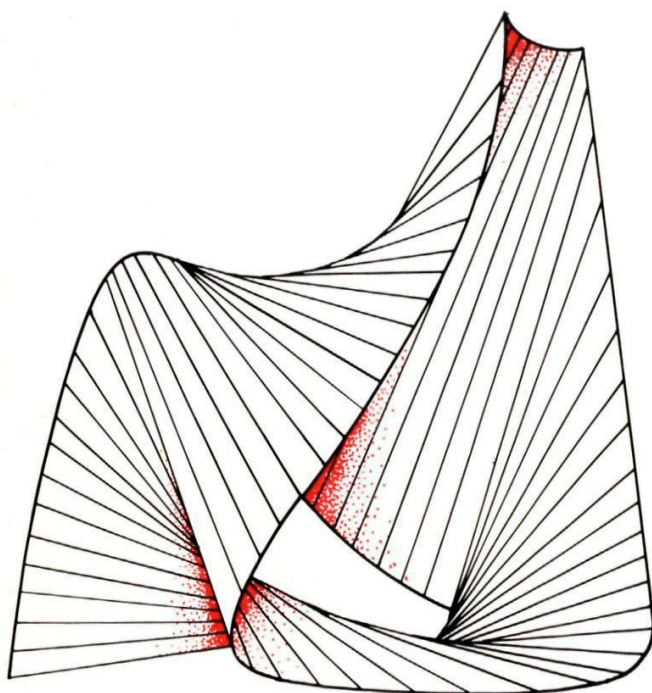


Fig. 3

Rookpluimen^{oo}

Ir. H. M. Mulder

Als de rook uit een schoorsteen vertikaal opstijgt, weet je dat het windstil is.
Als er enige wind is, zal de rookpluim wijzen in de richting van de heersende wind.
Zo kun je ook bij een stilliggend schip aan de rookpluim de windrichting zien.

Anders wordt het als het schip gaat varen.

Dan vallen rookpluim en windrichting niet altijd meer samen. Als het windstil is wijst de rookpluim altijd in het verlengde naar achteren bij het varende schip. Omdat het schip vooruit vaart, lijkt de rook achteruit (ten opzichte van het schip) geblazen te worden.

Ten opzichte van het schip heeft de uittredende rook een snelheid even groot en tegengesteld als die van het schip.

Je ervaart dat zelf als je fietst bij windstil weer.

Je hebt dan altijd tegenwind, even snel achteruit als jouw snelheid vooruit.

Begrippen zoals snelheid, die zowel een bepaalde *richting* als een bepaalde *grootte* hebben, worden in de natuurkunde weergegeven met behulp van vectoren.

We tekenen een vector als een pijl, waarbij de richting bijvoorbeeld de windrichting aangeeft en de lengte overeenkomt met de windsnelheid (op een zekere schaal).

Je mag vectoren evenwijdig aan zichzelf verplaatsen, als grootte en richting maar dezelfde blijven (dit geldt met name voor de windvector).

Je kunt vectoren ook optellen. Als voorbeeld hiervan kan dienen het samenstellen van twee krachten.

Ook een *kracht* heeft een bepaalde *richting* en een *grootte*. Wanneer, zoals in figuur 4 twee krachten K_1 en K_2 met verschillende richtingen op eenzelfde voorwerp worden uitgeoefend, wordt de som van de krachten (de resultante) weergegeven door de vector waarvan richting en grootte worden gegeven door de diagonaal van het parallellogram waarvan K_1 en K_2 de zijden zijn. Handiger dan de 'parallellogram-constructie' is de 'kop aan staart-constructie' van figuur 5.

We kunnen dit ook op snelheden toepassen.

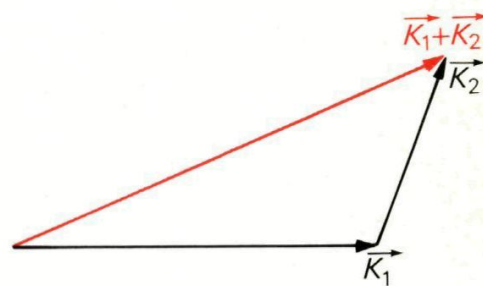
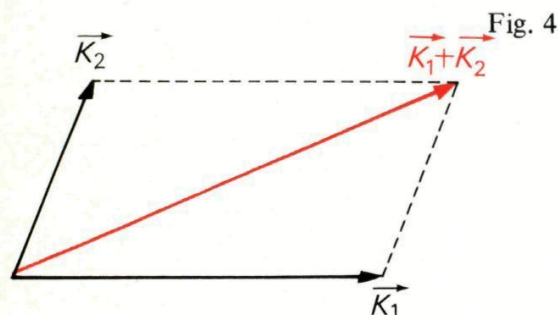


Fig. 5



In figuur 6 zie je een fietser. Hij fietst met een snelheid van 15 km per uur over een weg van oost naar west. Op het stuur van de fiets is een vlaggetje bevestigd, dat wappert in de wind. Als de windsnelheid ook 15 km per uur is en de windrichting noord oost, dan wappert het vlaggetje in noord-oost-oostelijke richting.

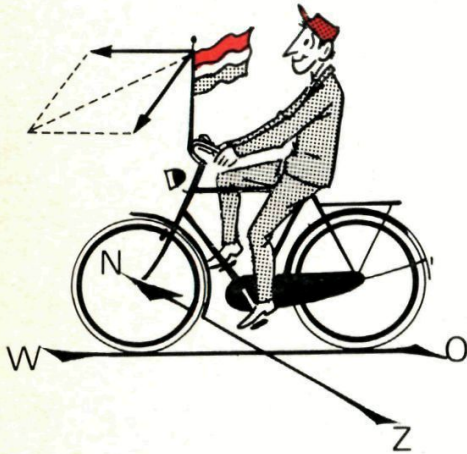


Fig. 6

Een soortgelijke situatie is aanwezig bij een varend schip met een rookpluim.

We gaan de richting van de rookpluim construeren als de vaarvector (v) en de windvector (w) gegeven zijn.

Daartoe construeren we uit de vaarvector (v) de tegenwindvector (tw), even groot en tegengesteld aan v .

We stellen tw en w samen tot een resultante.

De richting van deze resultante is de richting van de rookpluim ten opzichte van het schip (figuur 7).

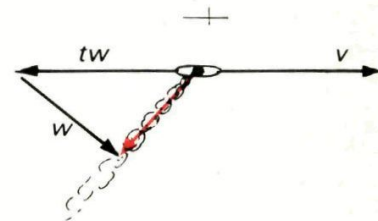


Fig. 7 Constructie richting rookpluim

In het nu volgende gaan we hetzelfde probleem omgekeerd stellen, en wel als volgt:

Stel een schip vaart op zee; er staat een zekere wind en de rookpluim van het varende schip wijst in één of andere richting.

Deze richting valt niet samen met die van de heersende wind.

Gevraagd wordt nu om hieruit de windrichting te construeren.

Als we het vraagstuk zo stellen, dan is de oplossing niet bepaald of anders gezegd: er zijn dan vele oplossingen mogelijk.

We verstrekken onszelf dan ook een gegeven meer en stellen het vraagstuk opnieuw aldus:

een schip vaart op zee; er staat een zekere wind (grootte en richting ervan is onbekend) en de rookpluim van het varende schip wijst in een zekere richting.

Even later wijzigt het schip zijn koers, zonder dat de snelheid in grootte verandert, en de rookpluim gaat ook in een andere richting wijzen.

Construeer de richting van de heersende wind of eenvoudiger gezegd: construeer de windvector.

Probeer met behulp van figuur 8 zelf de constructie uit te voeren.

Uit deze figuur volgt tevens de verhouding der snelheden van schip en wind. Als de snelheid van het schip dus bekend is, kan men met de rookpluim ook de windsnelheid bepalen.

In figuur 9 tenslotte zie je wat er gebeurt, als het schip met constante snelheid in het rond vaart.

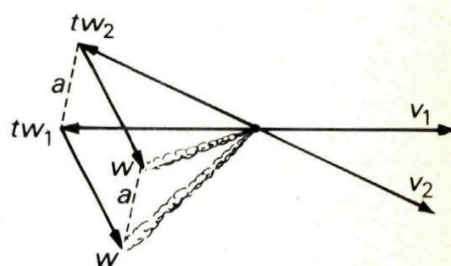


Fig. 8 Constructie van windvector

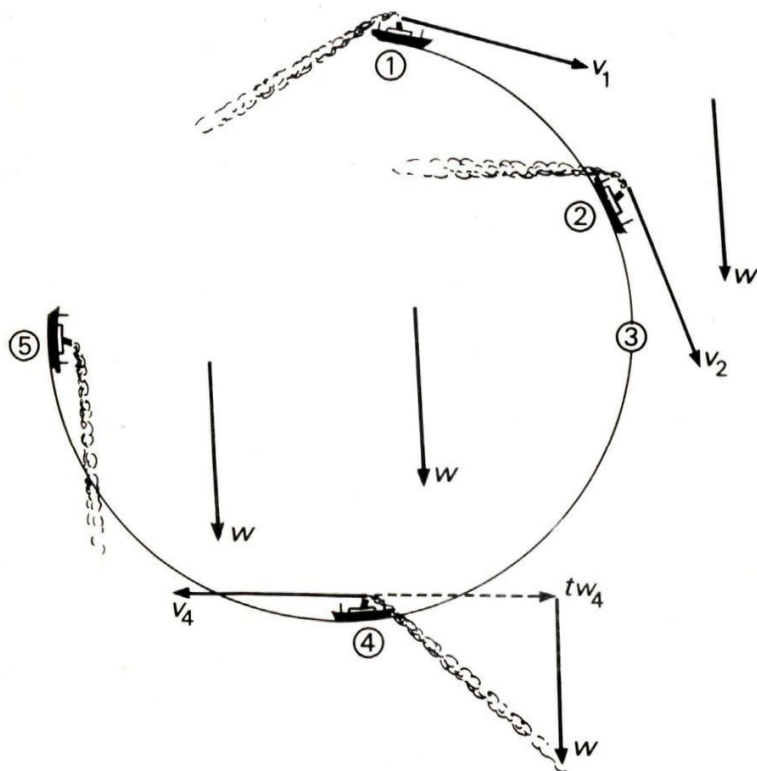


Fig. 9 Constructie van windvector

Wiskunde in de bocht °°

Ir. H. M. Mulder

art. 72 lid 2

wegenverkeersreglement:

eisen inzake belading motorvoertuigen

c de lading mag niet meer dan 5 meter voorbij de achteras uitsteken

e aan het achtereind van de uitstekende lading moet bij dag een rode vlag zijn bevestigd

f bij veranderen van richting mag de snelheid niet meer bedragen dan 6 km per uur.

Door de straat rijdt een bestelwagen. Op het dak ligt een ladder, die van achteren een behoorlijk eind uitsteekt. Aan dat eind is een rode lap geknoopt.

Zo eist dat de wetgever.

Waarin schuilt het gevaar van dergelijke uitsteeksels in het verkeer?

Je zou er op in kunnen rijden en het obstakel door je eigen voorruit krijgen.

Een bepaald ernstig gevaar ontstaat bij het nemen van een bocht.

De wagen gaat bijvoorbeeld linksaf (figuur 10), maar het uitstekende eind gaat daarbij een zekere tijd nog rechtsaf (zie pijl), met alle risico van dien.

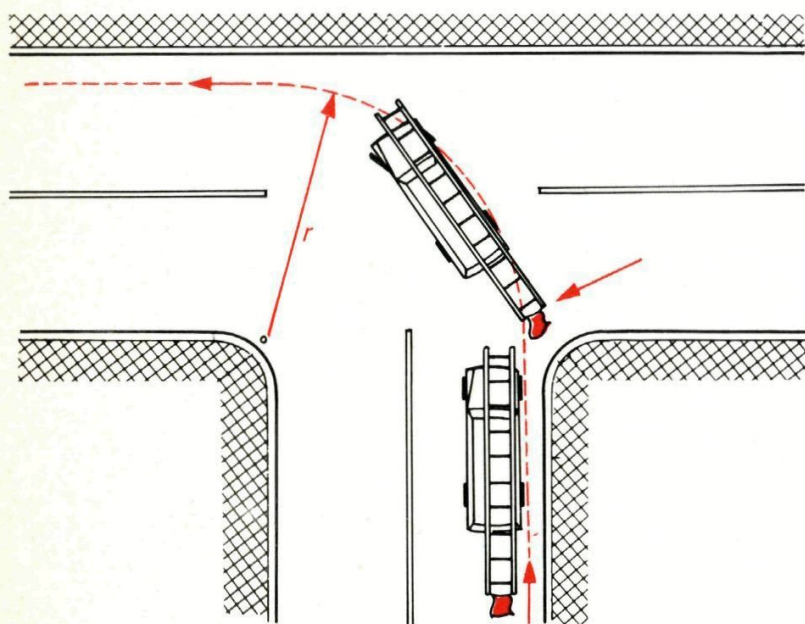


Fig. 10 Auto met uitstekende lading gaat door de bocht

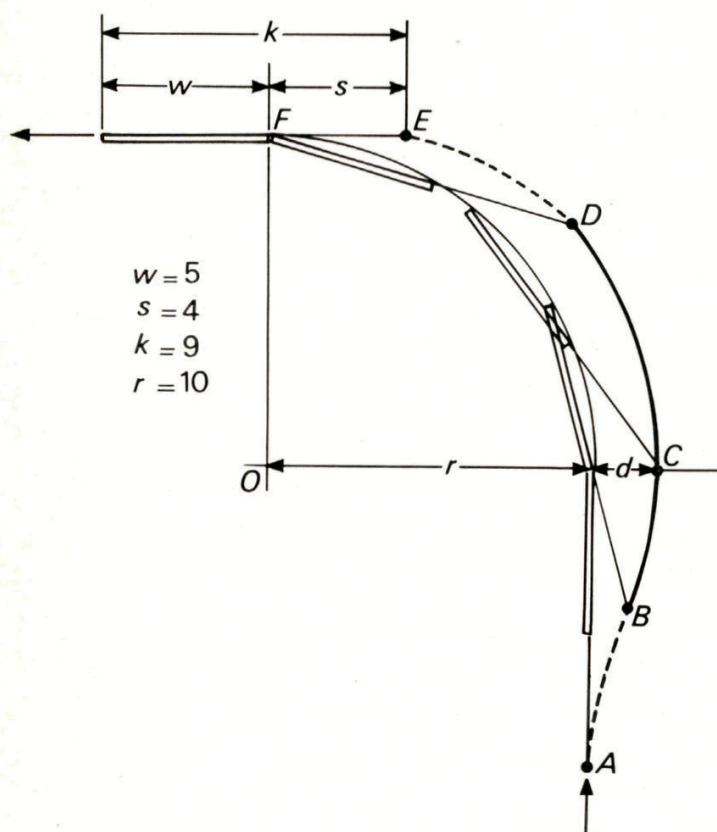
Ons interesseert de vraag:

hoeveel gaat dit eindpunt daarbij hoogstens rechtsaf?

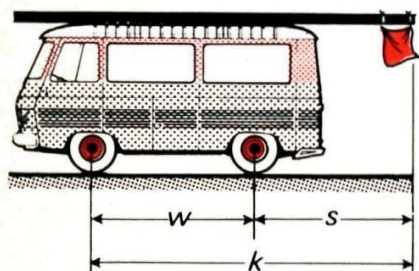
Laten we eerst eens kijken welke zwaai de vlag precies maakt als de wagen door de bocht gaat.

We veronderstellen hierbij dat de voorwielen eerst een rechte weg afleggen, daarna een kwartcirkel en vervolgens weer een rechte weg. Verder nemen we even aan dat de achterwielen dit spoor juist zo volgen.

Natuurlijk allereerst van de lengte van het uitstekende stuk.



De straal van de buitencirkel stellen we r (figuur 10).



32

De vraag wordt dan:

hoe is d afhankelijk van s , w en r ?

Je kunt gemakkelijk voor jezelf nagaan, dat zolang voor- en achterwielen zich nog in de bocht bevinden, het eind bij de vlag C ook een deel van een cirkel met grotere straal beschrijft.

Dit is cirkeldeel BCD in figuur 11.

De krommen AB en DE zijn geen cirkeldelen maar hebben een ingewikkelder karakter.

In figuur 13 is de zaak wat meer meetkundig opgezet. De cirkel met straal r wordt daar gesneden door de lijn PQC .

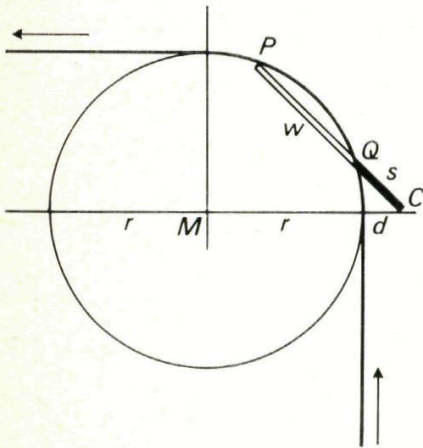


Fig. 13 Hoe hangt d af van w , s en r ?

Welke relatie bestaat daar tussen w , s , d en r ? Kijk nu eerst naar figuur 14.

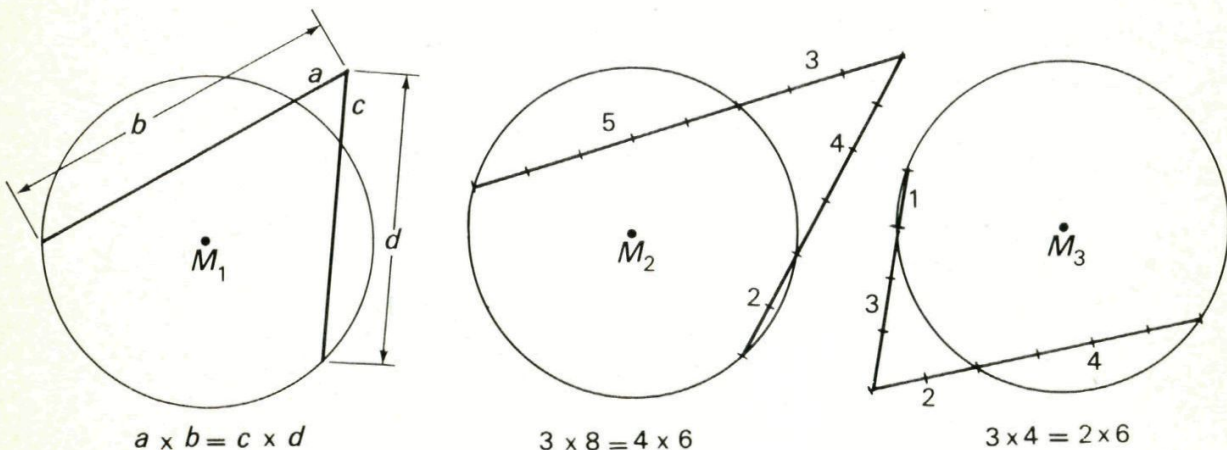


Fig. 14 Relatie bij lijnen die elkaar buiten een cirkel snijden

Voor elk stel lijnen die een cirkel snijden en hun snijpunt buiten de cirkel hebben, geldt:

$$a \times b = c \times d$$

De betekenis van deze bewering wordt je verder duidelijk als je nog de twee voorbeelden in figuur 14 nader bekijkt. Je ziet daar uitgebeeld de toepassingen:

$$3 \times 8 = 4 \times 6 \text{ en } 3 \times 4 = 2 \times 6.$$

Meet nu zelf eens in millimeter nauwkeurig, de lengten van a , b , c en d en ga dan na wat van de bewering $a \times b = c \times d$ terecht is gekomen.

Het algemene bewijs van deze stelling laten we weg.

In ons verkeersprobleem van figuur 13 betekent dit:

$$s \cdot (s + w) = d \cdot (d + 2r)$$

Om te beginnen stellen we hierin: $s + w = k$ (figuur 12).

Verder merken we op dat in het algemeen d vaak veel kleiner zal zijn dan de middellijn van de spoorcirkel $2r$.

Om een beter hanteerbaar resultaat te krijgen, zullen we d ten op zichte van $2r$ verwaarlozen.

We krijgen dan:

$$s \cdot k = d \cdot (d + 2r)$$

$$d^2 + 2dr - sk = 0$$

$$d = -r + \sqrt{r^2 + sk}$$

Dit is nu de uitkomst die we zochten en het is een eenvoudige uitkomst.

°°° Voor wie behoefte heeft aan een exacte oplossing:

$$s \times k = d \times 2r$$

$$\text{ofwel } d = \frac{s \cdot k}{2r}$$

Houden we ons aan de benaderde waarde dan lezen we: de uitzwaai van het uitstekende eind is des te groter naarmate:

- 1 het uitstekende eind (s) langer is
- 2 het voertuig zelf langer is (k groter)
- 3 de bocht scherper wordt genomen, dus r kleiner is.

De gevonden uitkomst is dus slechts een benadering en geldt alleen bij de gestelde voorwaarde: $d \ll 2r$.

Dus hoe kleiner d en hoe ruimer de bocht, des te bruikbaar de vereenvoudigde uitkomst.

Neem maar eens als voorbeeld de maten gebruikt in figuur 11 te weten:

$$s = 4$$

$$k = 9$$

$$r = 10$$

Uit $d = \frac{sk}{2r}$ volgt: $d = \frac{4 \cdot 9}{2 \cdot 10} = 1,8$

[Vergelijking met het exacte antwoord:

$$d = -r + \sqrt{(r^2 + sk)} = -10 + \sqrt{(100 + 36)} = 1,65$$

leert ons dat de benaderde waarde ongeveer 9% boven de werkelijke waarde is gekomen. Meestal is dit verschil veel kleiner.]

Meet d maar eens op in figuur 11, daarbij lettend op de gebruikte schaal. Wellicht vind je iets als 1,7.

Misschien heeft alles wat hiervoor bekeken is, de indruk gewekt, dat het 'zwaai probleem' zich alleen voordoet bij uitstekende lading.

Is het je nooit overkomen dat je pal langs de stoep rand fietste en een grote vrachtwagen of autobus je passeerde en tegelijk linksaf draaide?

Je dreigt dan door de zwenkende staart de stoep opgedrukt te worden.

Bij elke auto treedt dit effect op doordat de achterzijde van de wagen niet samenvalt met de achteras.

Onder s moeten we dan verstaan: de afstand van de achteras tot de achterzijde van de auto.

Voor elke auto zijn s en k constant, alleen r kan verschillen.

Immers s en k zijn al bepaald door de constructeurs van de wagen, terwijl r bepaald wordt door de loop van de weg en de rijstijl van de bestuurder.

Omdat $d = \frac{sk}{2r}$ kun je stellen dat het produkt sk een maat is voor de bestuurbaarheid van de betreffende wagen.

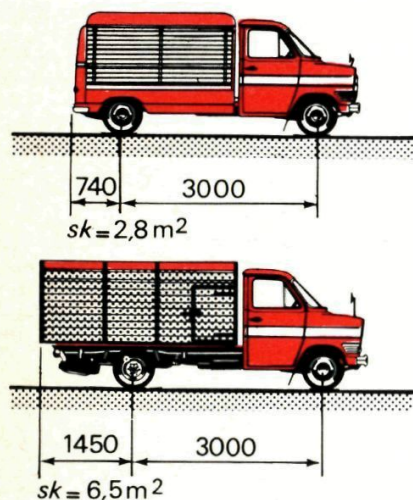
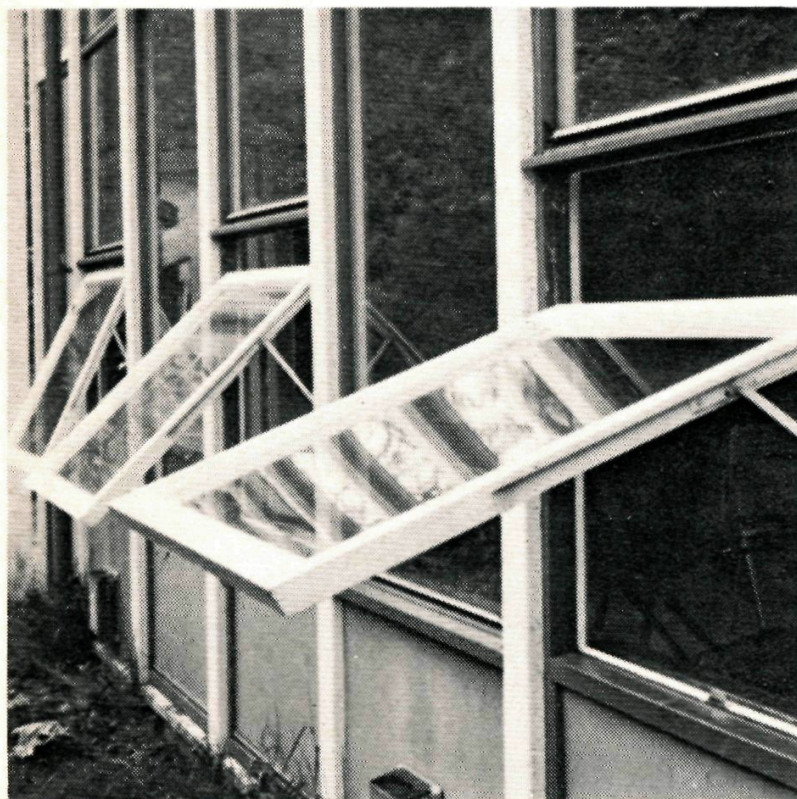


Fig. 15 Boven: $sk = 2,8 \text{ m}^2$, onder: $sk = 6,5 \text{ m}^2$

In figuur 15 zijn twee vrachtwagens getekend met dezelfde wielbasis maar met verschillende staartlengten.

Het produkt sk heeft bij de tweede wagen een ruim dubbele waarde.

Denkertjes



- 11 Leerlingen van de scholengemeenschap 'Schoonoord' in Zeist herkennen in bijgaande foto waarschijnlijk wel de ramen van de noodlokalen.

Het zijaanzicht van een raam is hiernaast schematisch aangegeven. (figuur 16) A en C zijn scharnierpunten en B is glijpunt. We nemen aan dat $AB = AC$. Bij het uitzetten komt B omlaag en gaat E omhoog. Is er een punt D aan te geven dat op gelijke hoogte blijft? Zo ja, welk?

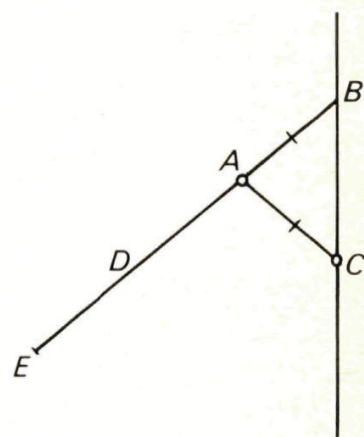


Fig. 16

- 12 Bewijs dat als $AB \neq AC$ er geen punt van het raam bij het uitzetten op gelijke hoogte blijft.
- 13 Iemand vertoonde een film over zijn vakantie. Na precies 5 minuten en 20 seconden, toen de opwindende spoel $1\frac{1}{2}$ keer zo snel draaide als de afwindende spoel, brak de film. Hoeveel film hadden de toeschouwers op dat moment nog te goed? (verwaarloos de kern van de spoel)

Hogere beroepsopleiding rond de computer

Sprookje

Er was eens in een klein Italiaans dorp een arme houtsnijder: Padrone Antonio. Behalve mooi houtsnijwerk kon hij ook poppen maken, mooie, maar ook hele ingewikkelde.

Aan één exemplaar werkte hij al jaren. Dat moest een pop worden, die niet alleen kon lopen, maar ook kon werken. Padrone Antonio had nl. een enorme hekel aan de dagelijks terugkerende routinekarweitjes, zoals vaatwassen, kolen scheppen en zo meer. Liever besteedde hij zijn tijd aan het creëren van mooie poppen. Daarom had hij één grote wens. Als deze pop nu eens zo gemaakt kon worden, dat hij al die onaangename karweitjes kon overnemen!

Bezeten door die gedachte was hij er elk vrij uurtje mee bezig. En zoals Pinocchio op een goede dag door een fee tot leven werd gewekt, gelukte het Padrone Antonio door veel denkwerk zijn pop in bedrijf te stellen! De pop schepte kolen en waste de vaat. Natuurlijk niet op eigen kracht, de pop was nog jong en moest met vloeibaar voedsel gevoed worden. De poppenmaker moest hem iedere dag weer voeren. Totdat Antonio vond dat de pop voeren eigenlijk een even vervelend routine werkje was als vaatwassen. De pop moest maar eten wat de pot schafte.

Dus ging de poppenmaker weer aan het werk. Zou hij de werkpopp geen maagzuur kunnen geven, zodat hij ook brood en aardappelen kon verwerken?

Padrone Antonio probeerde het, en jawel, het lukte. De werkpopp was volwassen geworden. Hij verwerkte het voedsel, dat de mensen hem toedienden en verrichtte het werk, dat van hem verlangd werd.



Computers

Tot zover ons sprookje van de poppenmaker en de werkpop. Merkwaardigerwijs is dit sprookje in onze tijd geen sprookje meer. Het is de werkelijkheid als je voor 'de werkpop' wilt lezen 'de computer'. De computer is een machine, die werk voor ons verricht. Vervelend dagelijks routinewerk.

Toen de computer nog jong was, en dat is nog nauwelijks 20 jaar geleden, was hij moeilijk te 'voeden'. De opdrachten, die men aan deze computer verstrekke, moesten gemakkelijk 'verteerbaar' zijn. Het gevolg was, dat tussen het probleem en de machine een hele keten van mensen nodig was.

De eerste, de *systeemanalist*, is goed op de hoogte van het probleemgebied en hij kan de grote lijnen aangeven volgens welke het karwei geklaard moet worden. Met deze grove oplossing kan de computer niets beginnen. De *applicatieprogrammeur* gaat aan de slag om de oplossing om te zetten in een grote hoeveelheid instructies, het zogenaamde programmeren. Dit is altijd nog vast voedsel voor computers.

Vroeger werden deze instructies nog weer door een *codeur* omgezet in voor de jonge computer verteerbare code-opdrachten. Het coderen was een nauwkeurig maar weinig inspirerend werkje. Men heeft voor de computer daarom 'maagzuur' ontwikkeld, waardoor deze de programma's zonder meer kan accepteren, let wel: het 'maagzuur' is in wezen 'vloeibaar voedsel' geweest, maar maakt na het aanbrengen de computer gemakkelijker toegankelijk voor de mens. Deze tendens zal zich in de jaren verder voortzetten. De computer zal steeds verder groeien in de richting van het probleemgebied, waarin hij wordt ingezet. De systeemanalist zal altijd wel nodig blijven om de oplossing aan te geven. Het groeien van de computer moet niet worden opgevat als groter worden of technisch ingewikkelder. Dat is ook weleens zo: men neemt een grotere 'werkpop', maar die is nog steeds volgens hetzelfde principe gebouwd. Het groeien is: 'gaan eten wat de pot schaft', dwz. gevoed kunnen worden met opdrachten die steeds meer in het menselijke vlak liggen. En dat is te danken aan het 'maagzuur', een serie programma's die in de computer wordt 'gegoten'. Deze meestal permanent in de machine werkzame programma's noemt men *harde programmatuur*. De technische machine zelf, de *apparatuur*, laat nog steeds verdere groei naar volwassenheid toe, maar daartoe moet nog veel harde programmatuur ontwikkeld worden.

Hogere beroepsopleiding rond de computer

Velen denken aan een beroep verband houdend met computers. Veel partikuliere onderwijsinrichtingen beloven een rijke toekomst met hun programmeursopleidingen. Uit het voorgaande verhaal is wel duidelijk geworden dat naarmate zo'n opleiding meer gericht is op het coderen en eenvoudig programmeren er minder goede toekomstmogelijkheden liggen, want de ontwikkeling is nu juist in de richting van het overbodig maken van dit soort werk. Voorzichtigheid met dit soort opleidingen is geboden.

Er bestaan in het *hogere beroepsonderwijs* uitstekende mogelijkheden tot het volgen van een opleiding met een goede toekomst. We noemen hier enkele mogelijkheden.

– Specialist op het gebied van apparatuur (de poppenmaker uit het sprookje). Veel Hogere Technische Scholen (HTS-en) hebben een electro-afdeling, waarbinnen informatie-techniek wordt onderwezen. Je schooldecaan kan nagaan voor welke plaatsen dat precies geldt.

– Systeemanalist. Dit is iemand die in eerste instantie een grote kennis bezit van het probleemgebied, dus van het bedrijf waarin hij werkt of van het vakgebied waarin hij zich beweegt. Hij zal dus in eerste instantie deze kennis moeten verwerven. Scholen voor HEAO (Hoger Economisch en Administratief Onderwijs) en HTS-en bieden o.a. hiervoor mogelijkheden. Maar een toekomstig systeemanalist zal natuurlijk meer van computers moeten afweten dan de meeste anderen die een HEAO- of HTS-studie volgen. Op HTS-en zal in de toekomst de mogelijkheid bestaan om zich in het laatste studiejaar te specialiseren op computergebied. Aan een aantal HEAO-scholen (Den Haag, vanaf 1974 Amsterdam en Groningen) kan men deze specialisatie al in het tweede studiejaar beginnen in een speciale afdeling: Bedrijfs informatica onderwijs.

– Specialist harde programmatuur. Studie hiervoor is mogelijk aan twee scholen (Eindhoven en Enschede) voor Hoger Informatica Onderwijs (HIO). Het leerplan geeft voor de eerste twee leerjaren de volgende vakken aan: informatica, wiskunde, bedrijfseconomie, algemene economie, moderne talen en sport.

Voor het vierde leerjaar worden een aantal mogelijke specialisaties genoemd.

Nogmaals: je schooldecaan kan je nauwkeurige gegevens verstrekken. Het sprookje van Padrone Antonio helpt je bij een eerste oriëntatie. Zoals alle vergelijkingen gaat ook dit sprookje een beetje mank. We hebben de programma's voor de computer vergeleken met het voedsel voor de pop. De computer ontleent echter geen energie aan programma's zoals de pop aan voedsel. De computer 'loopt' in wezen op electriciteit, terwijl de programma's bepalen welk karwei moet worden aangepakt en hoe dit moet gebeuren. Bij het sprookje moet je dus maar denken dat de pop aan het eten herkende wat hij doen moest, boterham = kolen scheppen, warm eten = vaat wassen.

Denkertje

- 14 Op een verre planeet leven knoerpen, knaurpen en knuirpen.

Iedere knoerp is een knaurp.

De helft van alle knuirpen is ook knaurp.

De helft van alle knaurpen is ook knoerp.

Er zijn 60 knuirpen en 40 knoerpen.

Geen enkele knuirp is ook knoerp.

a Hoeveel knaurpen zijn noch knoerp, noch knuirp?

b Teken een Venn-diagram, waarin de aantallen knuirpen, knaurpen en knoerpen staan aangegeven.



Een legpuzzel°

Het lijkt op het eerste gezicht misschien onwaarschijnlijk, maar het is toch heus waar dat het vierkant en de gelijkzijdige driehoek uit figuur 17a en 17b gelijke oppervlakten hebben! De oppervlakte van de driehoek is gelijk aan

$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}b\sqrt{3} = \frac{1}{4}b^2\sqrt{3}$$

Uit $\frac{1}{4}b^2\sqrt{3} = a^2$ volgt

$$b = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Nu is a gelijk aan 1,5 cm. En enig benaderwerk met die vierdewortel brengt dan aan het licht, dat b gelijk zal moeten zijn aan 2,28 cm (bij benadering). Meet maar na!

De gelijkheid van die twee oppervlakten brengt je misschien wel op het idee, dat het mogelijk moet zijn om het vierkant zo in stukken te verknippen, dat de driehoek met die stukken bedekt kan worden. En dat is nou precies, wat we hieronder zullen gaan doen.

Als dat karwei klaar is, dan hebben we een legpuzzel (met zeven stukken) gekregen, waarmee we zowel het vierkant als de gelijkzijdige driehoek kunnen leggen. Maar er is nog meer: met diezelfde zeven stukken kun je ook een parallellogram en een rechthoek bouwen!

We beginnen met het vierkant in een parallellogram te veranderen (zie figuur 18a en 18b). Dat kan op allerlei manieren. We doen het hier zo, dat de afstand van de lange zijden van het parallellogram gelijk is aan $\frac{1}{2}b$.

Nu maken we van dat parallellogram een rechthoek (zie figuur 19a en 19b). De basis van die rechthoek is $\frac{1}{2}b$ lang. En omdat zijn oppervlakte nog altijd gelijk is aan die van vierkant en gelijkzijdige driehoek is dus de hoogte van de rechthoek gelijk aan de hoogte h van de driehoek!

De figuren 20a en 20b tonen, hoe je van de verkregen rechthoek tenslotte de gewenste driehoek kunt maken. En wil je nu nog eens zien hoe het vierkant uiteindelijk verknipt is, dan helpt figuur 21 je daarbij.

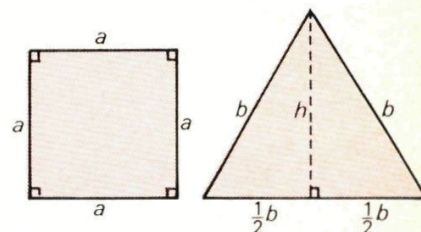


Fig. 17

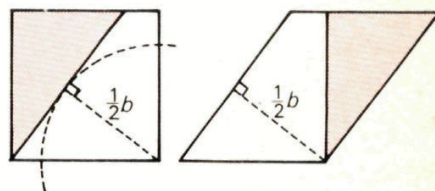


Fig. 18

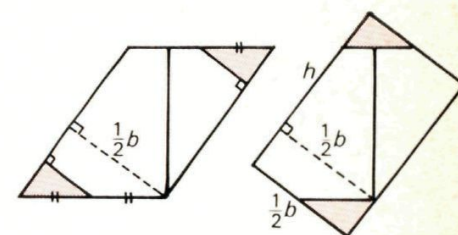


Fig. 19

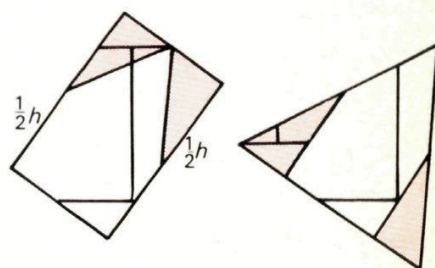


Fig. 20

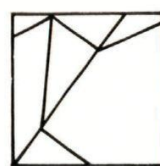


Fig. 21

Het vierkant en het kruis uit figuur 22a en 22b hebben gelijke oppervlakten (20 roostervierkantjes). Kunnen we daar hetzelfde spelletje mee uithalen?

Het is niet zo moeilijk in te zien, dat het kruis te veranderen is in een rechthoek: knip de helft van de rechter poot af en leg die rechts tegen de bovenste poot aan; knip de onderste poot af en leg die links tegen de bovenste poot aan.

En dat is eigenlijk alles, wat we nodig hebben. Want we kunnen op dezelfde manier als in het voorgaande het vierkant gaan veranderen in een rechthoek van de gewenste afmetingen, om daarna dan van die rechthoek weer in omgekeerde richting een kruis te maken.

Voer je dit programma uit, dan krijg je een legpuzzel met acht of negen stukjes. Vind je dus ook niet, dat de oplossing uit figuur 23 met slechts vier stukjes verrassend fraai is? Hoe kom je op zo'n idee!

Zet in plaats van het uitroepteken achter de laatste zin maar liever een vraagteken. En kijk dan naar figuur 24. Dat is de manier om op zo'n idee te komen!

Probeer het maar eens zelf met de letter *L* uit figuur 25: knip hem in drie stukken, waarvan je een vierkant kunt maken. Voor de loggere letter *L* uit figuur 26 is er geen korte manier; via rechthoek en parallellogram kun je er een vierkant van maken (zes stukken). Heb je enig idee, waarom deze *L* zo weerbarstig is?

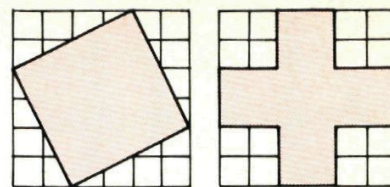


Fig. 22

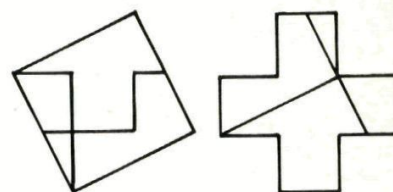


Fig. 23

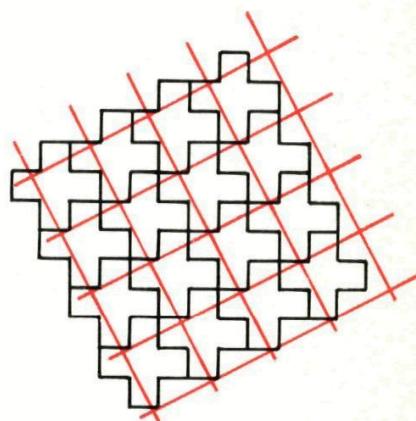


Fig. 24

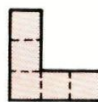


Fig. 25



Fig. 26

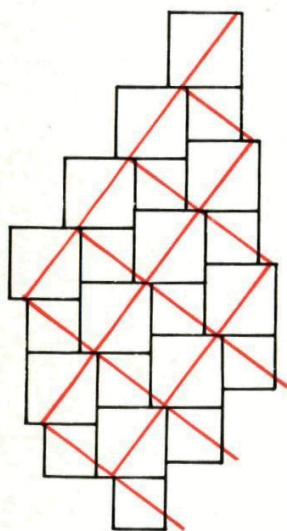


Fig. 27

En omdat dit tijdschrift *Pythagoras* heet eindigt dit verhaal met figuur 27, waarin je een legpuzzelbewijs (vijf stukken) ziet van de beroemde stelling; elk rood vierkant is gelijk aan de som van twee verschillende zwarte of wel $c^2 = a^2 + b^2$.

Internationale wiskunde olympiade

De (vijftiende) internationale wiskunde olympiade is dit jaar gehouden in Moskou van 4 tot 17 juli. De Nederlandse afvaardiging, bestaande uit J. van Gans, J. P. H. W. van den Eijnde, F. Cornelis, W. B. G. Ruitenburch, F. G. Menting, J. J. van de Bij, W. van Viersen, mej. J. Brinkhuis en onder leiding van A. F. van Tooren en dr. J. van der Craats, ontving de uitnodiging pas op het allerlaatste nippertje, zodat er veel geïmproviseerd moest worden voor het vertrek.

De deelnemers moesten zes opgaven oplossen en konden hiermee maximaal 40 punten scoren. Een derde prijs werd verleend bij tenminste 17 punten, een tweede bij tenminste 27 punten en een eerste bij tenminste 35 punten.

Er waren vijf eerste prijzen: drie voor Russische deelnemers (met 40, 39, 39 punten), één voor een Hongaar (38 punten) en één voor een Engelsman (38 punten).

Er waren 17 tweede prijzen en 46 derde prijzen.

Van de laatste gingen er twee naar Nederlanders: Van Gans (26 punten) en Van den Eijnde (20 punten).

Het landenklassement werd uiteindelijk als volgt:

Sovjet Unie	254 (270)
Hongarije	209 (263)
D.D.R.	197 (239)
Polen	173 (160)
Engeland	163 (179)
Frankrijk	153
Tsjechoslowakije	149 (131)
Oostenrijk	144 (136)
Roemenië	141 (208)
Joegoslavië	137 (136)
Zweden	99 (60)
Bulgarije	96 (120)
Nederland	96 (51)
Finland	86
Mongolië	64 (48)
* Cuba	42 (14)

* Het team van Cuba telde slechts vijf leden.

De getallen tussen haakjes zijn de resultaten van 1972.

In 1974 wordt de Olympiade in de D.D.R. georganiseerd (in Erfurt, Weimar en Berlijn) van 4 tot 16 juli.

Als voorbeeld geven we twee opgaven:
Opgave 3 (Zweden)

a en b zijn zodanig reële getallen, dat de vergelijking
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$

tenminste één reële wortel heeft. Bereken de minimale waarde van $a^2 + b^2$.

Opgave 4 (Joegoslavië)

Een soldaat moet controleren, dat er zich geen landmijnen bevinden binnen de gelijkzijdige driehoek ABC of op de omtrek daarvan. De reikwijdte van zijn mijndetector is gelijk aan de helft van de lengte van de hoogtelijn van driehoek ABC . Hij begint in een hoekpunt.

Welke weg moet hij kiezen om de kortst mogelijke afstand af te leggen van dat hoekpunt tot het punt, waar hij de controle beëindigt?

De oplossingen vind je op blz. 48.

Denkertjes

- 15 Een handelaar verkoopt een soort vloerbedekking, die p cm dik is. Er staat in het magazijn een restantrol. Hoe kan de handelaar de lengte l van dat restant vrij nauwkeurig bepalen zonder de vloerbedekking uit te rollen? Bepaal een formule, die als vuistregel gebruikt kan worden.

- 16 Verdeel het witte deel van deze oude Chinese figuur 28 op drie manieren in twee delen, die niet congruent zijn maar wel dezelfde oppervlakte hebben.

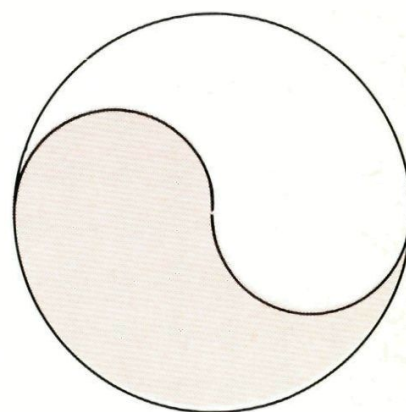


Fig. 28

Denkertjes



17 De oplossingsverzameling V van

$$(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = m \wedge m \in \mathbb{Z}$$

bevat een oneindig aantal elementen. Bepaal een deelverzameling van V , die zelf ook een oneindig aantal elementen bevat.

18 Zet naast elkaar 3 luciferdoosjes. (figuur 29)

Zet op één doosje een stapeltje munten en wel in deze volgorde:

rijksdaalder, gulden, stuiver, kwartje en dubbeltje.

Je moet proberen deze stapel in dezelfde volgorde op een van de twee andere doosjes te zetten door telkens slechts één munt tegelijk naar een ander doosje te verplaatsen, waarbij het verboden is een grotere munt te plaatsen op een kleinere.

Als je het te moeilijk vindt, probeer het dan eerst maar met minder munten.

Hoeveel verplaatsingen heb je bij 5 munten minstens nodig?



Fig. 29

19 Hoe groot wordt het kleinste aantal verplaatsingen bij 2, 3, 4 munten?

20 Hoe groot bij n munten?

Auto contra fiets°

C. van Schagen

Het is altijd aardig om te ervaren, dat wiskunde niet zomaar een spelletje is. Dat wiskunde ook (om niet te zeggen altijd) iets is wat je voor het dagelijkse leven praktisch kunt gebruiken.

In dit geval zal ik met behulp van functie en grafiek laten zien hoe je kunt uitmaken in welke gevallen het beter is op de fiets te gaan, en in welke gevallen beter met de auto. Als je het niet erg vindt, zal ik de luchtvervuiling er deze keer buiten laten. Het is echter heel goed mogelijk die ook in rekening te brengen.

Omdat ik het voor mezelf heb uitgerekend zal ik het hier ook voor mijn geval voorrekenen. Dat bespaart een heleboel variabelen bij het neerschrijven van de formules. Het is natuurlijk erg eenvoudig mijn getallen door andere te vervangen, die meer overeenkomen met jullie situatie.

Mijn fiets heeft ongeveer f 300,— gekost, maar daarom is het ook een lekker lichtlopend karretje waar ik weinig reparatiekosten aan heb. Goedkoop is meestal duurkoop. Ik schat, dat ik er toch minstens 10 000 km mee zal rijden. De fiets op zich kost dus 3 cent per km.

Als ik die f 300,— op de bank zet, en ik schat hoeveel km ik per jaar op de fiets zou hebben gereden, en ik vervolgens de rente per jaar deel door dat aantal kilometers per jaar, dan kom ik merkwaardigerwijs ook op 3 cent per km! Mijn fiets is dus een redelijke investering.

Een fiets moet ook voortbewogen worden. Dat kost ook geld, want de energie die je verbruikt krijg je uit je eten en eten moet je kopen.

Om de berekening eenvoudig te houden zal ik het alleen met suiker doen. In Scientific American van maart 1973 staat een artikel van S. S. Wilson geheten: Bicycle Technology. Hieruit neem ik over, dat het voortbewegen met een fiets 1,5 cal per gram per km kost voor een man van 100 kg.

Nu weeg ik 72 kg. Dus kost mij een km fietsen: $72 \cdot 0,72 \cdot 1,5 = 78$ kcal.

Volgens de voedingsmiddelentabel levert 100 gram suiker mij 400 kcal. Dus heb ik voor een km fietsen 19,2 gram suiker nodig. Dat kost dan ongeveer 2 cent.

Dezelfde berekening voor brood komt wat duurder uit, maar brood levert niet alleen energie, maar ook bouwstoffen, dus dat zal wel op hetzelfde neerkomen.

Fietsen kost ook tijd. En tijd is geld. Nu is dat echter een zo wisselende aangelegenheid, dat ik hiervoor maar een variabele neem: a . Die a duidt dus het aantal centen aan dat een km fietsen aan tijd kost.

De formule wordt nu:

$$y = (a + 5)x.$$

y betekent: totale fietskosten in centen

x betekent: aantal af te leggen kilometers

a betekent: prijs van 1 km fietsen aan tijd in centen

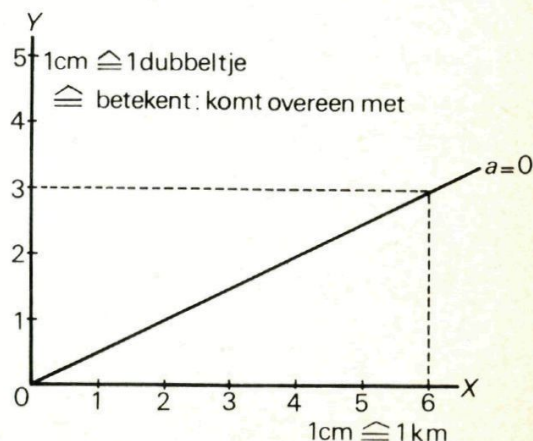


Fig. 30

Een stilstaande fiets kost niets. De grafiek gaat door het punt $(0, 0)$. Voor elke a is de grafiek een rechte lijn.

Als ik helemaal alleen voor mijn lol fiets kost me dat 5 cent per km.

Omdat $y = 5x$ al erg steil loopt, en die andere nog steiler zijn, is het beter van centen op dubbeltjes over te gaan. Dat is dan in de figuur ook zo getekend.

Voor mezelf heb ik ook nog de a uitgerekend in het geval ik naar mijn werk fiets, en ik het dus als verloren werktijd kan beschouwen.

Ik fiets gemiddeld 15 km per uur, dus doe ik over één km juist 4 minuten. Mijn werktijd is ongeveer f 15,- per uur waard (netto), zodat 1 km fietstijd net precies 10 dubbeltjes kost. De formule wordt dan $y = 105x$.

Ik reken dat dit wel het duurste is wat ik zal fietsen. (Bijzondere gevallen buiten beschouwing gelaten, bijvoorbeeld als ik per fiets een lot in de loterij ga halen, waarop dan een hoofdprijs valt of als ik per fiets juist te laat ben om het winnende lot te kopen, dat ik wel zou hebben gekregen als ik even met de auto was gegaan.)

Nu wordt de grafiek weer te steil. In de volgende figuur ga ik dus over op gulden.

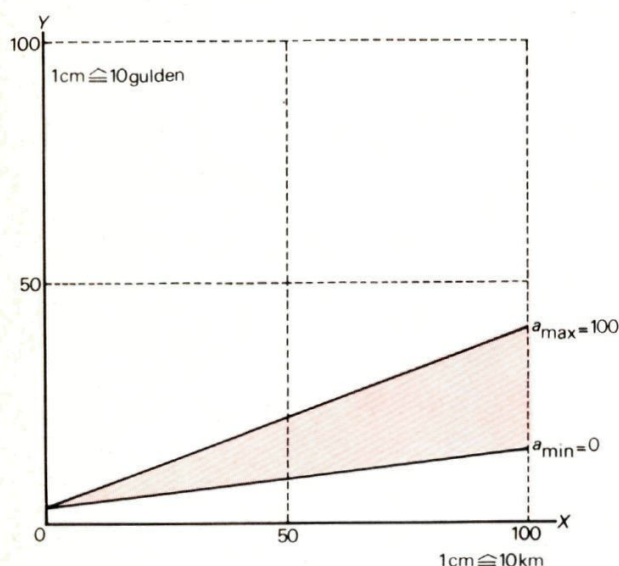


Fig. 31

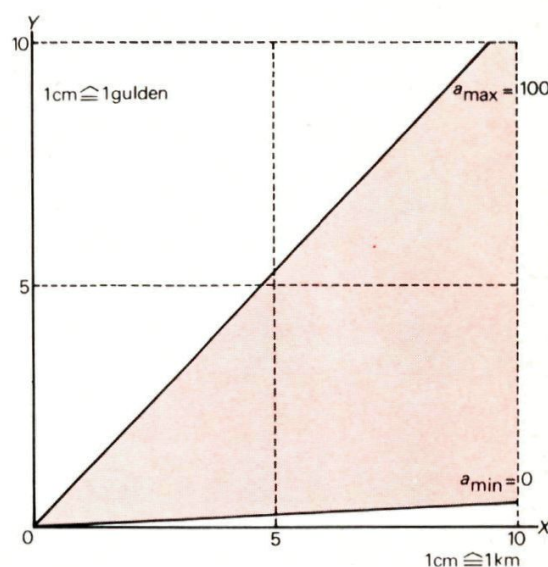


Fig. 32

Nu komt de auto aan de beurt. Hier heb ik het gemakkelijker, want ik kan het resultaat aflezen uit een boekje waarin het voor me uitgerekend staat. Ik heb natuurlijk een lelijk eendje, dus ik rij lekker goedkoop. Iemand met een duurdere auto moet het voor die auto maar ergens opzoeken.

De formule luidt: $y = 300 + 12x$.

Er is echter hier een bijkomend probleem omdat een stilstaande auto ook geld kost. Deze formule geldt dus voor één dag. Ik neem aan, dat als je op een gegeven moment auto en fiets wilt vergelijken, je die dag de auto niet voor iets anders gebruikt. Is dat wel zo, dan moet je dat ook in rekening brengen. Veel zal het niet schelen.

Ook hier moet je de tijd in rekening brengen, en dat gaat met diezelfde a als bij de fiets. Je tijd wordt er in een auto niet duurder op, of goedkoper. (Tenzij je de kans op een ongeluk in rekening wilt brengen, dan kan het aanmerkelijk schelen.)

De formule wordt dan uiteindelijk: $y = 300 + (12 + \frac{1}{4}a) \cdot x$

De grafiek hiervan bestaat weer uit rechte lijnen, maar deze keer gaan ze niet door het punt $(0, 0)$.

Er is nog een factor die buiten bespreking gebleven is, en die ik stilzwijgend in de variabele a heb gestopt, n.l. de vraag of de weg door de bebouwde kom loopt, of langs een snelweg. Voor de berekening heb ik een weg genomen, die zo'n beetje op het gemiddelde neerkomt wat men zo gewoonlijk rijdt. (Die $\frac{1}{4}$ voor de a komt omdat autorijden ongeveer 4 keer zo snel gaat als fietsen.)

Laten we nu de auto en de fiets gaan vergelijken. Vanwege de in beide formules voorkomende a , moeten we telkens één grafiek van de auto koppelen aan één voor de fiets. In de figuur heb ik dat gedaan voor $a = 0$, voor $a = 50$, en voor $a = 100$. De lijnen heb ik niet verder doorgetekend dan tot het snijpunt want het is direct duidelijk, dat rechts van het snijpunt de fiets duurder is, dan kies je de auto. Links van het snijpunt is de auto duurder, dan neem je dus de fiets.

Die snijpunten liggen op een rechte met formule: $y = 416 - \frac{5}{3}x$. Reken maar na, kenners van de analytische meetkunde!

Dat deze rechte een negatieve richtingscoëfficiënt heeft, betekent dat men de neiging zal hebben in zijn recreatietijd eerder voor de fiets te kiezen, en in zijn werktijd eerder voor de auto.

De berekeningen zijn uitgevoerd voor één persoon. Ben je met zijn vieren, dan moet je in de formule voor de fiets, een 4 zetten vóór de $(a + 5)$ en in de formule voor de auto een 4 voor de a .

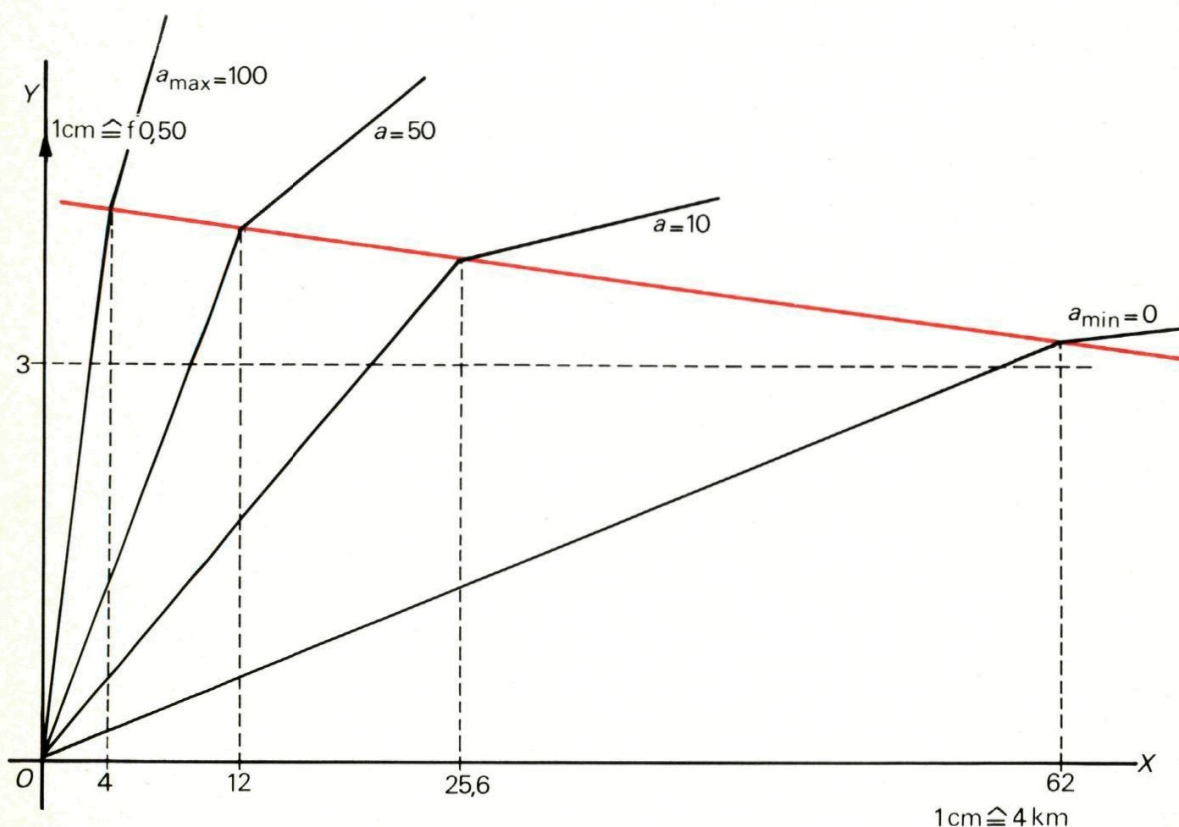


Fig. 33

Opgave 3

Voor elke reële $x \neq 0$ interpreteren we de gegeven vergelijking als die van een rechte lijn in het (a, b) -vlak. Dan stelt $a^2 + b^2$ het kwadraat van de afstand van de oorsprong tot die lijn voor en dit bedraagt

$$f(x) = x^{-2}(x^4 + 1)^2 (x^4 + 3x^2 + 1)^{-1}$$

Met behulp van de afgeleide functie is gemakkelijk te berekenen dat het gevraagde minimum is $f(-1) = f(1) = \frac{4}{5}$.

Omdat in veel landen wederkerige vergelijkingen op het programma staan, vonden veel deelnemers een oplossing waarin via de substitutie van y voor $x + \frac{1}{x}$ reductie tot een tweedegraadsvergelijking werd verkregen.

Opgave 4

Stel, dat hij in A begint. Zijn weg zal een punt P moeten bevatten van cirkel (C, r) en een punt Q van cirkel (B, r) ; hierin is r de reikwijdte van de detector. We nemen aan dat hij eerst P bereikt en dan Q ; dat mag op grond van de symmetrie van de figuur.

We nemen P variabel op cirkel (C, r) . De kortste weg van A naar een P is het lijnstuk AP . De kortste weg van P naar een Q is een deel van het lijnstuk PB . We zoeken de P , waarvoor $AP + PQ$ minimaal is. Dit is tevens de P , waarvoor $AP + PB$ minimaal is.

Deze P is het midden M van de hoogtelijn uit C ; de bijbehorende Q noemen we N . Want alle andere punten van cirkel (C, r) liggen buiten de ellips door M met brandpunten in A en B , zodat voor hen $AP + PB > AM + MB$.

Wanneer nu nog aangetoond wordt dat bij het volgen van de lijnstukken AM en MN elk punt van het te controleren gebied binnen het bereik van de detector komt te liggen, dan is daarmee het antwoord gevonden! Dat bewijs is gemakkelijk te geven.



Beredeneerde oplossingen van de Denkertjes in dit nummer kunnen tot 15 januari 1974 worden ingezonden naar het redactiesecretariaat, met vermelding van naam, adres, leeftijd, school en leerjaar.

Inhoud

Monumentaal regeloppervlak^o 25

Rookpluimen^{oo} 27

Wiskunde in de bocht^{oo} 31

Hogere beroepsopleiding rond de computer 37

Een legpuzzel^o 40

Internationale wiskunde olympiade 42

Auto contra fiets 45

Denkertjes 36, 39, 43, 44

Oplossingen opgaven Internationale wiskunde olympiade 48

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.

BRUNO ERNST, Amersfoort.

W. Kleijne, Heerenveen.

A. F. VAN TOOREN, Leusden-C.

G. A. VONK, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. Oosten, Postbus 58, Groningen.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, f 5,— per jaargang. Voor anderen f 7,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

