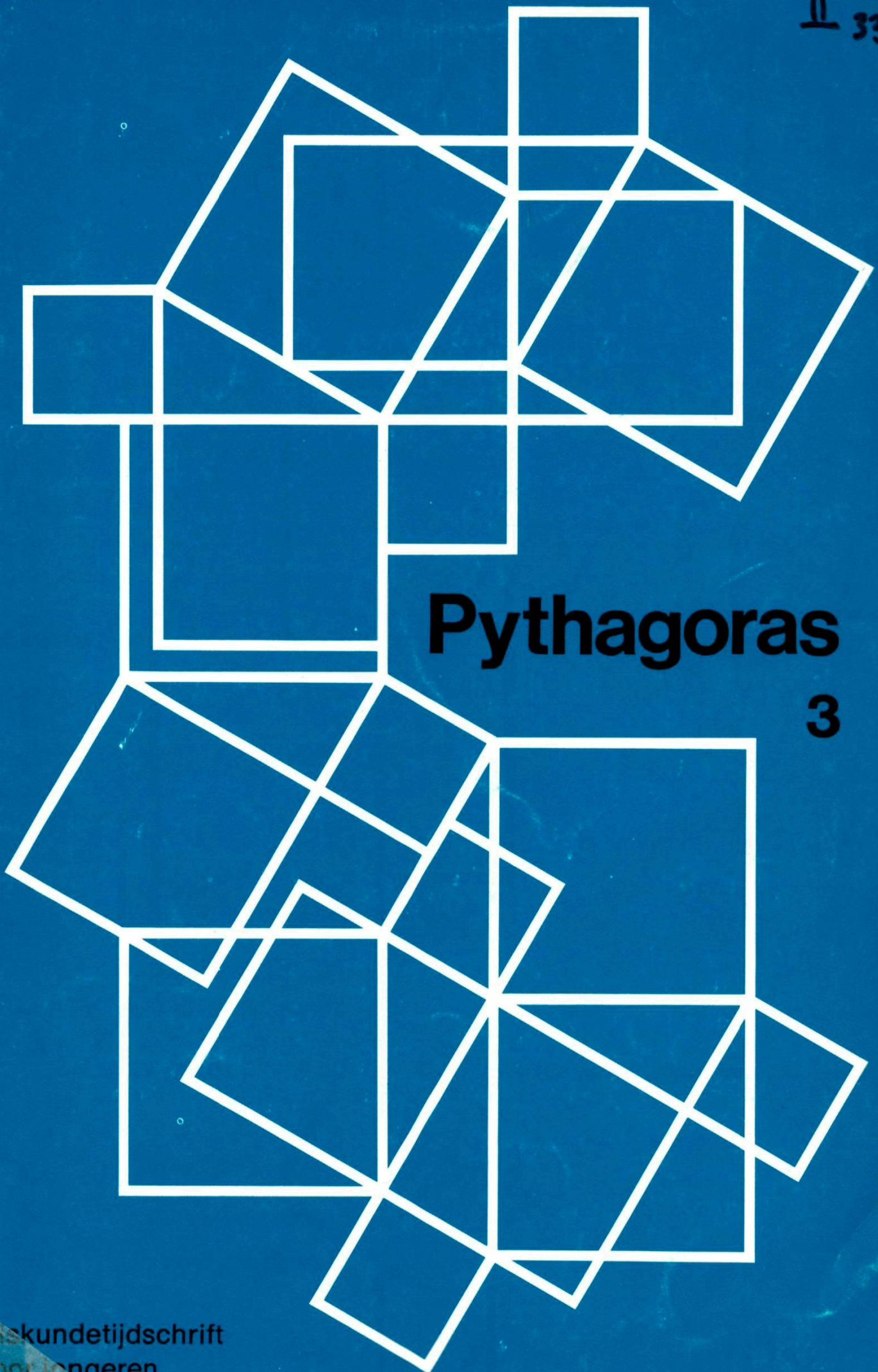
jaargang 13 1973/1974

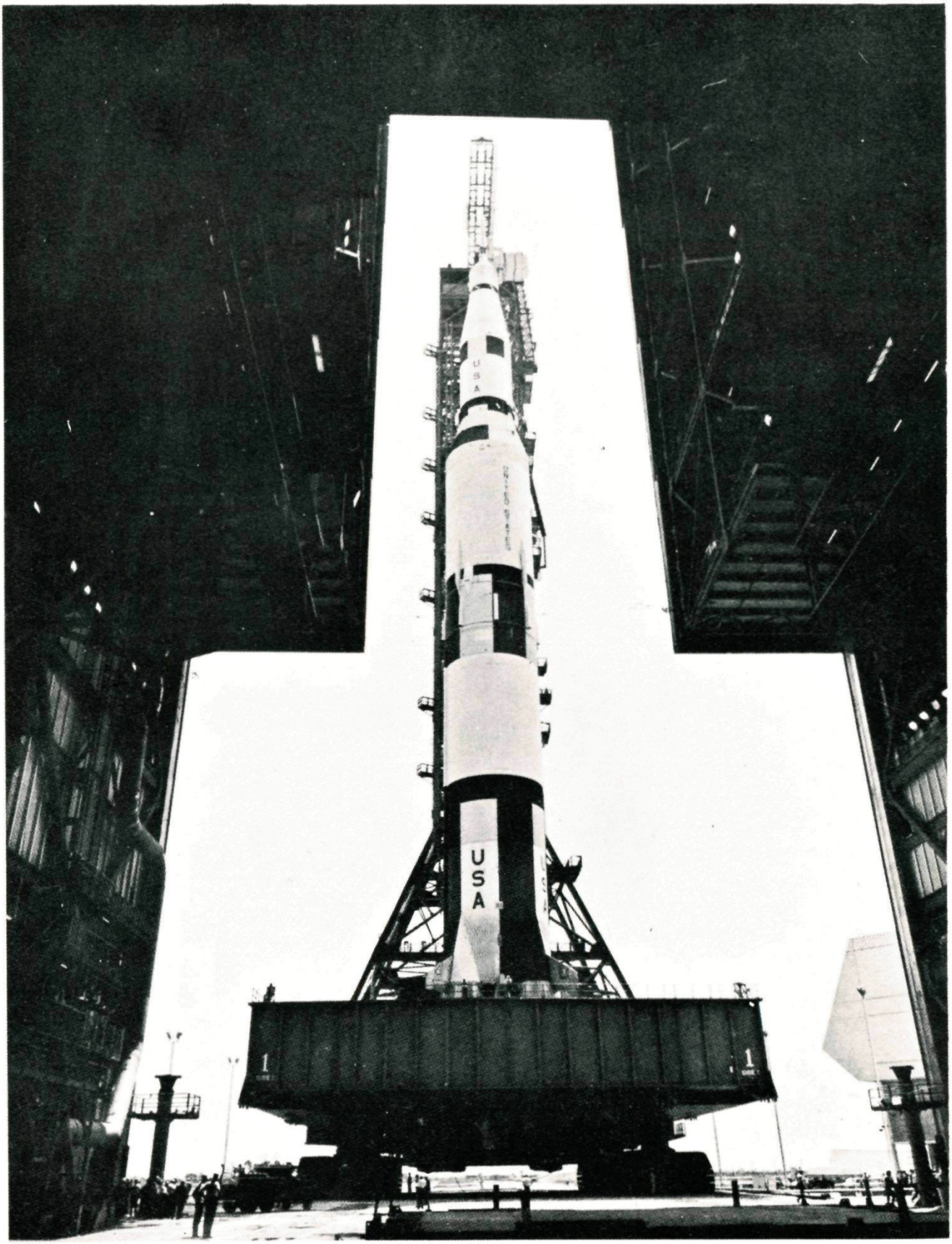
II 33



Pythagoras

3

wiskundetijdschrift
voor jongeren



Figuren met constante breedte vormen een onderdeel van dit speciale nummer van Pythagoras. Voor het vervoer van Saturnus raketten is constante hoogte van het platform van doorslaggevend belang!

Convexe figuren

Inleiding

De traditie om in elke jaargang van 'Pythagoras' een speciaal nummer op te nemen wordt ook dit jaar niet doorbroken. Dit is zo'n nummer, dat wil zeggen niet zoals gewoonlijk een aantal artikeltjes over verschillende onderwerpen, maar een hele aflevering gewijd aan één thema. Dat betekent dat wij hierover wat uitvoeriger kunnen zijn dan in korte stukjes. We hopen evenwel dat deze uitvoerigheid niet tot verzwaring leidt.

Misschien is het tegenwoordig niet meer zo gebruikelijk, omdat de mensen altijd haast hebben en zo nodig efficiënt moeten zijn. Maar vroeger werd elke nieuwe leerjongen met goedmoedige plagerijtjes door zijn baas wegwijs gemaakt. De tuinder stuurde hem naar de buurman om het aardbeienladdertje te lenen, de timmerman liet hem zoeken naar de 'vierkantegaten-boor'. En dat alles natuurlijk helemaal tevergeefs.
Maar . . . er *bestaan* boren, waarmee je vierkante gaten maakt, al zal die oude timmermansbaas er wel nooit één gezien hebben!

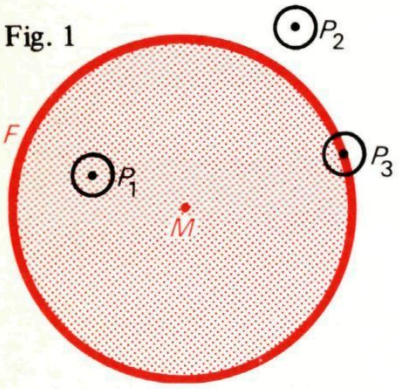
De vierkante-gaten-boor

Convexe figuren en steunlijnen

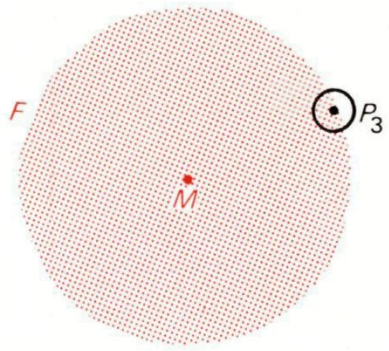
Elke meetkundige figuur is een verzameling van punten. Wij zullen ons beperken tot figuren, die deelverzameling van een plat vlak zijn. Als P een willekeurig punt is van het vlak, waarin de figuur F ligt, dan is één van de volgende drie mogelijkheden waar:

1 *Er bestaat een cirkelschijf met P als middelpunt, die deelverzameling van F is.*
In het bijzonder is dan P zelf een punt van F. We noemen P in dit geval een *inwendig punt* van F.
2 *Er bestaat een cirkelschijf om P, waarvan geen enkel punt tot F behoort.*
In het bijzonder ligt P zelf nu buiten F.
3 *Elke cirkelschijf om P bevat punten van F èn punten buiten F.*
P heet nu een *randpunt* van F; P kan zowel een punt van F als een punt buiten F zijn. (Figuur 1.)

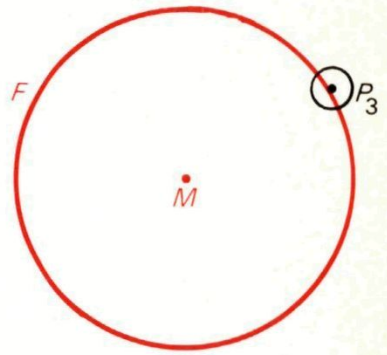
Fig. 1



V is het vlak van tekening
$F = \{X \in V \mid XM \leqq 3\}$
P_1 is een inwendig punt van F, P_3 een randpunt.



$F = \{X \in V \mid XM < 3\}$
De randpunten van F zijn nu allemaal punten buiten F.



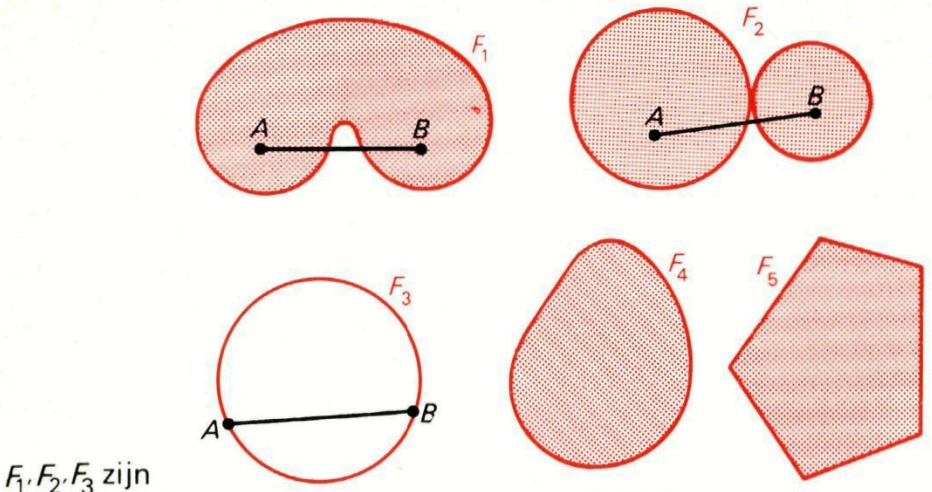
$F = \{X \in V \mid XM = 3\}$
Elk punt van F is randpunt van F!

Om het telkens weer bespreken van onbenullige uitzonderingetjes onnodig te maken spreken we af: we beperken ons in het vervolg tot figuren, die al hun randpunten bevatten (zulke figuren worden *gesloten* genoemd).
Nu komt de derde en belangrijkste beperking: we zullen het alleen maar hebben over convexe figuren.

Een figuur F wordt convex genoemd als hij de volgende eigenschap heeft: voor elk tweetal verschillende punten A en B van F geldt, dat het lijnstuk AB deelverzameling van F is.

Een convexe figuur kan zowel begrensd als onbegrensd zijn. In het eerste geval bestaat er één of andere cirkelschijf, waar hij deel van is. En in het tweede geval is geen enkele cirkelschijf groot genoeg om hem te bevatten. Het binnengebied van een parabool is een voorbeeld van zo'n onbegrensde convexe figuur.

Als een begrensde convexe figuur deelverzameling van een rechte lijn is, dan is hij een lijnstuk òf hij bestaat uit één enkel punt. Als een onbegrensde convexe figuur deel van een lijn is, dan valt hij met die lijn samen of hij is een halve lijn.



F_1, F_2, F_3 zijn niet-convex!

F_4, F_5 zijn convex!

Fig. 2

We zullen ons voornamelijk bezig houden met begrensde convexe figuren, die geen deelverzameling van een rechte lijn zijn en dus inwendige punten hebben (tweedimensionale figuren).

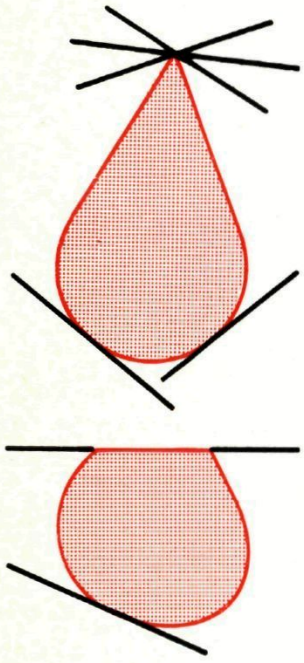


Fig. 3

De convexe figuren met hun vaak verrassende eigenschappen zijn de hoofdrolspelers in het straks beginnende blijspel. We hebben ze nu aan je voorgesteld. Nu moet je alleen nog maar kennis maken met de acteurs van het tweede plan, met de bijrollen. En dan kan het spel beginnen.

Een lijn, die met een convexe figuur F alleen randpunten gemeenschappelijk heeft, heet een steunlijn van F. (Figuur 3.)

Figuren met constante breedte

Laat F een begrensde tweedimensionale convexe figuur zijn en m een lijn, die geheel buiten F ligt. Dan zijn er precies twee loodlijnen op m die steunlijn van F zijn. De afstand van die twee steunlijnen wordt genoemd *de breedte van F in de richting van m.* (Figuur 4.)

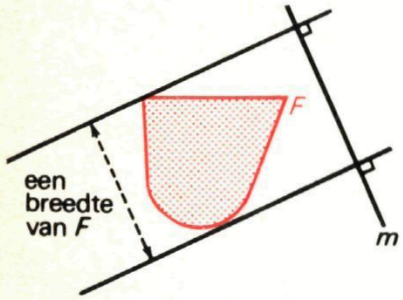


Fig. 4

Waarschijnlijk ben je onmiddellijk bereid in de waarheid van de bewering hierboven te geloven. Maar voor de ongelovige Thomassen, die bovendien ook nog plezier hebben in de wiskundesport, gaan we er toch nog even wat dieper op in.

Trek door elk punt P van F een loodlijn op m. Het snijpunt P' van die loodlijn met m noemen we de projectie van P op m. En natuurlijk heet dan de verzameling van alle punten P' de projectie F' van F op m.

Nu is het gemakkelijk te bewijzen, dat F' convex is. Als A' en B' twee punten van F' zijn, dan heeft F twee punten A en B waarvan A' en B' de projecties op m zijn. Omdat F convex is, is het lijnstuk AB deelverzameling van F. De projectie daarvan op m is dus deelverzameling van F' en dat is het lijnstuk $A'B'$. Daarom is F' convex. (Figuur 5.)

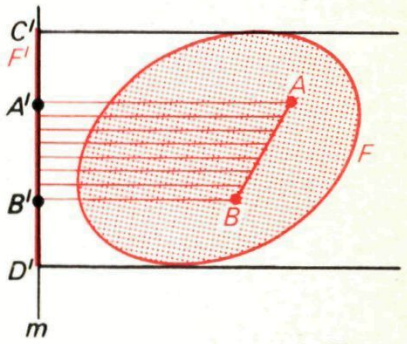


Fig. 5

Omdat F begrensd is, is ook F' begrensd. Een begrensde convexe deelverzameling van een lijn m is òf een punt òf een lijnstuk. Maar F' kan niet een punt zijn, omdat F tweedimensionaal is. Dus is F' een lijnstuk. Noem de randpunten daarvan C' en D'.

We hebben afgesproken, dat F gesloten zou zijn. Mogen we er nu op rekenen dat ook F' gesloten is, zodat C' en D' punten van F' zijn? Als dat het geval is, dan zijn we klaar. Want de loodlijnen door C' en D' op m zijn dan steunlijnen van F. De punten, die die twee loodlijnen met F gemeenschappelijk hebben, kunnen namelijk geen inwendige punten van F zijn (waarom niet?).

Helaas spreekt het niet vanzelf, dat F' gesloten is! Maar het is wèl waar!

Denkertje

21 Geef een voorbeeld van een *gesloten* convexe figuur F, waarvan de projectie op een lijn m een *open* lijnstuk is, een lijnstuk dat zijn randpunten *niet* bevat. (Oplossingen van Denkertjes staan op bladzijde 70).

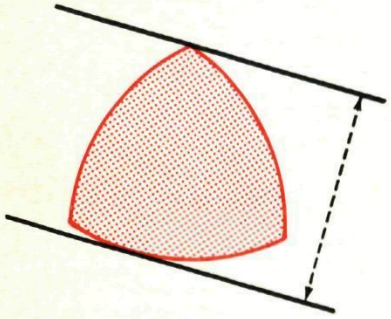


Fig. 6

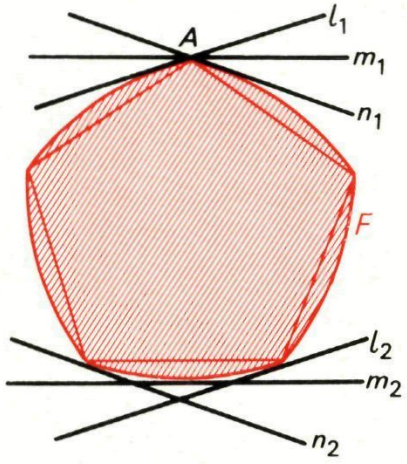


Fig. 7

Door A gaan oneindig veel steunlijnen van F (l_1 en n_1 zijn de twee uitersten);
daarom heet A een 'hoekpunt' van F.

Er zijn begrensde, tweedimensionale convexe figuren die in alle richtingen dezelfde breedte hebben. Na de cirkelschijf is het eenvoudigste voorbeeld van zo'n figuur met constante breedte de *Reuleaux-driehoek*. Deze maak je door tegen elke zijde van een gelijkzijdige driehoek een cirkelsegment te plakken, waarvan het middelpunt het overstaande hoekpunt van die zijde is. (Figuur 6.)
Een stel evenwijdige steunlijnen van zo'n Reuleaux-driehoek bestaat altijd uit een raaklijn aan een cirkelboog en een lijn door het middelpunt van die boog. De afstand van die twee steunlijnen, de breedte van de Reuleaux-driehoek dus, is gelijk aan de straal van de drie bogen en aan de zijde van de gelijkzijdige driehoek.

In plaats van een gelijkzijdige driehoek kunnen we ook een andere regelmatige veelhoek met een oneven aantal zijden gebruiken als uitgangspunt. (Figuur 7) Ook dan plakken we cirkelsegmenten tegen de zijden aan, die het overstaande hoekpunt van die zijde als middelpunt hebben.

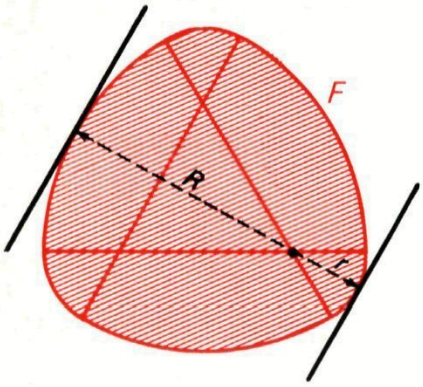


Fig. 8

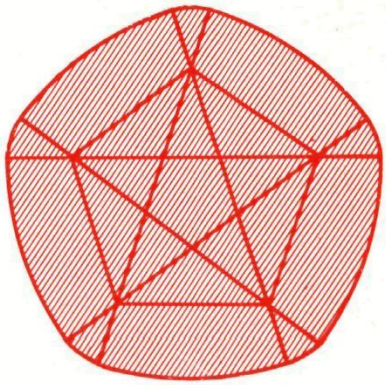


Fig. 9

Al dergelijke figuren met constante breedte hebben hoekpunten (en wel een oneven aantal). Daarom kijken we nu ook nog eens naar figuren met constante breedte, die geen hoekpunten hebben. Er zijn er meer dan alleen maar de cirkelschijf!
Binnen elke hoek van een gelijkzijdige driehoek beschrijven we een cirkelboog met straal R om het hoekpunt van die hoek; (Figuur 8.) we kiezen $R > a$, waarin a de zijde van de driehoek is. Bovendien beschrijven we met hetzelfde middelpunt ook een cirkelboog met straal $R - a = r$ binnen de overstaande hoek. De door die zes bogen ingesloten figuur is een figuur met de breedte $R + r$. En hoekpunten heeft hij niet, want de cirkelbogen gaan 'vloeiend' in elkaar over!

Het is gemakkelijk in te zien, dat we ook deze constructiemanier kunnen veralgemenen. Daarbij vervangen we weer de gelijkzijdige driehoek door een andere regelmatige veelhoek met een oneven aantal zijden. (Figuur 9.)

Na al deze voorbeelden van figuren met constante breedte ligt het voor de hand eens een paar vragen te gaan formuleren:

- Als zo'n figuur hoekpunten heeft, moet het aantal daarvan dan beslist oneven zijn of zijn er ook figuren met constante breedte en een even aantal hoekpunten?
- In alle voorbeelden bestond de rand van de figuur uit een aantal cirkelbogen. Kunnen ook bogen van een ander soort kromme voorkomen in de rand van een figuur met constante breedte?
- Alle getoonde figuren waren rotatie-symmetrisch. Moet dat zo of zijn er ook figuren met constante breedte, die geen rotatiesymmetrie hebben?
- Misschien heb je het nog niet opgemerkt, maar alle figuren hiervoor hadden dezelfde breedte. En . . . ook dezelfde omtrek! Noemen we de breedte b, dan werd de omtrek telkens gelijk aan πb, zoals gemakkelijk na te gaan is. Zit hier een wetmatigheid in, die noodzakelijk is?

Nou zou het beantwoorden van al die vragen ons hier veel te ver voeren, maar een paar kleine tipjes willen we toch nog even oplichten. Misschien prikkelen de niet-beantwoorde vragen je tot enig speurwerk op eigen houtje.

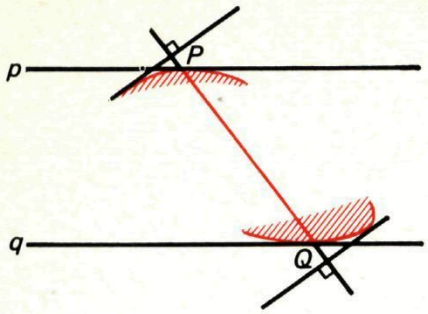


Fig. 10

De figuur F met constante breedte heeft met de evenwijdige steunlijnen p en q opvolgend de punten P en Q gemeenschappelijk. (Figuur 10) Stel je voor dat het lijnstuk PQ niet loodrecht op die twee steunlijnen zou staan. Dan zou de lengte van PQ groter zijn dan de breedte b van F.

Nu denken we aan twee andere evenwijdige steunlijnen van F en wel aan twee, die loodrecht op de lijn PQ staan. Zij moeten samen F insluiten. Dus onder andere moeten zij het lijnstuk PQ insluiten, dat immers deelverzameling van F is. Hun afstand zal dus ten minste gelijk moeten zijn aan de lengte van PQ, dus . . . groter dan b moeten zijn. En dat is ongerijmd voor een figuur F met constante breedte.

Conclusie: PQ staat wèl loodrecht op de steunlijnen p en q! Een directe gevolgtrekking hieruit is, dat p en q niet nog meer punten met F gemeenschappelijk kunnen hebben, dus dat de rand van F geen lijnstukken kan bevatten. En iets verder doordenkende komen we tot de uitspraak: twee punten P en Q van een figuur F met constante breedte b kunnen niet een afstand groter dan b hebben; en als hun afstand gelijk is aan b, dan zijn P en Q randpunten van F, waarvan de verbindingslijn loodrecht op twee steunlijnen door P en Q staat.

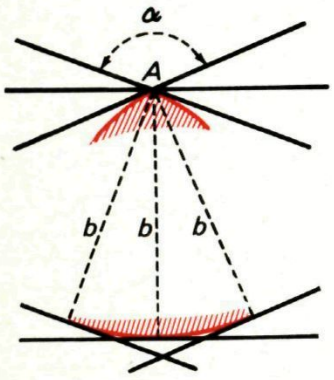


Fig. 11

F is een figuur met constante breedte b en A is een hoekpunt van F. (Figuur 11) Dat laatste betekent dat er door A oneindig veel steunlijnen van F gaan. De twee uiterste daarvan sluiten een stompe hoek α in, die we de hoek van F in het hoekpunt A noemen.

Deze α is ten minste gelijk aan $\frac{2}{3}\pi$. Op deze situatie passen we nu de zojuist bewezen stelling toe. Kiezen we een steunlijn door A uit en richten we in A op die steunlijn een loodlijnstuk van de lengte b op, dan komen we in een randpunt van F uit! Omdat we die steunlijn over een hoek $\pi - \alpha$ kunnen laten draaien om A, levert dat een cirkelboog aan de overzijde van F. Een cirkelboog van randpunten, die een boogmaat van $\pi - \alpha$ heeft.

Denkertjes

22 Construeer een niet-rotatiesymmetrische figuur F met constante breedte, die vijf hoekpunten heeft.

23 Een figuur F met constante breedte heeft een hoekpunt A en heeft in A een hoek α. Bewijs dat $\alpha \geqq \frac{2}{3}\pi$. Bewijs ook: als $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, dan is F een Reuleaux-driehoek.

24 De rand van een figuur F met constante breedte bestaat uitsluitend uit cirkelbogen. Kan F een even aantal hoekpunten hebben?

De vierkante-gaten-boor

We trekken twee paren evenwijdige steunlijnen van een willekeurige figuur F met constante breedte b en we doen dat in onderling loodrechte richtingen.
Elk van die twee paren vertoont een afstand van b en daarom sluiten ze met z'n vieren een vierkant in met de zijde b. Variëren we de richtingen van de steunlijnen, dan zien we dat vierkant als het ware om F heen draaien. Maar dat kunnen we ook andersom bekijken: houden we het vierkant op zijn plaats, dan kan F binnen dat vierkant draaien. En daarmee hebben we het principe van de vierkante-gaten-boor ontdekt! ! ! (Figuur 12)
Zo'n boor heeft een boorlichaam, waarvan de doorsnede een figuur F met constante breedte b is. Op het stuk hout, waar in geboord moet worden, bevestigen we een stevige plaat, waarin een vierkant gat met de zijde b zit. Daarbinnen laten we het boorlichaam toeren; het dient voor de geleiding van dat boorlichaam. Alles, wat onder het gat in de plaat zit, wordt keurig netjes weggeboord!

We maken nu eerst een kleine excursie naar de meetkunde van de convexe figuren, die een niet constante breedte hebben maar wel begrensd en tweedimensionaal zijn. (Figuur 13)
Zo'n figuur F kunnen we ook voorzien van twee paren evenwijdige steunlijnen in onderling loodrechte richtingen. Maar die sluiten dan in het algemeen een doodgewone rechthoek in, in plaats van een vierkant.

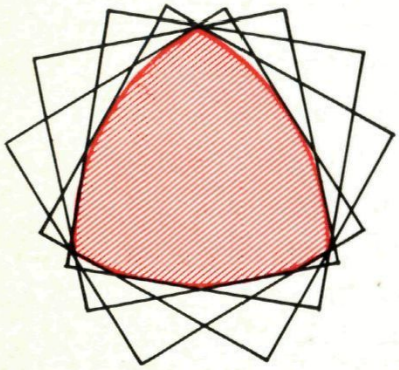


Fig. 12

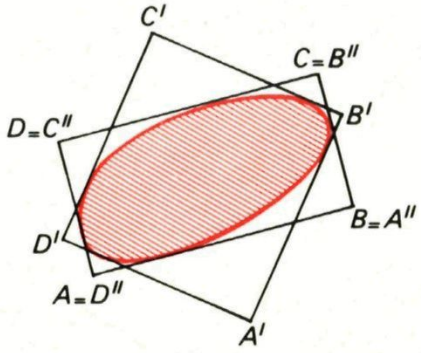


Fig. 13

Laten we zo'n rechthoek $ABCD$ draaien om F, dan verandert hij noodgedwongen van vorm en van afmetingen. En dat gebeurt heel geleidelijk! Na een draaiing over een rechte hoek is er iets wonderlijks gebeurd: AB is komen samen te vallen met de oude DA en BC is komen samen te vallen met de oude AB. We hebben dan weer dezelfde rechthoek terug gekregen, maar met andere letters.
Eerst was AB bijvoorbeeld langer dan BC, maar in de loop van de geschiedenis is AB gekrompen tot de oude lengte van BC, terwijl BC juist uitgerekt is tot de oude lengte van AB.
Tijdens die draaiing over een rechte hoek moet er dus een moment geweest zijn, waarop AB en BC even lang waren. Toen was de rechthoek dus wèl een vierkant!
Met andere woorden: elke begrensde tweedimensionale convexe figuur bezit vier steunlijnen, die een vierkant insluiten.

We keren nu terug tot de figuren met constante breedte en wel tot de Reuleaux-driehoek. In de figuur 14*a* is een rechthoekige plaat getekend. Door de twee horizontale sleuven in die plaat steken pennen, die vast bevestigd zijn. Zij maken het mogelijk, dat de plaat naar links en naar rechts kan bewegen.
En dat gaat hij ook doen! Hij wordt daartoe gedwongen door de Reuleaux-driehoek in het gat midden in de plaat, want die gaat draaien om een vast bevestigde as door het hoekpunt A en wel in wijzerzin.

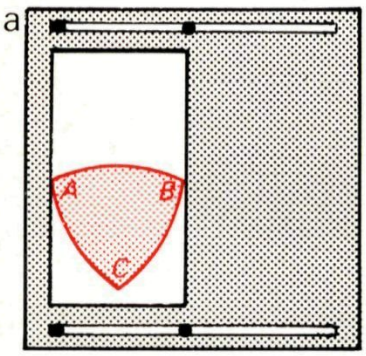


Fig. 14*a*

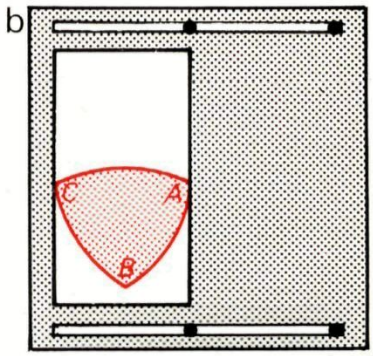


Fig. 14*b*

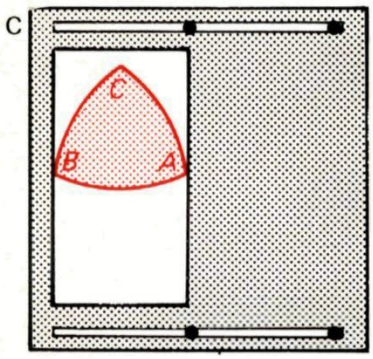


Fig. 14*c*

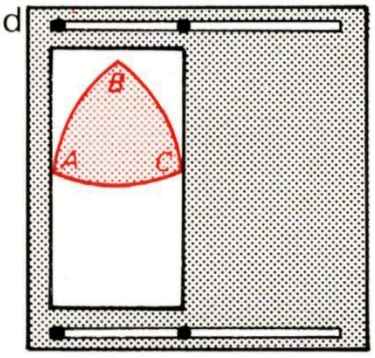


Fig. 14*d*

Een rotatie van de Reuleaux-driehoek over $\frac{2}{3}\pi$ dwingt de plaat naar links te gaan, zodat de stand 14*b* wordt bereikt. Tijdens de daarop volgende draaiing over $\frac{1}{3}\pi$ blijft de plaat op zijn plaats en ontstaat de situatie van figuur 14*c*. De volgende draaiing over $\frac{2}{3}\pi$ brengt de plaat in de positie 14*d*, die gelijk is aan de beginstand in 14*a*. En het laatste deel van een volle omwenteling van de Reuleaux-driehoek laat dan de plaat weer ongemoeid, brengt echter de Reuleaux-driehoek zelf ook weer in de begintoestand terug. Waarna alles van voren af aan opnieuw begint.

Dit mechanisme is toegepast in filmprojectoren! Elk van de twee bewegingen van de plaat tijdens één omwenteling van de Reuleaux-driehoek veroorzaakt transport van de film, brengt een nieuw beeldje voor het objectief. Maar dat gebeurt terwijl het objectief gesloten is, want anders zou het beeld op het scherm vaag en wazig worden. Alleen gedurende de tijd van rust voor de plaat (en dus ook voor de film) is het objectief open en wordt het beeld geprojecteerd.
Hier kwam dus vanuit de techniek de eis om het filmtransport met horten en stoten te laten gebeuren. De meetkunde van de convexe figuren met constante breedte loste dat probleem op vernuftige wijze op. Beter gezegd: niet de meetkunde deed dat, maar de vernufteling, die dit grapje uitvond! En, zoals je waarschijnlijk wel weet: vernufteling is het Nederlandse woord voor ingenieur . . .

Moeilijk om die ene overgebleven pannekoek eerlijk onder de vier kinderen te verdelen? Welnee!
Maar als één van de vier nu zegt: 'Mam, je mag twee keer snijden en dan moeten de twee snijlijnen nog loodrecht op elkaar staan ook!'. Dan dringt zich niet alleen de vraag op, hoe dat moet! Dan begin je je ook af te vragen, of dat wel mogelijk is . . .

Is dat wel mogelijk?

Continuïteit

Binnen een leeg vierkant plaatsen we één of andere figuur F. En daarna vragen we: bestaat er een loodlijn s op de zijde AB, die de eigenschap heeft dat precies de helft van F links van s ligt?
Als F een figuur is, die uit 99 los van elkaar gelegen punten bestaat, dan is het antwoord op die vraag zonder meer duidelijk. De helft van een oneven aantal punten, dat heeft geen enkele zin. Zo'n loodlijn s bestaat dus zeker *niet*, hoe die 99 punten ook mogen liggen.

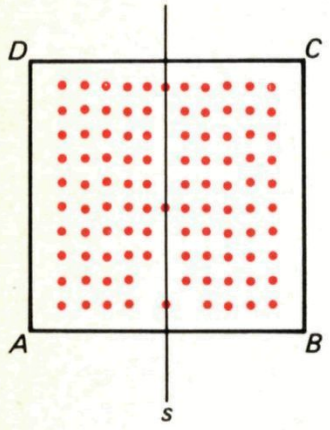


Fig. 15

Als F een figuur is, die uit 100 punten bestaat, dan moet je aarzelend antwoorden: 'Tja, dat hangt van de ligging van die 100 punten af!' Het is denkbaar dat bij een bepaalde stand van de lijn s er 48 punten links van s liggen, 49 punten rechts van s en 3 precies òp s. (Figuur 15) En in dat geval bestaat er geen loodlijn s, die keurig netjes aan de gestelde eis voldoet. Bij een andere ligging van de punten daarentegen bestaat er misschien wèl een bruikbare loodlijn s.

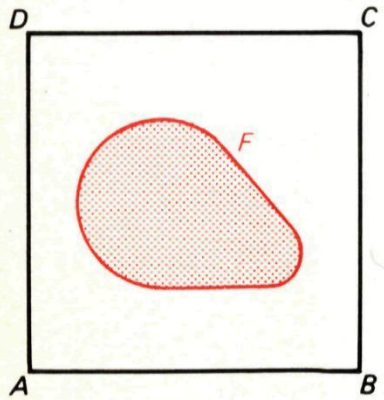


Fig. 16

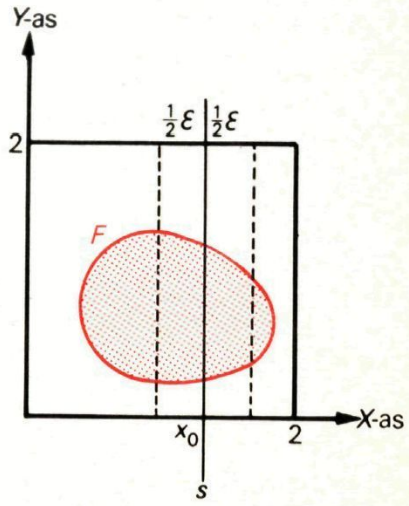


Fig. 17

Stel je nu voor dat je F nog niet kent, maar wel weet dat F een tweedimensionale convexe figuur is. Met 'de helft van F' kan dan alleen bedoeld zijn 'de helft van de oppervlakte van F', laten we het daar eerst over eens zijn. En dan ben ik er bijna zeker van dat je zult zeggen 'Ja, nu bestaat zo'n loodlijn s in ieder geval, hoe die figuur F verder ook er uit mag zien!' (Figuur 16)

Waar berust die zekerheid omtrent het bestaan van zo'n loodlijn s nu op? Op die vraag zouden *wij* willen antwoorden: die zekerheid berust op een intuïtief inzicht in het puur wiskundige begrip *continuïteit.* Laten we dat eens wat toelichten, voor we ons met pannekoeken en zo gaan bemoeien.
We kiezen een coördinatenstelsel waarvan de x-as langs AB en de y-as langs AD valt; de daarbij behorende lengte-eenheid kiezen we zo, dat de zijde van het vierkant de lengte 2 krijgt. De plaats van de loodlijn s wordt nu bepaald door de x-coördinaat van zijn punten. En daarmee wordt ook de oppervlakte van het deel van F, dat links van s ligt, een functie van x. We noemen die functie natuurlijk f. Voor $x \leqq 0$ geldt $f(x) = 0$ en voor $x \geqq 2$ geldt $f(x) = A$, waarin A de totale oppervlakte van de figuur F voorstelt. Voor $0 < x < 2$ valt er weinig zinnigs over $f(x)$ te vertellen zolang de figuur F niet bekend is, zolang we alleen nog maar weten dat F een tweedimensionale convexe figuur is.
In figuur 17 is x_0 gegeven. De bijbehorende $f(x_0)$ mag je dus ook bekend veronderstellen. Stel je nu voor dat iemand tegen je zegt: je mag de lijn s in figuur 17 wel verplaatsen, maar de daardoor veroorzaakte verandering in de oppervlakte van F links van s moet kleiner dan ϵ blijven. Voor die ϵ noemt die iemand één of ander positief getal. Dan vraag jij je natuurlijk af over welke afstand jij die lijn s kunt verplaatsen zonder te zondigen. En na enige tijd kom je tot de conclusie, dat je aan de veilige kant blijft als je de verplaatsing van de lijn s kleiner houdt dan $\frac{1}{2}\epsilon$, dus als je de x-coördinaat van de punten van s binnen het interval $\langle x_0 - \frac{1}{2}\epsilon,\ x_0 + \frac{1}{2}\epsilon\rangle$ houdt. Want dan verandert de oppervlakte van het deel van het vierkant links van s met minder dan $2 \cdot \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$ en de verandering in de oppervlakte van het F-deel links van s is zeker kleiner dan de verandering in de oppervlakte van het vierkant-deel links van s!

Van x werd geëist: $f(x)$ moet blijven binnen het interval $\langle f(x_0) - \epsilon,\ f(x_0) + \epsilon\rangle$.
We vonden een δ (namelijk $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$) met de eigenschap: elke x uit het interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ voldoet aan die eis. Als er bij elke positieve ϵ zo'n positieve δ gevonden kan worden (en dat is hier het geval), dan is per definitie de functie f continu in x_0.

Goed, we weten nu dat de functie f continu is in elk getal van het interval $\langle 0, 2\rangle$. En het is eenvoudig in te zien, dat f ook in 0 en ook in 2 continu is, zodat we zelfs mogen zeggen dat hij continu is in elk getal van het interval $[0,2]$.
De volgende stelling uit de theorie van de continue functies klinkt heel geloofwaardig, maar is toch niet zo eenvoudig te bewijzen. Zullen we hem maar geloven?

Wanneer de functie f continu is in het deelinterval $[p, q]$ van zijn domein en wanneer bovendien m een getal tussen $f(p)$ en $f(q)$ is, dan bestaat er een x_0 in $\langle p, q\rangle$ met de eigenschap $f(x_0) = m$.

Passen we deze stelling nu toe op onze functie f voor het geval $p = 0$, $q = 2$, $m = \frac{1}{2}A$, dan is de zaak rond! Dan is wiskundig aangetoond dat het mogelijk is de loodlijn s op AB zo te plaatsen dat hij de oppervlakte van de figuur F halveert.

Denkertjes

25 *a.* Ook als F niet convex is, maar wel de vereniging is van twee (tweedimensionale convexe) figuren met lege doorsnede, is het bewijs hierboven geldig. Ga het na.
b. Onderzoek voor beide gevallen of er meer dan één halverende loodlijn s kan zijn.

26 F_1 en F_2 zijn begrensde, tweedimensionale convexe figuren. Bewijs dat er een lijn bestaat, die zowel F_1 als F_2 in twee stukken met gelijke oppervlakte verdeelt.
Anders gezegd: als twee pannekoeken op of naast elkaar liggen, dan kun je ze met één snijlijn allebei tegelijk halveren!

De pannekoek

We vragen ons af of het mogelijk is een pannekoek door twee onderling loodrechte sneden in vier gelijke stukken te verdelen. Daarin lezen we voor het woord 'pannekoek' nu maar: begrensde, tweedimensionale convexe figuur.
Zo'n begrensde F is deelverzameling van één of andere cirkel. En om die cirkel kunnen we oneindig veel vierkanten tekenen, met zijden in alle mogelijke richtingen. Volgens de vorige paragraaf is er bij elke richting precies één lijn, die de oppervlakte van F in twee gelijke stukken deelt. En hebben we éénmaal zo'n halverende lijn, dan is er loodrecht daarop ook weer precies één halverende lijn!

Nu is het beslist niet zeker dat twee loodrecht op elkaar staande lijnen, die elk voor zich de pannekoek F halveren, samen er voor zorgen dat F eerlijk gevierendeeld wordt! Neem bijvoorbeeld voor F een parallellogram. (Figuur 18) Daar zijn de halverende lijnen niets anders dan de lijnen door het snijpunt van de diagonalen, omdat een parallellogram puntsymmetrisch is. Kies er één, die evenwijdig met de lange zijden van het parallellogram is en ook één, die daar loodrecht op staat. Dan zijn de vier stukken wèl twee aan twee gelijk, maar niet alle vier even groot!

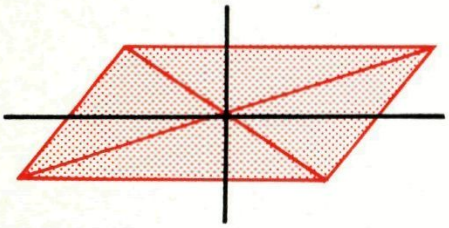
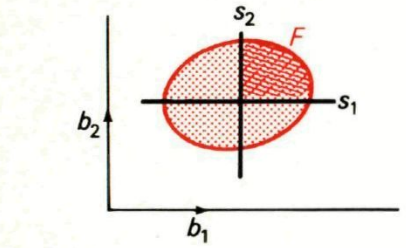
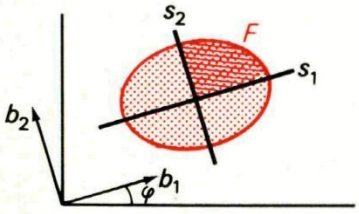


Fig. 18

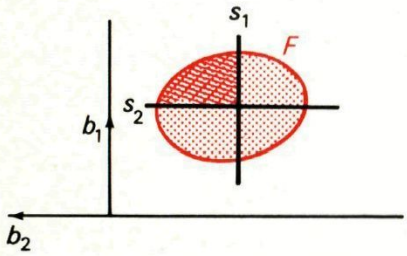
We zullen ons dus af moeten vragen of er een speciale richting is met de eigenschap: de halverende lijn in die richting en de halverende lijn loodrecht daarop delen samen de figuur F in vier gelijke stukken.



gearceerd is $f(0)$



gearceerd is $f(\phi)$



gearceerd is $f(\frac{1}{2}\pi)$

Fig. 19

We nemen een assenkruis aan in het vlak van F. (Figuur 19) Een rechte hoek met de benen b_1 en b_2 heeft de oorsprong als hoekpunt. Aanvankelijk valt b_1 samen met de positieve x-as en b_2 met de positieve y-as. Nu laten we die rechte hoek draaien in tegenwijzerzin om zijn hoekpunt, totdat b_1 langs de positieve y-as en b_2 langs de negatieve x-as valt. De stand van die rechte hoek wordt vastgelegd door de hoek ϕ, die b_1 maakt met de positieve x-as. Daarbij varieert ϕ van 0 tot en met $\frac{1}{2}\pi$.

Bij elke stand van de rechte hoek maken we in gedachten een halverende lijn s_1 die evenwijdig is met b_1 en ook een halverende lijn s_2 in de richting van b_2. Omdat we veronderstelden dat F convex is, is er bij elke ϕ één s_1 en één s_2.
Nu gaan we in het bijzonder letten op dàt part van F, dat uit F gesneden wordt door de halve lijnen op s_1 en s_2, die gelijk gericht zijn met b_1 en b_2. Ook dat part wordt volledig door ϕ bepaald en zijn oppervlakte is dus een functie van ϕ. We noemen die oppervlakte $f(\phi)$. We zijn ervan overtuigd, dat de functie f continu is!

Uit figuur 19 zien we nu, dat $f(0) + f(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}A$, waarin A de oppervlakte van F is. Zijn $f(0)$ en $f(\frac{1}{2}\pi)$ gelijk, dan is elk van hen gelijk aan $\frac{1}{4}A$ en dan levert $\phi = 0$ een verdeling van F in vier gelijke stukken. Zijn ze niet gelijk, dan ligt $\frac{1}{4}A$ tussen $f(0)$ en $f(\frac{1}{2}\pi)$. Volgens de stelling uit de vorige paragraaf bestaat er dus een ϕ_0 in het interval $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ waarvoor geldt $f(\phi_0) = \frac{1}{4}A$ en dan levert deze ϕ_0 een verdeling van F in vier gelijke parten.

Er bestaat dus een tweetal loodrechte snijlijnen, die de begrensde, tweedimensionale convexe figuur F in vier stukken met gelijke oppervlakte verdelen!

Eigenlijk is het maar een rare stelling, die we zojuist bewezen hebben. Hij garandeert *het bestaan* van een eerlijke vierendeling van F, maar hij geeft geen enkele aanwijzing voor *de constructie* van zo'n verdeling. En ook de gedachtengang in het bewijs helpt ons daarbij niet op gang!
Het gebeurt vaak dat een wiskundige zich eerst afvraagt 'Bestaat er eigenlijk wel een oplossing?', vóór hij zijn kostbare tijd gaat besteden aan het zoeken naar zo'n oplossing (die dan misschien niet eens bestaat!).
Overigens is de constructie van de twee loodrechte snijlijnen bij gegeven F alleen maar in de allersimpelste gevallen zonder veel moeite uit te voeren!

Denkertje

27 Wat denk je van de waarheid van de volgende bewering: Als F een begrensde, tweedimensionale convexe figuur is dan bestaan er een drietal lijnen die twee aan twee een hoek $\frac{\pi}{3}$ met elkaar maken, door één punt gaan en F verdelen in zes stukken met gelijke oppervlakte.

Koningin Dido, die Carthago stichtte, kreeg aan de kust van Noord-Afrika de belofte van een daar wonende volksstam dat haar het stuk land gegeven zou worden dat zij met een ossehuid kon begrenzen. Maar zij bleek iets inhaliger en geraffineerder te zijn dan verwacht werd. Dat bleek toen zij de huid in repen sneed om er een grenssnoer van te maken en ook de kustlijn nog liet meehelpen.
Aldus een mythologisch verhaal.

Omtrek en oppervlakte

Het isoperimetrisch probleem

'Perimeter' betekent 'omtrek' en het voorvoegsel 'iso' betekent 'gelijk'. Met die wetenschap gewapend en kijkend naar de titel van dit hoofdstuk kun je wel raden welk probleem hier bedoeld wordt:

Welke figuur met gegeven omtrek heeft de grootste oppervlakte?

Als de figuur F niet convex is, dan kunnen we met een simpele kunstgreep een figuur F' maken met dezelfde omtrek als F, maar met grotere oppervlakte. Eerst maken we door 'inpoldering' een figuur met grotere oppervlakte en kleinere omtrek. Daarna vermenigvuldigen we deze met een zodanige factor, dat de productfiguur F' weer dezelfde omtrek heeft als F (en ook daardoor wordt de oppervlakte vergroot!). (Figuur 20)
Bij het zoeken van de oplossing van het isoperimetrische probleem kan men zich dus beperken tot convexe figuren.

Fig. 20

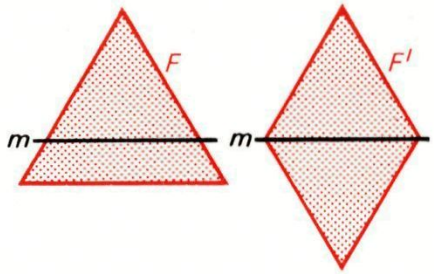


Fig. 21

Stel dat F een convexe figuur is en dat de lijn m de omtrek van F in twee gelijke stukken deelt, maar dat niet doet met de oppervlakte van F. Vervangen we dan het stuk met de kleinste oppervlakte door het spiegelbeeld van het andere stuk in de lijn m, dan ontstaat een figuur F' met dezelfde omtrek als F en met een grotere oppervlakte dan F. (Figuur 21)

Dat die F' ook wel niet-convex kan zijn, is niet belangrijk. In elk geval toont het bovenstaande aan dat we een oplossing van het isoperimetrische probleem alleen maar behoeven te zoeken onder die convexe figuren, waarbij elke lijn die de omtrek halveert dat tegelijk ook doet met de oppervlakte!

Alle puntsymmetrische convexe figuren hebben die eigenschap. En we behoeven ons niet te verdiepen in de vraag of er misschien ook nog figuren zijn, die niet puntsymmetrisch zijn en toch ook diezelfde eigenschap hebben. Dat toont de volgende redenering. Stel, dat F een convexe figuur is die geen cirkelschijf is; stel ook dat de lijn m zowel de omtrek als de oppervlakte van F halveert. (Figuur 22*a*)

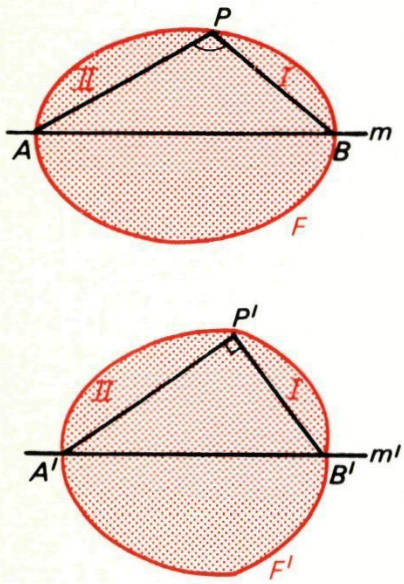


Fig. 22*a* en *b*

Omdat F geen cirkelschijf is bestaat er op de omtrek van F een punt P zo, dat hoek APB niet gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$; A en B zijn de snijpunten van de lijn m met de rand van F.
We construeren nu een driehoek $A'P'B'$ waarin $A'P' = AP$, $B'P' = BP$ en hoek $A'P'B'$ wèl gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$. Deze plaatsen we met zijn basis $A'B'$ op een lijn m', plakken de twee segmenten van F er tegenaan die oorspronkelijk tegen driehoek ABP lagen en spiegelen het geheel in de lijn m'. Zo hebben we dan een figuur F' gekregen met dezelfde omtrek als F, maar met grotere oppervlakte dan F. (Figuur 22*b*) Want $\triangle A'P'B' = \frac{1}{2} \cdot A'P' \cdot B'P' > \frac{1}{2} \cdot AP \cdot BP \cdot \sin APB = \triangle APB$.

Hebben we nu bewezen: onder de figuren met gegeven omtrek is de cirkelschijf degene met de grootste oppervlakte? Hebben we dus het isoperimetrische probleem opgelost?
Nee, dat hebben we *niet*! We hebben het volgende aangetoond: bij elke figuur F die geen cirkelschijf is kan een figuur F' gemaakt worden met dezelfde omtrek en grotere oppervlakte. En nu zijn er nog twee mogelijkheden:

- de cirkelschijf is een oplossing van het isoperimetrische probleem, en wel de enige oplossing daarvan;
- ook bij een cirkelschijf kan nog een figuur met dezelfde omtrek en grotere oppervlakte geconstrueerd worden; in dit geval heeft het isoperimetrische probleem geen enkele oplossing!

De Zwitser Jakob Steiner, die een groot meetkundige was, redeneerde als volgt (nadat hij als eerste bewezen had dat de cirkelschijf de enige figuur is, die oplossing van het isoperimetrische probleem kan zijn):
Stel dat de figuur F een omtrek p heeft. Kies dan een punt van de rand van F en beschrijf een cirkel met straal p om dat gekozen punt. Nu ligt F geheel binnen deze cirkel en heeft dus een oppervlakte, die kleiner dan πp^2 is. De oppervlakten van de figuren met omtrek p vormen dus een naar boven begrensde verzameling getallen en πp^2 is een bovengrens. Daarom is er een F met omtrek p en maximale oppervlakte.
Maar dat was een foute gedachtengang! Ook het interval $\langle 0, 1\rangle$ is een naar boven begrensde verzameling en toch bevat dat interval geen maximaal element! Dat laat de vergissing van Steiner wel duidelijk zien.

Wèl is waar dat elke naar boven begrensde verzameling getallen een kleinste bovengrens of *supremum* bezit. Dat is een getal s met de volgende eigenschappen: (1) s wordt door geen enkel element van de verzameling overtroffen; (2) elk kleiner getal dan s wordt wèl door een element van de verzameling overtroffen. Als dat supremum s één van de elementen van de getallenverzameling is, dan is het natuurlijk maximaal element daarvan. Maar het supremum van het interval $\langle 0, 1\rangle$ is 1 en is geen element van dat interval!
Opmerking: Herinner je je de stelling uit het vorige hoofdstuk, dat er bij elke m tussen $f(p)$ en $f(q)$ een x_0 is zo, dat $f(x_0) = m$ is (als de functie f continu is op het interval $[p, q]$)?

Probeer maar eens te bewijzen, dat de verzameling van de x' en, waarvoor geldt $f(x) < m$, een supremum heeft en dat dat supremum voldoet aan $f(x) = m$!
Intussen behoeft het voorgaande ons niet te ontmoedigen! De cirkelschijf *is* inderdaad de oplossing van het isoperimetrische probleem! Maar omdat er voor de volledige bewijsvoering daarvan nog al wat zwaar geschut nodig is, . . .

Denkertjes

28 Knip een elliptische schijf in vier stukken. Laat zien dat er een convexe figuur bestaat met dezelfde omtrek als die elliptische schijf, waarbinnen die vier stukken gelegd kunnen worden zonder elkaar te overlappen.

29 Aannemende, dat koningin Dido met een rechte kustlijn te maken had, hoe had ze dan een stuk land met maximale oppervlakte begrensd met haar ossehuid?

Goedgelovigheid

Wij zouden wel eens willen weten welk percentage van onze lezers bij eerste kennismaking met het laatste Denkertje dacht: 'Nou, ik heb zo'n idee dat dat wel mogelijk is!'. En hoeveel er *te vroeg* meenden een volledige oplossing van het isoperimetrische probleem te hebben gelezen. Het zou ons niet verwonderen als dat aanmerkelijke hoeveelheden betrof!

Inderdaad bedriegt onze intuïtie ons heel gemakkelijk. Wij zijn van nature goedgelovig. Daar komt nog bij dat het verkrijgen van volledige zekerheid ('wiskundige' zekerheid) meestal heel moeilijk is. We hebben daar een paar keer op gewezen in het voorgaande. En je zult het ook wel gemerkt hebben bij het ploegen door enkele moeilijke gedeelten!
Nu is er één bepaald soort goedgelovigheid, waar we geen enkele aandacht aan besteed hebben, tot nu toe.

Het is maar de vraag of elke begrensde, tweedimensionale convexe figuur een oppervlakte heeft. Het is ook niet zeker dat elke dergelijke figuur een rand heeft, waaraan we een lengte kunnen toekennen (de omtrek van die figuur). Zolang je niet over een bewijs beschikt voor deze twee beweringen, moet je ze maar liever niet geloven!
Wat je wèl geloven mag is het volgende: binnen zo'n klein en oppervlakkig tijdschriftje als dit is er geen plaats voor uiteenzettingen, die je die zekerheden verschaffen!
En eigenlijk was ons doel ook niet om zo diep op al die moeilijke problemen in te gaan. Heb je je geamuseerd met enkele gedeelten, is je nieuwsgierigheid gewekt, dan hebben wij ons doel al lang bereikt.

Wil je méér weten over convexe figuren, dan raden we je aan het prachtige boek
Convex figures; I. M. Yaglom and V. G. Boltyanskii; Holt, Rinehard and Winston, New York, 1961.

Oplossingen van Denkertjes

21 Teken de grafiek van de functie $x \to (1 - x^2)^{-1}$ voor $-1 < x < 1$. De loodlijnen op de x-as door de punten $(-1, 0)$ en $(1, 0)$ zijn asymptoten van deze grafiek. .
De figuur F bestaat uit deze grafiek en het gebied daarboven. Zijn projectie op de x-as is een *open* lijnstuk!

22 De constructiemanier is dezelfde als in figuur 9; de vijfhoek behoeft echter niet regelmatig te zijn en ook is het niet nodig slechts twee verschillende stralen te gebruiken. Begin met één boog te tekenen en laat elke volgende boog op zijn voorganger aansluiten. (Figuur 23)

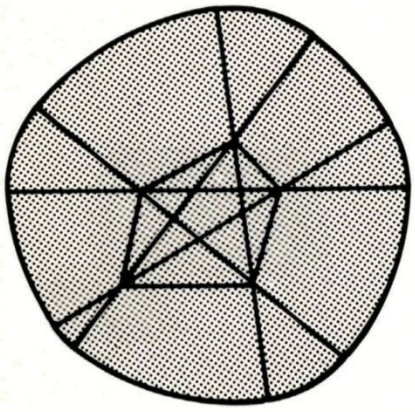


Fig. 23

23 We hebben gevonden, dat twee punten van een convexe figuur F met constante breedte b niet een afstand kunnen hebben, die groter dan b is. Pas dit toe op de twee eindpunten van de boog met boogmaat $\pi - \alpha$ uit figuur 11. We vinden dan: $\pi - \alpha \leqq \frac{1}{3}\pi$.
Geldt hierin het gelijkteken, dan zijn er twee steunlijnen van F door die twee eindpunten van die boog, die loodrecht staan op hun verbindingslijn. Daar leiden we uit af, dat die twee eindpunten zelf hoekpunten van F zijn met hoeken van $\frac{2}{3}\pi$.

24 Ja, dat kan! We zagen in figuur 8 zo'n figuur met 0 hoekpunten en dat is een even aantal! En de cirkelschijf zelf is eigenlijk ook al een goed voorbeeld van die situatie.
Figuur 24 is geconstrueerd op dezelfde manier als figuur 23, maar . . . er ontstaat een convexe figuur, die door cirkelbogen begrensd wordt en twee hoekpunten heeft! De vijfhoek $ABCDE$ werd zo gekozen, dat de diagonalen AD en BD gelijk zijn. De eerste cirkelboog heeft C als middelpunt en CA als straal. Er komen dan hoekpunten in A en B.

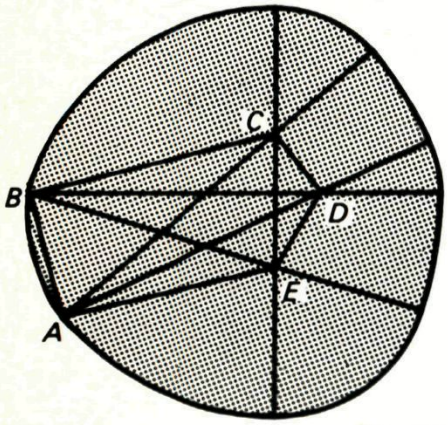


Fig. 24

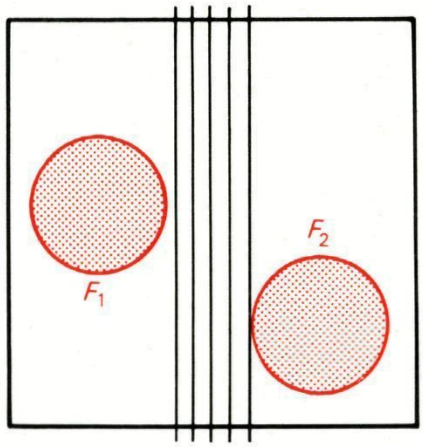


Fig. 25

25 Als F convex is, dan is f stijgend op het interval $\langle 0, 2\rangle$ en daarom is er dan precies één halverende loodlijn s. Maar als F uit twee deelfiguren F_1 en F_2 bestaat, die allebei de oppervlakte $\frac{1}{2}A$ hebben, dan kan de situatie zo zijn dat er oneindig veel halverende loodlijnen zijn! Dat staat in verband met het feit, dat we dan alleen van de functie f kunnen zeggen dat hij niet-dalend is. (Figuur 25)

26 We gebruiken een halve lijn, die de oorsprong van een assenkruis als eindpunt heeft en om die oorsprong draait. De stand van die halve lijn b wordt vastgelegd door de hoek ϕ, die hij met de positieve x-as maakt. Bij elke b maken we een s, die met b evenwijdig is en de oppervlakte van F_1 halveert. We noemen de oppervlakte van F_2, die links van s ligt, nu $f(\phi)$ omdat hij eveneens door ϕ wordt bepaald.
Na een draaiing van b over π verandert $f(0)$ in $f(\pi) = A - f(0)$, waarin A de oppervlakte van F_2 voorstelt. Hieruit blijkt, dat $\frac{1}{2}A$ tussen $f(0)$ en $f(\pi)$ ligt of gelijk is aan één van beiden.
Op grond van de continuïteit van f is er dus een ϕ_0 zo, dat $f(\phi_0) = \frac{1}{2}A$.

27 Het lijkt al onwaarschijnlijk, dat zulk een drietal bij elke F zou bestaan (al bestaat zo'n drietal wèl bij een cirkelschijf, een gelijkzijdige driehoek, een Reuleaux-driehoek). Met een tegenvoorbeeld tonen we aan, dat de bewering in het algemeen vals is. We nemen daarvoor een vierkant met omtrek 12. (Figuur 26)
Neem aan, dat de lijnen AM, BM en CM het kunststuk naar behoren vertonen (lijnen, die niet door het middelpunt M gaan, halveren het vierkant niet en komen dus niet in aanmerking!). Dan is $BC = 2$ en ook $AP + PB = 2$. Verder is $AP + PT = 3$. Gevolg: T is het midden van BC, MT is deellijn èn zwaartelijn van driehoek BCM, MT is evenwijdig met PS en QR. Verder redenerend vinden we, dat $BC = \frac{2}{3}MT\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Dit is in strijd met $BC = 2$ en daarmee is het indirecte bewijs geleverd, dat zo'n drietal bij een vierkant niet bestaat!

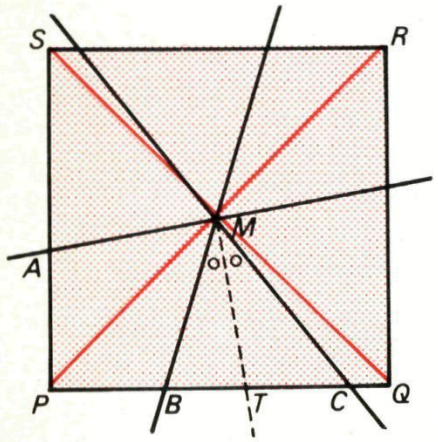


Fig. 26

28 Zie figuur 27.

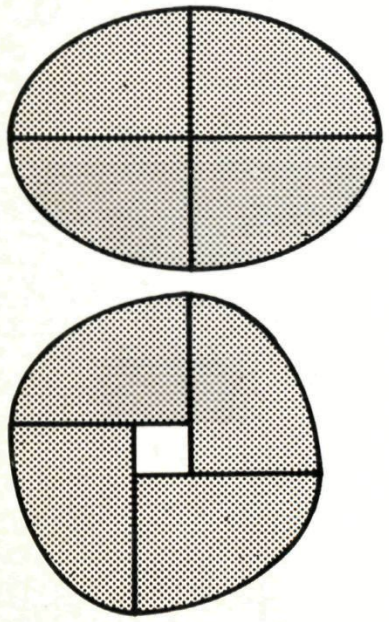


Fig. 27

29 Ze had een halve cirkelschijf moeten begrenzen, waarvan een middellijn langs de kust lag.

Inhoud

Confexe figuren 49
Inleiding 49

De vierkante-gaten-boor 50
Convexe figuren en steunlijnen 50
Figuren met constante breedte 52
De vierkante-gaten-boor 57

Is dat wel mogelijk? 60
Continuïteit 60
De pannekoek 62

Omtrek en oppervlakte 66
Het isoperimetrisch probleem 66
Goedgelovigheid 69

Denkertjes 53, 56, 62, 64, 68
Oplossingen Denkertjes 70

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. Elsenaar, Harderwijk.
Bruno Ernst, Amersfoort.
W. Kleijne, Heerenveen.
A. F. van Tooren, Leusden-C.
G. A. Vonk, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. Oosten, Postbus 58, Groningen.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, *f* 5,— per jaargang. Voor anderen *f* 7,50.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.
Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.