

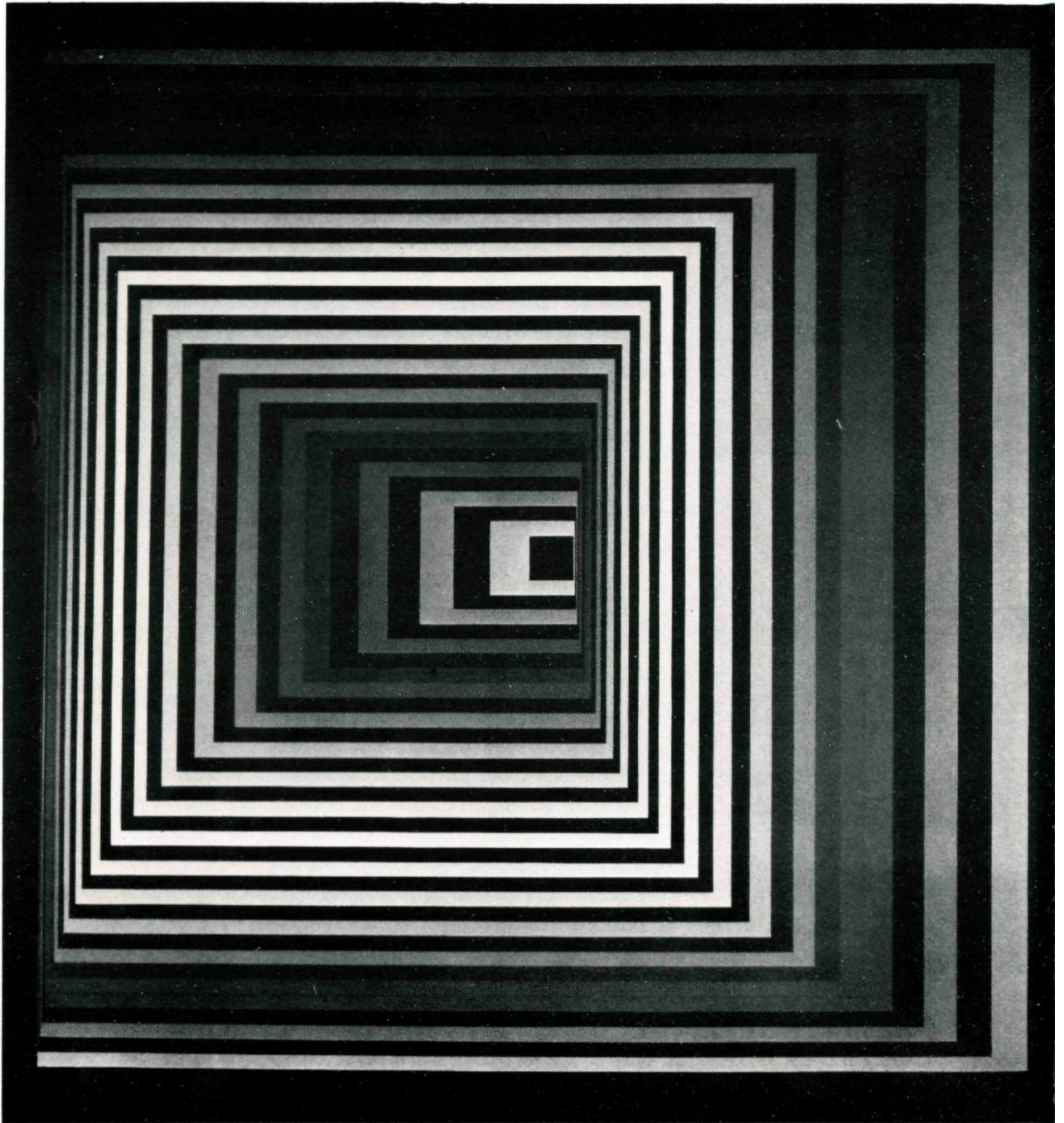
Jaargang 13 1973/1974

II₃₆

Pythagoras

6

Wiskundetijdschrift
voor jongeren



In 'Van kunstje tot kunst' op pagina 139 van dit nummer staat het onderwerp vlakverdeling centraal. Victor Vasarely, geboren in Hongarije, maar al sinds 1930 woonachtig in Frankrijk is een grootmeester op dit terrein, zoals je hierboven kunt zien.

Cilinderkubus en cilinderkussen°

Van papier kunnen we de prachtigste ruimtefiguren maken. Zolang deze door platte vlakken begrensd zijn geeft dat geen moeilijkheden (figuur 1).

We kunnen van papier ook ruimtefiguren maken met gebogen vlakken zoals cilinders of kegels. Daarbij hoeven we het papier geen geweld aan te doen. Het is niet zo eenvoudig wiskundig te beschrijven wat er bedoeld wordt met 'het papier geen geweld aandoen'. Je zou bijvoorbeeld kunnen zeggen, dat het papier niet gerekt mag worden in de een of andere richting. In figuur 2 zie je enkele voorbeelden van ruimtefiguren met gebogen vlakken, die gemaakt kunnen worden zonder het papier te deformeren.

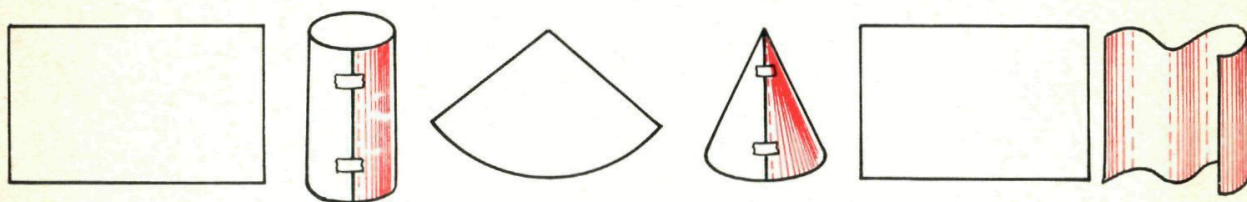


Fig. 2

We geven nu een paar voorbeelden van gesloten ruimtefiguren, waarvan de zijvlakken gebogen zijn. Het eerste kan wel en het tweede niet zonder deformatie van het papier worden gemaakt. Misschien kunnen deze twee voorbeelden je inspireren tot eigen vondsten.

De 'cilinderkubus'

Je ziet hem in figuur 3; de naam is maar een fantasienaam. Het ding heeft iets van een cilinder en van een kubus, vandaar de naam.

Het kan worden opgebouwd uit twee gebogen vlakken. Als je die in het platte vlak uitspreidt, dan hebben ze de vorm en afmetingen die je in figuur 4 ziet.

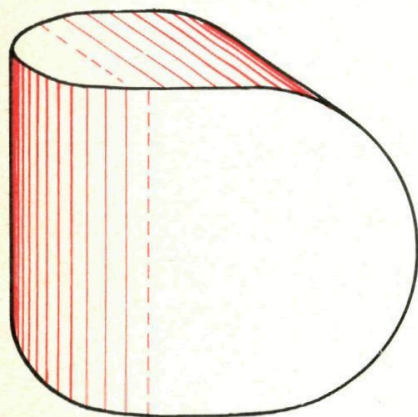


Fig. 3

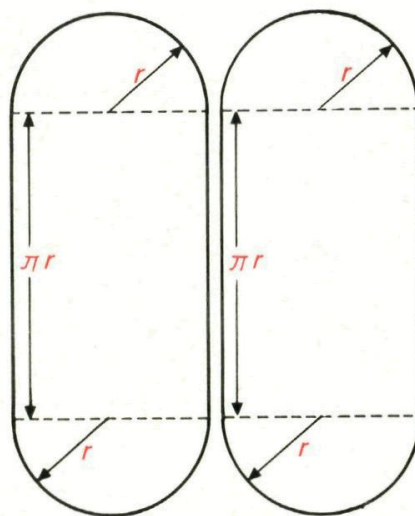


Fig. 4

De 'cilinderkubus' past in een kubus met ribbe $2r$. Het is mogelijk het ding in twee congruente helften te zagen. De doorsnede is dan een vierkant. Dat brengt je misschien op de gedachte, dat je een 'cilinderkubus' gemakkelijk van hout kunt maken. Van een cilindervormige houten staaf met diameter $2r$ zaag je een cilindertje met hoogte $2r$. Je verdeelt dit cilindertje in twee halve cilindertjes. Je kunt die weer zo aan elkaar lijmen dat de 'cilinderkubus' ontstaat.

Kun je de inhoud daarvan berekenen?

Nog iets om over na te denken: Een 'cilinderkubus' heeft maar één doorlopende rand. Dat heeft een kubus of een cilinder niet.

Het 'cirkelkussen'

Het 'cirkelkussen' (ook een fantasienaam!) maken we als volgt: (figuur 5) Knip twee gelijke cirkels uit tekenpapier.

De straal mag niet veel kleiner dan 15 cm zijn, anders komen we in moeilijkheden. Verdeel de omtrek in 12 gelijke delen en trek de aangegeven cirkelbogen met dezelfde straal als de cirkel. Nu ritsen we de bogen in. Dat gaat het beste door er met enige druk met een bot mespunt overheen te gaan.

Nu zijn de vier flappen die aan elke cirkel ontstaan gemakkelijk om te buigen, zodat ze vrijwel loodrecht op de cirkels staan. Plak de flappen van beide cirkels op elkaar en maak de openingen aan de hoeken eventueel met plakband dicht. (figuur 6)

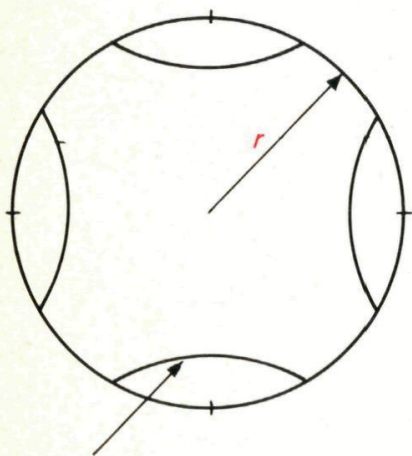


Fig. 5

cirkelboog met straal r

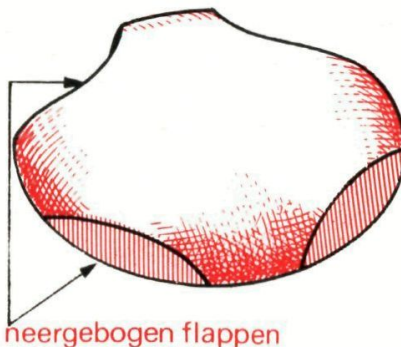


Fig. 6

Het 'cirkelkussen' kan eigenlijk niet van papier gemaakt worden zonder het (zij het hier maar heel weinig) te mishandelen. Het boven- en ondervlak zijn nl. beide in twee richtingen gebogen en dat kun je met een vlak niet doen zonder het ook te deformeren (uitrekken of samendrukken).

Als iemand een cilinderkussen van dik plaatijzer zou maken, dan zouden boven- en onderkant niet meer tot een vlakke plaat teruggebogen kunnen worden, precies om dezelfde reden als waarom je een halve bol niet tot een plat vlak kunt buigen.

Rotator-8°

Ir. H. M. Mulder

Het is mogelijk een ruimtelijk lichaam op te bouwen uit 8 gelijke regelmatige viervlakken, scharnierend aan elkaar verbonden.

Je zou je kunnen voorstellen hoe een dergelijke constructie te gebruiken zou zijn voor een ruimtelaboratorium zoals sky-lab.

Het interessante is namelijk dat de binnenzijde naar buiten gedraaid kan worden, waarbij je door kunt draaien zodat elk zijvlak zowel binnen als buiten kan komen. Speciaal bij een ruimtetoestel zouden bij een constante rotatie alle vlakken door de zon gelijkmatig verwarmd worden.

Het is niet moeilijk uit een stevig karton zelf dit lichaam te construeren.

Teken 2×16 gelijkzijdige driehoeken (figuur 7) tegen elkaar. Kies de zijden bijvoorbeeld 6 cm.

Nummer de randen en lippen zoals in de tekening. Vouw het papier langs de ribben. Een getrokken lijn betekent een bolle vouw, een gestippelde een holle.

Rits met een scherp punt even langs de ribben en vouw ze om in de juiste richting, waardoor de vouwen scherper worden.

Bestrijk nu alle lippen aan de onderkant met lijm en alle andere gemerkte plaatsen aan de bovenzijde.

Als de lijm gedroogd is, plak je lip *a* op basis *a*;

Vouw verder zodat *b* op *b* komt enz.

Als laatste komt *g* op *g*.

Buig de rotator nu om tot er een cirkelvorm ontstaat en de einden bij elkaar komen.

Plak nu de plaatsen gemerkt met *w*, *x*, *y* en *z* tegen elkaar.

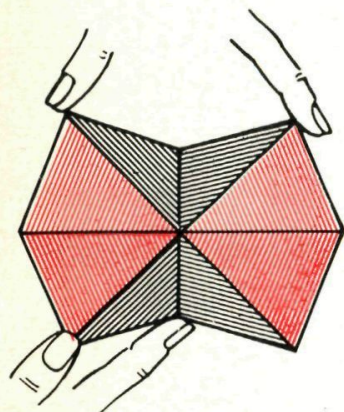


Fig. 8a: zijaanzicht

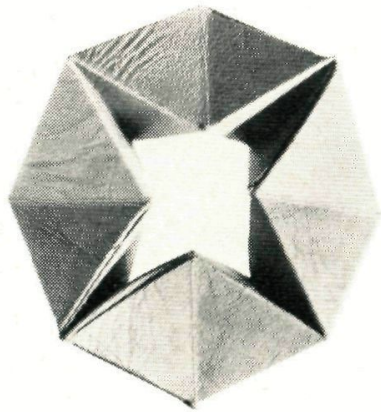


Fig. 8b: bovenaanzicht

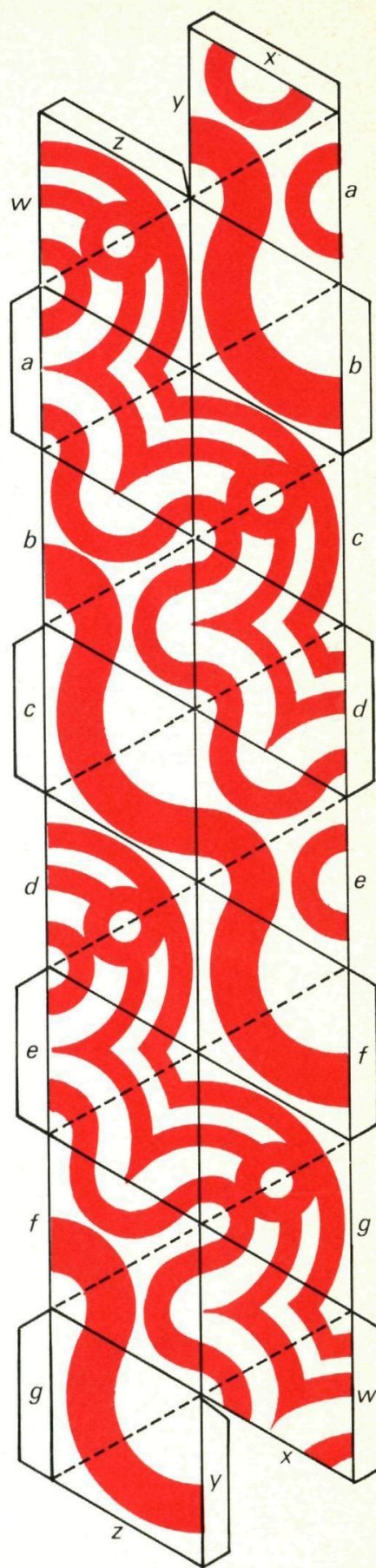


Fig. 7

Als je wilt kun je eerst nog op de driehoeken een hip patroon tekenen, zoals aangegeven.
Bij rotatie ontstaat dan een kaleidoscopisch effect.

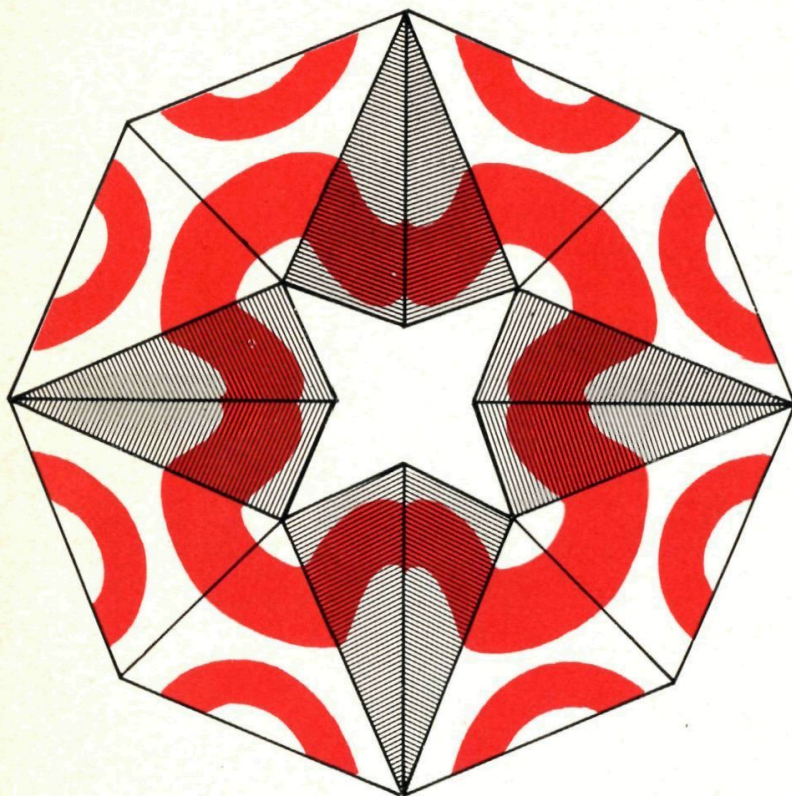


Fig. 9

Denkertje

50 Een blikje frisdrank weegt geheel gevuld 144 gram en het weegt leeg 16 gram.

Als het vol op tafel staat, dan ligt het zwaartepunt in het middelpunt van het blikje. Maar als het leeg op tafel staat, dan ligt het zwaartepunt weer precies op diezelfde plaats.

Welk deel van de inhoud moet je opdrinken om het zwaartepunt van het staande en gedeeltelijk gevulde blikje zo laag mogelijk te krijgen?



Restverwerking^{oo}

Michel Bel, Munnik

Als je een geheel getal door een ander geheel getal deelt, dan merk je dat je meestal wat overhoudt. Dat noemen we de rest van de deling. Over de resten die je bij delen overhoudt gaat dit artikel.

Voor het rekenen met resten is een handige schrijfwijze bedacht.

Als twee gehele getallen a en b bij delen door het gehele getal c dezelfde rest opleveren dan zeggen we dat a congruent is met b modulo c . We schrijven dat zo: $a \equiv b \pmod{c}$.

Bijvoorbeeld $8 \equiv 44 \pmod{6}$ want $8 : 6$ en $44 : 6$ leveren beide de rest 2. Bij delen door 6 zijn er zes resten mogelijk namelijk 0, 1, 2, 3, 4, 5. We kunnen nu alle gehele getallen in zes verzamelingen stoppen. Bijvoorbeeld alle getallen die bij delen door 6 de rest 5 laten stoppen we in dezelfde verzameling, dat zijn dus bijvoorbeeld 5, 11, 17, 23, ..., maar ook -1 , -7 , -13 , en zo voort.

Zo'n verzameling wordt *restklasse* genoemd. Alle getallen die in dezelfde restklasse zitten als 5 zijn congruent met 5 modulo 6.

Nu blijkt het dat je met die restklassen kunt rekenen (tenminste vermenigvuldigen, optellen en machtsverheffen) net alsof het getallen waren.

Als $a \equiv b \pmod{c}$ en $p \equiv q \pmod{c}$ dan is $a + p \equiv b + q \pmod{c}$ (1)

en $a \times p \equiv b \times q \pmod{c}$ (2)

en als k een geheel getal is $ka \equiv kb \pmod{c}$ (3)

en als t een natuurlijk getal is $a^t \equiv b^t \pmod{c}$ (4)

Voorbeelden

(1) $8 \equiv 3 \pmod{5}$ en $7 \equiv 2 \pmod{5} \rightarrow 8 + 7 \equiv 3 + 2 \pmod{5}$

(2) $8 \equiv 3 \pmod{5}$ en $7 \equiv 2 \pmod{5} \rightarrow 8 \times 7 \equiv 3 \times 2 \pmod{5}$

(3) $8 \equiv 3 \pmod{5}$ en 12 is een geheel getal $\rightarrow 12 \times 8 \equiv 12 \times 3 \pmod{5}$

(4) $8 \equiv 3 \pmod{5}$ en 2 is een natuurlijk getal $\rightarrow 8^2 \equiv 3^2 \pmod{5}$

Hier volgt nu een voorbeeld van het rekenen met restklassen

Is 88352697 een kwadraatgetal?

We onderzoeken dat door gebruik te maken van restklassen modulo 10.

Het gegeven getal is congruent met 7 modulo 10.

Elk geheel getal is congruent met 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 of 9 modulo 10. Kijk nu naar de kwadraten hiervan:

$0^2 \equiv 0$	$3^2 \equiv 9$	$6^2 \equiv 6$	$9^2 \equiv 1$
$1^2 \equiv 1$	$4^2 \equiv 6$	$7^2 \equiv 9$	alles modulo 10
$2^2 \equiv 4$	$5^2 \equiv 5$	$8^2 \equiv 4$	

Je ziet dat er geen kwadraatgetal is dat congruent is met 7 modulo 10. 88352697 is dus geen kwadraatgetal.

Hoe voorzichtig je moet zijn met deze redenering volgt uit het volgende onderzoekje. We gaan nu restklassen gebruiken naar de modulus 8.

Bij delen door 8 vinden we de resten 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 of 7.

De kwadraten hiervan zijn congruent met 0, 1, 4, 1, 0, 1, 4 en 1.

Dat wil dus zeggen dat we de kwadraten alleen vinden in de drie restklassen waarin zich 1, 4 of 0 bevinden. In welke restklasse modulo 8 bevindt zich het gegeven getal 88352697? Je kunt die vraag beantwoorden door 88352697 door 8 te delen. 't Kan echter ook nog iets eenvoudiger: $1000 \equiv 0 \pmod{8}$ dus ook $88352000 \equiv 0 \pmod{8}$.

We hoeven dus alleen maar 697 te onderzoeken. Je ziet gemakkelijk dat $697 \equiv 1 \pmod{8}$. Dat wil dus zeggen dat 88352697 in de restklasse zit waarin ook 1 voorkomt. Dat is een van de drie restklassen modulo 8 waarin de kwadraten zitten. Hoe nu? Is 88352697 toch een kwadraatgetal?

Je ziet het natuurlijk wel: in de drie restklassen 1, 4 en 0 modulo 8 bevinden zich de kwadraatgetallen. Maar deze klassen bestaan niet uit louter kwadraatgetallen. Ga maar na $17 \equiv 1 \pmod{8}$ en 17 is geen kwadraatgetal.

Ook de negenproef is een voorbeeld van het rekenen met restklassen.

Ga eerst even na:

$10 \equiv 1 \pmod{9}$ dus bijvoorbeeld $30 \equiv 3 \pmod{9}$ of $80 \equiv 8 \pmod{9}$
 $100 \equiv 1 \pmod{9}$ dus bijvoorbeeld $300 \equiv 3 \pmod{9}$ of $800 \equiv 8 \pmod{9}$
 $1000 \equiv 1 \pmod{9}$ dus bijvoorbeeld $3000 \equiv 3 \pmod{9}$

We kunnen dit gebruiken om berekeningen te controleren. Bijvoorbeeld:

Is het waar dat $827 \times 119 = 95413$?

$$827 = 800 + 20 + 7 \equiv 8 + 2 + 7 = 17 \equiv 8 \pmod{9}$$

$$119 = 100 + 10 + 9 \equiv 1 + 1 + 0 = 2 \pmod{9}$$

$$827 \times 119 \equiv 8 \times 2 = 16 \equiv 7 \pmod{9}$$

$$95413 \equiv 0 + 5 + 4 + 1 + 3 = 13 \equiv 4 \pmod{9}$$

Je ziet dat de vermenigvuldiging niet goed kan zijn want de uitkomst zou ook congruent met 7 moeten zijn naar de modulus 9.

Onderzoek nu eens op deze manier of het waar is dat $827 \times 119 = 94813$

En ook of het waar is dat $827 \times 119 = 98413$.

Als de negenproef niet klopt dan is de berekening zeker fout. Als de negenproef wel klopt dan bestaat er een grote kans dat de berekening goed is.



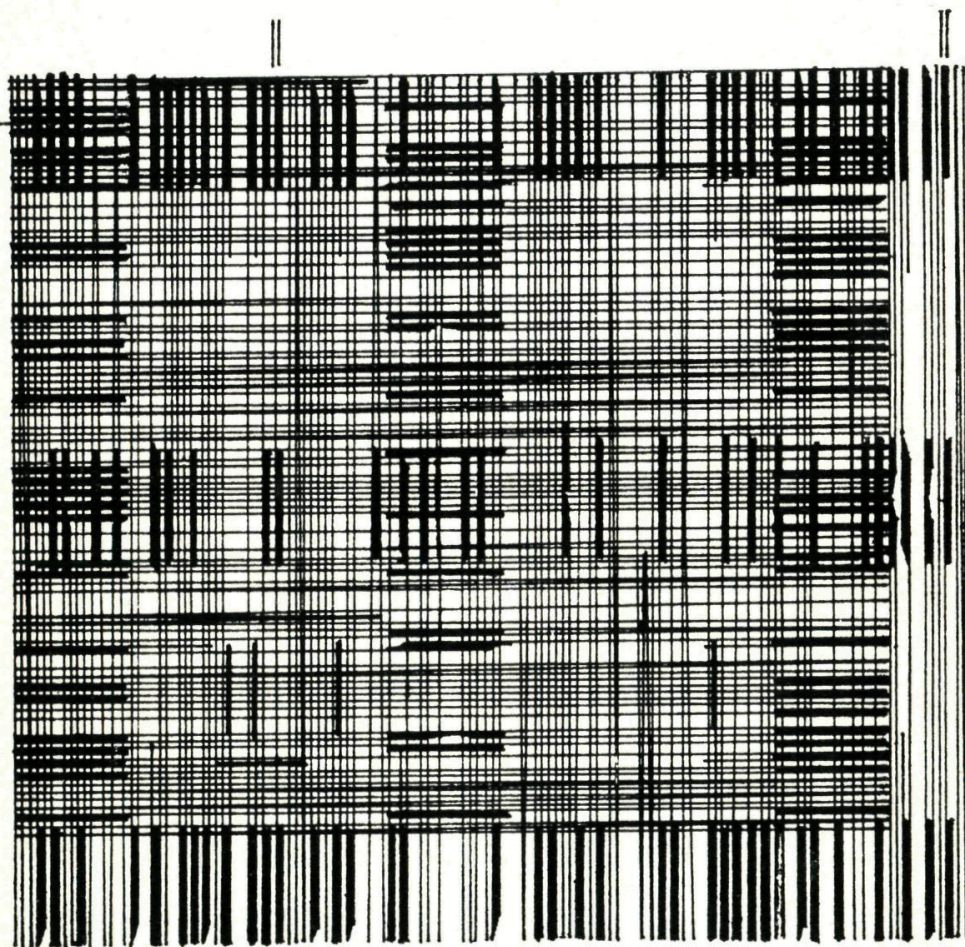
Pi in code°

Een gewone girokaart zit vol rechthoekige gaatjes. Hun plaats op de kaart geeft ze een bepaalde betekenis. Voor de machine die ze 'leest' bevatten ze de nodige gegevens; voor de leek vormen ze een geheimschrift.

Soms worden gegevens of een bericht zó veranderd, dat alleen degene die over de sleutel beschikt, het bericht kan ontcijferen. Natuurlijk zijn er altijd mensen die uit nieuwsgierigheid of uit hoofde van hun functie proberen een bericht dat niet voor hun bestemd is toch te lezen. Zij proberen de sleutel te vinden. Dat vereist veel scherpzinnigheid, veel tijd en veel ervaring. Tegenwoordig wordt de computer meestal ingeschakeld bij het ontcijferen van een code. Hoe listiger de ontcijferaars worden des te ingewikkelder maakt men de geheimschriften.

Hieronder vind je in geheimschrift de eerste 23 decimalen van het getal π . Dit fraaie en betekenisvolle weefsel werd ons gezonden door de heer C. Woortman uit Hoofddorp. Test je scherpzinnigheid en probeer de code te decoderen. Mocht het je niet gelukken: de sleutel vind je op bladzijde 143 van dit nummer.

C. Woortman



pi in 23 decimalen

Raakschijven^o

B. C. Dijkstra-Kluyver

Het probleem^o

Of het volgende probleem nu uit de techniek stamt of dat het een wiskundig gedachte-spelletje is waarvan de oplossing later nog wel eens praktisch nut zal blijken te hebben, weten we niet. In de geschiedenis van de wiskunde komt het trouwens heel vaak voor dat de toepassing veel later wordt gevonden dan het bijbehorende stukje wiskunde. Maar goed, hier komt dan het vraagstuk.

Iemand heeft twee assen die even snel en in dezelfde richting draaien. Op elke as wil hij een meedraaiende (niet noodzakelijk cirkelvormige) schijf monteren, zodanig dat de schijven elkaar voortdurend raken. Is dit mogelijk met twee congruente schijven?

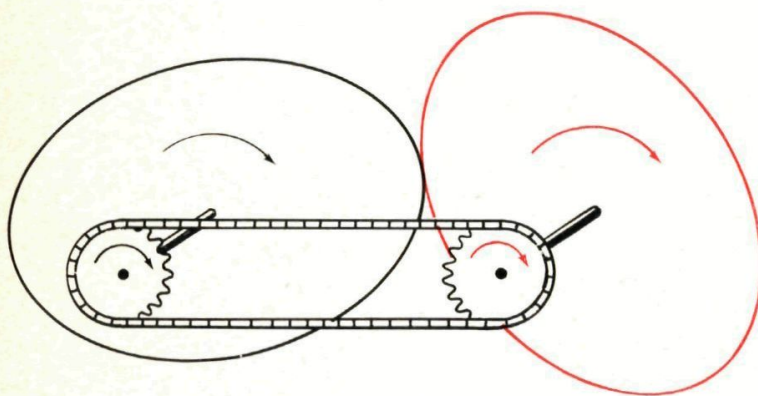


Fig. 10

Figuur 10 toont ons twee ovale schijven waarvan we ons kunnen voorstellen dat ze elkaar voortdurend raken, maar zekerheid dat ze niet een keer van elkaar losraken of tegen elkaar klemlopen hebben we niet. We zouden het toestel kunnen nabouwen en kijken of het goed gaat. Je zult het wel interessanter vinden om met je verstand na te gaan of het mogelijk is, want dit redeneren is nu juist wiskundig bezig zijn.

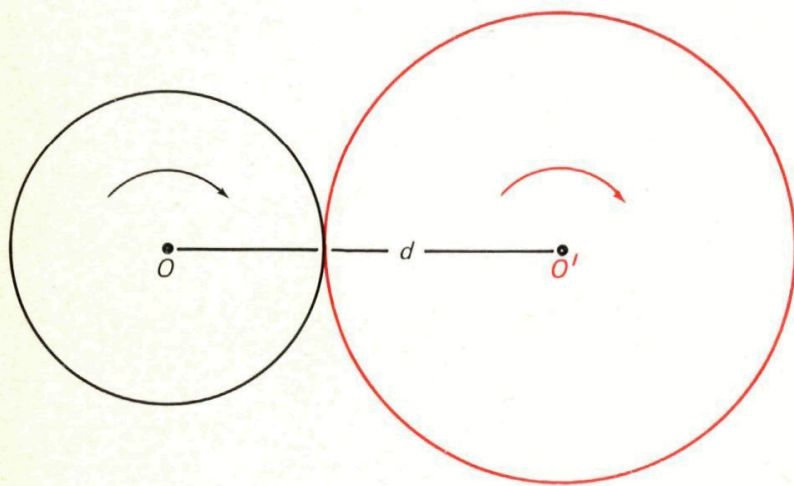


Fig. 11

We gaan eerst op zoek naar schijven die niet noodzakelijk congruent zijn. We noemen de draaipunten van de schijven O en O' , met de onderlinge afstand d . Een voor de hand liggende oplossing is: twee cirkels met stralen r en r' zodat $r + r' = d$ (figuur 11). Als $r = r'$ dan zijn de schijven nog congruent ook, maar de oplossing is niet bepaald indrukwekkend. We gaan verder.

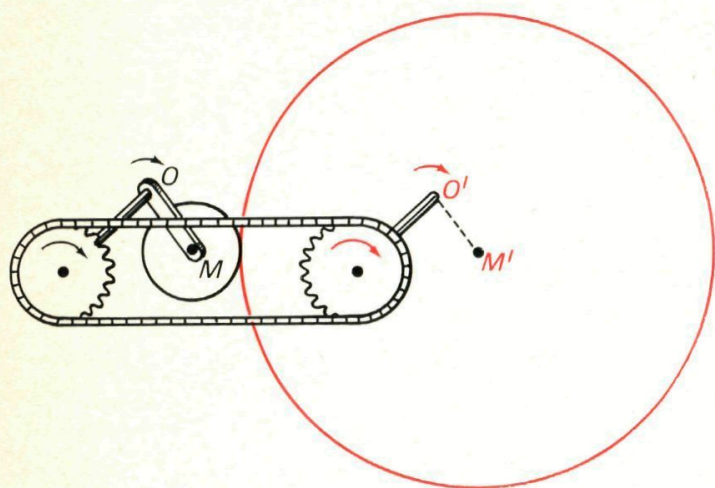


Fig. 12

De toestand in figuur 12, met de excentrisch geplaatste cirkelschijven voldoet aan de eisen, want als OM en $O'M'$ even lang en evenwijdig zijn is er een translatie $T_{O'O'}$, met $T(M) = M'$, zodat $MM' = d = r + r'$.

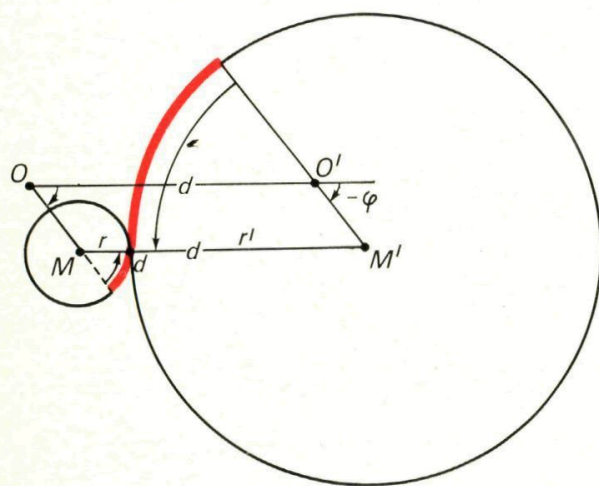


Fig. 13

In figuur 13 is bovendien te zien dat bij een rotatie $-\varphi$ van de schijven er een boog φ van beide schijven 'bestreken' is. In een extreem geval kunnen we één van de stralen nul nemen. De lengte van de arm OM is vrij, hoewel we in een praktische constructie moeilijkheden krijgen als $OM \geq d$.

In figuur 14 is in een onvolledige constructie gebruik gemaakt van het excentrische cirkel principe, waarvan één van de cirkels een puntcirkel is. Nadat deze schijven naar volle tevredenheid -90° gedraaid hebben kan men overwegen om daarna over te gaan op een andere cirkelcombinatie. Dat lukt inderdaad in figuur 15.

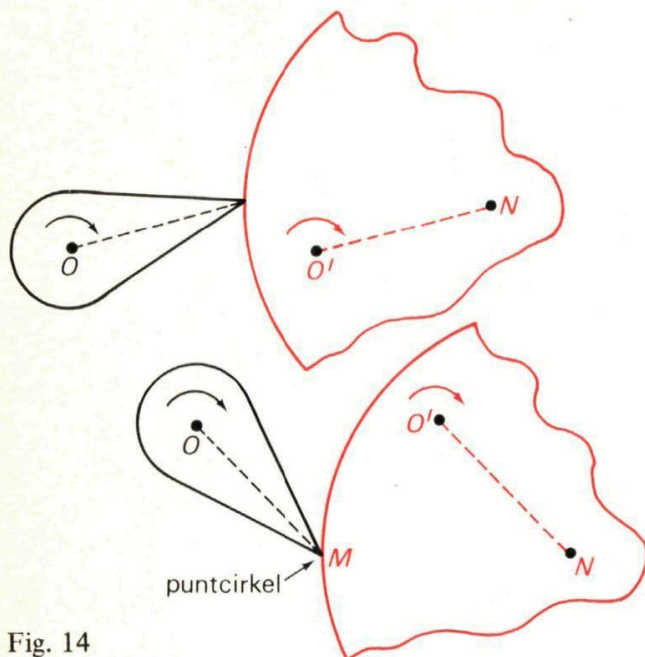


Fig. 14

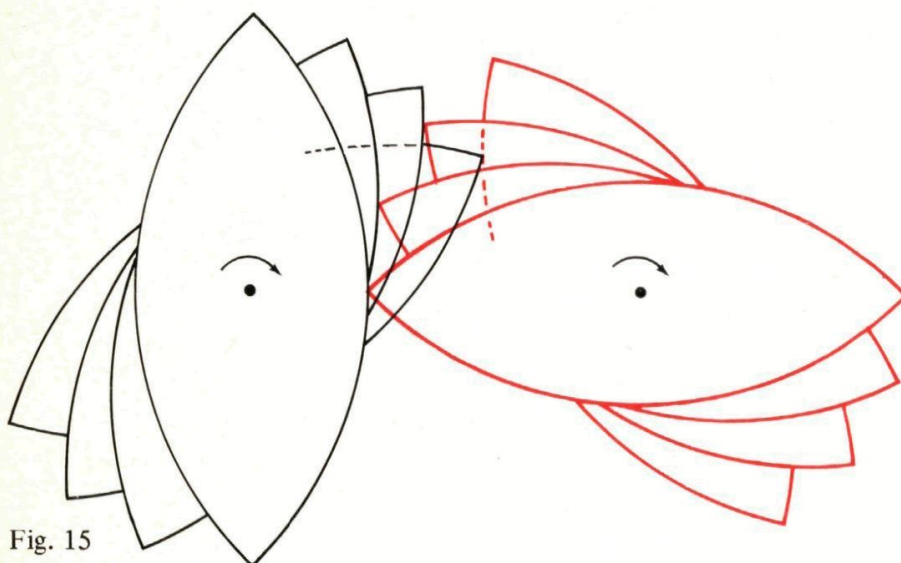


Fig. 15

Denkertje



51 Bereken de laatste twee cijfers van het kolossale getal 1974^{1974}

De schijven op elkaar gelegd°

Om wat meer vat te krijgen op de constructie van dit soort schijven, passen we op de rechter schijf de translatie T^{-1} toe (figuur 16). Als je in gedachte hetzelfde doet met de figuren 13 en 14, zie je dat na deze translatie niet alleen O en O' , maar ook de middelpunten van de elkaar rakende (zeg maar: samenhangende) cirkelbogen samenvallen. Puntcirkel M glijdt langs boog ABC , die dus ook middelpunt M heeft (en straal $d - 0 = d$). Daarna glijdt B langs boog MQN , N langs BDA en A langs NPM , waarna de cyclus voltooid is. In figuur 16 is dit gemakkelijk te onthouden door op de beweging van de stralen te letten. AM gaat via CM over in BM , daarna blijft B vast en gaat BM via BQ over in BN , enz. (figuur 17).

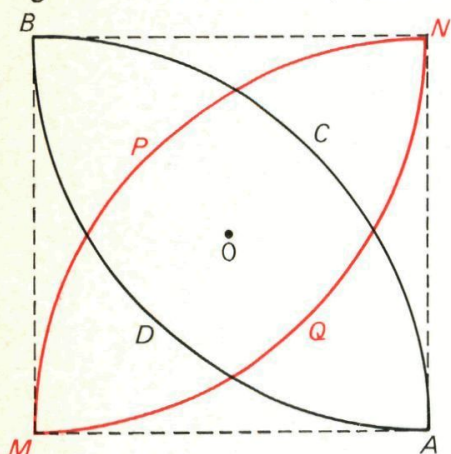


Fig. 16

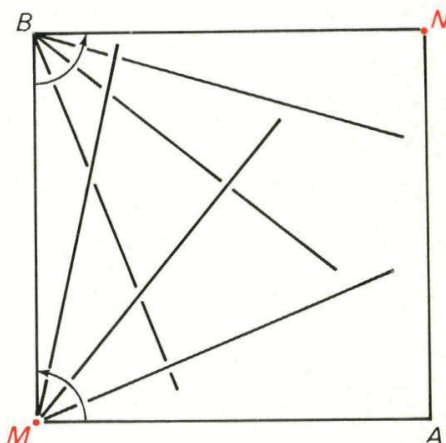


Fig. 17

Je kunt je ook voorstellen een passer met aan beide uiteinden een potloodpuntje (zwart en rood) waarvan afwisselend één van beide punten wordt vastgehouden en de andere een boog beschrijft. Elke rotatie van de passer is het tegengestelde van de rotatie van de schijven (zoals al uit figuur 13 bleek), dus moet de passer in voortdurend dezelfde richting roteren, in totaal 360° per cyclus.

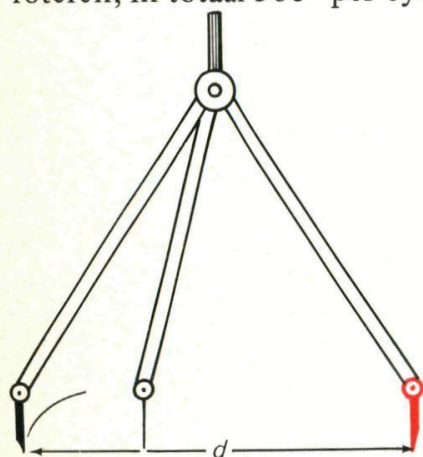


Fig. 18

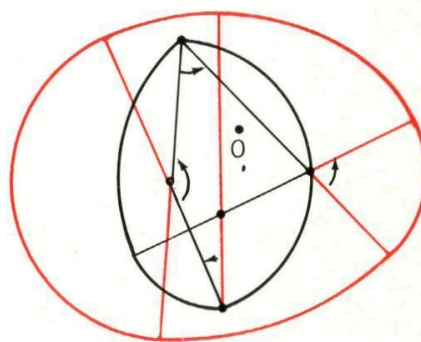


Fig. 19

In figuur 16 zijn we er van uit gegaan dat telkens één van de samenhangende cirkelbogen tot een puntcirkel behoorde, hetgeen beslist niet noodzakelijk is. We kunnen in gedachte werken met een soort dubbelpasser (figuur 18) die twee cirkels beschrijft waarvan de som van de stralen d is. Een constructie hiermee zie je in figuur 19, waarin de som van de passerrotaties weer 360° is. De zwarte schijf wordt begrensd door twee puntcirkelbogen en drie andere, de rode dus ook door 5 bogen. Merkwaardigerwijze speelt de plaats van O hierin geen rol. Kies een willekeurig punt O , uit praktische overwegingen binnen beide schijven, pas op de rode schijf en O de translatie T toe, bevestig de assen in O en $T(O)$ en we hebben twee raakschijven.

De sluitconstructie^{oo}

Als je probeert figuur 19 na te tekenen is het begin niet moeilijk. Je kunt naar hartelust middelpunten kiezen en een eind weg pàsseren, maar tenslotte zul je beide krommen moeten sluiten. Kan dit altijd? Stel (in figuur 20) dat de zwarte kromme gesloten moet worden door bogen van A naar B en de rode door bogen van C naar D ($AC = BD = d$). We nemen aan dat de lijnstukken AC en BD een snijpunt F hebben, waarvoor gemakkelijk gezorgd kan worden tegen de tijd dat men de krommen wil gaan sluiten. Als $DF = CF$ (en dus $BF = AF$) is het probleem opgelost door F als middelpunt te kiezen. Stel $DF > CF$ (en dus $AF > BF$), dan ligt F buiten de middelloodlijn van CD (en van AB) en wel aan de zijde die door de dubbelpijl is aangegeven. Hieruit volgt dat de snijpunten P en Q van deze middelloodlijnen met AC aan één kant van F liggen, waardoor beslist één van de hoeken CQD en ABP kleiner zal zijn dan de nog uit te voeren rotatie φ , in figuur 20 is dat $\angle CQD$.

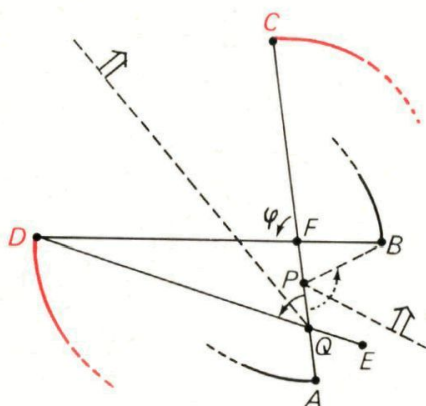


Fig. 20

Neem nu Q als middelpunt en sluit boog CD , neem D als middelpunt en sluit de resterende opening EB van de zwarte kromme. Onder de aanname $DF < CF$ geldt $\angle ABP < \varphi$ en zijn de middelpunten achtereenvolgens P en B . Mocht in het geval van figuur 11 het punt Q buiten het lijnstuk AC vallen, dan zal nog een gunstig te kiezen passerrotatie moeten worden uitgevoerd voordat aan de sluitconstructie kan worden begonnen.

Denkertje



- 52 Een getal van n cijfers heeft als laatste cijfer een 4 en alle andere cijfers zijn gelijk aan 3 (voor $n = 5$ bijvoorbeeld is dat getal dus 33334).

Uit welke cijfers bestaat het kwadraat van dat getal?

Congruente raakschijven^o

Dezelfde sluitconstructie levert ons een methode om congruente raakschijven te krijgen: sluit de rode en de zwarte kromme op elkaar aan bij een passerrotatie van 180° . De nu ontstane gesloten kromme heeft twee kleuren en kan zowel voor rode als voor zwarte schijf doorgaan. Ze zijn congruent, zelfs is de ene het translatiebeeld van de andere (figuur 21). Figuur 22 is hiervan een bijzonder geval.

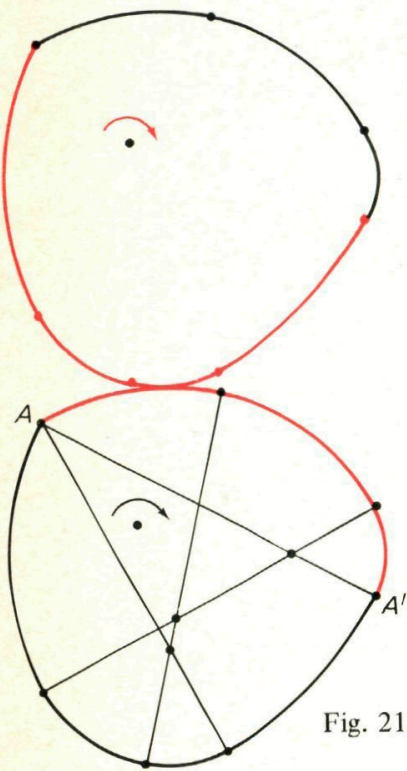


Fig. 21

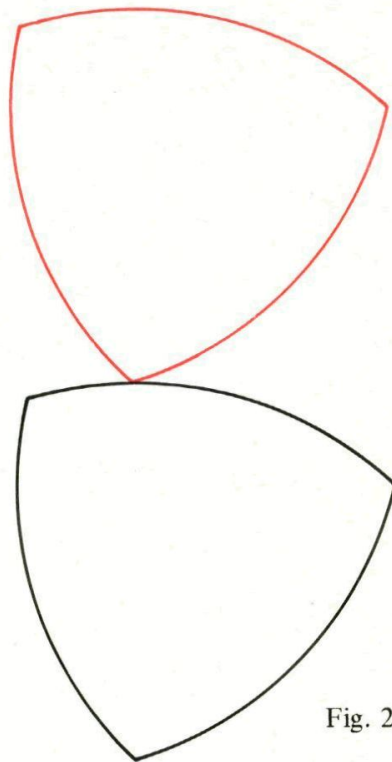


Fig. 22

Denkertje



53 Uit een vakantieverslag:

'We hebben veel gewandeld, hoewel het weer niet zo best was. Goed, het is wel gebeurd dat we bij droog weer zonder paraplu rondsjuwden. Maar het gebeurde toch even vaak dat we niet in de regen liepen te mopperen omdat we de paraplu vergeten hadden. En het eerste behoort toch in je vakantie meer voor te komen dan het laatste, vind je ook niet?'

Welke conclusie trek je uit dit gegeven over het aantal wandelingen met paraplu?

De figuren 15 en 23 tonen aan, dat er ook congruente raakschijven zijn, die ten opzichte van elkaar gedraaid zijn. We bekijken één constructie nog eens nader, namelijk die voor het maken van figuur 10. Een soort 'timmermansconstructie', omdat deze uitvoerbaar is met blokjes hout en een touwtje. Neem twee plankjes die elk één rechte hoek hebben.

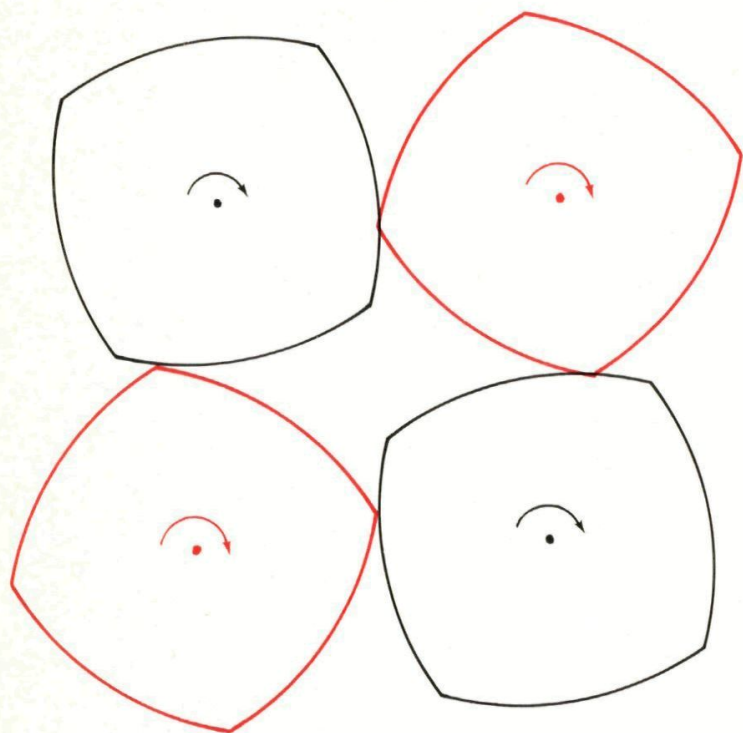


Fig. 23

Leg ze met die rechte hoeken op elkaar en zaag die hoek er af, met één of meer zaagsneden. Pas de plankjes in twee aangrenzende kwadranten, waarbij er één over 90° gedraaid is om het afgezaagde hoekpunt (figuur 24). Klem er een touwtje tussen en beschrijf met het eind een zo groot mogelijke boog. Herhaal dit voor elk der overige tweetallen aangrenzende kwadranten (figuur 25). Je kunt gemakkelijk nagaan dat de verkregen schijven de eerder ontdekte eigenschappen vertonen.

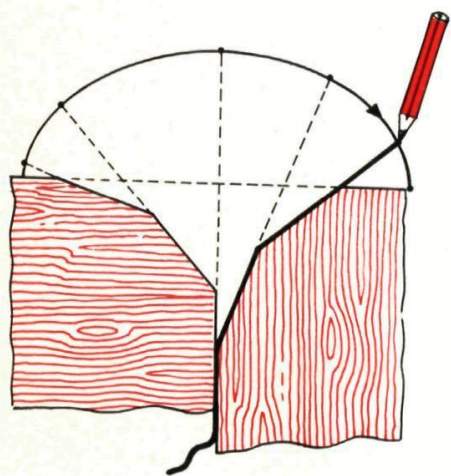


Fig. 24

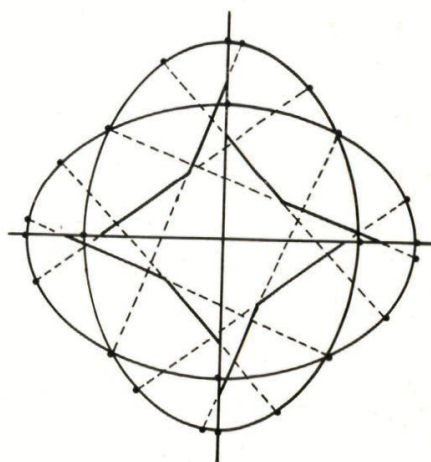


Fig. 25

Denkertjes

54 Verdeel figuur *a* in vier congruente stukken.

55 Een fabrikant maakt sigaretten, die allemaal even lang en even dik zijn. Hij verpakt ze in pakjes van 25 stuks en ook in pakjes van 20 stuks.

Een winkelier maakt in zijn etalage een rij door 20 pakjes van 25 sigaretten in de breedte naast elkaar te leggen. Hij doet dat ook met 25 pakjes van 20 sigaretten.

Welke rij wordt de langste en waarom is dat zo?

56 Een vloer wordt betegeld met tegels, die allemaal even groot zijn en allemaal de vorm van een regelmatige zeshoek hebben. Daarbij zorgt men er voor, dat er nergens twee tegels van gelijke kleur aan elkaar grenzen (met een gemeenschappelijke zijde). Hoeveel verschillende kleuren tegels heeft men op zijn minst nodig?

57 In figuur *b* zijn de hoeken A_1 en A_2 gelijk. Is de hoek A_3 groter dan die twee of kleiner dan die twee?

58 In $(98 + 01)^2 = 9801$ kun je met een beetje goede wil links en rechts hetzelfde paar getallen van twee cijfers onderscheiden.

Vind nog twee voorbeelden van dezelfde merkwaardigheid.

59 In figuur *c* zijn een paar afmetingen van het remblok gegeven. Bereken daaruit de straal van het wiel.

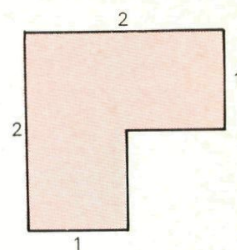


Fig. *a*

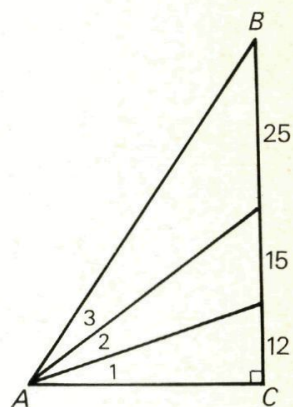


Fig. *b*

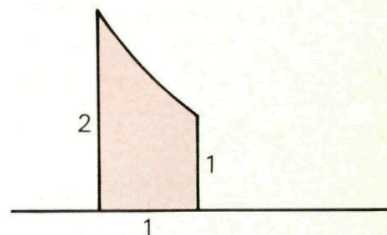


Fig. *c*

Wat zal dat worden°

Een oud vaderlands gezegde luidt: De boog kan niet altijd gespannen zijn. Welnu, wij van Pythagoras ontspannen in dit artikeltje ook eens de strakke boog van de wiskunde en laten je wat spelen met coördinaten.

Teken op roosterpapier met dunne lijnen een rechthoekig assenkruis. Zorg ervoor dat je op de assen naar elke kant ten minste 8 cm kunt afpassen (of maak als dat te groot wordt voor je papier de eenheid op elke as $\frac{1}{2}$ cm).

Verbind de punten zoals ze hieronder zijn gegeven in de aangegeven volgorde. Je zult een zeer gewaardeerde vriendin zien ontstaan.

$(2, -7)$, $(\frac{1}{2}, -7)$, $(1\frac{1}{2}, -6)$, $(1, -6)$, $(1, -5\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{2}, -5\frac{1}{2})$, $(2, -3)$, $(2\frac{1}{2}, -6)$, $(2, -6)$,
 $(2, -6\frac{1}{2})$, $(2\frac{1}{2}, -6\frac{1}{2})$, $(1\frac{1}{2}, -7\frac{1}{2})$, $(3\frac{1}{2}, -7\frac{1}{2})$, $(3, -6\frac{1}{2})$, $(3\frac{1}{2}, -6\frac{1}{2})$, $(3\frac{1}{2}, -6)$, $(3, -6)$,
 $(4, -1\frac{1}{2})$, $(4, -2\frac{1}{2})$, $(5, 1\frac{1}{2})$, $(5, 1)$, $(4, 2\frac{1}{2})$, $(5, 1\frac{1}{2})$, $(7, 1)$, $(8\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$, $(5, 1\frac{1}{2})$, $(5\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$,
 $(6, 2)$, $(5, 1\frac{1}{2})$, $(8\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$, $(8, 2\frac{1}{2})$, $(7\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$, $(7, 2)$, $(8, 2\frac{1}{2})$, $(7\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $(7, 4)$, $(7, 4)$, hier een
dikke punt plaatsen, $(7\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $(7\frac{1}{2}, 5)$, $(8\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $(10, 5)$, $(9, 5\frac{1}{2})$, $(8, 5)$, $(8, 6)$, $(7, 7)$,
 $(7\frac{1}{2}, 6)$, $(7, 5\frac{1}{2})$, $(6, 6)$, $(5, 5\frac{1}{2})$, $(4\frac{1}{2}, 6)$, $(5, 7)$, $(4, 6)$, $(4, 5)$, $(3, 5\frac{1}{2})$, $(2, 5)$, $(3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$,
 $(4\frac{1}{2}, 5)$, $(4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $(5\frac{1}{2}, 4)$, hier een dikke punt plaatsen, $(4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$, $(2\frac{1}{2}, 2)$, $(0, 3)$, $(-4, 2\frac{1}{2})$,
 $(0, 2\frac{1}{2})$, $(2\frac{1}{2}, 2)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(2, -3)$, $(-1, -4)$, $(-2, -3)$, $(-1, -1)$, $(-1, \frac{1}{2})$, $(-2, +2)$,
 $(-4, 2\frac{1}{2})$, $(-5\frac{1}{2}, 2)$, $(-6\frac{1}{2}, 4)$, $(-4\frac{1}{2}, 6)$, $(-3\frac{1}{2}, 6)$, $(-3\frac{1}{2}, 8)$, $(-6, 7)$, $(-5, 6)$, $(-7, 4)$,
 $(-6, 1\frac{1}{2})$, $(-4\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-6, 1\frac{1}{2})$, $(-7, \frac{1}{2})$, $(-7, -1)$, $(-5\frac{1}{2}, -6)$, $(-6, -6)$, $(-6, -6\frac{1}{2})$,
 $(-5\frac{1}{2}, -6\frac{1}{2})$, $(-6\frac{1}{2}, -7\frac{1}{2})$, $(-4\frac{1}{2}, -7\frac{1}{2})$, $(-5, -6\frac{1}{2})$, $(-4\frac{1}{2}, -6\frac{1}{2})$, $(-4\frac{1}{2}, -6)$, $(-5, -6)$,
 $(-5, -2\frac{1}{2})$, $(-4, -2)$, $(-3, -2\frac{1}{2})$, $(-3, -3)$, $(-3\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$, $(-4, -3)$, $(-4\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2})$, $(-5, -3)$,
 $(-4\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2})$, $(-4, -3\frac{1}{2})$, $(-3\frac{1}{2}, -4\frac{1}{2})$, $(-3, -3)$, $(-3, -6)$, $(-3\frac{1}{2}, -6)$, $(-3\frac{1}{2}, -6\frac{1}{2})$,
 $(-3, -6\frac{1}{2})$, $(-4, -7\frac{1}{2})$, $(-2, -7\frac{1}{2})$, $(-2\frac{1}{2}, -6\frac{1}{2})$, $(-2, -6\frac{1}{2})$, $(-2, -6)$, $(-2\frac{1}{2}, -6)$,
 $(-2, -3)$.



Stralenraadsel°

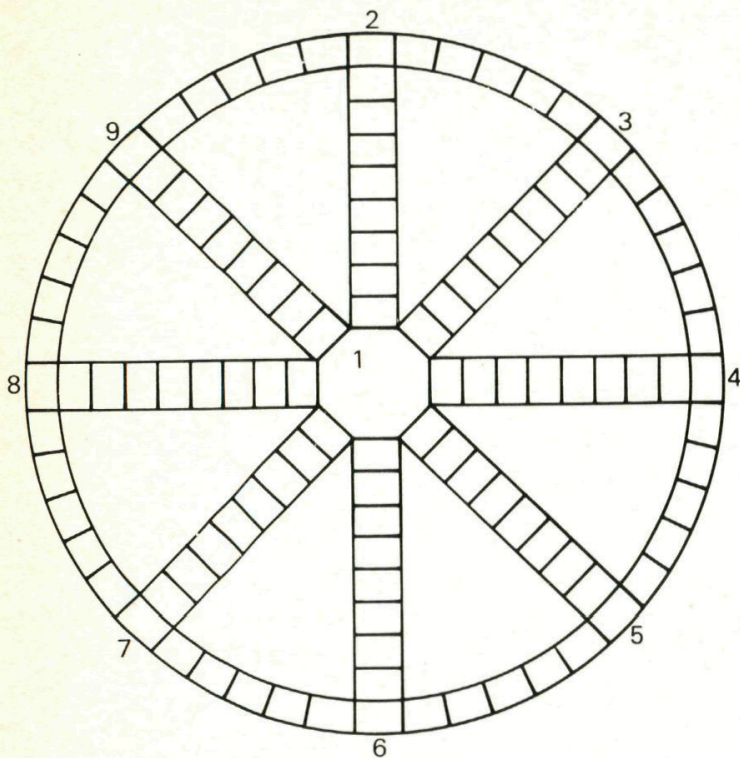


Fig. 26

Vul in ieder hokje een letter in, zó dat woorden uit de wiskunde ontstaan volgens de opgegeven omschrijving.

°Eerst langs de omtrek van het wiel in negatieve richting:

2. heeft een cirkel
3. kunnen twee lijnen
4. kan een lijnstuk zijn t.o.v. een ander lijnstuk
5. past in $\dots \xrightarrow{x} \sim \dots \frac{1}{x} = 0$
6. niet oneindig
7. heeft ieder lijnstuk
8. Nederlands wiskundige uit vroeger tijd
9. ++ -- : : ^ = / ()

°°Het invullen van de stralen is iets moeilijker. Het is ook spannender. Alle woorden hebben dezelfde beginletter, die in het middelpunt moet worden ingevuld.

De omschrijving is gegeven in wartaal.

Voorbeeld:

omschrijving: enkele familieleden staan bij het eind van de straat.

gevraagd woord: nevenhoek

omschrijving: verleng de vakantieherinnering met 100 cm

gevraagd woord: diameter

Deze beide voorbeelden moeten niet in dit raadsel worden ingevuld.

Vul wel in:

- 1-2 Een deel van Carthago valt midden in de stad Pyras.
- 1-3 tel nog enkele symbolen op
- 1-4 een oud Egyptisch bouwwerk heeft een staartje, dat verandert in een kronkelend waterdier.
- 1-5 als hart en omtrek samenvallen, zijn straal en omtrek beide meetbaar.
- 1-6 u verbindt een lang vervlogen tijdperk met een belangrijk deel van statie.
- 1-7 schoenmakersgereedschap zoekt contact met telgereedschap om samen een telgereedschap te vormen.
- 1-8 een manlijk dier neemt plaats tussen vader en een aantal consumerende mensen.
- 1-9 na een stap slikt een slang u in.

Voor wie er niet direct uitkomt, . . . de oplossing staat op bladzijde 142.

Op een bok

*In Siddeburen was een bok
die machtsverhief en worteltrok.
Die bok heeft onlangs onverschrokken
de wortel uit zichzelf getrokken,
waarna hij zonder ongerief
zich weer in het kwadraat verhief.
Maar 't feit waardoor hij voort zal leven
is, dat hij achterna nog even
de massa die hem huldigde
met vijf vermenigvuldigde.*

*Trijntje Fop
uit 'Ongerijmde rijmen'*

Van kunstje tot kunst°

Is het mogelijk een manier te vinden 'automatisch' iets leuks te maken? Met dat iets bedoelen we dan een stuk muziek, een ritmische vlakverdeling of iets dergelijks (figuur 27). Met deze vraag houdt een aantal mensen zich reeds enige tijd bezig.

Ook in Nederland zijn er op dit gebied al aardige resultaten geboekt, zoals door L. Meertens en L. Geurts van het Mathematisch Centrum in Amsterdam. De figuren in dit artikel zijn ook door hen vervaardigd. Hier zullen we enige dingen daarover vertellen.

Als we een boeiende vlakverdeling bv. van Mondriaan of van Escher bekijken, wat is dan het boeiende hierin? Is het de regelmaat die we ontdekken, of is het de afwezigheid van regelmaat, d.w.z. de chaos? Of een combinatie van deze twee? Volstreekte regelmaat bv. zien we in een schrootjeswand, volstreekte chaos bespeuren we in een groot gezelschap waar ieder door elkaar schreeuwt. Een luchtfoto van een berglandschap waarop het *lijkt* alsof de bergen zomaar door het landschap zijn gestrooid geeft een combinatie van chaos en regelmaat te zien.

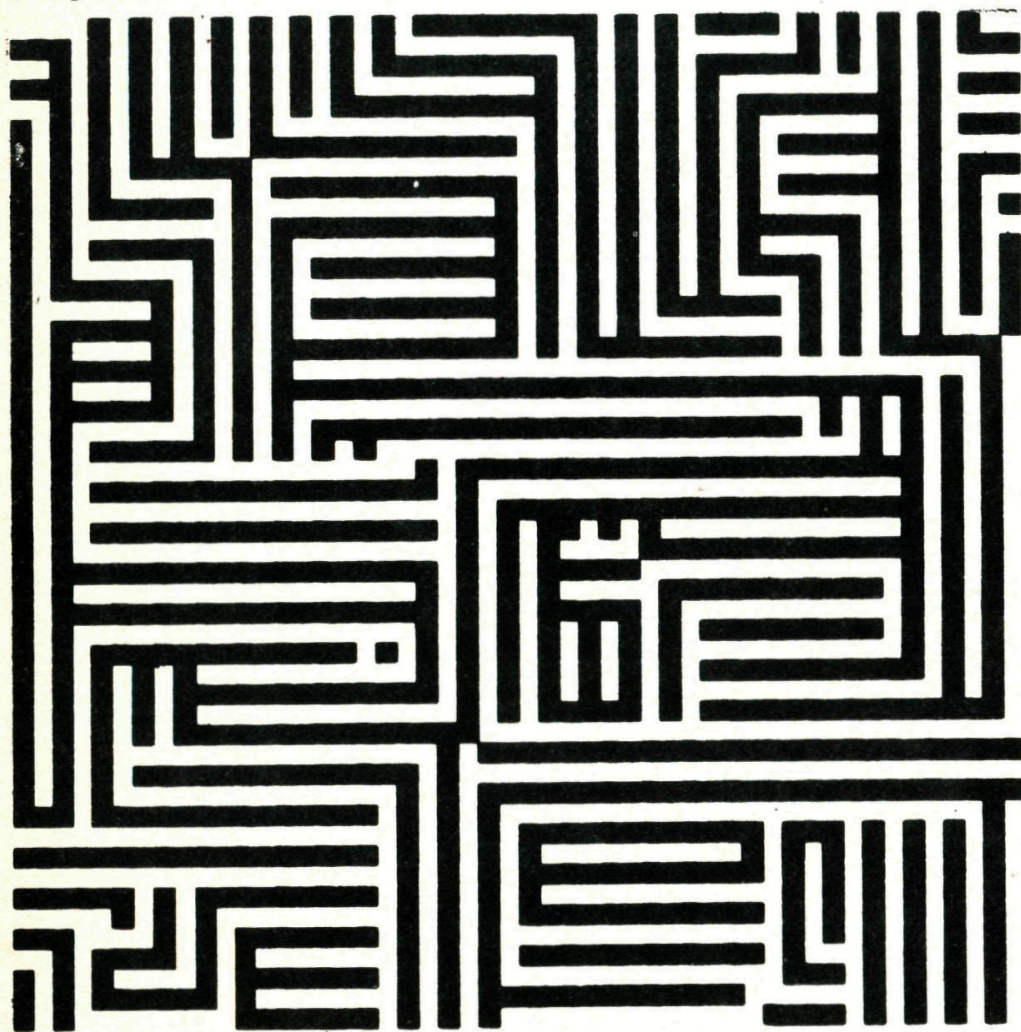


Fig. 27 *Voorbeeld van een ritmische vlakverdeling*

Volledige chaos boeit niet, volstrekte regelmaat is saai: er valt niets meer te kijken we hebben het al gauw gezien. Zoals zo vaak ligt de waarheid weer ergens in het midden. Het is zo, dat we het gevoel krijgen, dat er evenwicht bestaat tussen de 'hoeveelheid' verwerkte regelmaat en de 'hoeveelheid' verwerkte chaos.

Hoe komen we nu tot zo'n evenwicht? We kunnen daartoe in principe twee wegen inslaan.

- 1 De weg, die leidt tot 'chaotische regelmaat', d.w.z. uitgaan van iets dat volstrekt regelmatig is, waarna enige chaos wordt aangebracht. Bijvoorbeeld uitgaan van een spel kaarten dat op volgorde ligt: kleuren bij elkaar en in volgorde 2, 3, 4 enz. Daarna het spel schudden.
- 2 De weg, die leidt tot 'regelmatige chaos', d.w.z. uitgaan van volmaakte chaos, waarin regelmaat wordt aangebracht. Bijvoorbeeld uitgaan van een vormloos stuk klei, dat we gaan modelleren.

We zouden de beide methodes kunnen karakteriseren door de woorden destructief en constructief (voor respectievelijk 1 en 2).

Door te experimenteren is gebleken, dat de tweede methode, de constructieve, tot betere resultaten leidt dan de eerste. We zullen nu een voorbeeld geven hoe men te werk kan gaan. Zie figuur 28 tot en met 34.

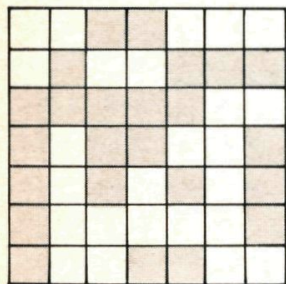


Fig. 28

	25	8	13	7	2
	12	17	3	11	4
	6	18	9	19	5
	16	15	1	14	23
	20	21	22	24	10

Fig. 31

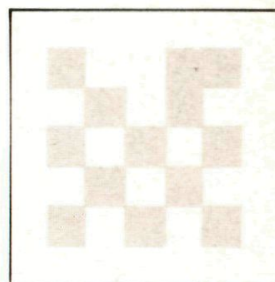


Fig. 34

Elk vierkantje is toevallig gekleurd

Vierkantje 5 wordt gekleurd

Het resultaat

	25	8	13	7	2
	12	17	3	11	4
	6	18	9	19	5
	16	15	1	14	23
	20	21	22	24	10

Fig. 29

	25	8	13	7	2
	12	17	3	11	4
	6	18	9	19	5
	16	15	1	14	23
	20	21	22	24	10

Fig. 32

Een willekeurige volgorde

Vierkantjes 10, 12, 16, 20 en 22 veranderen

	25	8	13	7	2
	12	17	3	11	4
	6	18	9	19	5
	16	15	1	14	23
	20	21	22	24	10

Fig. 30

	25	8	13	7	2
	12	17	3	11	4
	6	18	9	19	5
	16	15	1	14	23
	20	21	22	24	10

Fig. 33

Vierkantje 3 wordt wit

In de tweede ronde verandert vierkantje 6 nog

Begin met een volkomen willekeurige verdeling van een vlak bv. een verdeling in witte en zwarte vierkantjes. Deze willekeurige verdeling beschouwen we nu als de bovenbedoelde chaos, waarin we regelmaat gaan aanbrengen. We zullen een methode aangeven, waarop we dit zullen doen. Daarbij zullen we bepaalde vierkantjes vervangen door andere van een andere kleur: sommige zwarte blijven zwart, andere worden vervangen door witte. Dit kan als volgt gedaan worden.

Om te bepalen of een zeker, uitgekozen vierkantje zijn kleur moet behouden of van kleur moet veranderen laten we zijn burens stemmen.

Voorbeeld. Zie figuur 35 en 36.

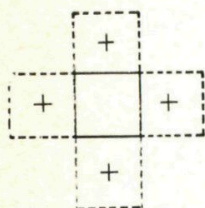


Fig. 35

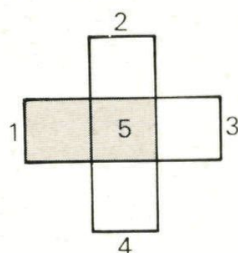


Fig. 36

'-' betekent: het vierkantje stemt tegen zijn eigen kleur.
('+': voor eigen kleur).

In deze situatie stemt:

vierkantje 1 voor wit
vierkantje 2 voor zwart
vierkantje 3 voor zwart
vierkantje 4 voor zwart.

Totaal drie zwarte stemmen tegen 1 witte stem. De stembusuitslag is zwart, d.w.z. vierkantje 5 moet zwart worden. (Als we uitgegaan waren van een zwart vierkantje 5 dan behield dit dus zijn kleur.)

We gaan weer terug naar figuur 28, onze chaos.

Als we genummerde vierkantjes gebruiken dan is het tableau in willekeurige volgorde genummerd. We gebruiken nu de 25 vierkantjes in het midden. De nummers van de buitenkant zijn voor het gemak weggelaten. We behandelen nu vierkantje 1 op de boven beschreven wijze, daarna vierkantje 2 enz., tot alle 25 geweest zijn.

Door alle vierkantjes zo te behandelen worden sommige van kleur veranderd, andere behouden hun kleur. Het blijkt nu dat we regelmaat hebben gekregen. We kunnen nu alle vierkantjes nog eens de revue laten passeren enz., enz.

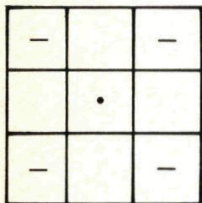
Nu zijn er de volgende mogelijkheden wat betreft het aantal aan te brengen veranderingen in iedere volgende ronde.

- a Het aantal is nul. Dan stoppen we het proces.
- b Het aantal is groter of gelijk aan het aantal in de vorige ronde. Dan stoppen we ook.
- c Het aantal is kleiner dan in de vorige ronde. Dan doen we nog een ronde. Dit herhalen we tot geval a of b ontstaat.

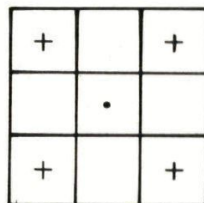
Als resultaat ontstaat een boeiend patroon.

Je begrijpt wel dat we de mooiste resultaten krijgen als we uitgaan van veel vierkantjes.

Een procédé zoals boven beschreven is dan ook niet meer met de hand uit te voeren. Men schakelt dan een computer in. Essentieel is echter dat we een eenvoudig recept, een algoritme hebben gevonden, waarmee een computer aan het werk kan gaan. Het resultaat kan dan zeer fraai worden. Andere patronen krijgen we natuurlijk door andere voor-
schriften te hanteren. Zie bv. figuur 37. Het gaat hierbij telkens om het middelste vierkantje. Figuur 37a en b is het recept dat toegepast op een chaos van zeer veel witte en zwarte vierkantjes na een aantal ronden figuur 27 heeft geproduceerd.



a Fig. 37a



b Fig. 37b

Bestudeer nu nog eens het proces dat aangegeven is in de figuren 28 tot en met 34.

Je kunt nu zelf gaan experimenteren bv. met 25 en 49 vierkantjes. Dit is nog net met de hand uit te voeren.

Bedenk zelf ook andere recepten.

Veel plezier.

Oplossing stralenraadsel

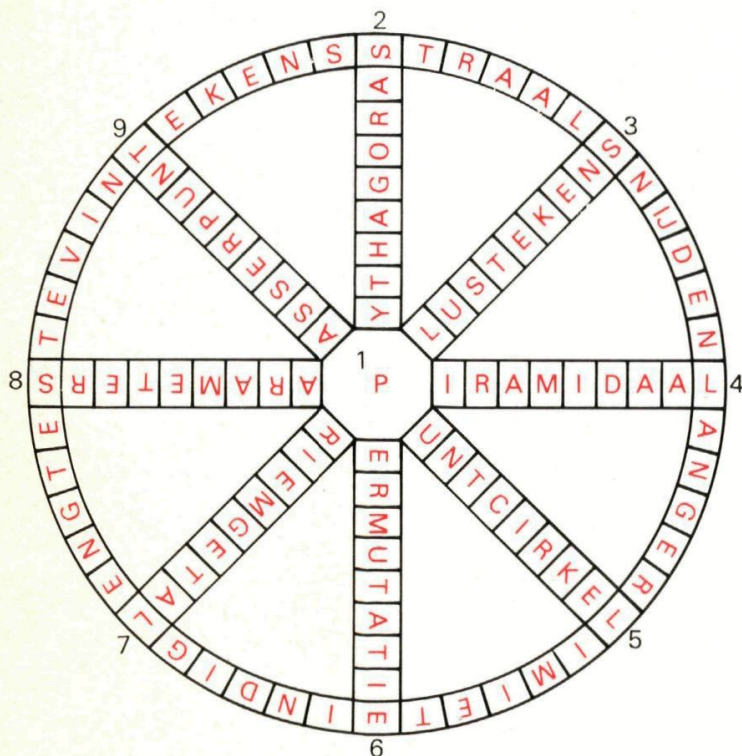


Fig. 38

De sleutel van Pi in 23 decimalen

Draai de pagina een kwart slag en kijk schuin over het papier, zodat alle lijnen sterk verkort gezien worden. Je leest dan een deel van een oud-Hollands versje. Het tweede deel van dit versje kun je lezen, als je de bladzijde weer een kwart slag terug draait.

Elk woord stelt nu een cijfer voor, namelijk het cijfer dat gevonden wordt door het aantal letters van het woord te tellen. Er is één uitzondering: voor het woordje Pi moet het cijfer 1 worden ingevuld.

In 23 decimalen is $\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 264$

Oplossingen Denkertjes uit nummer 5

40 Door bijv. de punten op de positieve y -as gaat geen lijn van het nomogram. Voor $x = 0$ gaat (1) over in $p^2 + y = 0$
 $y = -p^2 \cdot \notin \mathbb{R}^+$

41 Zie figuur d. Hieruit blijkt $a^2 + b^2 = 9$, $b^2 + c^2 = 16$,
 $c^2 + d^2 = 25$. Dus $9 - 16 + 25 = a^2 + d^2$, zodat $PD = 3\sqrt{2}$.

42 Na zeven 'schrikelperioden' van vier jaren, dus in
 $1974 + 28 = 2002$.

43 De gevraagde oppervlakte bedraagt $4 - (1 + 1 + \frac{1}{2}) = 1\frac{1}{2}\text{ cm}^2$.
 Fig. 29

44 $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1458$.

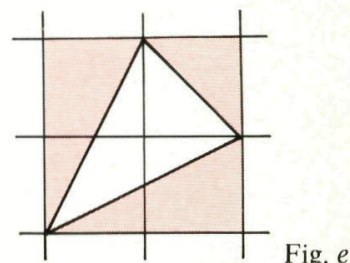
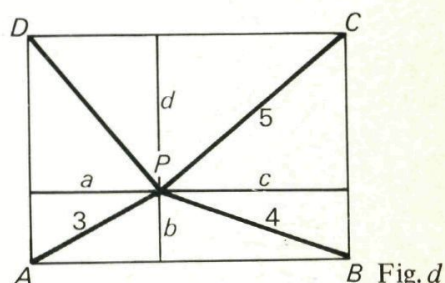
45 54352413215.

46 $x^3 = [x] + 3$, zodat x^3 een geheel getal moet zijn. Na enig proberen blijkt dit alleen 4 te kunnen zijn: $\sqrt[3]{4}$ is de enige wortel van deze vergelijking.

47 De vouw valt langs de middelloodlijn van een diagonaal: lengte diagonaal is 20 cm (Pythagoras), lengte halve vouw is 7,5 cm (gelijkvormigheid) dus lengte vouw is 15 cm.

48 Op het ogenblik, waarop nummer een over de finish gaat, heeft nummer twee 8 km gelopen en 2 km voorsprong op nummer drie gekregen. Nummer twee heeft dus bij de finish een voorsprong van $10 \cdot 2 : 8 = 2,5$ km.

49 $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 97 \cdot 103$ kan voor natuurlijke x en y alleen zo tot stand gebracht worden:
 $x + y = 97 \cdot 103$ en $x - y = 1$, dus $x = 4996$ en $y = 4995$;
 $x + y = 103$ en $x - y = 97$, dus $x = 100$ en $y = 3$.



Oplossingen Denkertjes uit nummer 6

- 50 Driekwart leegdrinken; het zwaartepunt ligt dan in de vloeistofspiegel.
- 51 Elke macht van een op 74 eindigend getal, die een even exponent heeft, eindigt op 76.
- 52 Het kwadraat begint met n cijfers 1, daarna komen $n-1$ cijfers 5 en tenslotte één 6.
- 53 Die waren er niet!
- 54 Zie figuur f
- 55 De rij van 20 pakjes heeft een breedte van $20 \times 9 = 180$ sigaretten, de rij van 25 pakjes heeft een breedte van $25 \times 7 = 175$ sigaretten. De eerste rij is dus zeker langer!
- 56 Aan drie kleuren heeft men genoeg.
- 57 Die hoeken zijn alle drie even groot.
- 58 $(20 + 25)^2 = 2025$ en $(30 + 25)^2 = 3025$.
- 59 De straal is gelijk aan 5.

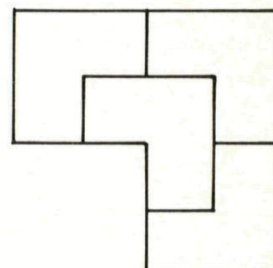


Fig. f .

Van de redactie

Ook deze jaargang heeft de redactie weer veel prettige reacties van lezers mogen ontvangen. Hartelijk dank daarvoor, plezierige vakantie en tot de volgende jaargang!

Winnaar van de lootprijs uit nummer 1: Jan Vink, Honselersdijk

Winnaar van de lootprijs uit nummer 2: José Derijcke, Hengstdijk

Winnaar van de lootprijs uit nummer 4 zal in het eerste nummer van de volgende jaargang worden bekend gemaakt.

Inhoud:

Cilinderkubus en cilinderkussen°	121
Rotator-8°	123
Restverwerking°°	125
Pi in code°	127
Raakschijven°	128
Wat zal dat worden°	136
Stralenraadsel°	137
Op een bok	138
Van kunstje tot kunst°	139
Oplossing stralenraadsel	142
De sleutel van Pi in 23 decimalen	143
Oplossingen van de Denkertjes uit nummer 5 en 6	143, 144
Van de redactie	144
Denkertjes	124, 130, 132, 133, 135

Zakelijke mededelingen

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. ELSENAAR, Harderwijk.

BRUNO ERNST, Amersfoort.

W. Kleijne, Heerenveen.

A. F. VAN TOOREN, Leusden-C.

G. A. VONK, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Drs. A. B. Oosten, Postbus 58, Groningen.

Artikelen en problemen, alsmede oplossingen van Denkertjes en prijsvragen kunnen naar het redactie-secretariaat worden gezonden.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 6 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, f 5,— per jaargang. Voor anderen f 7,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

