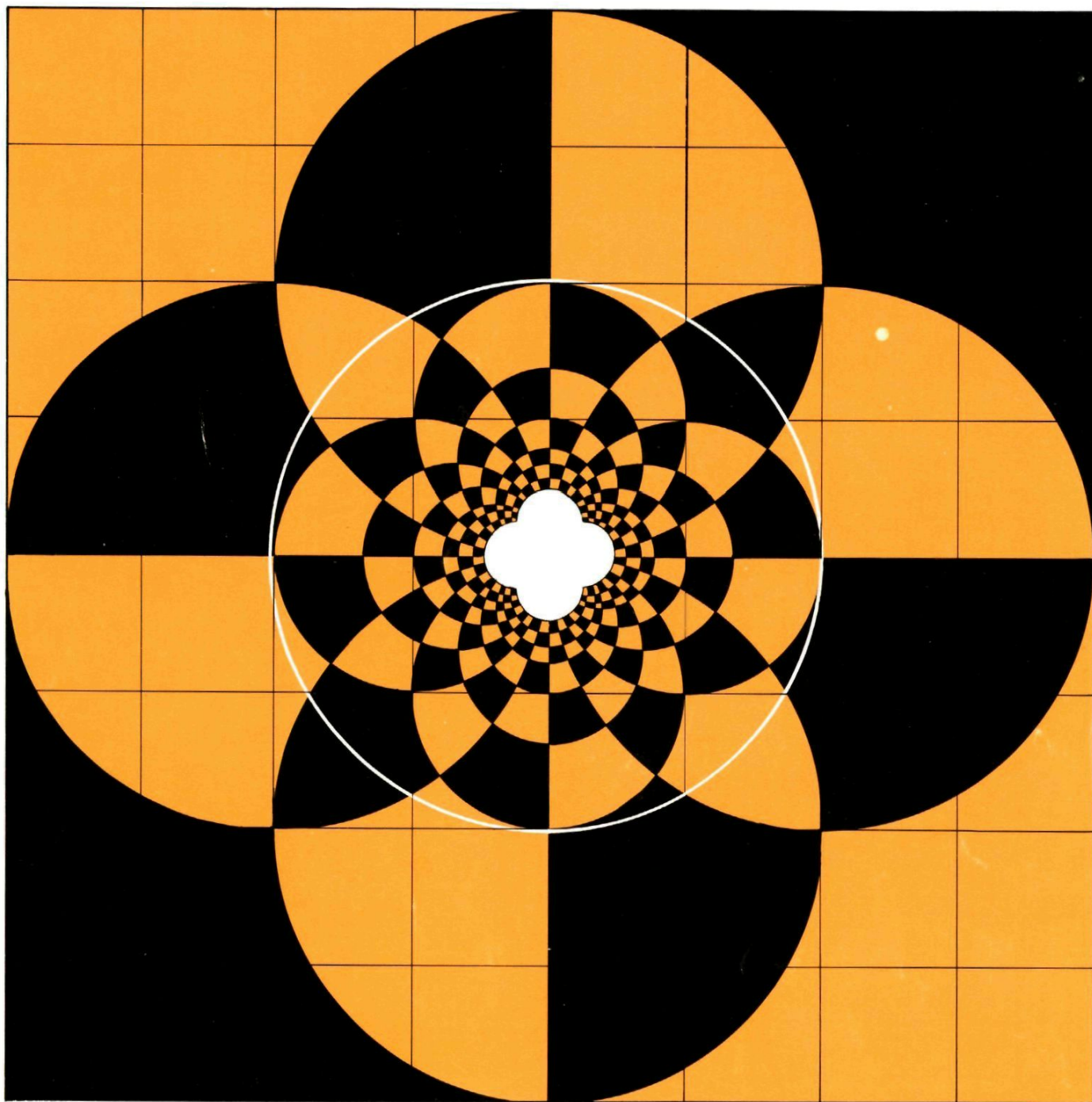


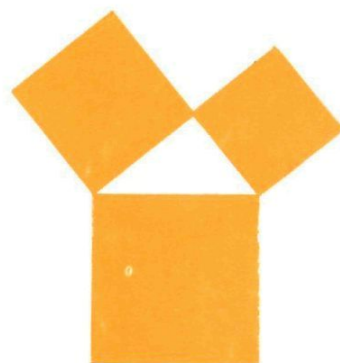


1

jaargang 14

wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff 1974



Pythagoras



EERSTE SCHOOLDAG: "En Liesje, hoeveel jaartjes ben jij al?.."

Bij de figuur op de omslag:

Een schaakbord 'binnenste-buiten' gekeerd. De lijnen van het oorspronkelijke schaakbord bakenen 64 vierkanten af. Eigenlijk zouden de vierkanten afwisselend zwart en wit moeten zijn.

De eroverheen liggende figuur is het binnenste buiten gekeerde schaakbord. Hier zijn de velden wel verschillend van kleur. De velden die in het oorspronkelijke schaakbord de hoekpunten vormden zijn nu vlak bij het midden gekomen; het centrum van het oorspronkelijke schaakbord strekt zich vanaf de rand van deze tekening uit tot in het oneindige. Zie het artikel op pagina 1.

°° Het schaakbord "binnenste-buiten"

Er is een afbeelding, die veel lijkt op wat we in het dagelijks leven 'binnenste-buiten-keren' noemen.

Deze afbeelding noemen we: inversie ten opzichte van een cirkel. Een interessant, en toch vrij eenvoudig probleem is: hoe ziet de inverse figuur van een schaakbord eruit; je ziet deze figuur op de omslag van dit nummer. De constructie is vrij eenvoudig, omdat de figuur die we willen inverteren bestaat uit twee stel evenwijdige lijnen, die loodrecht op elkaar staan. We hoeven dus alleen te weten wat de inverse figuur van een lijn is.

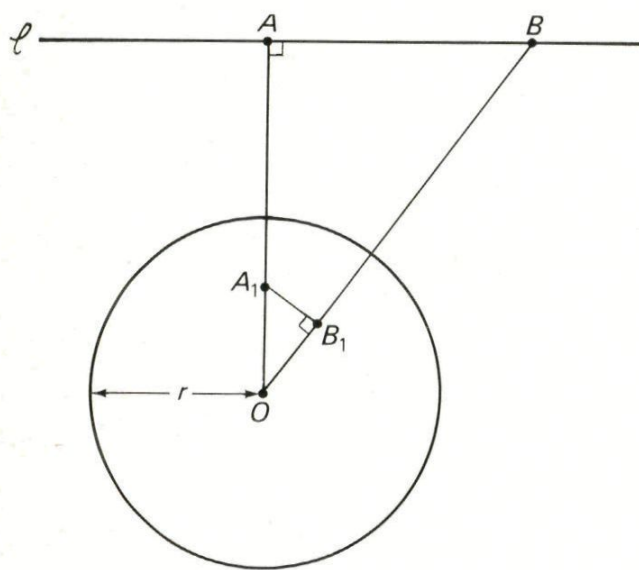


Fig. 1. $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = r^2$

De inverse figuur van een punt en een rechte

Gegeven een cirkel met middelpunt O en straal r (zie fig. 1), verder een rechte l met daarop de punten A en B ; $OA \perp l$.

We bepalen een punt A_1 waarvoor geldt:

$OA \cdot OA_1 = r^2$. Dit punt noemen we het inverse punt van A t.o.v. de cirkel.

We doen nu hetzelfde met B , en vinden B_1 . Uit $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = r^2$ volgt $OA : OB = OB_1 : OA_1$. Nu is $\triangle OAB \sim \triangle OB_1A_1$ en omdat $\angle A = 90^\circ$, is ook $\angle B_1 = 90^\circ$.

De inverse punten van A en B , nl. A_1 en B_1 liggen dus op een cirkel met OA_1 als middellijn. En omdat B een willekeurig punt van l is liggen de inverse punten van l alle op de cirkel met OA_1 als middellijn.



Denkertjes

1. Wat is de inverse figuur van een raaklijn aan de cirkel?
2. Wat is de inverse figuur van de cirkel zelf?

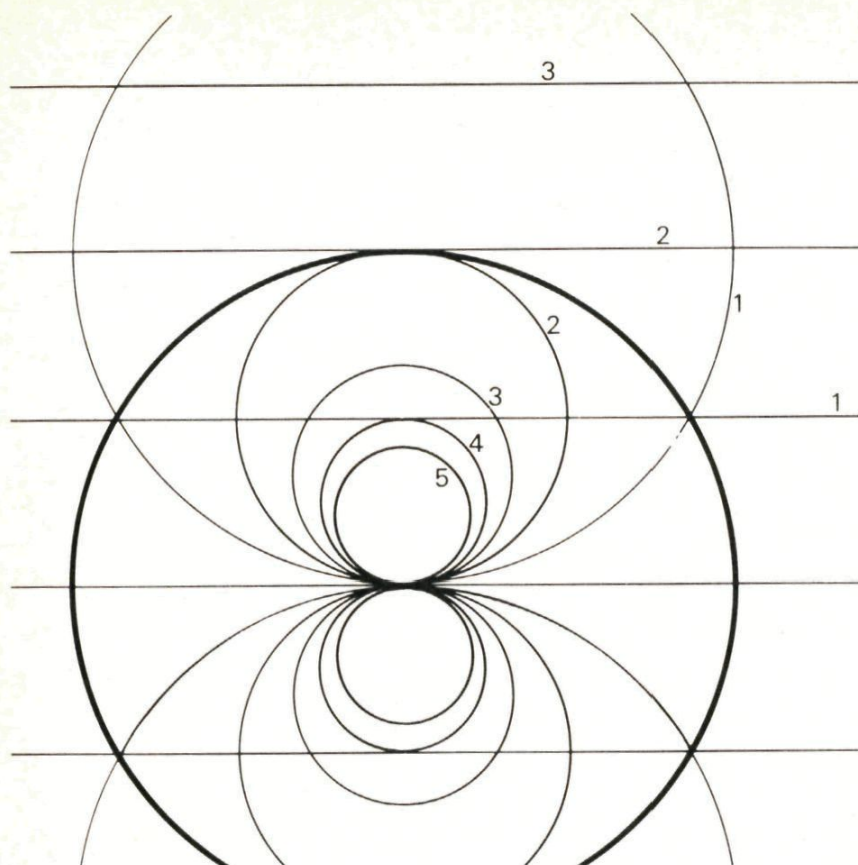


Fig. 2. De cirkels zijn de inverse figuren van de evenwijdige rechten.

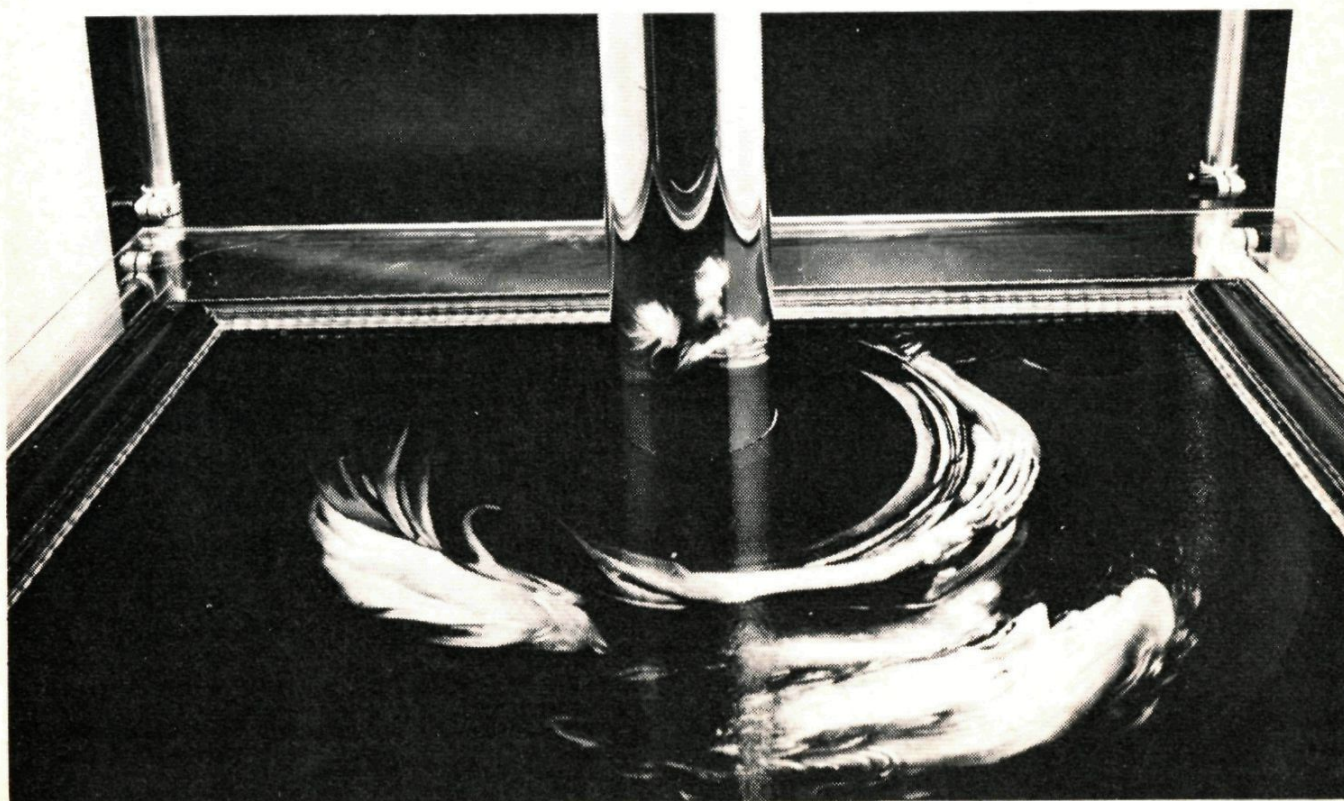
In fig. 2 zie je een stel evenwijdige lijnen op onderling gelijke afstanden (hier gelijk aan $\frac{1}{2}r$) en de inverse figuren daarvan. Figuren met hetzelfde getal aangeduid, zijn elkaars inversen.



Denkertje

3. Hoe verhouden zich de middellijnen van de cirkels?

Fig. 3. Een anamorfotisch schilderij: in de cylinderspiegel is de voorstelling onvervormd te zien.



De structuur van de figuur op de omslag is nu wel duidelijk. Je krijgt hem door over fig. 2 nog eens dezelfde figuur te tekenen, maar dan 90° gedraaid.



Denkertjes

4. Is het hele schaakbord op de omslag afgebeeld?
5. Is ook de hele inverse figuur van het schaakbord op de omslag weergegeven?
6. Waar vind je de inversen van de hoekpunten van het schaakbord?
7. Waarvan is het witte vlak, in de vorm van een klavertje vier, de afbeelding?

Anamorfotische afbeeldingen

In het Centraal Museum te Utrecht bevindt zich een schilderij, dat zo op het eerste gezicht een onduidelijk stilleven met vogelveren voorstelt. Als je echter in het midden een spiegelende cylinder loodrecht op het schilderij plaatst (fig. 3), dan zien we iets heel anders. Deze spiegeling in een cylindermantel heeft veel weg van de inversie die we hierboven bespraken. Als je zo'n cylinder op een schaakbord zet, zie je in de cylinder iets dat veel lijkt op de figuur op de omslag.

In de 18-de eeuw waren zulke prentjes (anamorfoten) erg in trek. In fig. 4 is er een gereproduceerd uit het Utrechtse Universiteitsmuseum. Kun je raden wat het voorstelt?



Fig. 4.

°Taximeetkunde

We denken ons een stad in met vierkante huizenblokken, zoals we in Amerika wel tegenkomen. Het is daar ook gebruikelijk om bijvoorbeeld de noord-zuid-verbindingen 'avenues' te noemen en de oost-west-verbindingen 'streets'. Om het nu maar in het Nederlands te houden: de plattegrond van onze denkbeeldige stad vertoont horizontaal straten en dwars daarop lanen.



In zo'n stad doet zich het merkwaardige voor, dat het begrip afstand anders is dan we in de meetkunde gewend zijn. We meten hier niet hemelsbreed maar langs de wegen. Een taxi die van E naar A gaat, zal een afstand van 9 huizenblokken afleggen. Als hij tenminste niet omrijdt. We nemen de lengte van een huizenblok als eenheid en mogen dus zeggen: de taxi-afstand EA is 9. Elke weg van E naar A , die geen omweg is, noemen we een taxiweg van E naar A . Er zijn verschillende taxiwegen van E naar A , maar ze hebben volgens afspraak alle de taxilengte 9. We krijgen als het ware een andere meetkunde, die we voor de aardigheid 'taximeetkunde' gedoopt hebben. In deze meetkunde kijken we voor de eenvoud naar geen andere punten dan kruispunten van wegen.

Je zou het beslist niet leuk vinden als we de verkenning door deze meetkunde gelijk helemaal zouden verklappen. Daarom kun je je eigen verkenningstocht uitstippelen aan de hand van een aantal opdrachten, waarvan de uitvoeringen vaak even verrassend als eenvoudig zijn. De oplossingen vind je in het volgende nummer aangegeven.

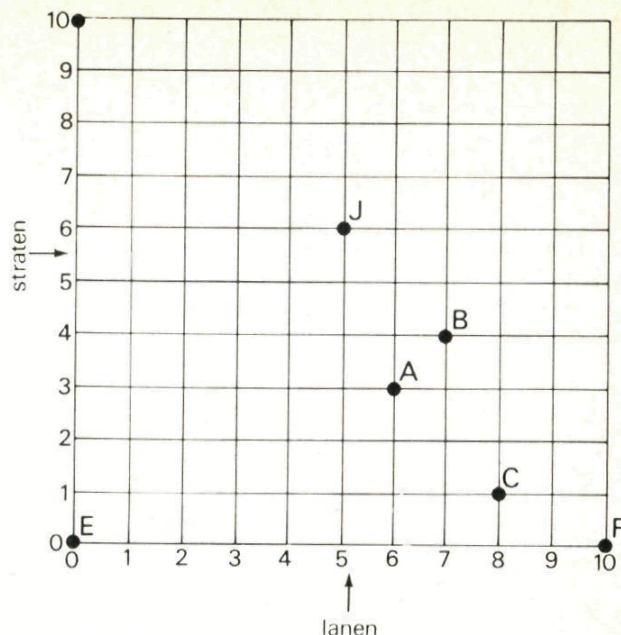


Fig. 1.

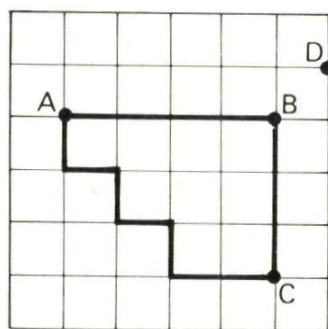


Fig. 2.



Denkertjes

8. Hoe groot is de taxi-afstand AF ?
9. Teken alle punten op een taxi-afstand 3 van A . Dit is dus een taxicirkel.
10. Teken voor zover mogelijk de punten op gelijke taxi-afstand van A en J . We zouden de verzameling van deze punten de taximiddelloodlijn kunnen noemen.
11. Hoeveel taxiwegen zijn er van A naar C ?
12. Teken de verzameling van de punten waarvoor de som van de taxi-afstanden tot de punten A en B gelijk is aan 6. Een soortgelijke verzameling heet in de 'gewone' meetkunde een ellips met brandpunten A en B .
13. Teken ook de taxi-ellips met brandpunten A en K en de som van de taxi-afstanden gelijk aan 6.
14. Kun je ook een taxi-ellips vinden met dezelfde brandpunten A en K , maar nu met een som van de taxi-afstanden gelijk aan 5?

Je zult wel gemerkt hebben dat cirkels, ellipsen en zelfs middelloodlijnen een heel ander uiterlijk hebben in de taxi-meetkunde dan we gewend zijn. In opdracht 14 zul je ervaren hebben dat niet alles uitvoerbaar is in onze taximeetkunde. We komen hierop nog terug.

Nu we al zoveel figuren hebben ontdekt in de plattegrond, willen we het eens hebben over de taxidriehoek. Drie hoekpunten kiezen lijkt niet moeilijk, maar wat zijn nu eigenlijk de zijden? Er zijn immers

vaak vele taxiwegen van het ene hoekpunt naar het andere. We spreken het volgende af. De drie hoekpunten mogen niet op één taxiweg liggen, overeenkomstig de gewone meetkunde waarbij de drie hoekpunten niet op één rechte mogen liggen. De keuze van de taxiwegen voor de zijden is vrij. Bij drie gegeven hoekpunten zijn er verschillende driehoeken te tekenen. In Figuur 2 is ABC geen taxidriehoek, want B ligt op de taxiweg van A naar C .



Denkertjes

15. Is er een taxidriehoek ABD ? En een taxidriehoek ACD ?
16. Teken in de plattegrond een taxidriehoek met zijden 3, 4 en 5.
17. Teken in de plattegrond een gelijkzijdige taxidriehoek met zijden 6.
18. Teken in de plattegrond een gelijkzijdige taxidriehoek met zijden 3.

Aan opdracht 18 zul je, net zoals aan opdracht 14, hebben gemerkt dat niet alles mogelijk is in de taximeetkunde. Is de oorzaak van de problemen in beide opgaven dezelfde? In opgave 14 moest er om een punt P van de ellips te vinden een driehoek PAK gevormd worden waarvan de taxi-omtrek gelijk is aan $5 + \text{taxilengte } AK = 9$. Dat bleek niet mogelijk. Taxi-omtrekken 12 (opdracht 16) en 18 (opdracht 17) waren weer wel mogelijk.



Denkertje

19. Probeer nog eens enkele omtrekkende bewegingen te maken, dat wil zeggen een taxirit die weer in het punt van uitgang terugkeert, en ontdek de stelling die hierover een uitspraak doet.

Voor het bewijs van deze stelling voeren we nog coördinaten in op de gebruikelijke wijze en bovendien taxi's waarin een blokkenteller de afgelegde taxiweg aangeeft. We noteren drie getallen: (laanummer, straatnummer, afgelegde weg). De rit in de figuur hiernaast kan dus weergegeven worden door $(0, 0, 0)$ $(1, 0, 1)$

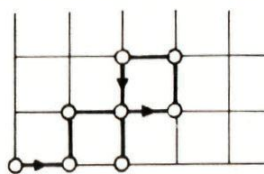


Fig. 3.

(1, 1, 2) (2, 1, 3) (3, 1, 4) (3, 2, 5)
 (2, 2, 6) (2, 1, 7) en (2, 0, 8). Wat zien we
 hieraan? Na elke bloklengte wordt de
 blokkenteller (laatste getal) 1 groter en
 verandert één van de eerste twee getallen
 (maar niet beide) met 1. De som van de
 drie getallen wordt bij elke stap of 2 gro-

ter of niet gewijzigd. Omdat de som van
 de getallen bij de start even (namelijk 0)
 is, blijft dit ook zo tijdens de rit. Een
 rondrit die na een afgelegde taxiweg s
 weer in $(0, 0)$ uitkomt, heeft als laatste
 drietal $(0, 0, s)$, waarvan de som even moet
 zijn. Dus ook s is even.



Denkertjes

20. Bewijs dat twee punten op een oneven taxi-afstand van elkaar geen taxi-middelloodlijn hebben.
21. In een klein stadje met 5 straten en 5 lanen rijdt een taxi van A naar het diagonaal tegenover liggende hoekpunt B (zie figuur 4) en doet daarbij alle 25 punten precies éénmaal aan. Teken een mogelijke route. Wat is de totale taxi-afstand hierbij afgelegd?
22. Probeer hetzelfde eens in een stadje van 4 straten en 4 lanen.

We bekijken het laatste probleem iets algemener en weer met behulp van coördinaten. A krijgt coördinaten $(0, 0)$. Als er n lanen en n straten zijn is B het punt $(n - 1, n - 1)$. De taxi die elk van de n^2 punten precies éénmaal aandoet, legt daartussen $n^2 - 1$ bloklengten af. In een drietal genoteerd:

$$(n - 1, n - 1, n^2 - 1).$$

De som hiervan moet, zoals bekend, even zijn. Dus $n^2 + 2n - 3$ moet even zijn. Dus moet tenminste één van de factoren van de ontbinding $(n + 3)(n - 1)$ even zijn, waaruit volgt dat n oneven is. We kunnen het oplossen van opdracht 22 dus wel vergeten. Het is alleen bij een vierkant met oneven aantal punten mogelijk al deze punten precies één maal aan te doen en daarbij het vierkant diagonaalsgewijs over te steken.

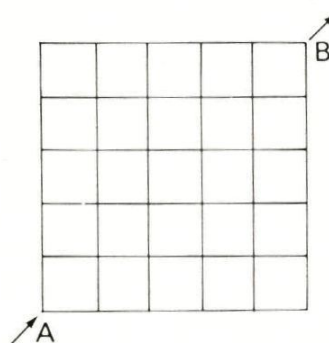


Fig. 4.



Op weg naar de snijding van twee bergwanden. Mount Kinley – Alaska.

°° Snijpuntbepaling, werk voor de computer

Het bepalen van het snijpunt van twee rechten is vrij eenvoudig. De waarden voor de coördinaten van het snijpunt worden gevonden door de vergelijkingen van de beide rechten op te lossen.

Zo betreft het in fig. 1 de lijnen $y = 7 - x$ en $y = 12 - 2x$. Gelijktelling geeft $7 - x = 12 - 2x$ ofwel $x = 5$. Invulling geeft dan $y = 2$. Het snijpunt S van de lijnen heeft dus de coördinaten $(5, 2)$. Niet erg ingewikkeld.

De moeilijkheid is echter dat niet alle vergelijkingen oplosbaar zijn.

Als je bijvoorbeeld zoals in fig. 3 het snij-

punt wilt bepalen van de kromme $y = \frac{1}{10}x^3$ en de rechte $y = 4x - 8$, dan gaat het niet meer zo eenvoudig.

Langs een omweg kunnen we echter de coördinaten van het snijpunt zo nauwkeurig bepalen als we zelf wensen. We gebruiken dan benaderingsmethoden.

De Fransman Descartes paste ze al rond 1630 toe om derde en hogere graads vergelijkingen op te lossen.

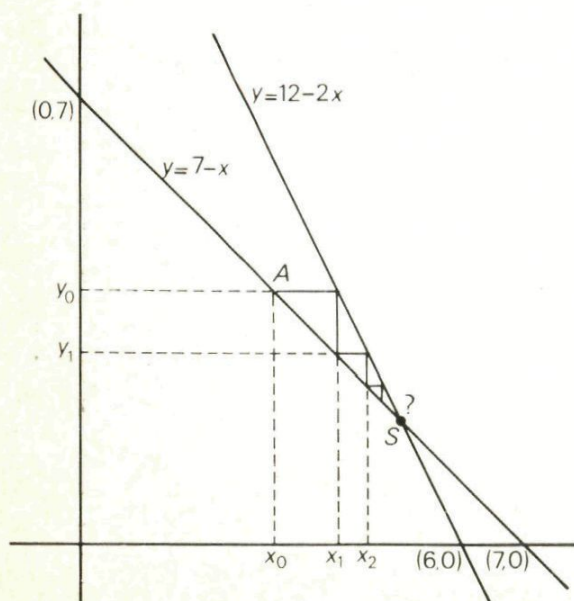
Alleen wij in onze dagen hebben computers ter beschikking om werkwijzen waarbij bepaalde bewerkingen voortdurend herhaald moeten worden, versneld uit te voeren.

Maar ze moeten dan wel juist geprogrammeerd zijn. Hoe dan wel?

We gaan het proces eens bekijken in fig. 1.

We nemen een punt A op de rechte $y = 7 - x$, met coördinaten (x_0, y_0) bijv. $(3, 4)$. Vanuit dit punt steken we horizontaal over naar de andere rechte. Het komt hierop neer dat we de waarde $y = 4$ invullen in $y = 12 - 2x$ en dan x berekenen. Daartoe kunnen we deze rechte beter schrijven als $x = 6 - \frac{1}{2}y$. We vinden dan $x_1 = 4$. We dalen nu weer vertikaal af naar de andere lijn. Door wederom $x_1 = 4$ in te vullen, vinden we $y_1 = 3$. We gaan op deze manier alsmaar verder. We dalen als het ware als een alpinist af in een kloof op zoek naar het snijpunt van twee lijnen.

Fig. 1. Snijpunt van twee rechten.



$x = 6 - \frac{1}{2}y$	$y = 7 - x$
$x_0 = 3$	$y_0 = 4$
$x_1 = 4$	$y_1 = 3$
$x_2 = 4,5$	$y_2 = 2,5$
$x_3 = 4,75$	$y_3 = 2,25$
$x_4 = 4,875$	$y_4 = 2,125$
$x_5 = 4,9375$	$y_5 = 2,0625$
$x_6 = 4,96875$	$y_6 = \dots\dots$
$x_{00} = 5,00000$	$y_{00} = 2,00000$

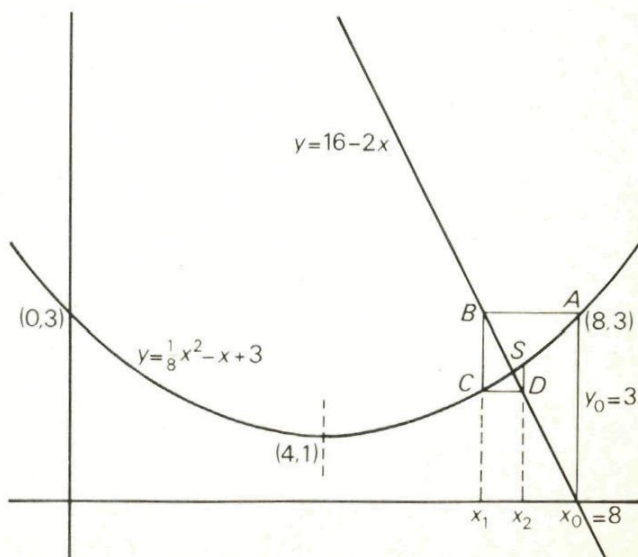
Met behulp van de tabel in fig. 1 kun je het proces nu wel verder volgen. Na oneindig veel treden afgedaald te zijn, naderen we het snijpunt met coördinaten $(5, 2)$.

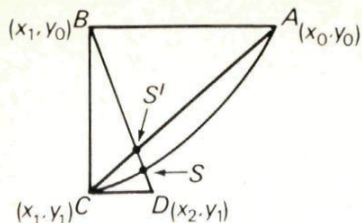
We gaan deze werkwijze eens toepassen op een spannender geval. In fig. 2 snijden elkaar de parabool $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$ en de rechte $y = 16 - 2x$. De coördinaten van het snijpunt worden gevonden door op te lossen:

$$\frac{1}{8}x^2 - x + 3 = 16 - 2x$$

Het is ook mogelijk deze vergelijking exact op te lossen, maar we gaan weer aan de slag met de benaderingsmethode. De oplossing ligt in de buurt van $x = 8$. Daarom starten we op de parabool met het punt A met coördinaten $(8, 3)$. We steken

Fig. 2. Snijpunt van rechte en parabool.





$x = 8 - \frac{1}{2}y$	$y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$
$x_0 = 8$	$y_0 = 3$
$x_1 = 6,5$	$y_1 = 1,7812$
$x_2 = 7,10937$	$y_2 = 2,2085$
$x_3 = 6,8957$	$y_3 = 2,0482$
$x_4 = 6,9759$	$y_4 = \dots$
$\vdots$	$\vdots$
$x_{00} = 6,9544$	$y_{00} = 2,0912$

horizontaal over naar de rechte en bereken aldus $B(6\frac{1}{2}, 3)$. Weer invullen in de andere vergelijking doet ons belanden in $C(6\frac{1}{2}; 1,7812)$.

De wandeling die we op deze manier gaan maken is van een ander karakter dan in fig. 1. We maken nu een omtrekkende beweging waarbij we het snijpunt steeds meer insluiten, zoals jagers wild vangen.

Waardoor ontstaat het verschil in werkwijze in de figuren 1 en 2? In fig. 1 hebben beide lijnen een negatieve richtingscoëfficiënt, terwijl in fig. 2 parabool en rechte in het snijpunt S tegengestelde richtingscoëfficiënten hebben.

Je moet nog op iets anders letten: het kan gebeuren dat je bij dergelijke benaderingsmethoden een beweging maakt, waarbij je juist steeds verder van het gezochte snijpunt afraakt. Je moet dan de volgorde wijzigen.

Je zult begrijpen dat het uitstekend mogelijk is om dergelijke processen te programmeren. Een computer werkt nauwkeurig en vlot. Zo kunnen we in korte tijd de beschikking krijgen over net zoveel decimalen van de oplossing als we maar willen hebben.

Voor diegenen die tweede graads vergelijkingen kunnen oplossen is het mogelijk het snijpunt direct te bepalen

$$\frac{1}{8}x^2 - x + 3 = 16 - 2x$$

$$x^2 - 8x + 24 = 128 - 16x$$

$$x^2 + 8x - 104 = 0$$

$$x_S = \frac{-8 + \sqrt{(64 + 416)}}{2} =$$

$$= -4 + \sqrt{(16 + 104)} = -4 + \sqrt{120}$$

$$x_S = -4 + 10,9544 = 6,9544 \text{ waarbij}$$

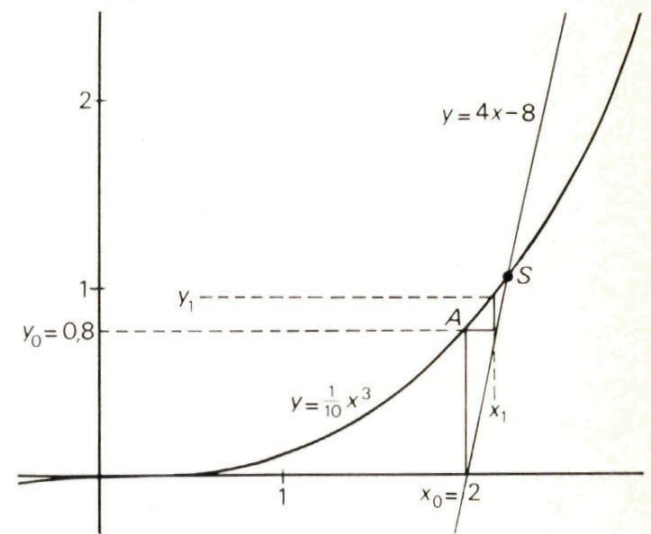
$$y_S = 2,0912$$

We zouden sneller opgeschoten zijn als we gestart waren met $x = 7$. Het snijpunt blijkt dicht te liggen bij $(7, 2)$.

Er is nog een trucje om het proces verder te versnellen. Kijk eens in fig. 2 naar de ligging van de punten A , B , C en D . Ze vormen een trapezium $ABCD$ en het gezochte snijpunt S ligt nu heel dicht bij het snijpunt S' van de diagonalen van het trapezium $ABCD$.

Het is mogelijk een formule af te leiden

Fig. 3. Snijpunt van rechte en derdegraadskromme.



$x = \frac{1}{4}y + 2$	$y = \frac{1}{10}x^3$
$x_0 = 2$	$y_0 = 0,8$
$x_1 = 2,2$	$y_1 = 1,0648$
$x_2 = 2,2662$	$y_2 = 1,1638$
$x_3 = 2,2909$	$y_3 = 1,2023$
$x_4 = 2,3006$	$y_4 = 1,2176$
$x_5 = 2,3044$	$y_5 = 1,2237$
$\vdots$	$\vdots$
$x_{00} = ? ?$	$y_{00} = ? ?$

(misschien kun je dat zelf) die de ligging van S' aangeeft:

$$x_{S'} = \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 + x_2 - 2x_1}$$

Als je de betreffende waarden invult, vind je:

$$x = \frac{8 \cdot (7,10937) - (6,5)^2}{8 + 7,10937 - 2 \cdot 6,5} = \frac{14,6250}{2,10937} = 6,93334$$

Zoals je kunt zien naderen we op deze manier het echte snijpunt wel met rasse schreden.

Tenslotte willen we de benaderingsmethode nog eens toepassen op een lastiger probleem.

We zoeken als voorbeeld de oplossing van de derde graads vergelijking:

$$\frac{1}{10}x^3 - 4x + 8 = 0$$

Je kunt de vergelijking ook zo schrijven:

$$\frac{1}{10}x^3 = 4x - 8$$

De oplossing van deze vergelijking is de x -waarde behorende bij het snijpunt S van de rechte $y = 4x - 8$ en de kromme $y = 0,1x^3$. In fig. 3 is deze situatie getekend. Uit de tekening blijkt al snel dat x iets groter is dan 2. We starten daarom met het punt A op de kromme met coördinaten $(2; 0,8)$. Als je $y_0 = 0,8$ in de lijnvergelijking invult, vind je $x_1 = 2,2$. Je kunt de lijnvergelijking dus beter schrijven als $x = \frac{1}{4}y + 2$. Weer invullen in de andere vergelijking geeft $y_1 = 1,0648$ enz. Je kunt het proces zelf wel verder volgen in de tabel van fig. 3.

Een kleine zakcomputer is nu wel erg handig om de ingewikkelde derde mach-

ten telkens te berekenen.

Na enkele stappen krijg je een eerste benadering van het gezochte snijpunt en wel $x = 2,3$ en $y = 1,2$.

Je kunt met herhalen doorgaan zolang je maar wilt.

Praktisch gesproken is de moeilijke vergelijking dan opgelost.

We kunnen een computer programmeren op het oplossen van vergelijking

$$0,1x^3 - 4x + 8 = 0$$

Zoals de tabel aantoont komt het proces op het volgende neer:

$$\text{stel } x_0 = 2$$

zet dit geval in de derde macht

vermenigvuldig de uitkomst met 0,1

vermenigvuldig dan met $\frac{1}{4}$ tel er 2 bij op

zo krijg je de benaderde uitkomst x_1

zet dit weer in de derde macht enz.

Men noemt dergelijke handelingsvoorschriften 'algoritmen'. Ze vervullen dezelfde taak bij het rekenen als breipatronen bij breien.

Een nieuwe benadering voor de onbekende volgt uit een voorgaande, dus:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4} \cdot 0,1 x_n^3 + 2 \quad \text{of}$$

$$x_{n+1} = 0,025 x_n^3 + 2$$

Je begint dan met $x_0 = 2$ te nemen, vervolgens vind je dan $x_1 = 2,2$ $x_3 = 2,6662$ enz. Hoe verder je doorgaat des te beter de benadering.

De algoritme geeft dus het recept om vanuit een zekere benaderde uitkomst de volgende (betere) te vinden.

De hier beschreven oplossingswijze van vergelijkingen is een van de vele mogelijke herhalings- of iteratiemethoden. Er zijn nog vele andere (o.a. door Newton) ontwikkeld.



Denkertje

23. Probeer zelf de algoritmen van de beide eerste voorbeelden in een soortgelijke vorm te noteren.

°Variaties op veelhoeken: lijnen, banden en ringen

Uit regelmatige veelhoeken kun je, met enig creatief vermogen, een rijk assortiment van nieuwe figuren ontwerpen. Dergelijke geometrische patronen komen we in allerlei ornamenten tegen.

We zullen onszelf hierbij de volgende spelregels stellen: doorloop de hoekpunten van een regelmatige veelhoek in een willekeurig te kiezen volgorde, waarbij je elk hoekpunt slechts eenmaal mag passeren, zodat de figuur komt te bestaan uit één in zich gesloten lijn; alleen vormen met enige symmetrie zijn toegestaan.

We zouden moeten beginnen met de regelmatige driehoek, maar hierop zijn geen variaties mogelijk.

Bij de vierhoek lukt één variatie: de zandloper (fig. 1).

De vijfhoek biedt op deze wijze 4 structuren, de zeshoek 11. Bij de zeshoek zijn er hier maar 6 van getekend. Probeer nu zelf de resterende 5 te ontwerpen. Van de zevenhoek zijn er al 24 exemplaren (waarvan 18 getekend). De achthoek heeft er 67 enz. We zullen ons met het bepalen van deze aantallen verder niet bezig houden.

Met enige fantasie herken je natuurlijke vormen als een bloem, een kikker, een ster.

Men kan dergelijke patronen als men wil rubriceren, aldus: 1 betekent een zijde, 2 de kortste diagonaal, 3 de dan in lengte volgende diagonaal enz.

driehoek	vierkant	vijfhoek
111	1111	11111
	1122	11122
		11222
		22222
zeshoek		
111111	112222	
111122	112233	
111133	122223	
111223	122333	
111333	222233	
	enz.	

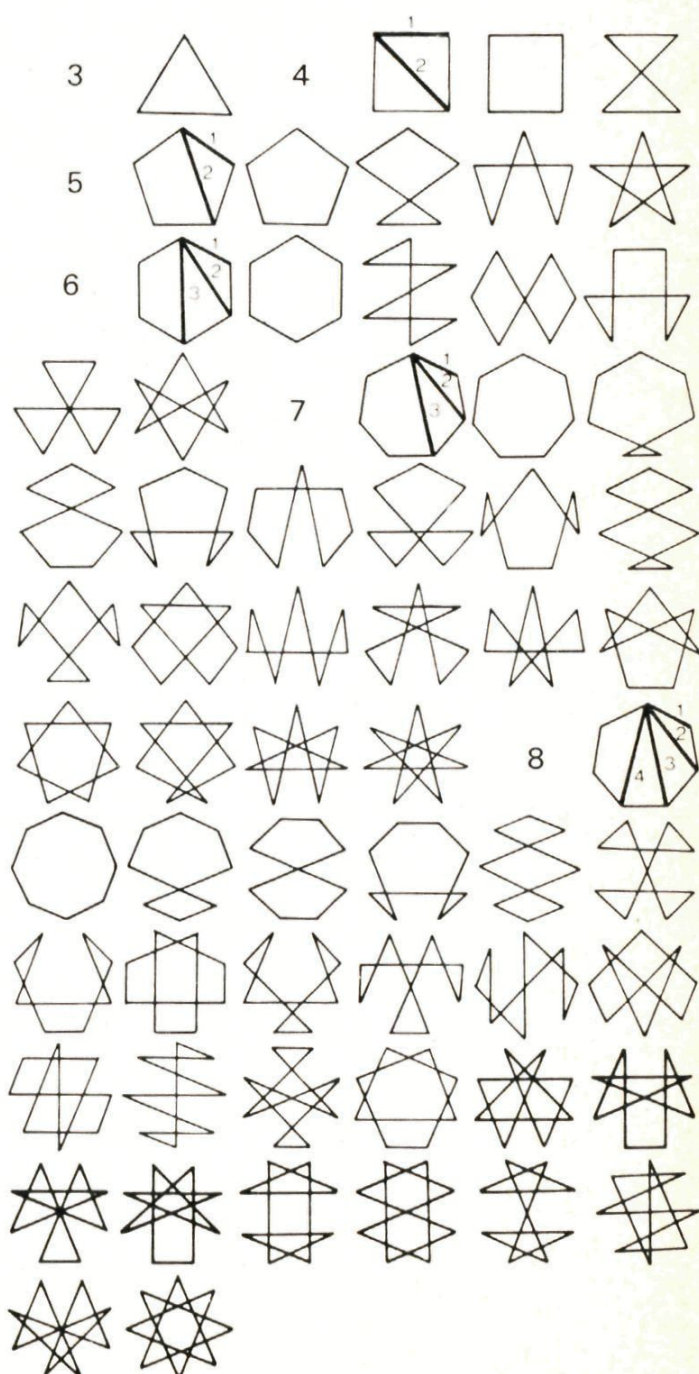


Fig. 1. Symmetrische variaties op veelhoeken.

We kunnen het spel nog boeiender maken door aan deze platte lijnvormige figuren relief te geven; dit gelukt door de zijden te verbreden en als banden in elkaar te vlechten.

Deze figuren zijn bijzonder fraai (fig. 2). Probeer de overeenkomstige basisfiguren

in fig. 1 terug te vinden. Bij vergelijking zul je merken hoeveel gevarieerder, hoeveel levendiger ze zijn geworden.

We gaan nog een stap verder. De bedoeling is uit de veelhoeken ringvormige patronen af te leiden.

Neem allereerst maar weer de variatie op

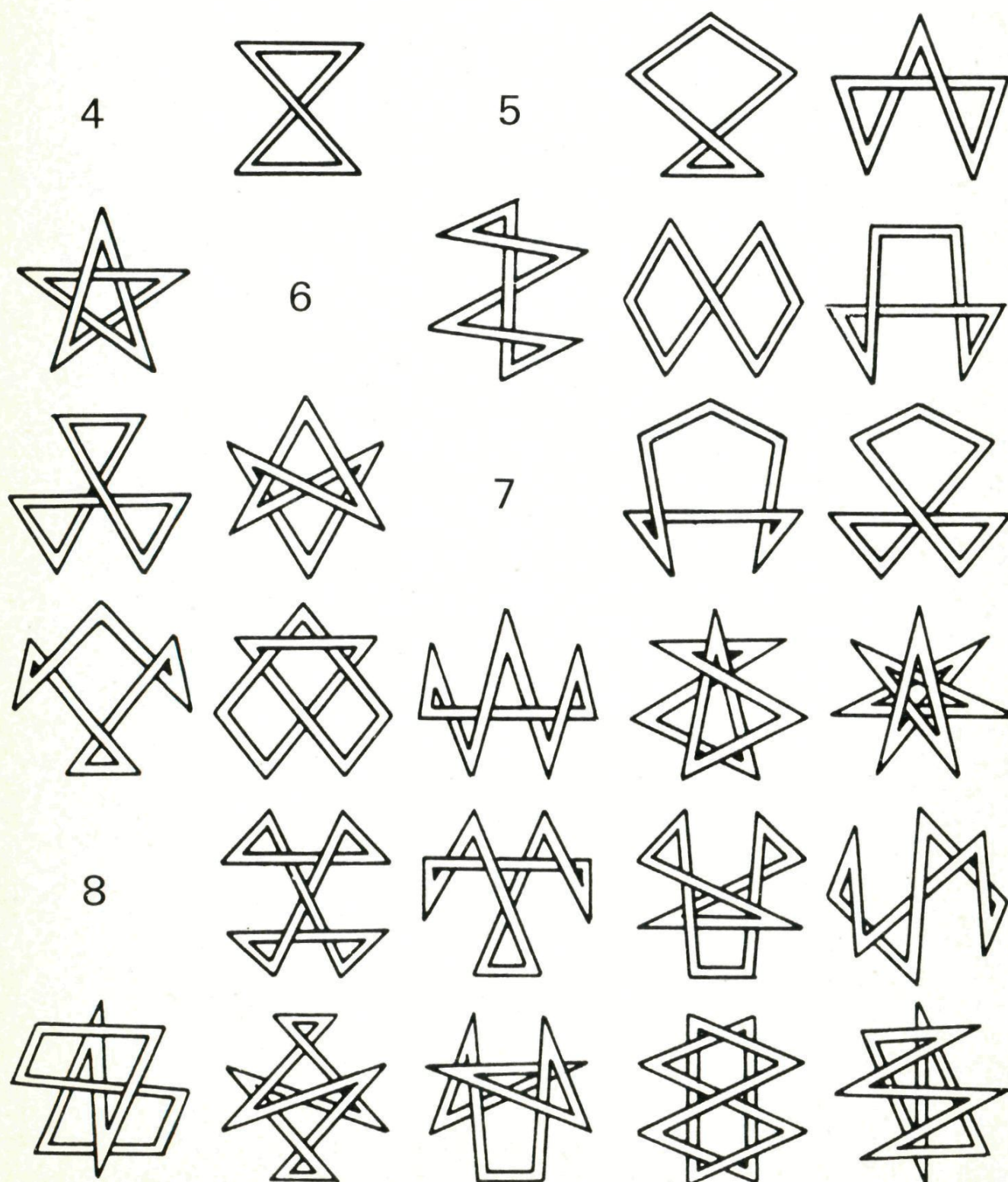


Fig. 2. Variaties op figuren in gevlochten bandvorm.

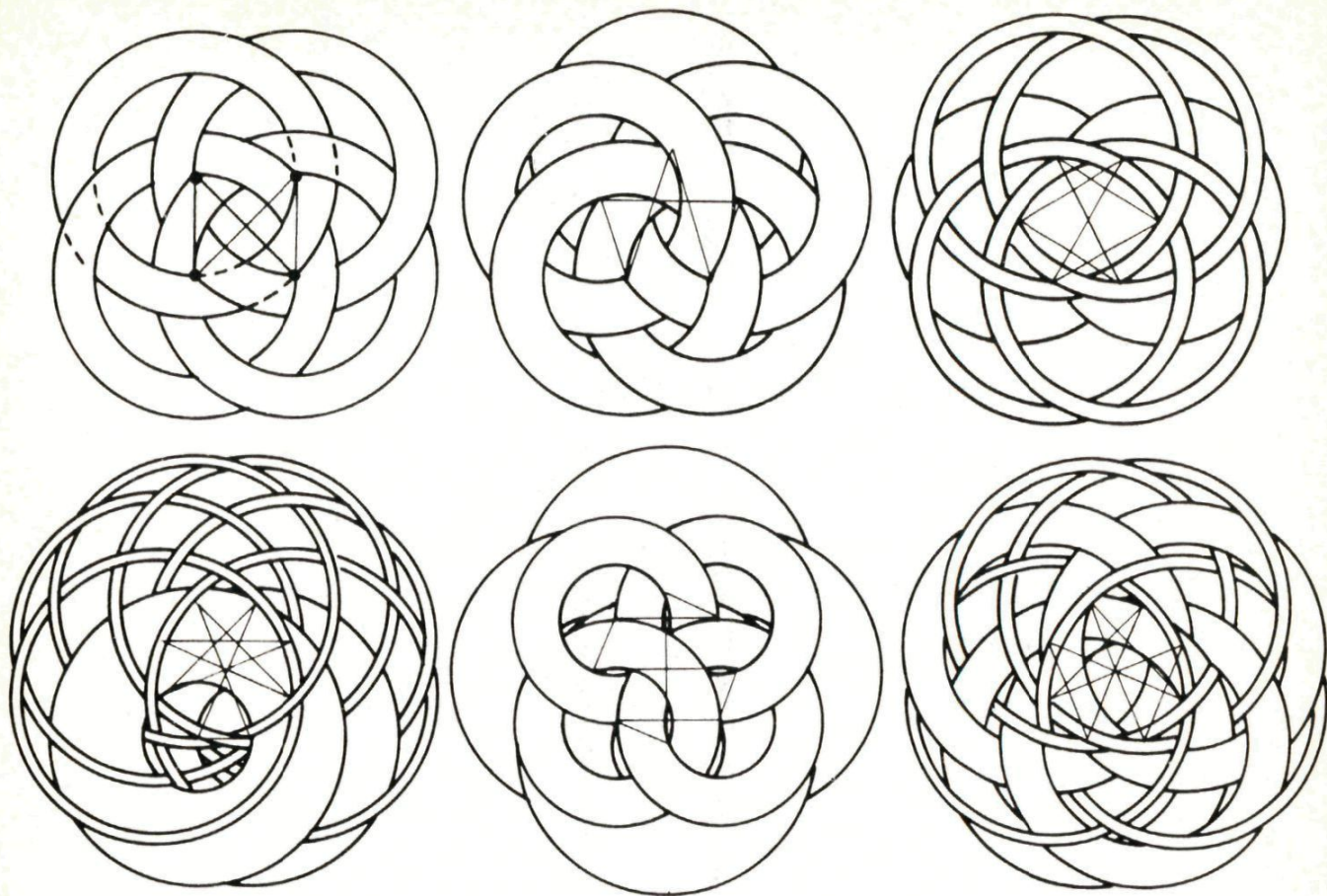


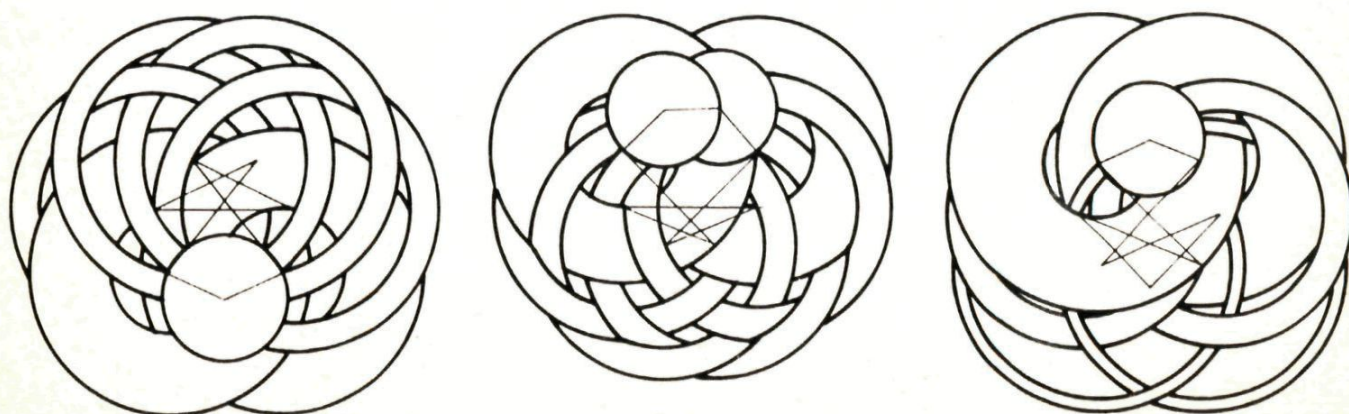
Fig. 3. Variaties op figuren in gevlochten ringvorm.

het vierkant: de zandloper (fig. 3). We spreken nu af dat we cirkels gaan tekenen met de hoekpunten van de veelhoek als middelpunt en straallengten overeenkomstig de getekende zijden en diagonalen. Op deze wijze ontstaan ringen die daarna nog ingenieus in elkaar gevlochten moeten worden.

Je kunt hier eindeloos mee doorgaan. In fig. 3 staan maar een paar willekeurige voorbeelden.

Ga nu zelf eens aan het werk. Neem een regelmatige veelhoek (begin eenvoudig), maak een lijnvormige variatie, dan een bandvormige. Probeer daarna een ringenstructuur.

Als je het al te moeilijk vindt, moet je eerst maar proberen een gegeven voorbeeld na te werken.



Met een 'eerlijke' munt iets onder twee personen verloten is eerlijk spel. Maar hoe zou je het onder drie personen met een munt moeten doen als je iets te verloten had? Bij voorbeeld: eerst tussen A en B loten met A voor kruis en B voor munt en dan de winnaar met kruis laten loten tegen munt voor C ?

Er zijn vier mogelijkheden:

kruis-kruis
kruis-munt
munt-kruis
munt-munt.

In het tweede geval wint C tegen A , in het vierde tegen B ; in 't eerste wint A , in 't derde B . Dus C heeft net zo veel kansen als A en B samen en dat is niet eerlijk.

Er zijn heel wat manieren om het anders te doen en hier volgt er één:

Er wordt met een eerlijke munt zolang gegooid tot voor het eerst *twee keer achter elkaar hetzelfde* valt, dus munt-munt of kruis-kruis. Het aantal worpen dat je hiervoor nodig hebt, kan variëren — dit hangt geheel van 't toeval af. Laten we dit aantal n noemen. Het *reglement voor loting* is nu als volgt: Bij n even en kruis-kruis in de laatste twee worpen, wint A . Bij n even en munt-munt in de laatste twee worpen, wint C .

Bij n oneven wint in elk geval B .

Is dit spel eerlijk, d.w.z. hebben A , B en C dezelfde kansen?

Als je zelf het antwoord wilt vinden, is dit het punt om Pythagoras even dicht te doen en na te denken.

Inmiddels begin ik met een ander verhaal. Je weet, dat onze getallennotatie tientallig is, maar je hebt zeker ook wel eens van andere talstelsels gehoord. Het belangrijkste — in computers veelvuldig toegepast —

is het tweetallige. Men doet het daar alleen met de cijfers 0 en 1 en op de plaats van de eenheden is zo'n 1 dan ook echt één waard. In het tientallig stelsel is een 1 op de volgende plaatsen naar links tien, honderd, duizend, . . . waard, telkens een faktor tien meer. In het tweetallig stelsel zijn de opeenvolgende waarden van zo'n 1 nu twee, vier, acht, . . . telkens een faktor twee meer. Dus:

tientallig	tweetallig
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
.	.
.	.
.	.

Natuurlijk kun je tweetallig ook achter de komma rekenen, de eerste plaats achter de komma telt $\frac{1}{2}$, de tweede $\frac{1}{4}$, de derde $\frac{1}{8}$, enz.

Dus bijvoorbeeld:

11,0110101

is op de gewone manier geschreven

$$2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} = 3\frac{53}{128}.$$

Op die manier krijgen we uiteraard alleen maar breuken met in de noemer een macht van 2. Voor de andere moeten we oneindige slierten van nullen en enen achter de komma toelaten, maar gelukkig kunnen we dan met repeterende volstaan.

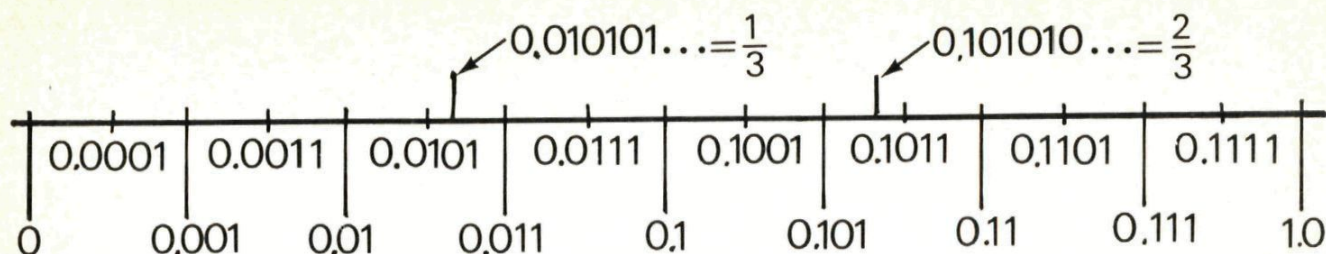


Fig. 1.

Bijvoorbeeld:

$\frac{1}{3} = 0,010101\dots$ dat wil zeggen:

repetendum 01

want stel

$0,010101\dots = x$,

vermenigvuldig dit met 4

$1,010101\dots = 4x$

trek af

$4x - x = 1$,

wordt

$x = \frac{1}{3}$.

Door van deze ontwikkeling voor $\frac{1}{3}$ het dubbele te nemen, krijgt men ook nog

$\frac{2}{3} = 0,101010\dots$ (10 repetent).

Ziehier (fig. 1) een liniaal, niet tientallig zoals gewoonlijk, maar tweetallig onderverdeeld, maar verbeeld je je deze verdeling dan ook nog onbegrensd voortgezet. Het punt $\frac{1}{3}$ wordt steeds nauwer ingesloten:

$$0,01 < \frac{1}{3} < 0,011$$

$$0,0101 < \frac{1}{3} < 0,0111$$

$$0,010101 < \frac{1}{3} < 0,0101011$$

En net zo vergaat het de $\frac{2}{3}$:

$$0,10 < \frac{2}{3} < 0,11$$

$$0,1010 < \frac{2}{3} < 0,01011$$

$$0,101010 < \frac{2}{3} < 0,101011$$

Terug naar het kruis-en-munt-spel. Om het wat korter te noteren, zeggen we 0 voor kruis en 1 voor munt. Een worpreeks

kruis munt munt kruis munt kruis

noteren we met nog een komma ervoor en vóór de komma een nul als

$0,011010$,

of zo je wilt, als $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{13}{32}$.

Iedere worpreeks wordt zodoende door een punt van onze liniaal gerepresenteerd en om nu tussen A , B en C te loten, kijken we naar de liniaal:

A wint het, als de worpreeks op de liniaal tussen 0 en $\frac{1}{3}$ valt,

B wint het, als de worpreeks op de liniaal tussen $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{3}$ valt,

C wint het, als de worpreeks op de liniaal tussen $\frac{2}{3}$ en 1 valt.

Je zult, dacht ik, toegeven dat dit een eerlijke verdeling is.

Dus bijvoorbeeld

$0,00 \rightarrow A$ wint

$0,0100 \rightarrow A$ wint

$0,011 \rightarrow B$ wint

$0,100 \rightarrow B$ wint

$0,1011 \rightarrow C$ wint

$0,11 \rightarrow C$ wint

en dat klopt opvallend met het reglement van loting in het begin van het verhaal.

Inderdaad zeggen de twee reglementen precies hetzelfde. Immers:

Eindigt het in een even aantal worpen met 00, dan krijgen we

$0,010101\dots0100 < 0,010101\dots0101\dots = \frac{1}{3}$, dus is het voor A .

Eindigt het na een even aantal worpen met 11, dan krijgen we
 $0,101010\dots1011 > 0,101010\dots1010\dots = \frac{2}{3}$, dus voor C .

Eindigt het na een oneven aantal worpen, dan is het

$0,0101\dots011$

of

$0,1010\dots100$

en dat is beide keren tussen

$0,0101\dots0101\dots = \frac{1}{3}$ en $0,1010\dots1010\dots = \frac{2}{3}$, dus voor B .

Dus beide reglementen leveren hetzelfde op en aangezien we het tweede als eerlijk erkend hebben, is het eerste het ook.

Als er nu nooit twee keer achter elkaar hetzelfde zou vallen — wat dan? Als de munt blijft doordrammen

kruis munt kruis munt kruis munt
of

munt kruis munt kruis munt kruis . . . ?

Hoe groot is de kans op nog geen beslissing na — zeg — 50 keer gooien?

Die kans is

$2 \cdot (\frac{1}{2})^{50}$,

en dat is zowat

1 op de duizendbillioen.

Als je rekent dat 50 keer kruis of munt gooien op zijn minst een minuut kost en in een milliard jaren zowat 500 billioen minuten zitten, begrijp je dat het uiterst onwaarschijnlijk zou zijn, als er na 50 keer gooien nog geen beslissing was gevallen.

Maar hoe lang zal het *gemiddeld* duren voor de beslissing valt?

Hoeveel keer zul je gemiddeld moeten opgooien, opdat twee keer achter elkaar kruis of twee keer achter elkaar munt valt?

Het is gemiddeld drie keer.

°° Grafiekenpapier

Meestal tekenen we grafieken van functies op z.g. millimeterpapier. Hierop brengen we dan 2 coördinaatassen aan. De lijntjes van het papier verdelen deze assen op regelmatige wijze. We zetten dan op onderling gelijke afstanden getallen bij deze assen: we brengen een schaalverdeling aan. Daartoe spreken we van te voren af hoe groot de afstand is tussen 2 op elkaar volgende natuurlijke getallen: hoe groot de eenheid zal zijn, b.v. een cm. Als we uitgaan van blanco papier, brengen we de roosterlijnen aan nadat we op de assen een schaalverdeling hebben gemaakt.

De beschreven handelwijze zullen we nu eens een wiskundig tintje geven. Beschouw de identieke functie

$f: t \rightarrow t$ met $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

Dus $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 2$, $4\frac{1}{5} \rightarrow 4\frac{1}{5}$ enz.

We zullen nu een op het eerste gezicht wat vreemde afspraak maken:

Teken een lijn en kies hierop een willekeurig punt, zet hierbij het getal 0. Kies nu de eenheidsafstand, b.v. de cm.

Zet nu de argumenten (de getallen uit het domein) van f bij de punten op de lijn zó dat de onderlinge afstand tussen deze punten bepaald wordt door de bijbehorende functiewaarden.

Dus:

De functiewaarde 1 zegt, dat de bijbehorende argumentwaarde 1 moeten plaatsen op 1 cm (gekozen eenheid) afstand van 0. De functiewaarde $2\frac{3}{4}$ toont, dat de bijbehorende argumentwaarde $2\frac{3}{4}$ op $2\frac{3}{4}$ cm afstand van 0 moet staan enz.

Wanneer we dit proces uitvoeren (voer het ook werkelijk uit!) dan zien we, dat het resultaat precies de gewone schaalverdeling oplevert. Waarom dan al deze poespas? We kunnen hetzelfde procédé nl. toepassen bij een andere dan de identieke functie.

Laten we dit dan nu eens doen met de log-functie. Dus met $g : x \rightarrow \log x$, do-

mein $g = \mathbb{R}^+$. Op de nog niet verdeelde as kiezen we een punt, waarbij we het getal 1 plaatsen.

argument	functiewaarde
0	0
1	1
2	2
$2\frac{3}{4}$	$2\frac{3}{4}$

$\left. \begin{array}{l} \text{verschil} \\ = 1 \end{array} \right\} \text{verschil} = 2$

Fig. 1.



Denkertje

24. In het vorige geval begonnen we met 0. Waarom nu met 1?

Neem bijv. de dm. als lengte-eenheid. We bepalen nu m.b.v. functie g de plaats van 2, 3, 4, 5 enz.

arg.	1	2	3	----	10	----	20	enz.
functiew.	$\log 1$ $= 0$	$\log 2$ $\approx 0,3$	$\log 3$ $\approx 0,5$		$\log 10$ $= 1$		$\log 20$ $\approx 1,3$	

Fig. 2.

Dat betekent dat we de 2 plaatsen bij het punt, dat $\approx 0,3$ dm van de 1 verwijderd is enz. We zeggen nu, dat we op deze lijn een logaritmische schaalverdeling hebben aangebracht. Als we twee onderling loodrechte lijnen ieder logaritmisch verdelen en we trekken de roosterlijnen, dan krijgen we z.g. dubbel logaritmisch papier (fig. 3). Enkel logaritmisch papier krijgen we door één as logaritmisch te verdelen en de andere as gewoon (fig. 4).

Toepassing.

Teken de grafiek van de relatie $ab = 10$ met $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$.

- Op 'gewoon' papier. Zet de waarden van a op de X-as, die van b op de Y-as. Bereken een aantal punten. We krijgen de grafiek van fig. 5.
- Op dubbellogaritmisch papier.
 $ab = 10 \Leftrightarrow \log(ab) = \log 10 \Leftrightarrow \log a + \log b = 1 \dots (1)$

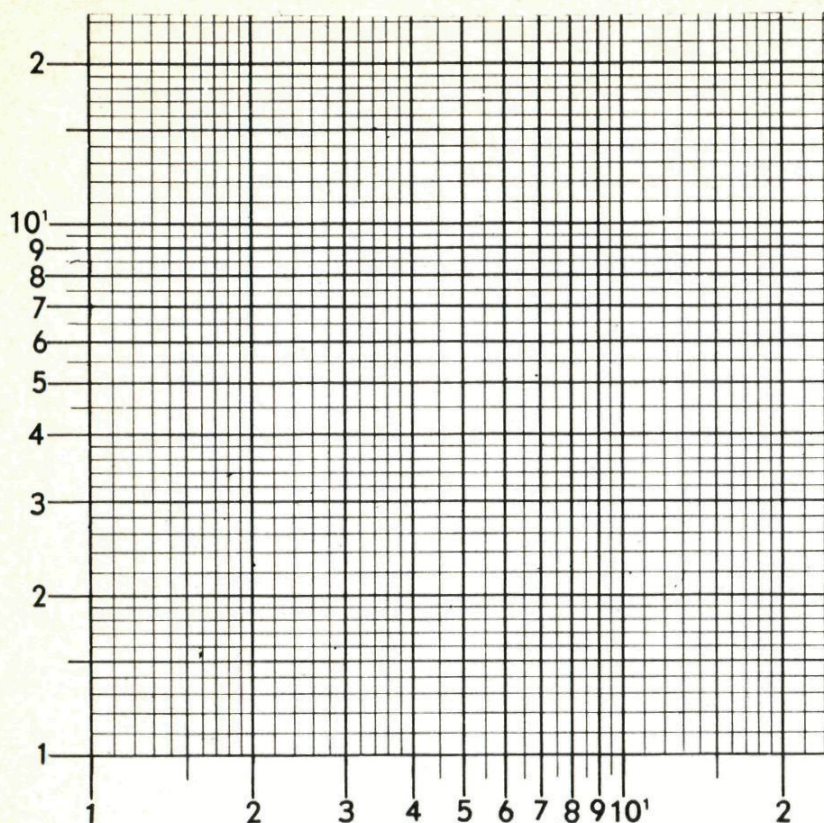


Fig. 3.

Vervang $\log a$ door x en $\log b$ door y .
 Dan gaat (1) over in $x + y = 1 \dots (2)$
 Daar bij dit papier $a \rightarrow \log a$, moeten
 we $a = 2$ zetten bij het punt 2 van de
logaritmisch verdeelde X -as en $b = 5$

bij 5 van de *logaritmisch* verdeelde
 Y -as. De punten van de grafiek die we
 nu krijgen, liggen alle op een rechte
 lijn. Dit zien we aan vergelijking (2):
 een lineaire vergelijking (fig. 6).

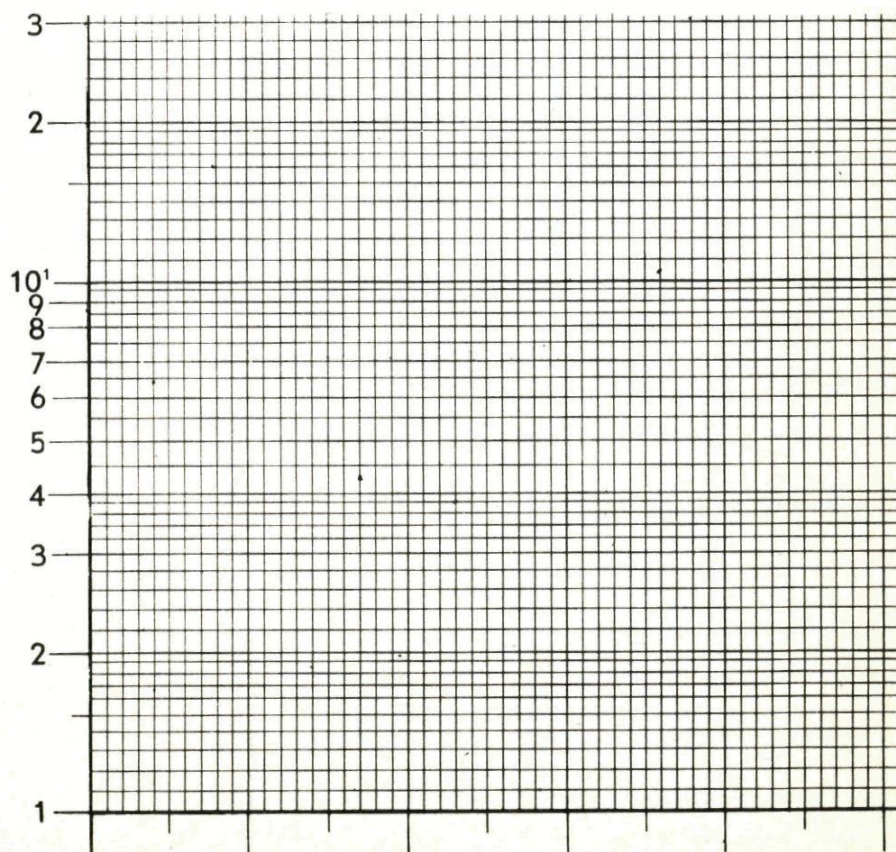


Fig. 4.

We zien hieruit dat de vorm van de grafiek van een relatie afhangt van het gebruikte papier.

In de praktijk komt het nogal eens voor, dat men even vlug de snijpunten moet aflezen van de grafieken van twee of meer relaties. Bij rechte lijnen kan men de plaats van een snijpunt veel nauwkeuriger

schatten dan bij gebogen lijnen. Daarom is het belangrijk rechte lijnen te kunnen krijgen als grafiek van diverse relaties.

Daar het bovenbeschreven dubbel- en enkellogaritmisch papier gewoon in de handel te verkrijgen is, kun je zelf eens proberen enige grafieken op die soorten papier te tekenen.

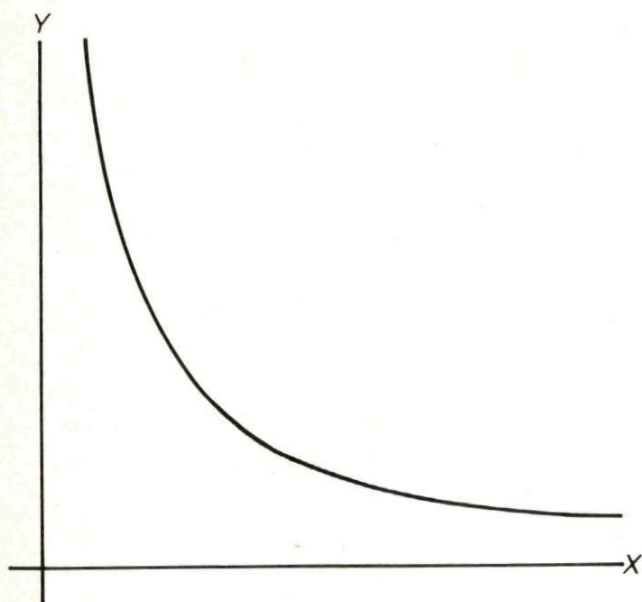


Fig. 5.

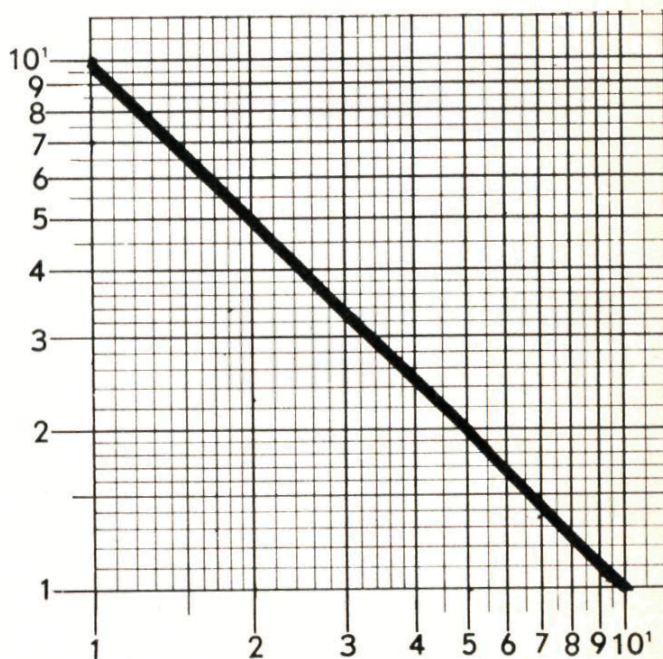


Fig. 6.



Denkertje

25. a. Op wat voor soort papier wordt de grafiek van $y = 10x^5$ een rechte lijn?
- b. Op welk papier wordt de grafiek van $y = 10 \cdot 5^x$ een rechte lijn?

Wat we gedaan hebben m.b.v. de log-functie, kunnen we natuurlijk ook doen met andere functies. Hoe zouden we b.v. de schaalverdeling op de assen moeten maken om de grafiek van $\cos \alpha \cdot \cos \beta = 1$ tot een rechte lijn te maken? Stel eerst $x = \cos \alpha$ en $y = \cos \beta$. D.w.z. breng op de assen een cosinus-verdeling aan. $\cos \alpha \cdot \cos \beta = 1$ gaat over in $xy = 1$. De grafiek is

een (deel van een) hyperbool (fig. 7). Maar deze konden we met logaritmisch papier tot een rechte lijn maken. Combinatie van beide:

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cdot \cos \beta &= 1 \\ \log (\cos \alpha \cdot \cos \beta) &= \log 1 \\ \log \cos \alpha + \log \cos \beta &= 0\end{aligned}$$

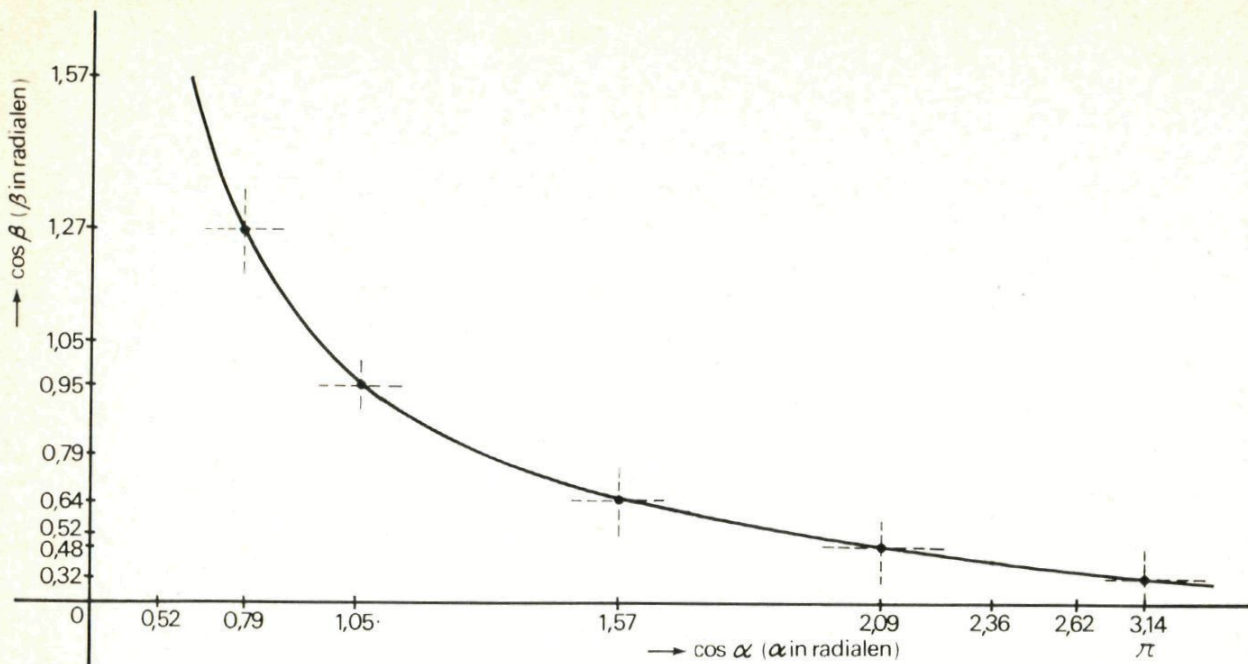


Fig. 7.

Stel $x = \log \cos \alpha$ en $y = \log \cos \beta$
 Dan $x + y = 0$: de vergelijking van een rechte lijn. Breng dus op beide assen een logcos-verdeling aan. M.b.v. een rekenliniaal of een log-tafel kunnen we zo'n verdeling best zelf maken (fig. 8).

Hopelijk is het bovenstaande een aansporing voor sommige lezers om bij voorkomende relaties na te gaan op wat voor soort papier de grafiek een rechte lijn wordt, dat papier te maken, en de grafiek te tekenen.

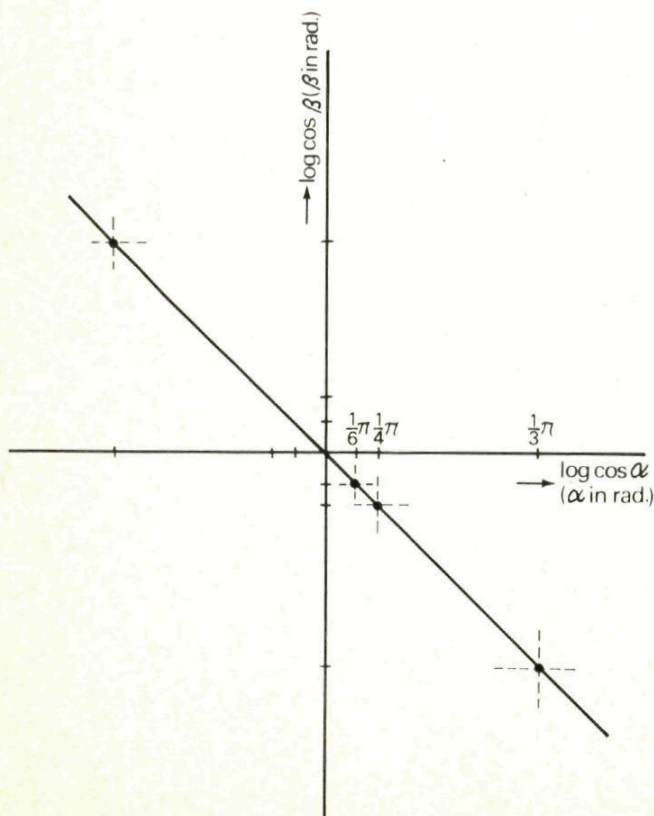


Fig. 8.

°Een planoloog met alles droog en toch veel nat

Het regent en het blijft regenen. Een nooit eindigende bui hangt boven een te bebouwen terrein. In fig. 1 is dat terrein op schaal getekend als het interval $[0,1]$.

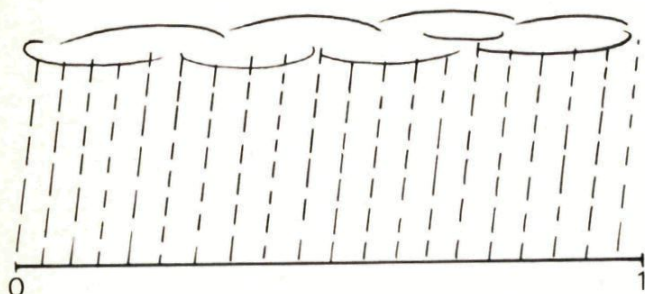


Fig. 1.

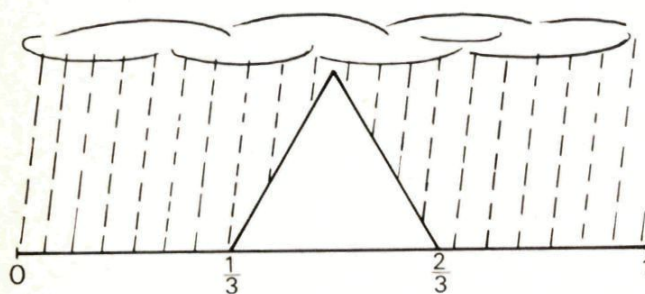


Fig. 2.

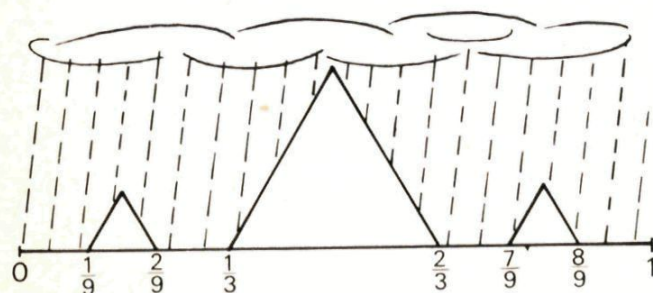


Fig. 3.

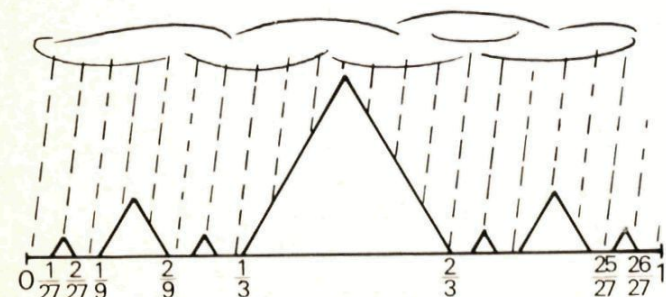


Fig. 4.

Een planoloog, vol wiskundige geestdrift, ontwerpt een bouwplan:

Fase 1: Verdeel het interval in drie gelijke delen. Construeer een gelijkzijdigedriehoekstent op het interval $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, zodat het interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ droog is. Zie fig. 2.

Fase 2: Verdeel beide overgebleven natte intervallen in drie gelijke delen en laat weer boven elk middelste deel een tent verrijzen (fig. 3).

Fase 3: Voortzetting volgens hetzelfde systeem, waardoor fig. 4 ontstaat.

Het is duidelijk, dat op deze manier een complete wereldstad van een oneindig aantal tenten wordt gesticht. De planoloog ontkomt daarbij niet aan de intrigerende vraag: Wat is het uiteindelijk gevolg voor het milieu? Wordt alles absoluut droog? Blijft er nog wat nat? Hij zoekt het antwoord via de wiskundige structuur van zijn systeem.

Na bouwfase 1:

$$\text{natte lengte } 2 \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

Na bouwfase 2:

$$\text{natte lengte } 4 \times \frac{1}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Na bouwfase 3:

$$\text{natte lengte } 8 \times \frac{1}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

enz.

Na bouwfase n : natte lengte $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$n \rightarrow \infty$$

Conclusie: Tenslotte is er geen natte plek meer over. Het gehele terrein is droog.

De redenering lijkt om zo te zeggen waterdicht. En toch... De planoloog kan het feit niet negeren, dat er punten zijn, die zeker nat blijven. Enkele van die natblijvertjes duiken al op in fig. 3. Let daarvoor op de getallen $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$. Uit de constructiemethode volgt, dat elke nieuwe tent op zekere afstand van de door deze getallen bepaalde punten blijft. Voor een precies aanwijzen van de natte punten is het aan te bevelen de getallen te noteren volgens het drietallig stelsel.

Bedenk:

3 tientallig = 10 drietallig
 7 tientallig = 21 drietallig
 $\frac{1}{3}$ tientallig = 0,1 drietallig
 $\frac{1}{9}$ tientallig = 0,01 drietallig
 $\frac{2}{9}$ tientallig = 0,02 drietallig

In fig. 2 blijven droog de punten uit het interval $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ drietallig voorgesteld als 0,1..... met na het cijfer 1 alle mogelijke volgorden van de cijfers 0,1 en 2.

In fig. 3 geldt voor de puntenaanduiding:

nat	droog
0,00.....	0,01.....
0,02.....	0,10.....
0,20.....	0,21.....
0,22.....	

Let er vooral op, dat in de 'nat'-tabel het cijfer 1 niet optreedt op de eerste twee plaatsen na de komma.

Fig. 4 wijst als nat aan de punten:

0,000.....	0,200.....
0,002.....	0,202.....
0,020.....	0,220.....
0,022.....	0,222.....

Uiteindelijk blijven berekend al die punten aangewezen door de getallen, die drietallig worden geschreven als 0,..... met achter de komma uitsluitend de cijfers 0 of 2. De verzameling van deze getallen bevat een oneindig aantal elementen en de planoloog moet wel erkennen, dat een oneindig aantal punten nat blijft.

Terwijl de tentenbouw doorgaat, kwelt het milieuprobleem: Alles droog en toch oneindig veel nat? De paradox brengt vragen mee zoals:

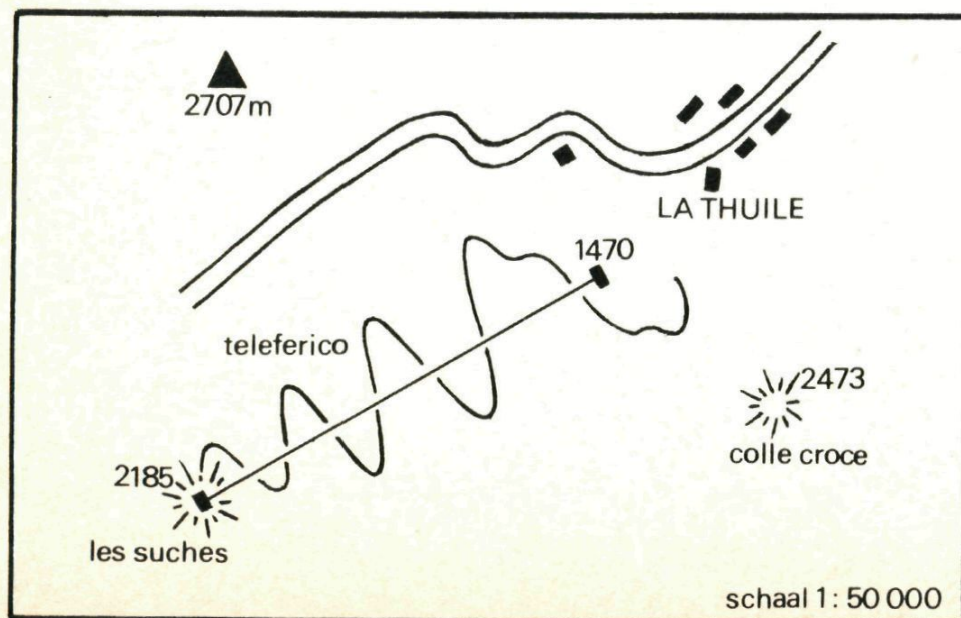
Wat betekent precies $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{3})^n = 0$

Hebben punten een lengte?

Hoeveel punten bevat het droge deel, hoeveel het natte?

Het zijn vragen, waarvan de beantwoording nu te ver zou voeren.

°Met PYTHAGORAS de bergen in



In het Italiaanse dorp LA THUILE dicht bij de Mont Blanc hielden 50 leerlingen van de Nassau-scholengemeenschap te Breda hun bergkamp. Behalve klimtouw en nog veel meer was er ook een rekenliniaal meegekomen.

Een opdracht luidde:

bepaal met behulp van de kaartgegevens:

1. de lengte van de kabel van de teleferico, die het dorp verbindt met de top van Les Suches. De doorhanging moet je daarbij verwaarlozen.
2. onder welke hoek ziet men vanaf de voet van de kabel de top van de berg?

Reken het zelf eens uit en controleer je uitkomst aan de hand van de volgende berekeningen:

1. Op de kaart meet je de lengte van het betreffende lijnstuk (4,2 cm). Deze lengte is de projectie van de kabel op het horizontale vlak.

Hieruit volgt:

$$AB = 4,2 \times 50000 \text{ cm} = 2100 \text{ m}$$

Het hoogteverschil AC

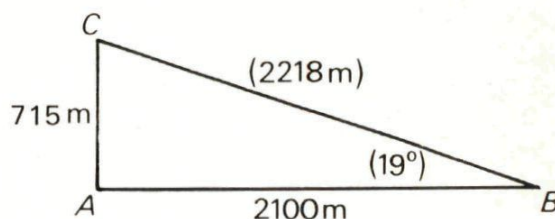
$$AC = 2185 - 1470 = 715 \text{ m}$$

Uit de stelling van Pythagoras volgt:

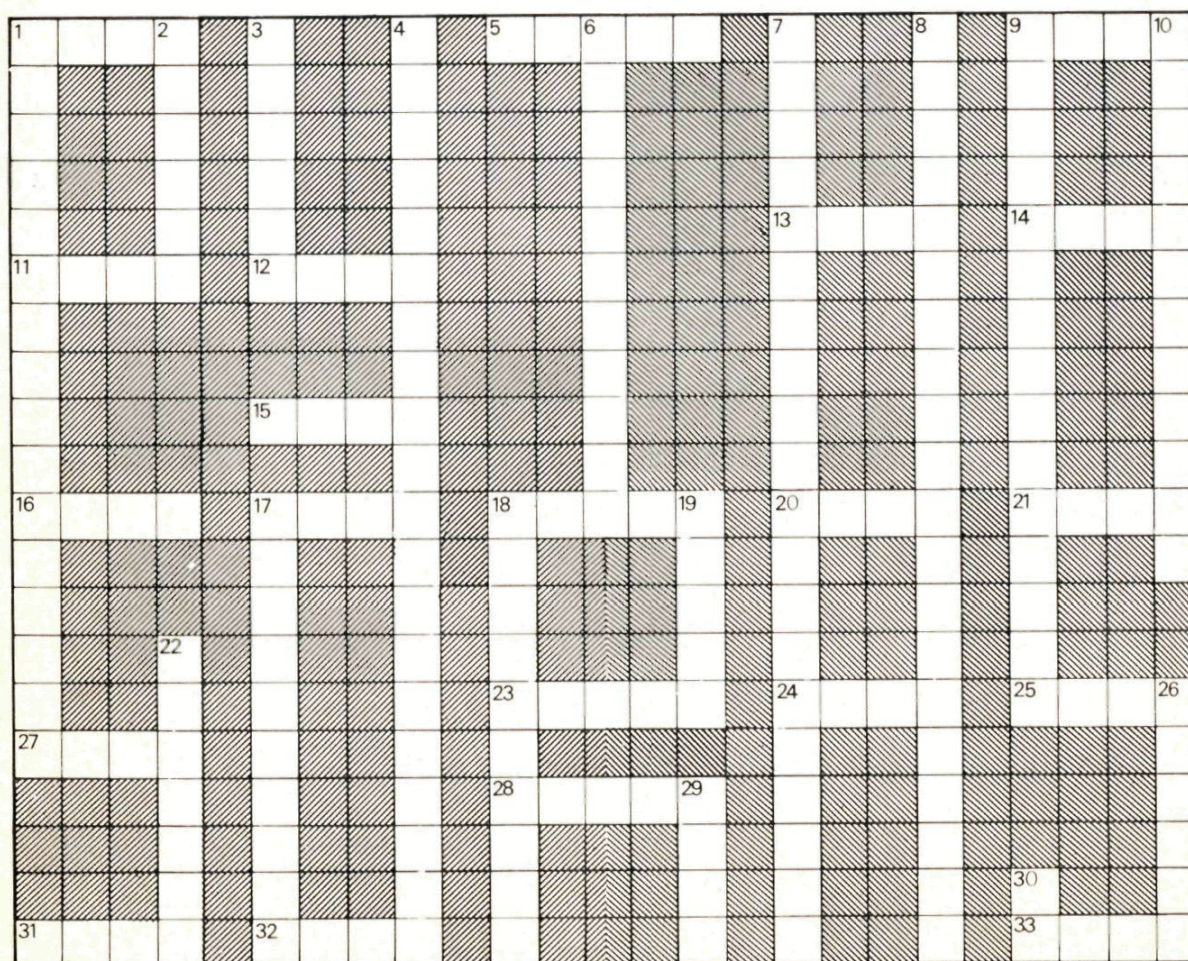
$$BC^2 = 715^2 + 2100^2 = 4921225 \text{ dus}$$

$$BC = 2218 \text{ m}$$

2. $\text{tg } B = 715 : 2100 = 0,34 \text{ dus } \angle B = 19^\circ$



Kruiswoordpuzzel



Horizontaal:

1. een waardering voor je werk
5. lichaam met één symmetrieas
9. ontstaat bij een deling
11. maal
12. zonder elementen
13. figuur met twee symmetrieassen
14. element van $\mathbb{N}$
15. bevat elke figuur
16. tweetal
17. gedeelte
18. hoort bij een origineel
20. element van $\mathbb{N}$
21. heeft elke driehoek
23. kunnen twee cirkels
24. twee lengtematen (afgekort)
25. maat
27. komt in elke veelterm voor
28. vierde deel
31. alle elementen van $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zijn zo
33. een vijfvoud

Vertikaal:

1. een exponent die element is van $\mathbb{Q}$
2. daar ligt een lijnstuk op
3. wiskundige naar wie een driehoek is genoemd
4. een functie van de vorm $F = f \circ g$
6. deel van de wiskunde
7. driehoeken, die elkaar kunnen bedekken
8. een verzameling met dezelfde elementen als een gegeven verzameling 2 woorden
9. kunnen in een driehoek voorkomen
10. zijn beeldwaarden t.o.v. originelen
17. is elk getal dat deelbaar is door 30
18. komt na een repetitie
19. hoofdbewerking
22. gebeurt met een liniaal
26. bezit elk lijnstuk
29. onderdeel van een rekenliniaal
30. schaal op een rekenliniaal

De oplossing staat in het volgende nummer.

Inhoud:

1. Het schaakbord 'binnenste-buiten' 1
2. Taximeetkunde 4
3. Snijpuntbepaling, werk voor de computer 8
4. Variaties op veelhoeken: lijnen, banden en ringen 12
5. Eerlijk spel 15
6. Grafiekenpapier 17
7. Een planoloog met alles nat en toch veel droog 22
8. Met Pythagoras de bergen in 23
9. Kruiswoordpuzzel 24

PYTHAGORAS

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. Elsenaar, Harderwijk.

W. Kleijne, Heerenveen.

Ir. H. Mulder, Breda.

A. F. van Tooren, Leusden-C.

G. A. Vonk, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Bruno Ernst, Muurhuysen 11, Amersfoort.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden. De oplossingen van denkertjes en prijsvragen naar: A. F. van Tooren, Calabrië 33, Leusden-C.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, f 5,— per jaargang.

Voor anderen f 7,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

