

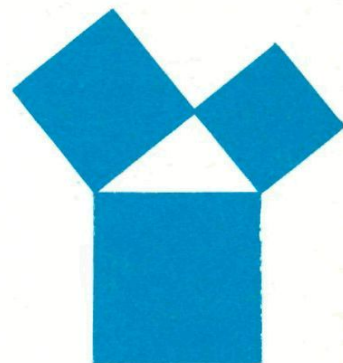


2

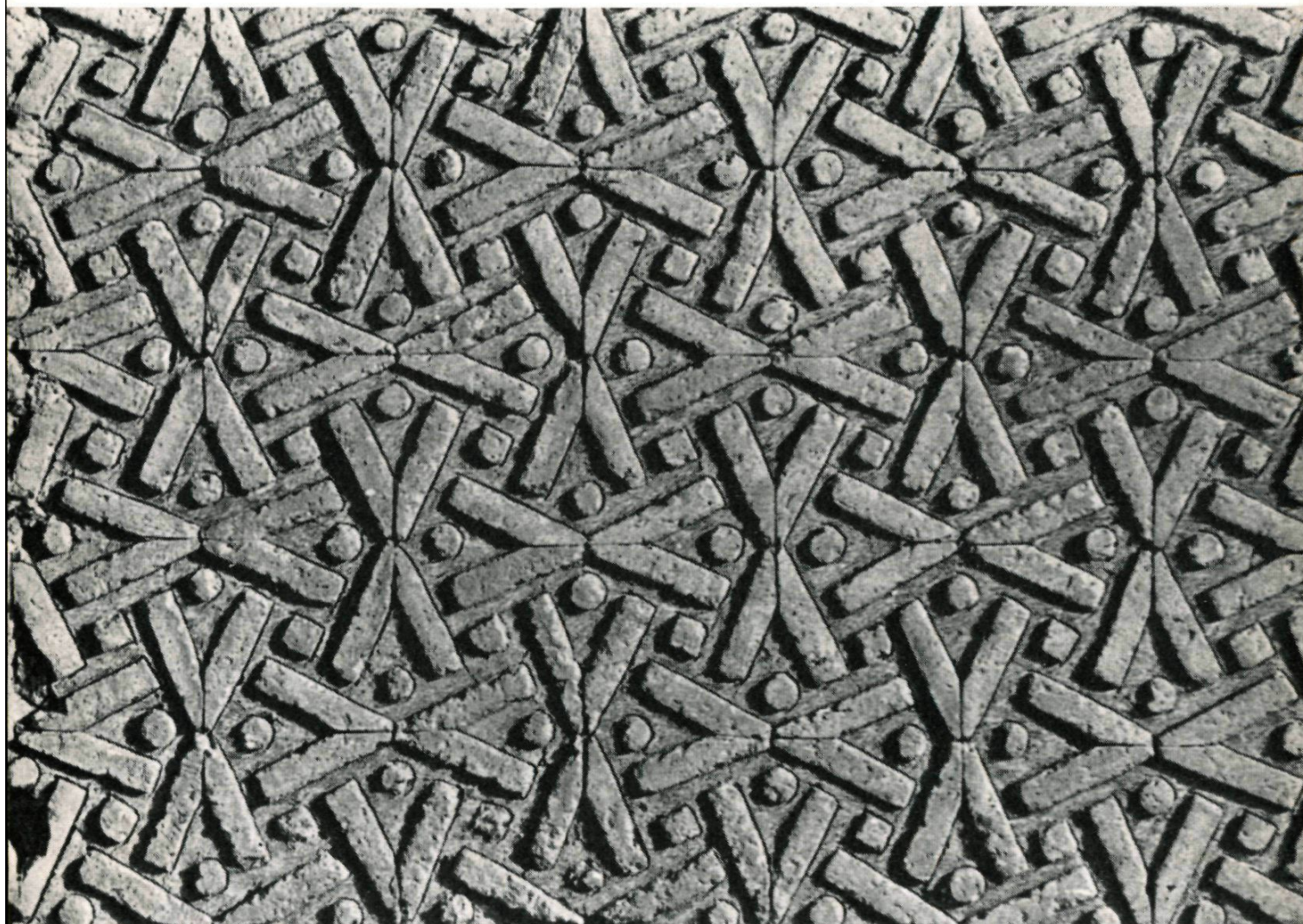
jaargang 14

**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff 1974



Pythagoras



Deel van een muur van een graftoren in Kharraqan (Iran).

BIJ DE FIGUUR OP DE OMSLAG:

Dit is een pagina uit het schetsboek van de graficus M. C. Escher. Escher heeft zich vanaf 1937 intensief beziggehouden met de regelmatige vlakverdeling. Wat daarover in wiskundeboeken stond vond hij te moeilijk (hij vond de wiskunde trouwens helemaal moeilijk, en hij zakte voor zijn HBS-examen, met onvoldoendes voor de exacte vakken!), maar wat hij met regelmatige vlakverdelingen wist te doen bewondert nu ieder die belang stelt in wiskunde! Zie pagina 29.

Bron voorzijde omslag en pag. 29:
Escher Stichting – Haags Gemeentemuseum

° 'Uit de kunst' I, regelmatige vlakverdelingen

Hiernaast op de binnenzijde van de omslag is een stuk muur van een graftoren in Kharraqan (Iran) gereproduceerd. Dit metselwerk dateert uit de 11-de eeuw en zit heel kunstig in elkaar.

We kunnen ons voorstellen, dat deze muur zich naar alle zijden oneindig ver uitstrekt, en dat hij overal op dezelfde wijze gemetseld is als het hier afgebeelde stuk. In het Duits noemt men zo'n ornament een *Wandmuster* (letterlijk: muurpatroon). In het Nederlands heeft zich de naam: *regelmatige vlakverdeling* ingeburgerd, een woord, dat een beetje verwarrend kan werken, als je bij het woord *verdeling* aan een activiteit denkt.

Kunstenaars uit alle cultuurgebieden en tijden hebben zulke wandversieringen gemaakt en het aantal variaties lijkt eindeloos. Het zou prettig zijn als we in deze veelheid wat ordening konden aanbrengen. De hele wereld van regelmatige vlakverdelingen zou dan wat overzichtelijker en inzichtelijker worden.

Het blijkt inderdaad mogelijk om, vanuit een bepaald gezichtspunt, alle regelmatige vlakverdelingen onder te brengen onder 17 verschillende typen.

In dit artikel willen we dit gezichtspunt nader toelichten en aan twee voorbeelden laten zien hoe we een regelmatige vlakverdeling analyseren. Het is niet de bedoeling om een volledig overzicht te geven van alle 17 typen en ook niet om dieper in te gaan op een gebied van de wiskunde (de groepentheorie), dat zo vruchtbaar op de regelmatige vlakverdelingen toegepast kan worden. Dat zou ons veel te ver voeren.

Translatie, rotatie, spiegeling en glijspiegeling

In fig. 1 is een heel eenvoudige regelmatige vlakverdeling getekend. Denk het vlak naar alle kanten op dezelfde wijze ingevuld. We trekken de regelmatige vlakverdeling over op transparant papier. Verschuiven we nu het transparante duplicaat over de afstand AC , dan bedekt het duplicaat weer precies de oorspronkelijke vlak-

verdeling. Het is zelfs niet mogelijk te zien dat er iets veranderd is.

Hetzelfde bereiken we ook door verschuiving over de afstand AB en vanzelfsprekend ook door een willekeurig aantal verschuivingen AC en/of AB .

We zeggen nu: de vlakverdeling is door de *translatie* AB en door de *translatie* AC in zichzelf overgegaan. Deze translatie is een speciaal geval van wat we een *beweging* noemen.

Het eerste en eenvoudigste type regelmatige vlakverdelingen kent alleen maar de translatie (in twee richtingen) als beweging, die de vlakverdeling in zichzelf doet overgaan.

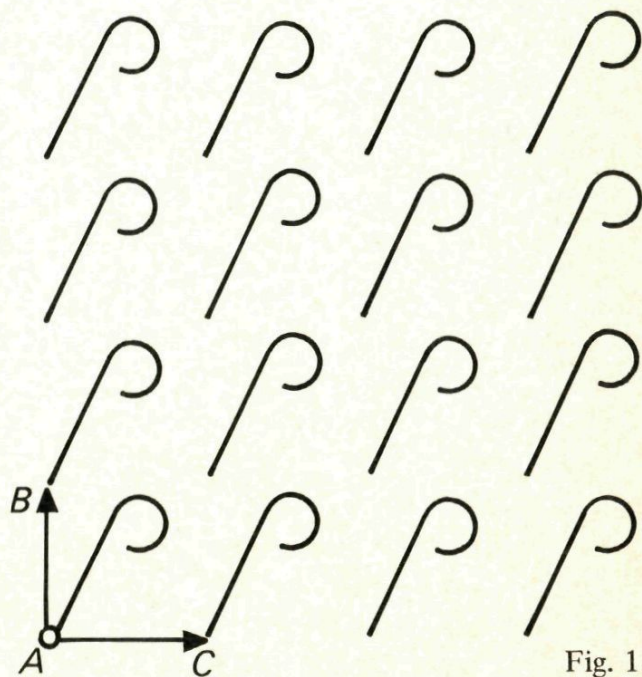


Fig. 1.

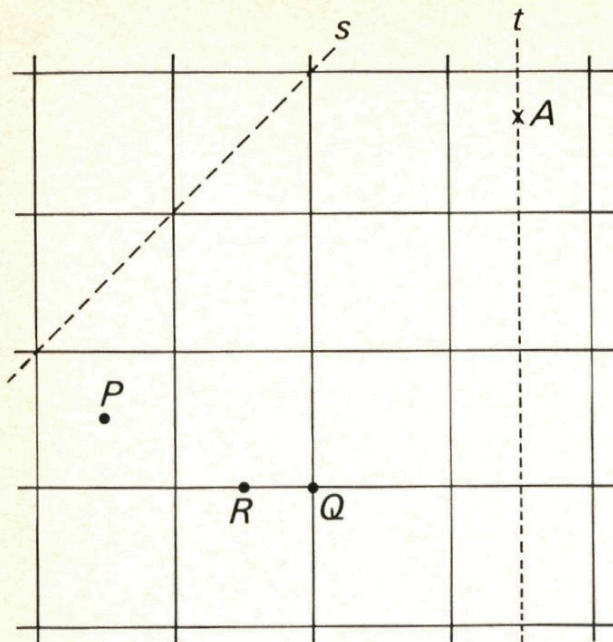


Fig. 2.

Bij de overige 16 typen komen behalve de translatie ook nog andere bewegingen voor. Deze andere bewegingen heten: *rotatie*, *spiegeling*, en *glijspiegeling*.

Wat we onder rotatie en spiegeling verstaan zullen we aan de hand van fig. 2

duidelijk maken. De regelmatige vlakverdeling bestaat hier uit een eindeloze herhaling van vierkanten; zoals op ruitjespapier.

We trekken de vlakverdeling weer over op transparant en steken dan een speld in punt *P*. Draaien (roteren) we nu het transparante duplicaat over 90° , dan bedekt het duplicaat de oorspronkelijke figuur volkomen. Hetzelfde kunnen we ook met een punt *Q* doen.

Bij een punt *R*, gaat de vlakverdeling pas in zichzelf over bij een rotatie over 180° . Neem nu op het transparant ook nog de stippellijn *t* over, met daarop een willekeurig punt *A*. Leg het transparant ondersteboven op het origineel zodat de stippellijnen en de punten *A* weer samen vallen, dan bedekt de vlakverdeling op het transparant die op het vel eronder weer volkomen. Deze beweging noemen we een spiegeling ten opzichte van de spiegelas *t*. In dezelfde regelmatige vlakverdeling is bv. *s* ook zo'n spiegelas.



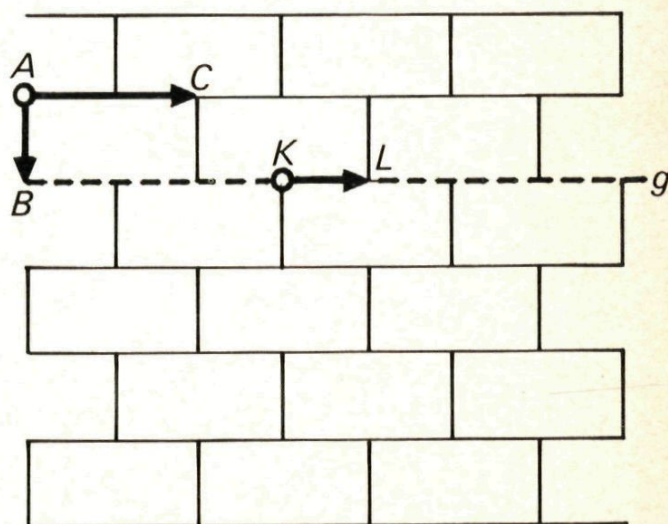
Denkertjes

1. Bij welke translaties gaat de vlakverdeling van fig. 2 in zichzelf over?
2. Teken in dit stukje van de regelmatige vlakverdeling alle punten waarom een rotatie van 180° mogelijk is, een rotatie van 90° en teken ook alle spiegellijnen.

Fig. 3 geeft een veel gebruikt steenverband weer. Hierin komt een beweging voor die we nog niet behandeld hebben: de *glijspiegeling*. We nemen de figuur weer over op een vel transparant mét de stippellijn *g* en de punten *L* en *K*. Als we nu spiegelen om de as *g* bedekt het transparant de onderliggende figuur *niet*. Dat gebeurt pas als we het transparant nog over de afstand *KL* verschuiven. Deze spiegeling gevolgd door een translatie heet glijspiegeling.

Misschien denk je: die glijspiegeling is niets bijzonders, ze komt in elke vlakverdeling voor waar een spiegeling voorkomt, want, zoals in het begin is opgemerkt: *elke*

Fig. 3.





Denkertjes

3. Welke rotatiepunten komen in fig. 3 voor?
4. Zijn er nog andere glijspiegelingen?
5. Zijn er ook spiegelingen?

regelmatige vlakverdeling heeft een translatie in twee richtingen.

De translaties die in fig. 3 voorkomen zijn AB en AC . De translatie die bij de glijspiegeling optreedt is echter gelijk aan $\frac{1}{2} AC$!

De 17 verschillende typen van regelmatige vlakverdelingen onderscheiden zich door de verschillende groepen van bewegingen die erin voorkomen.

De eerste groep, we vermeldde het reeds, heeft alleen translaties.

De tweede heeft behalve translaties ook rotaties over 180° .

De derde heeft, behalve de translaties, ook rotaties over een hoek van 120° , enz.

Analyse van een regelmatige vlakverdeling

De moeilijkheid van het klassificeren van regelmatige vlakverdelingen berust op het opsporen van de verschillende bewegingen die de vlakverdeling toelaat. Als we dit eenmaal gevonden hebben, is het gemakkelijk om met behulp van een lijstje van de kenmerken der 17 typen de onderzochte vlakverdeling een plaats te geven. Om te laten zien hoe zo'n analyse in zijn werk gaat hebben we een niet al te eenvoudig voorbeeld gekozen n.l. de vlakverdeling die op de binnenzijde van de omslag staat.

We zoeken eerst de zgn. translatiecel, dat wil zeggen dat gedeelte van de vlakver-

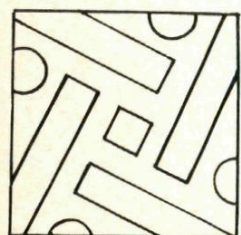


Fig. 4.

deling, waaruit de hele vlakverdeling door translatie gevormd kan worden.

Als we de figuur goed bekijken en letten op de spleten in het metselwerk komen we misschien in de verleiding het getekende in fig. 4 daarvoor aan te zien. Dit figuurtje komt wel regelmatig terug maar steeds in verschillende oriëntaties. Het is dus geen translatiecel. Die is groter (fig. 5). Trek de figuur op de binnenzijde van de omslag helemaal over op transparant papier, anders is het onmogelijk alle bewegingen te ontdekken. Als translatiecel kun je het stukje nemen, dat in fig. 5 gereproduceerd is. Dit komt bij verschuiving in twee richtingen telkens in dezelfde stand terug, en wel zo dat je de hele vlakverdeling ook kunt opbouwen door translaties van fig. 5. Met opzet zeg ik: je *kunt* deze figuur als translatiecel nemen, want in die keuze bestaat nogal wat vrijheid. We kunnen best bv. links onder de helft weglaten en rechts boven een even groot stuk erbij plakken. We kiezen in de regel een figuur die er zo overzichtelijk mogelijk uitziet. Wat de oppervlakte van de

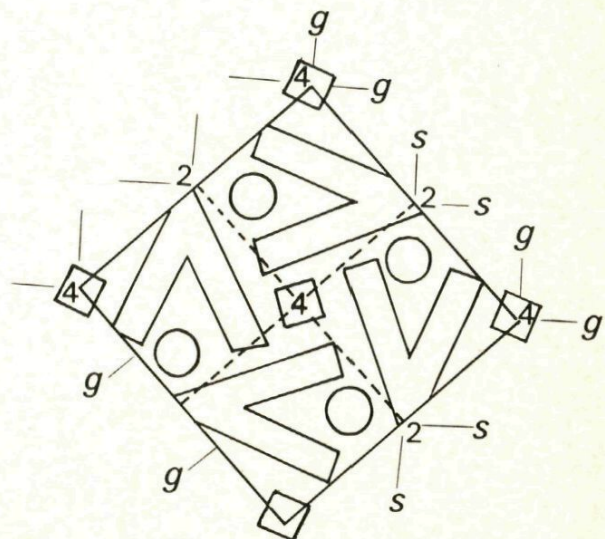


Fig. 5.

translatiecel betreft heb je geen keus, die is, hoe je de cel ook kiest, altijd even groot.

Er komen in de vlakverdeling twee soorten rotatiepunten voor, in fig. 5 aangegeven met (2), rotatie over 180° , en (4), rotatie over 90° . Probeer maar met je transparante duplicaat of het klopt.

Er komen verder onvermoed veel spiegellijnen en glijspiegellijnen voor. Deze zijn in fig. 6 weergegeven: Horizontaal en verticaal wisselen spiegellijnen en glijspiegellijnen elkaar af en diagonaal vinden we alleen glijspiegellijnen.

Dat zit behoorlijk kunstig en ingewikkeld in elkaar!

Een regelmatige vlakverdeling van Escher

De graficus M. C. Escher heeft in veel van zijn prenten regelmatige vlakverdelingen gebruikt. In fig. 7 zie je de litho: *Reptielen*. De reptielen kruipen daar uit zijn schetsboek met regelmatige vlakverdelingen en worden echte beesten, om na enige kunststukjes buiten het schetsboek, daarin weer terug te keren.

De regelmatige vlakverdeling die hieraan ten grondslag ligt, is ook op de omslag van dit nummer afgebeeld. Dit type is veel eenvoudiger dan het hierboven behandelde. Er komen n.l. geen spiegelingen en glijspiegelingen in voor.

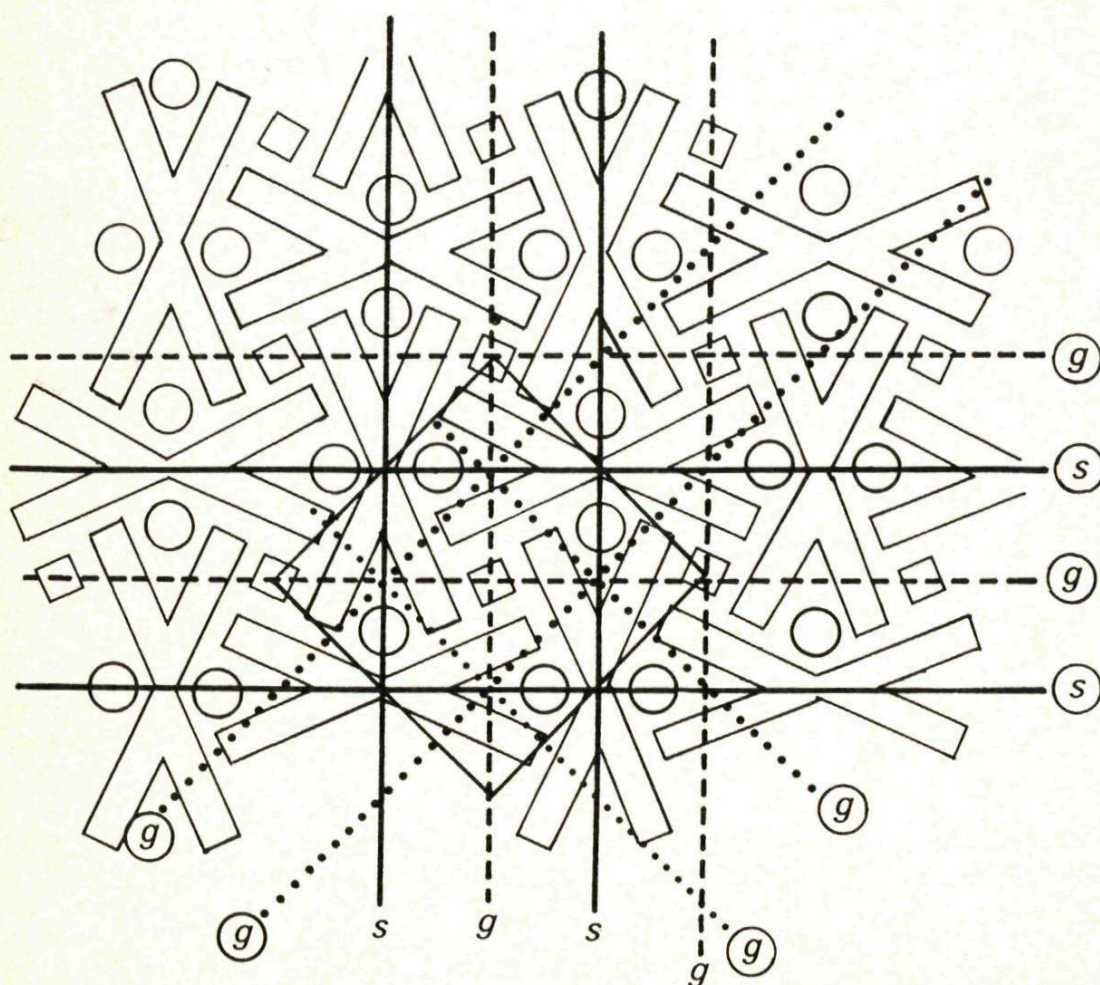


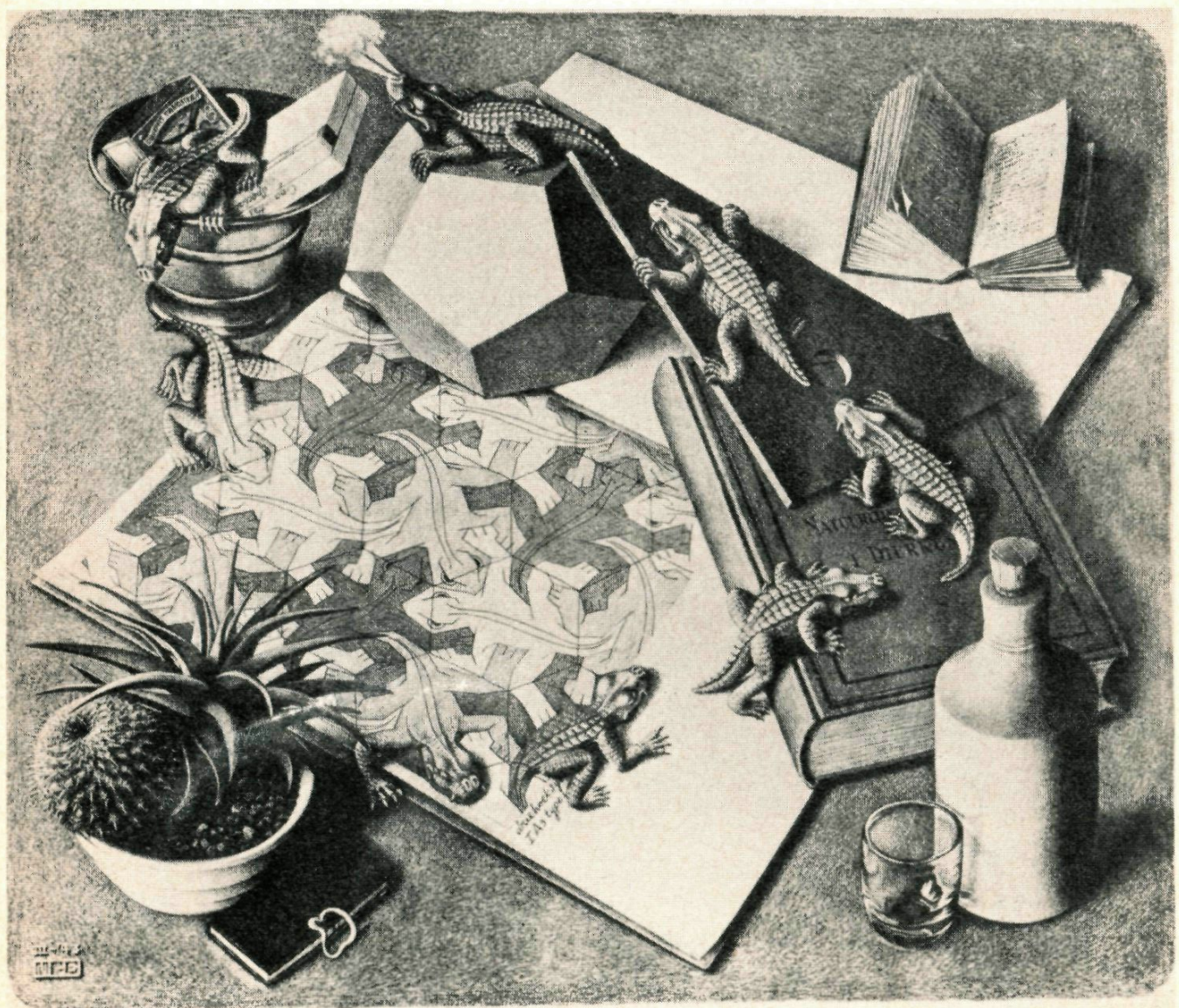
Fig. 6.

Denkertjes



6. Er komen twee verschillende soorten rotatiepunten in voor. Waar liggen die en hoe groot is de rotatiehoek?
7. Teken een translatiecel. Denk erom, dat is zeker niet één reptiel! Je weet, de keuze is vrij; hier is het echter handig een eenvoudige meetkundige figuur te kiezen.

Fig. 7. Reptielen.



°'Uit de kunst' II, inverse figuren

In het vorig nummer van Pythagoras onderging een schaakbord een complete gedaante-verwisseling. Die berustte daarop dat inversie toegepast op een rechte lijn een cirkel als beeldfiguur opleverde. Het resultaat was opmerkelijk, zelfs kunstzinnig verrassend. Omdat inversie gelegenheid biedt voor creatief bezig zijn, is het de moeite waard eerst nog eens na te gaan, wat deze afbeelding precies inhoudt.

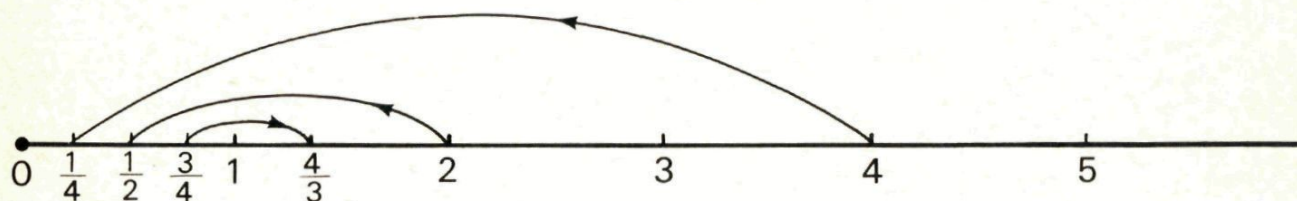


Fig. 1.

1. Inversie geschreven als functie. Fig. 1.

Inversie kan voorgesteld worden door de functie:

$$f: x \rightarrow \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Dus: origineel	beeldwaarde
2	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

Van belang is op te merken:

$$x \in < 0, 1] \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in [1, \rightarrow)$$

2. Meetkundige voorstelling. Fig. 2.

a. De cirkel met O als middelpunt en straal 1 noemen we de inversiecirkel I. Richt in punt A (punt $\frac{1}{4}$) een loodlijn op en construeer de raaklijn PQ. Volgens een bekende stelling is

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= \overline{OA} \cdot \overline{OQ} \\ 1 &= \frac{1}{4} \cdot \overline{OQ} \Rightarrow OQ = 4. \end{aligned}$$

Volgens 1 is Q het door inversie aan A toegevoegde punt. Wordt Q als origineel genomen, dan is A het beeldpunt.
b. Kies buiten de cirkel I een punt B en construeer de raaklijn BC. Laat uit C de loodlijn CD neer op OB.

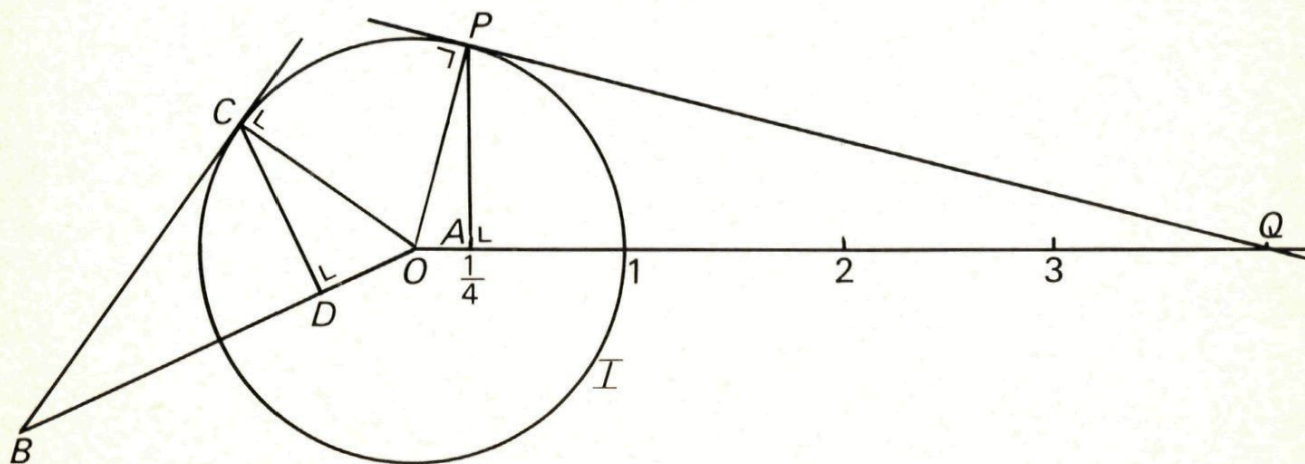


Fig. 2.

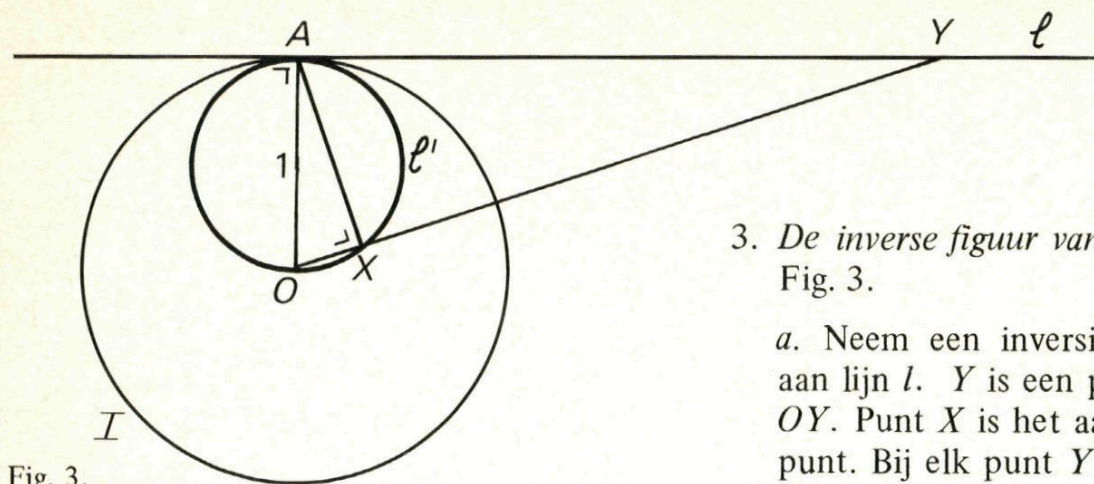


Fig. 3.

3. De inverse figuur van een rechte lijn.
Fig. 3.

a. Neem een inversiecirkel, die raakt aan lijn l . Y is een punt op l en $AX \perp OY$. Punt X is het aan Y toegevoegde punt. Bij elk punt Y op l behoort een punt X , zó dat $\angle OXA = \frac{1}{2}\pi$. De punten X liggen op een cirkel met $\overline{OA}$ als middellijn. De inverse figuur van l is cirkel l^1 , uitgezonderd punt O .

b. In fig. 4 snijdt lijn l de inversiecirkel. Zonder bewijs nemen we aan, dat de inverse figuur een cirkel is. A is het punt van l het dichtst bij O . Beeldpunt B ligt van alle beeldpunten het verst van O verwijderd. De beeldcirkel van l wordt dus eenvoudig gevonden door slechts punt A te inverteren. $\overline{OB}$ is middellijn. Het lijnstuk $\overline{CD}$ heeft als beeldfiguur boog C^1D^1 .

c. De inversefiguur van een cirkel door O is een rechte lijn. Zie dat nog eens in:

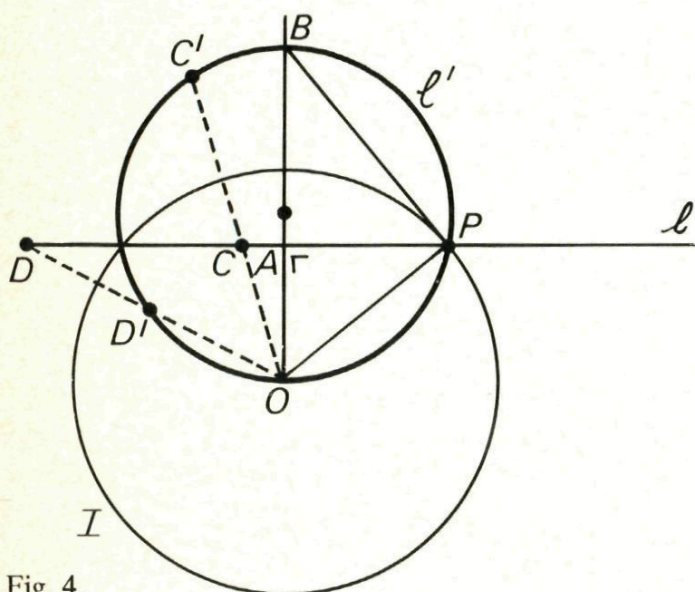


Fig. 4.

Stelling:

$$\frac{\overline{OC}^2}{1} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{OB}}{\overline{OD} \cdot \overline{OB}} \Rightarrow \overline{OD} = \frac{1}{\overline{OB}}$$

D is het door inversie aan B toegevoegde punt. Wordt D als origineel genomen, dan ontstaat B als beeldpunt.

	origineel	beeldfiguur
fig. 3	l	l^1
	l^1	l
fig. 4	l	l^1
	l^1	l

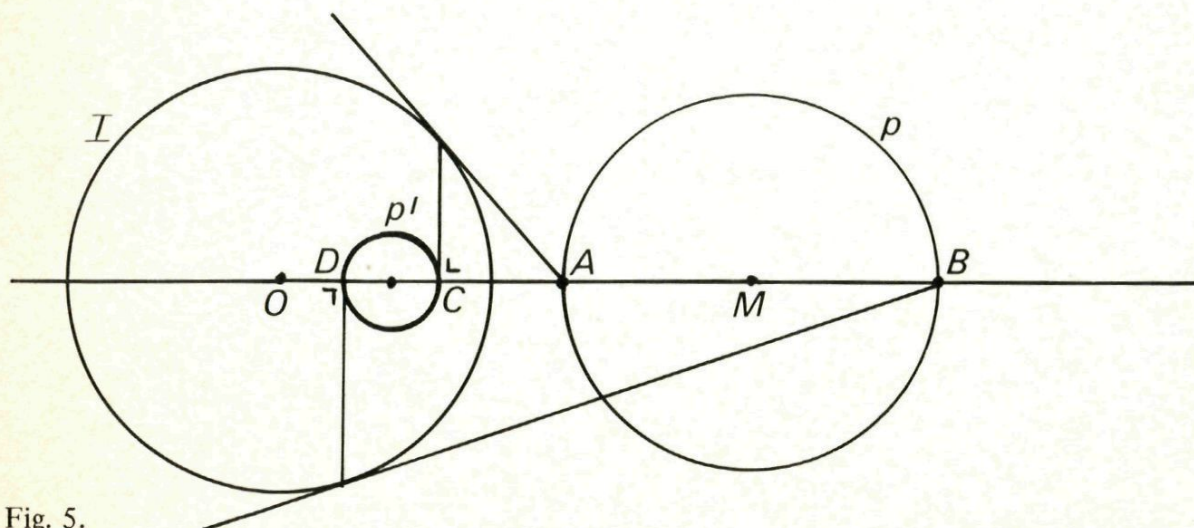


Fig. 5.

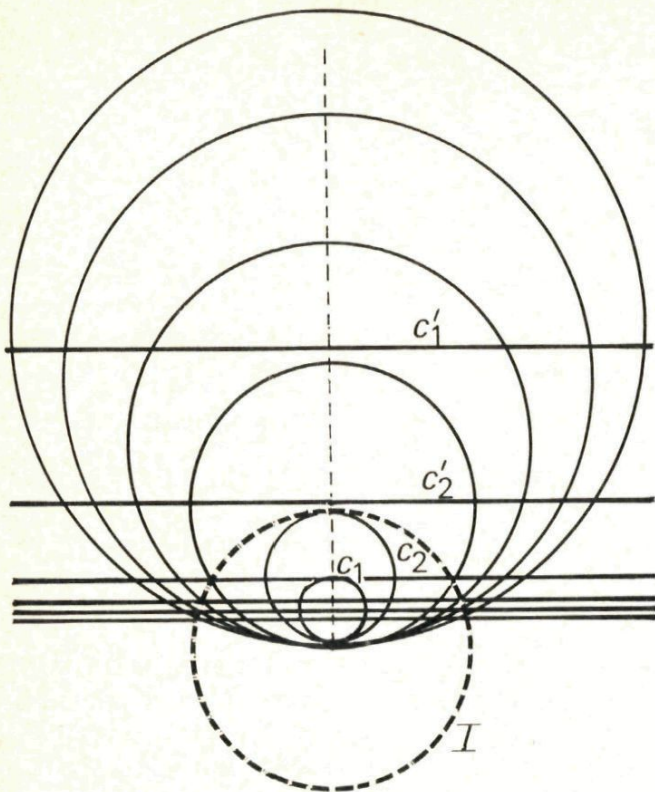


Fig. 6.

4. Ook zonder bewijs wordt gesteld: *De inverse figuur van een cirkel niet door O is een cirkel.*

In fig. 5 is p de origineelcirkel. Trek door O en M een rechte lijn, waardoor middellijn $\overline{AB}$ ontstaat. Construeer de beeldpunten C en D van A en B . De

Fig. 8.

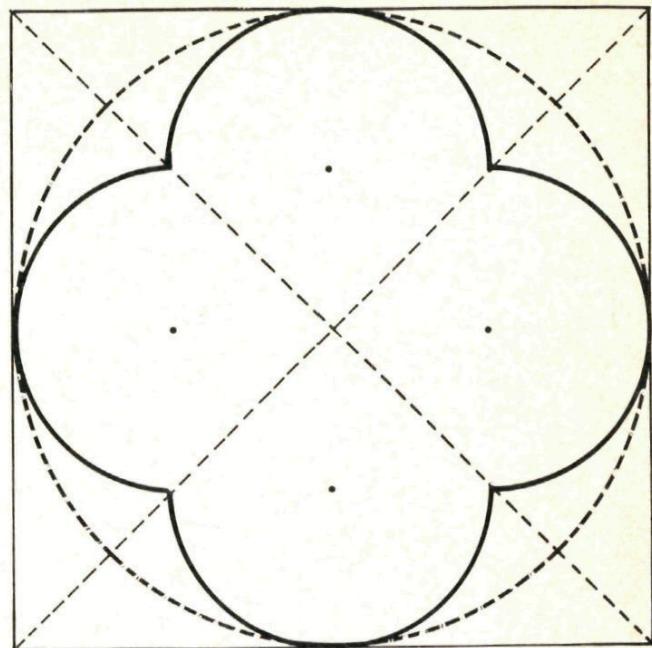
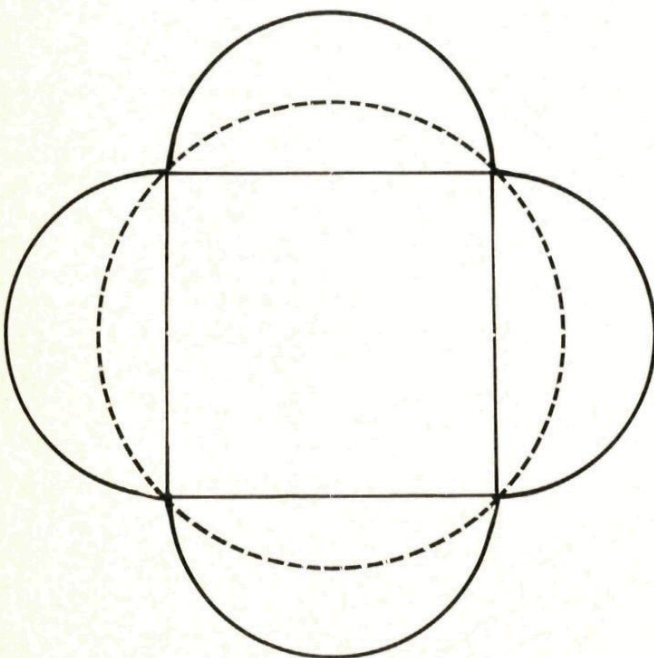
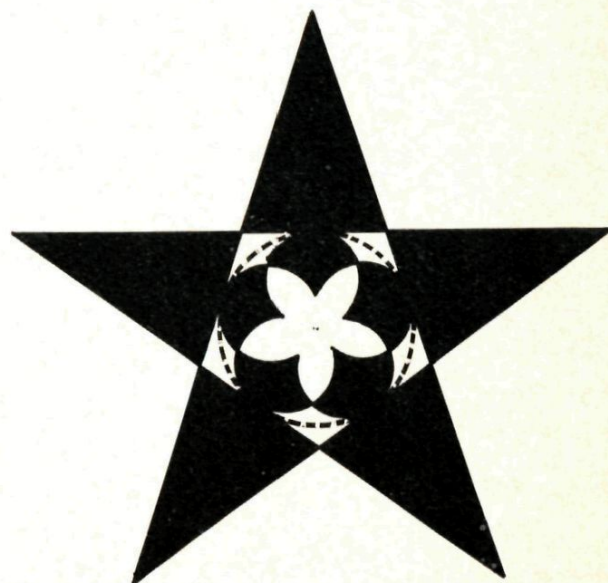


Fig. 7.

inverse figuur is de cirkel met $\overline{CD}$ als middellijn.

We gaan de bovenstaande constructies toepassen op combinaties van lijnen en cirkels. Reeds met deze twee elementen ontstaat een rijk assortiment van boeiende figuren.

Fig. 9.



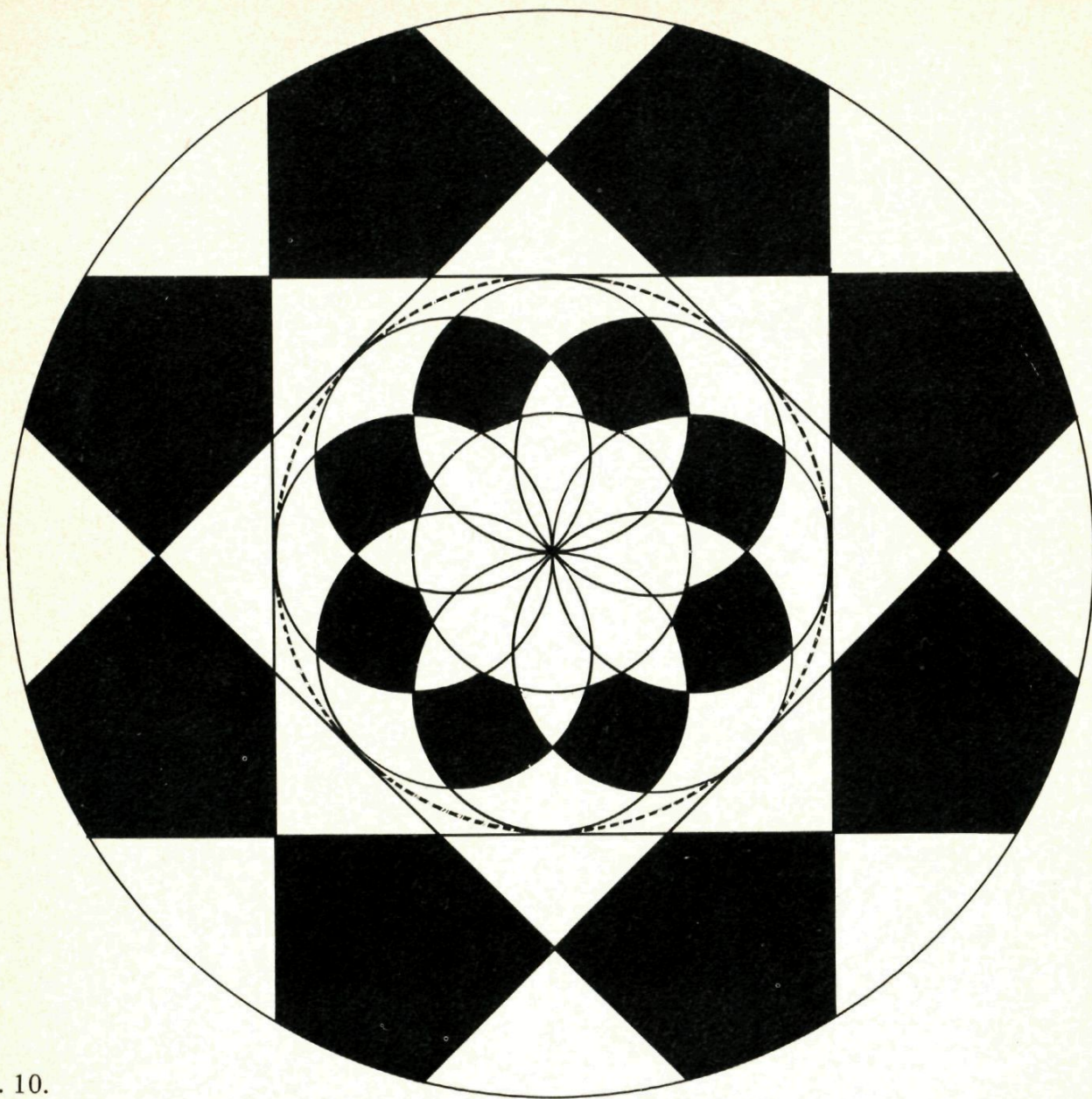


Fig. 10.

In fig. 6 is een cirkelbundel getekend. De gestippelde cirkel I fungeert als inversie-cirkel. Voor cirkel c_1 is de constructie uit fig. 2 gebruikt, voor c_2 die uit fig. 3 en voor de overige cirkels die uit fig. 4. Een vierkant is origineel in de fig. 7 en 8. De verschillend gekozen inversie-cirkels, in- en omgeschreven, laten zien, hoe daarmee ook de beeldfiguren veranderen kunnen. Diagonalen spelen een rol in fig. 9, waar een vijfpuntige ster is voortgekomen uit een regelmatige vijfhoek. De zwarte vlakdelen corresponderen met die van de centraal gelegen inverse.

Het zal duidelijk zijn, dat inversie uitnodigt tot creatief bezig zijn. Begin een-

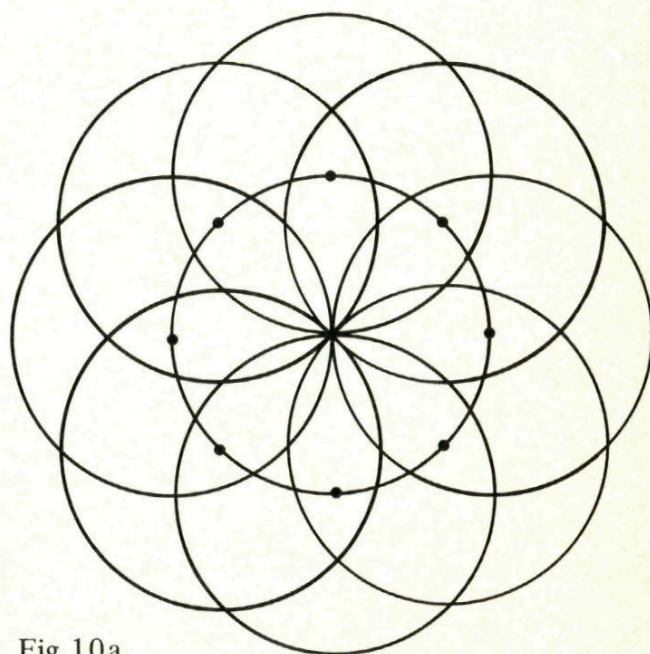


Fig. 10a.

voudig. Bijvoorbeeld met een gelijkzijdige driehoek, waarvan in- en omgeschreven cirkel gunstig liggen voor de nodige constructies. Kies daarna een ander lid uit de familie van de regelmatige veelhoeken. Inverteer de ster van fig. 9 ook nog eens t.o.v. een tweede voor de hand liggende inversiecirkel. Vanzelf kom je ook bij

tekeningen zoals fig. 10. Deze is geconstrueerd via de fig. 10a waarna inversie voor de volledige compositie heeft gezorgd. Vaar dan verder een eigen koers. Laat jezelf verrassen door je eigen vondsten. Vergeet de mislukte en versier je kamer met de geslaagde.

°°e, het "groeigetal"

In de wiskunde spelen de getallen π , e en i een belangrijke rol. Het getal π was reeds in de oudheid bekend, maar een aantal van zijn merkwaardige eigenschappen werd, door beroemde wiskundigen, pas vele eeuwen later ontdekt. Zo vond Leonhard Euler (1707–1783) zelfs een wonderlijk eenvoudige betrekking tussen de drie bovengenoemde getallen n.l. $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Voor wie slechts een beetje wiskunde 'geproefd' hebben, zijn π , e en i geheimzinnige getallen. Het woord *geheimzinnig* komt echter niet voor in het vocabulaire van de wiskunde. Het is een woord dat een gevoel, een emotie uitdrukt en in de *wiskunde* spelen emoties geen rol. Maar de *wiskundige* zelf heeft wel degelijk een gevoelsleven en juist van daaruit krijgt hij de impulsen voor het wiskundige onderzoek. Zonder een grote dosis nieuwsgierigheid, verwondering en enthousiasme, zouden er nauwelijks belangrijke ontdekkingen op wiskundig gebied zijn gedaan. En zo komt het, dat ook voor wiskundigen van beroep, de vakmensen, de getallen π , e en i 'getallen vol geheimen' zijn. Voor de een geldt dit meer als voor de ander, naar gelang zijn geaardheid.

In dit artikel willen we het getal e nader belichten. We willen vooral laten zien, dat dit getal een belangrijke rol speelt, overal waar sprake is van groeien.

Groeien

Uit een kastanje is in de loop van een honderdtal jaren een acht meter hoge boom gegroeid. Wij groeien zelf: We zijn nu een stuk groter dan toen we 4 jaar waren.

We zeggen echter: die oude boom groeit nog maar heel langzaam, en: na je 25-ste jaar groei je bijna niet meer . . . Daaruit volgt dat we het groeiproces beschouwen als iets dat gestaag, steeds op dezelfde wijze doorgaat. Bij een levend wezen zijn er echter factoren die het groeiproces afremmen en zelfs stoppen. We zullen eens een voorbeeld geven van een groei, die niet door gebrek aan ruimte of voedsel, of op andere wijze afgeremd wordt. Denk je een bepaalde bacteriesoort die zich onder gunstige omstandigheden als volgt vermenigvuldigt: na een uur heeft de bacterie zich in tweeën gedeeld; deze twee bacteriën delen zich na een uur weer; enz.

na 1 uur zijn het er twee.

na 2 uur zijn het er 2×2

na 3 uur . . . $2 \times 2 \times 2$

na x uur zijn het er 2^x .

Misschien heb je het nog niet in de gaten, maar deze groei is angstwekkend! Stel eens dat een bacterie een miljoenste (10^{-6}) gram weegt.

Na minder dan 21 uur is er dan al een gram bacteriën. Heel ruw berekend: $2^{21} = 2^7 \cdot 2^7 \cdot 2^7$. Omdat $2^7 = 128$ is 2^{21} in ieder geval groter dan 10^6 . Daar schrik je waarschijnlijk nog niet van. Maar na zes maal 21 uur, dus binnen een week, hebben deze bacteriën zich vermenigvuldigd tot meer dan 10^{30} gram. En dat is veel groter dan de massa van de hele aarde! (ca. $6 \cdot 10^{27}$ gram). Het is duidelijk, dat een onbelemmerde groei in de natuur altijd slechts een korte tijd kan plaatsvinden.

Idealisering van het groeiproces

In het voorbeeld van de onbeperkte groei van bacteriën kwam een wezenlijk facet van het groeien duidelijk naar voren: de aangroeiing is telkens evenredig met de reeds aanwezige hoeveelheid. We kunnen ook zeggen: deze groei wordt gekarakteriseerd door het vermenigvuldigen met een constante factor, namelijk 2.

Een tweede facet van het groeien kwam niet zo duidelijk naar voren. We hebben gesteld: na 1 uur zijn er 2 bacteriën;
na 2 uur zijn er 4 etc.

We zien dan het aantal bacteriën sprongsgewijze toenemen. Het lijkt alsof er tijdens het uur zelf niets gebeurde. Maar dat is natuurlijk niet waar. Als een bacterie zich pas gedeeld heeft wegen de twee ontstane bacteriën samen even veel als de nog niet gedeelde bacterie. Ze doen er precies een uur over om *elk* weer even veel te wegen als hun 'ouder'. De groei was dus slechts schijnbaar sprongsgewijs. In werkelijkheid is het een continu proces.

Als we het ideale groeiproces wiskundig willen beschrijven zal het de bovengenoemde facetten tot uitdrukking moeten brengen.

Van 1 tot e

We gaan uit van het getal 1 en willen dit op dezelfde manier laten groeien als de bacteriekolonie. Nu moet er in ieder geval eerst een heel klein beetje bij. We nemen daarvoor $1/n$ deel van 1, waarbij we voorlopig even veronderstellen, dat n zeer groot is.

1 is nu aangegroeid tot $1 + 1/n$.

1 is dus vermenigvuldigd met de factor $1 + 1/n$.

Als we het nieuwe getal weer op dezelfde manier laten aangroeien, moeten we het met diezelfde factor vermenigvuldigen. Het resultaat is dan: $(1 + 1/n)(1 + 1/n)$ ofwel $(1 + 1/n)^2$.

Het is nu wel duidelijk dat we de volgende rij getallen krijgen:

1
 $(1 + 1/n)$
 $(1 + 1/n)^2$
 $(1 + 1/n)^3$
 $(1 + 1/n)^4$ etc.

Nu zul je opmerken, dat deze rij slechts het eerste facet van het ideale groeiproces bevat: het volgende getal wordt uit het vorige gevonden door het steeds met dezelfde factor te vermenigvuldigen. Maar deze groei is niet continu, ze is nog sprongsgewijs.

Daar gaan we wat aan doen. Als we n nu eens oneindig groot maken, dan wordt $1/n$ oneindig klein. En als de eerste toename oneindig klein wordt is de toename toch continu. Misschien kom je nu op de gedachte, dat er dan helemaal geen sprake meer is van groei, want oneindig klein . . . is dat niet 0?

'We maken n oneindig klein' is een uitdrukking die je niet in een wiskundeboek zult tegenkomen. Als je dit letterlijk neemt, kom je inderdaad in de knoei. We bedoelen ermee: we laten n onbeperkt toenemen. Dan nadert $1/n$ tot 0.

Onze eerste aangroei was $1/n$ de deel van 1. We hebben daarvoor 1 verdeeld in n deeltjes die we nu oneindig klein maken (je ziet, korthedshalve vallen we weer terug op deze niet correcte uitdrukking). Als we nu ook de aangroeiing in n stapjes maken (dus weer oneindig veel stapjes) hoe groot is het resultaat dan?

Wel: $(1 + 1/n)^n$ waarbij n oneindig groot is.

Wat verwacht je nu? Zou dit getal oneindig groot zijn, omdat de macht waartoe je $(1 + 1/n)$ verheft oneindig groot is?

Vergeet echter niet dat in dit geval $1/n$ oneindig klein is. Een slordige redenering zou zelfs kunnen leiden tot de uitkomst 1. Kijk maar: als n oneindig is, is $1/n = 0$, dus $(1 + 0)^n = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ etc = 1.

Je ziet hoe zinvol de wiskundige uitdrukking: *we laten n onbeperkt toenemen* is. Het is te bewijzen dat $(1 + 1/n)^n$, waarbij n nadert tot oneindig een eindige waarde heeft, maar dat bewijs is nogal lastig. We hebben daarom in de volgende tabel de uitkomst van $(1 + 1/n)^n$ opgenomen voor toenemende waarden van n . Dit hebben we echt niet zelf berekend, want je begrijpt wel, dat het tot de 10000ste macht verheffen van een getal een soort levensvullende arbeid is.

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2
2	2,25
...	
10	2,5937
...	
100	2,7048
...	
1000	2,7169
...	
10000	2,71828

Je ziet, dat $(1 + 1/n)^n$, nog maar heel weinig toeneemt bij buitensporig grote waarden van n .

Nu kunnen we het getal e definiëren. e is de waarde waartoe $(1 + 1/n)^n$ nadert als n nadert tot oneindig.

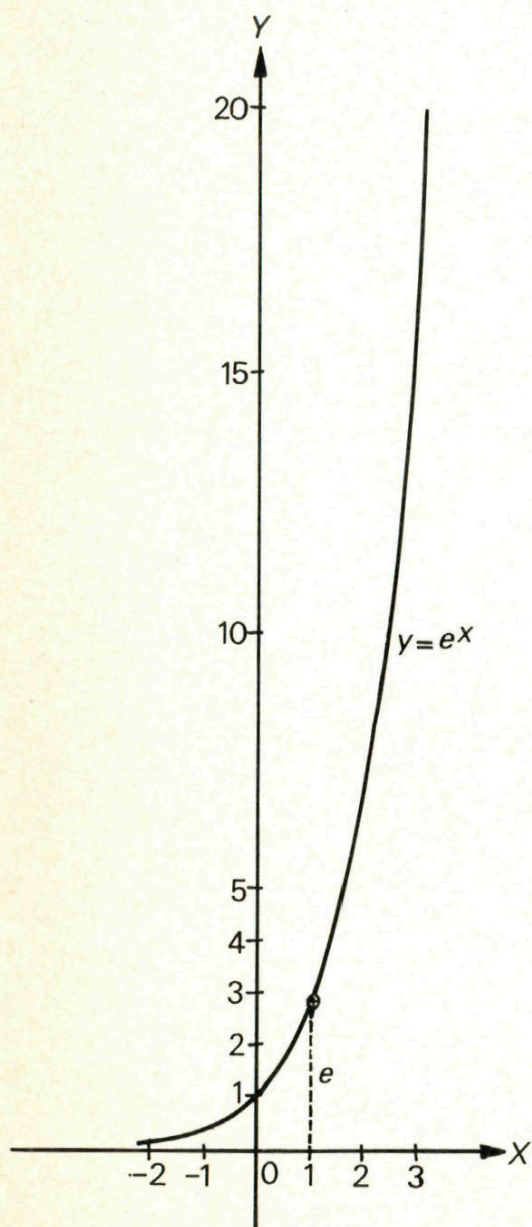
De groeifunctie

Laten we nu nog eens even precies omschrijven wat we gevonden hebben. Daarvoor grijpen we terug naar een concreet voorbeeld. Stel eens, het is wel wat absurd, dat iemand geld van ons leent tegen 100% rente. We geven hem f 1,—. Een jaar later hebben we dan f 2,—, n.l. f 1,— inlegkapitaal + f 1,— rente. Ons kapitaal is van f 1,— sprongsgewijs gegroeid tot f 2,—.

We willen echter het onderste uit de kan en we gaan naar onze goedgeefse lener toe en vertellen hem, dat het kapitaal eigenlijk van dag tot dag moet aangroeien, ja zelfs van

seconde tot seconde, nee . . . continu. Hij moet dan het jaar indelen in oneindig veel 'tijdeenhedjes'. We willen, dat ons kapitaal continu groeit. We rekenen hem voor, precies zoals hierboven is voorgedaan, dat hij het jaar in n delen moet verdelen en dat wij op het einde van het jaar $(1 + \frac{1}{n})^n$ gulden van hem krijgen, waarbij n oneindig groot is. We komen dan tot de conclusie, dat ons kapitaal een jaar later niet $f 2,-$, maar $f 2,718 \dots$ ofwel e is! Daar is geen speld tussen te krijgen. Maar de goede man krabt zich nu bedenkelijk achter het oor en vraagt: hoeveel gaat me dat dan na 2 jaar kosten? Op dit gebied kunnen we hem geruststellen. Dat wordt geen nieuwe truc!

Bij een sprongsgewijze rentebetaling zouden we na 2 jaar een rente van $f 2,-$ krijgen, zodat ons kapitaal dan $f 4,-$ zou zijn. En na x jaar zou het kapitaal 2^x zijn. Nou daarop had hij gerekend. Nu wordt het kapitaal na 2 jaar $(1 + 1/n)^{2n}$ ofwel e^2 , en na x jaar wordt het e^x . Als we het eindkapitaal y noemen, dan zou bij de ene berekening het kapitaal na x jaren zijn $y = 2^x$. Laten we het kapitaal echter continu groeien, dan wordt het $y = 2,718 \dots^x$, ofwel $y = e^x$.



De grafische voorstelling van $y = e^x$

Fig. 1.

Nu hebben we een wiskundige uitdrukking gevonden voor een continue groei, nl. $y = e^x$. De grafiek zie je in figuur 22. Je kunt direct het volgende aflezen:
 y neemt zeer snel toe bij toenemende x
 voor $x = 0$ is $y = 1$
 voor $x = 1$ is $y = e$
 voor negatieve waarden van x , nadert y snel tot 0, zonder echter ooit 0 te worden.
 Dit laatste is gemakkelijk in te zien. Nemen we bv. $x = -100$, dan is

$$y = e^{-100} \text{ ofwel } y = \frac{1}{e^{100}} \neq 0.$$



Fig. 2 Bevolkingsgroei

Snel en langzaam groeien

Als de bacteriën uit ons voorbeeld zich niet elk uur zouden delen, maar bv. telkens na een dag, een jaar of zelfs na een eeuw, dan is de groei veel langzamer. Hetzelfde geldt voor het kapitaal, dat we zo voordelig tegen een rente van 100% konden uitzetten. Als dit percentage wat normaler is, laten we zeggen 8%, dan is de groei van het kapitaal langzamer. Het karakter van de groeifunctie verandert daar echter niet mee. We kunnen blijven schrijven $y = e^x$, alleen wordt x nu in andere eenheden uitgedrukt.

In de meeste gevallen, is dit echter niet praktisch. Zo 'meten' we een kapitaal in Nederland in guldens en de tijd in jaren, als het over renteberekening gaat.

Bij een 'continue rente' van 100% per jaar en een beginkapitaal van $f\ 1,-$ is het kapitaal na x jaren: $K = e^x$.

Als het beginkapitaal niet $f\ 1,-$, maar K_0 is, dan wordt de formule $K = K_0 e^x$.

'Negatief groeien'

Een aantal processen in de natuur kunnen beschreven worden als een negatieve groei: een continue afname met een constante factor. Bijvoorbeeld: We gaan uit van N_0 atomen van een radioactieve stof. Door het uitzenden van electronen of protonen gaat dit radioactieve element over in een ander element. Na een tijd t zijn er nog maar $N = N_0 e^{-ct}$ atomen van de oorspronkelijke radioactieve stof over.

c is karakteristiek voor een bepaalde radioactief element.

Nog een paar voorbeelden:

Als het licht door een stof gaat absorbeert deze stof het licht. Zo is het enige kilometers onder water op klaarlichte dag vrijwel donker. De intensiteit van het licht als het x meter in de absorberende stof heeft afgelegd is: $I = I_0 e^{-cx}$. I_0 is de oorspronkelijke intensiteit van het licht en c noemen we absorptiecoëfficiënt, die karakteristiek is voor een bepaalde stof.

Als we een stalen kogel op een marmeren plaat laten stuiten neemt de hoogte tot waar de kogel weer opspringt voortdurend af omdat bij elke botsing met de plaat energie verloren gaat. De hoogte die de kogel na t seconden nog bereikt is $H = H_0 e^{-ct}$ (figuur 3).

Als we een condensator opladen neemt de stroomsterkte geleidelijk af, omdat de tegenspanning op de condensatorplaten toeneemt.

De ladingsstroom is $i = i_0 e^{-ct}$.

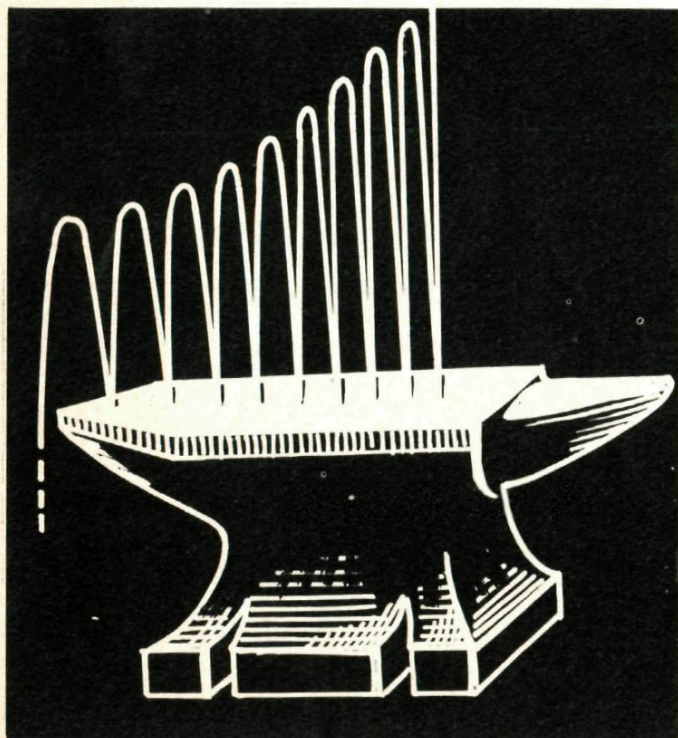


Fig. 3. Het verlichte kogeltje stuit op een aambeeld, dat iets naar links helt. Bij elke terugkaatsing verliest het ca. 3,7% van zijn energie.

Bereken zelf *e*

We hebben gezien hoe moeizaam *e* berekend kan worden uit de formule waarmee *e* gedefinieerd wordt. Newton heeft een formule voor *e* afgeleid die veel minder rekenwerk vraagt voor elke decimaal die je erbij wilt hebben.

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots \text{etc.}$$

Noteer eens hoeveel minuten het je kost om *e* met behulp van Newton's formule in 6 decimalen te berekenen. (*e* = 2,718281 ...).

° Bruikbaarheid van muntenstelsels

Een vergelijkend onderzoek gedaan in het kader statistiek
3 atheneum Nassau scholengemeenschap Breda

Als je in onze samenleving iets wilt verwerven, moet dat meestal met geld betaald worden, geld in de vorm van munten en bankbiljetten.

Geld moet rollen, zeggen ze, maar dat gaat beter met munten dan met biljetten.

In ons nederlandse systeem hebben we als munten:

cent, stuiver, dubbeltje, kwartje, gulden, rijksdaalder en daarnaast nog een heleboel biljetten van 5, 10, ...

De vraag dringt zich op: waarom hebben we nu juist deze munten en biljetten in omloop en geen andere? Waarom is er bijvoorbeeld geen 2 centstuk? Misschien lijkt het een vreemde vraag, maar zwitsers, Duitsers, Oostenrijkers, Denen en Italianen hebben wel zo'n munt. En kijk eens welke gewichten in een gewichtenblok voorkomen. Je treft daar aan: 1, 2, 5, 10, 20, 50 en 100 gram. Deze getallen uit het gewichtenblok blijken bij nader inzien juist de getallen van de munten van de Zwitsers te zijn. Zij hebben 1 centime, 2, 5, 10, 20, 50 en 100 of 1 franc. Is dat toeval of juist zo bedoeld?

Nu we het gevoel hebben dat deze zaken allemaal niet zo vanzelfsprekend zijn als ze op het eerste gezicht wel lijken, heeft het zin aan een onderzoek te beginnen.

Om de kwestie enigszins te vereenvoudigen zullen we ons onderzoek beperken tot de munten onder de 100.

De vraag luidt dan: waarom heeft de Nederlandse bank eigenlijk gekozen voor het 1-5-10-25 stelsel? Waarom hebben we geen andere waarden, waarom niet meer munten, waarom niet minder?

Is er misschien een beter stelsel te verzinnen; treffen we dat misschien in een van onze buurlanden aan?

Welke eisen moeten we eigenlijk aan een bruikbaar muntenstelsel stellen? Laten we proberen een paar wensen te formuleren. We moeten die dan later wel in een meer wiskundige vorm gieten.

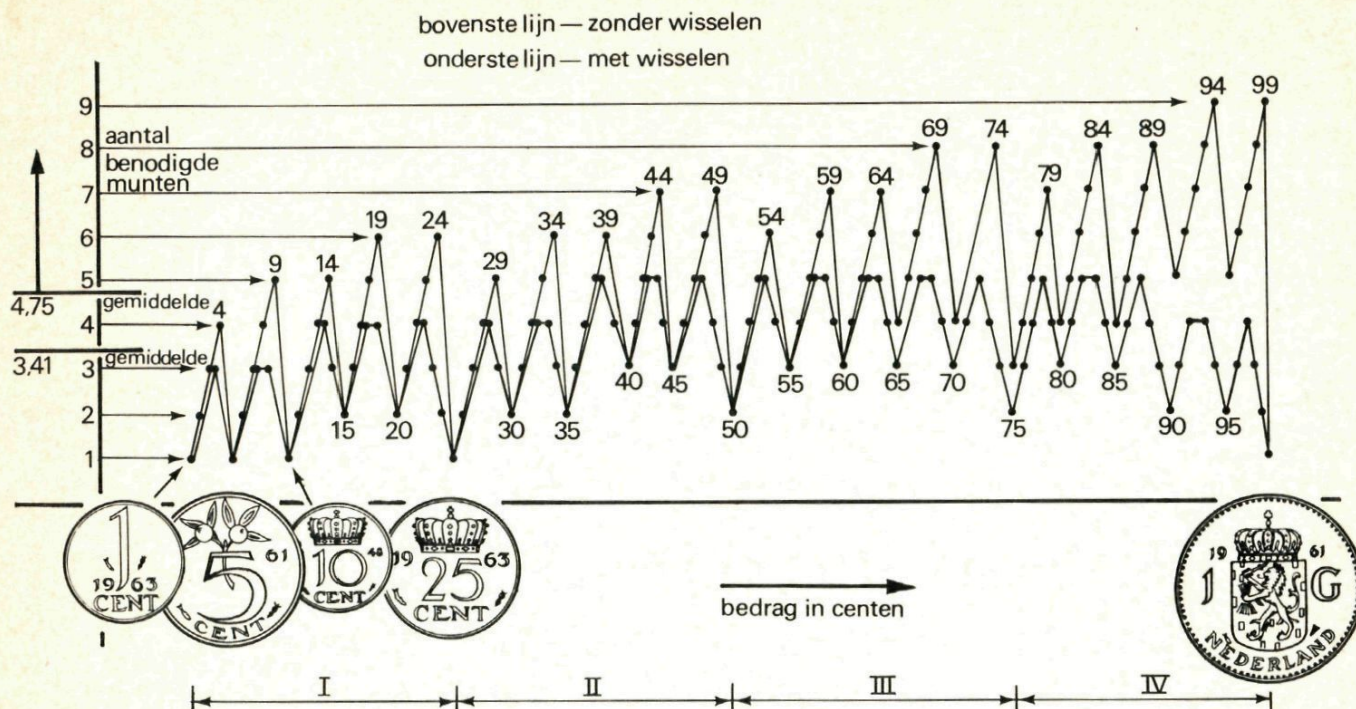


Fig. 1. Het aantal munten nodig voor een betaling

1. We willen zo weinig mogelijk munten. Je hebt dan niet veel tijd nodig om munten te zoeken in portemonnee of kassa; er ontstaan minder vergissingen en automaten worden er eenvoudiger door;
2. We willen als we een bepaald bedrag onder de 100 moeten betalen, dat met zo weinig mogelijk munten doen; dat vereenvoudigt de betalingswijze.

Laten we eens zien hoe een en ander in zijn werk gaat. Als je 7 cent wilt betalen heb je daar minimaal 3 munten voor nodig (1 stuiver en 2 centen); voor 48 cent minimaal 6 stuks (1 kwartje, 2 dubbeltjes en 3 centen) enz. Zo heb je bij 94 minimaal 9 munten nodig; ga dat zelf maar na.

In fig. 1 zijn twee grafieken uitgezet. De bovenste lijn geeft aan hoeveel muntstukken minimaal op tafel gelegd moeten worden om de diverse bedragen vanaf 1 cent tot 100 cent uit te tellen.

De grafiek heeft de vorm van een zaagtand met periode 5. Dat betekent dat de aantallen telkens oplopen tot een cijfer

eindigend op 4 of 9. Bij de vijftallen ontstaan steeds de minima. In de grafiekervaar je duidelijk de invloed van de vijftallen 5-10-25. De onderste grafiek geeft de aantallen die minimaal nodig zijn als men ook van de mogelijkheid van wisselen gebruik maakt. De uitkomsten worden dan vaak lager of blijven gelijk. Voor 9 cent heb je bijv. normaal 5 munten nodig, maar met wisselmogelijkheid slechts 2 (dubbeltje heen, cent terug); voor 48 cent 6 munten maar met wisselen slechts 4; voor 97 cent zonder wisselen 7, met wisselen 4 enz.

Als je de twee zaagtandlijnen met elkaar vergelijkt vallen een aantal zaken op, en wel:

door te wisselen worden de toppen van de eerste grafiek afgeknipt; het sterkst komt dat tot uiting voor bedragen na 50 cent; speciaal in de laatste klasse van 76 tot 100 cent doet zich de invloed van de gulden gelden (voor 99 cent heb je 9 munten nodig, met wisselen slechts 2).

We zouden onze wat gevoelsmatige ervaringen willen omzetten in meer kwan-

Stelsel	(n) aantal munten	totaal aantal munten bij betaling 1-100	nodig		$b = \frac{100}{np}$
			maxi- maal	gemid- delde (p)	
Nederland 1-5-10-25-(100)	4 (5)	470 (338)	9 (5)	4,75 (3,38)	5,26 (5,92)
West-Duitsland 1-2-5-10-50-(100)	5 (6)	410 (304)	8 (5)	4,14 (3,04)	4,83 (5,48)
Zwitserland 1-2-5-10-20-50-(100)	6 (7)	330 (283)	6 (4)	3,33 (2,83)	5,01 (5,05)
1-5-10-50-(100)	4 (5)	509 (349)	10 (6)	5,14 (3,49)	4,86 (5,73)
1-3-10-30-(100)	4 (5)	419 (323)	8 (5)	4,23 (3,23)	5,91 (6,19)

Fig. 2. Vergelijking van een aantal stelsels.

titatieve vorm. Anders gezegd: we willen de kwaliteit van ons muntenstelsel uitdrukken in één of meer getallen. Zo iets als bij een rapportcijfer voor nederlands: voor spreekvaardigheid krijg je bijvoorbeeld een 7, voor literatuur een 8, voor je opstel een 6 enz.

In fig. 2 staat een tabel waarvan de eerste rij een aantal uitkomsten geeft betreffende ons normale stelsel. Daar vind je allereerst het aantal munten en wel 4 (onder de 100). We stellen dit getal gelijk aan n . De gulden wordt dus even buiten beschouwing gelaten; we gaan maar tot 99. In de tweede kolom staat het aantal munten dat totaal nodig is om de bedragen van 1 tot 100 cent neer te tellen, zonder wisselen. Dat blijkt totaal 470 te zijn.

Verder staat aangegeven dat er in dit stelsel maximaal 9 munten nodig zijn per betaling en gemiddeld $470 : 99 = 4,75$.

Dit laatste bedrag stellen we p . Het aantal munten n en het gemiddelde p zijn kenmerkend voor het muntenstelsel. Volgens de eerder geformuleerde wensen zouden zowel n als p klein moeten zijn. Je zou

een formule kunnen invoeren voor de *bruikbaarheid* (b) van een stelsel door te definiëren:

$$b = \frac{100}{n \times p}$$

Immers hoe kleiner n en hoe kleiner p , des te groter de waarde van b . Het getal 100 in de teller dient er enkel voor om ervoor te zorgen dat de waarde van b meer dan 1 wordt (dus om al te kleine breuken te vermijden).

Berekening leert dat de bruikbaarheid van ons muntenstelsel wordt:

$$b = \frac{100}{4 \times 4,75} = 5,26$$

Nu we ons muntenstelsel aldus gekwalificeerd hebben en van getallen voorzien, kunnen we op zoek gaan naar andere vergelijkbare systemen. Vooreerst kun je het effect van wisselen nu in cijfers uitdrukken. Hierbij doet nu dus de gulden ook mee. We hebben dan 5 munten. Het totaal voor de 100 betalingen daalt tot 338.

Het gemiddelde wordt dan 3,38 en de bruikbaarheid 5,92. De getallen tussen haakjes in de tabel zijn steeds de uitkomsten in het geval van wisselen.

We gaan nu eerst op bezoek bij enkele buurlanden. In fig. 3 staan de combinaties die zij gebruiken in het gebied 1-100. Het duitse en het zwitserse systeem zijn erg interessant om met het onze te vergelijken omdat 1 mark en 1 franc vrijwel gelijk zijn aan onze gulden (1 DM = f 1,05 en 1 zw. fr. = f 0,91).

West-Duitsland heeft een munt extra van 2 pfennig en bovendien 25 vervangen door 50. Welk effect heeft dat?

In de tweede rij van fig. 2 staan de resultaten van onze telling. Ondanks dat er één munt meer is, waardoor de totalen telkens lager uitvallen en het gemiddelde ook, is het stelsel uiteindelijk toch minder effectief.

Het aantal munten is met 25% gestegen maar het gemiddelde is niet met 25% gedaald maar met minder. Het product $n \times p$ is feitelijk toegenomen, waardoor de bruikbaarheid gedaald is tot 4,83 en met wisselen tot 5,48.

In de derde rij staat het zwitserse stelsel. Het blijkt ook op een lagere score te eindigen.

We zouden kunnen proberen variaties aan te brengen op ons eigen systeem om te zien of we een gunstiger resultaat kunnen bereiken. We hebben al ervaren dat verhoging van het aantal munten nog niet per sé rendabel behoeft te zijn. Als we de 25-munt die in veel buurlanden ontbreekt eens vervangen door de 50-munt. Die is bij onze burens nogal populair. Ook dat systeem is uitgeteld; de uitkomsten staan in fig. 2; dit blijkt geen verbetering.

Fig. 3. Systemen in verschillende landen.

land	1	2	5	10	20	25	50	100
nederland 1 gulden = 100 cent								
oostenrijk 1 schilling = 100 groschen								
west-duitsland 1 mark = 100 pfennig								
zwitserland 1 franc = 100 centimes								
denemarken 1 krone = 100 øre								
frankrijk 1 franc = 100 centimes								
engeland 1 pound = 100 new pence								
belgië 1 - 100 franc								
italië 1 - 100 lire								

Waar zit het hem nu in of het ene systeem beter is dan het andere? Men zou gissen dat het het voordeligste is, als de muntwaarden — althans bij benadering — een meetkundige rij vormen, dus op elkaar volgen als

$$1, a, a^2, \dots$$

We kunnen er hier niet nader op ingaan. Er is een gebied van de wiskunde, informatietheorie, waar men dergelijke problemen behandelt, zij het dan in een wat andere vorm; er worden dan vragen onderzocht zoals die naar codes waarmee men boodschappen zo zuinig mogelijk kan overbrengen.

De eenheden van ons tientallig stelsel

$$1, 10, 100, \dots$$

vormen een meetkundige rij, maar een die zich niet exact laat verfijnen. Immers men zou dan bijv. tussen 1 en 10 de vierkantswortel uit 10 moeten inlassen, maar daar kun je moeilijk betalingen mee doen. Nu is $\sqrt{10}$ bij benadering gelijk aan 3 en door dit feit wordt een muntstelsel

$$1, 3, 10, \dots$$

gesuggereerd, maar de '3' zit er toch wat vreemd tussen. Hoewel — nog niet zo lang geleden hadden ze in Duitsland een 3-Mark-munt, ook 'Taler' genaamd. Inderdaad is de bruikbaarheid van zo'n stelsel met wisselen groter dan 6. (fig 2).

In ons systeem spookt de $2\frac{1}{2}$, een slechtere benadering van $\sqrt{10}$ dan 3, maar als kwart van 10 heel bruikbaar. Eigenlijk was ons muntstelsel vroeger ook met de $2\frac{1}{2}$ als tussenlid opgebouwd.

Bij de centen ging het met

$$\frac{1}{2}, 1, 2\frac{1}{2}, 5, 10$$

maar $\frac{1}{2}$ en 5 werden in de praktijk minder gebruikt. Bij de dubbeltjes ging het precies met

$$1, 2\frac{1}{2}, 10,$$

te weten 10, 25, 100 centen

(een zilveren halve gulden was al lang uit de roulatie); bij de guldens was het weer

$$1, 2\frac{1}{2}, 10$$

waarbij het gouden tientje voor een bankbiljet plaats had moeten maken. Ook bij de 10-guldens ging het trouwens volgens

$$1, 2\frac{1}{2}, 10$$

te weten 10, 25, 100 guldens.

Dit systeem is nu wel in de verturving geraakt. De $2\frac{1}{2}$ cent (ook vierduitstuk genaamd) is verdwenen, de rijksdaalder waarmee het Rijk muntspecie had willen bezuinigen, wordt niet geaccepteerd; een f 5,— biljet dat het systeem verstoort, is erbij gekomen, maar is zeldzaam. Bij de tientallen-guldens is er een eenheid van 5 bijgekomen, het f 50-biljet, dat ook niet in het systeem past. Het enige gebied waar het nog klopt is dat van de dubbeltjes, met

dubbeltje, kwartje, gulden,

Het zou allemaal veel gemakkelijker zijn geweest als we niet het gekke tientallige talstelsel hadden. In een 2-, 4-, of 8-tallig stelsel zou het betalen gemakkelijker zijn.

°Wat vouwen kan suggereren

Toen je nog behoorde tot het wiskundebroedsel in de brugklas, maakte je bij het tekenen van grafieken al kennis met de parabool. De hyperbool moest nog wachten vanwege zijn asymptoten, maar verscheen toch in de middenklassen. Daarna presenteerde zich o.a. ook bij natuurkunde de ellips. Alle drie echter kunnen al geconstrueerd worden, als je nog maar tot de junioren in de wiskunde behoort. Nou, ja, construeren is wat sterk uitgedrukt. Beter is: door vouwen te voorschijn toveren. Dat gaan we nu doen.

Eerste vouwwijze

Een rechthoekig vel papier, liefst ongeïllineerd, krijgt een punt ongeveer twee centimeter boven het midden van een lange zijde. Zie fig. 1. Vouw om, zoals fig. 2 aangeeft, dus precies langs de punt, en maak de vouwlijn goed scherp. Weer openen en een andere vouwlijn scheppen. Herhaal dit zo ongeveer 20 keer. De vouwen suggereren een bekende kromme. Accentueer deze desgewenst fijntjes met potlood.

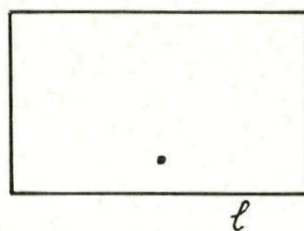


Fig. 1.

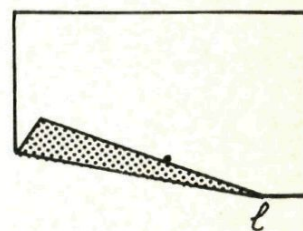


Fig. 2.

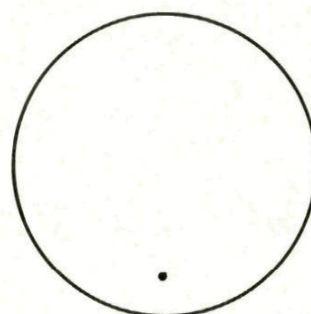


Fig. 3.

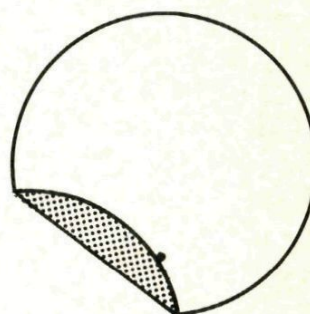


Fig. 4.

Tweede vouwwijze

Teken met de passer een flinke cirkel en knip die uit. Plaats een punt in het binnengebied. Zie fig. 3. Vouw om, zoals fig. 4 aangeeft. Weer openen en herhalen. Tenslotte ontdekt je oog weer een kegelsnede.

Derde vouwwijze

Teken op een rechthoekig vel papier een cirkel en zet een punt zoals fig. 5 aanwijst. Vouw het papier zo, dat de punt op de cirkel komt. Of omgekeerd, vouw zo, dat de cirkel op de punt komt. Weer openen en opnieuw vouwen. Herhalen rondom de gehele cirkel en de vouwlijnen goed scherp maken. Voer de opdracht uit tegen een raamruit, waardoor het papier meer doorschijnend is. Nauwkeurigheid en geduld worden weer beloond met een kegelsnede.

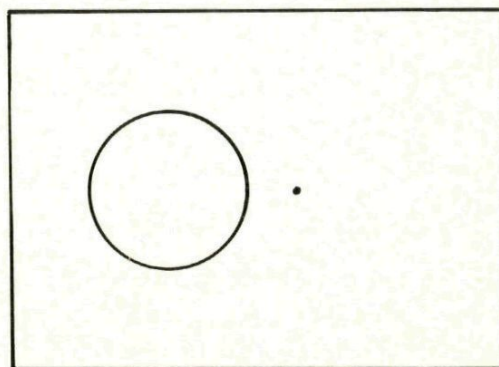


Fig. 5.

°° We gaan nu eens kijken waarom de vouwlijnen ons kegelsneden voortoverden. In fig. 6 is een parabool getekend. In elk punt van die kegelsnede kan een raaklijn worden geconstrueerd. Men zegt, dat de raaklijnen de parabool omhullen. Omgekeerd, als een voldoende aantal raaklijnen kan worden getekend, zal de suggestie van een parabool tot stand komen. Een analoge situatie treedt op bij ellips en hyperbool. De vouwlijnen in de drie opdrachten vervullen de rol van raaklijnen.

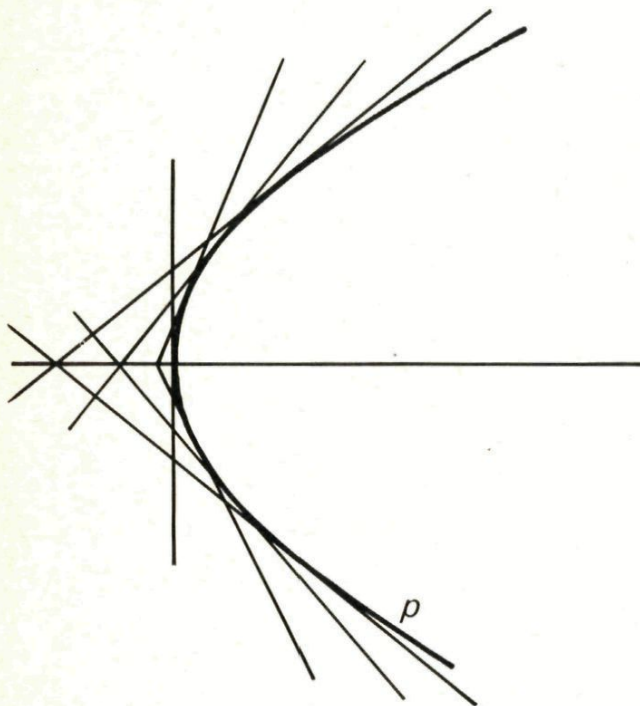


Fig. 6

De parabool

Deze kan worden gedefinieerd als de verzameling punten waarvan de afstanden tot een gegeven lijn en een vast punt gelijk zijn.

In fig. 7 is l die gegeven lijn, de richtlijn, en is F het vaste punt. P is een punt van de parabool.

$$d(P, l) = \overline{PQ} = \overline{PF}.$$

Lijn t is symmetrie-as van de vlieger $PFRQ$. t is ook raaklijn aan de parabool. Immers voor een punt M van t , ongelijk P , geldt:

$$d(M, l) = \overline{MN} < \overline{MQ} \left. \begin{array}{l} \overline{MQ} = \overline{MF} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{MN} < \overline{MF} \Rightarrow M$$

is niet een punt van de parabool.

Bij de vouwopdracht nr. 1 is de lange zijde van het vel papier de richtlijn. De symmetrie-as t , dus de raaklijn, ontstaat als vouwlijn. De vouwlijnen zijn omhullenden van een parabool.

De ellips

Deze kan gedefinieerd worden, als de ver-

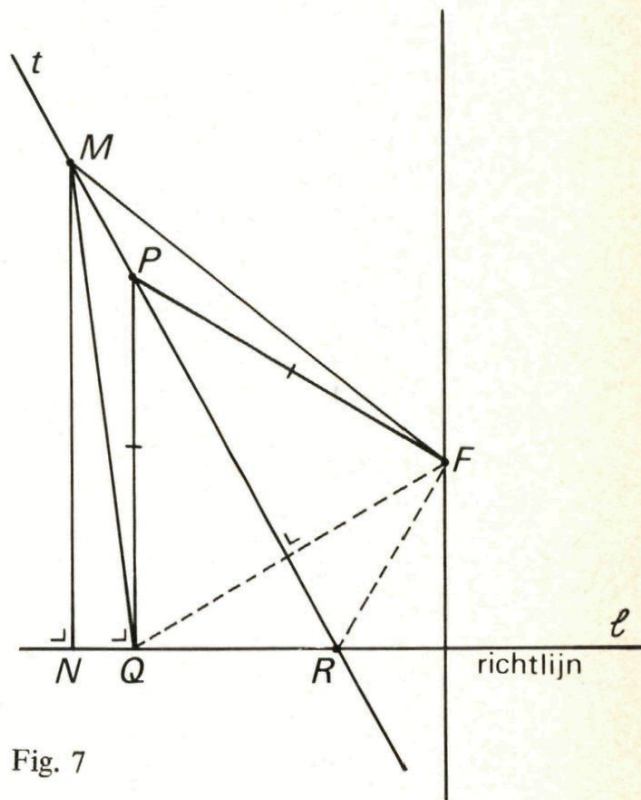


Fig. 7

zameling punten waarvan de som van de afstanden tot twee gegeven punten constant is.

In fig. 8 zijn F_1 en F_2 die vaste punten en is $2a$ de gegeven afstand. Is nu P een punt van de ellips dan is $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$. Verleng F_1P met $\overline{PQ} = \overline{PF_2} \Rightarrow \overline{F_1Q} = 2a$.

t is symmetrie-as van ΔPF_2Q . Op de zelfde manier als bij de parabool wordt bewezen, dat t ook raaklijn is aan de ellips. De cirkel met middelpunt F_1 en straal $2a$ heet richtcirkel van de ellips. Punt Q ligt op die cirkel. Vouwen zoals in opdracht 2 laat Q op F_2 komen en dus is de vouwlijn

raaklijn. Een voldoende aantal malen vouwen wekt in deze opdracht de suggestie van een ellips.

De hyperbool

Deze kan worden gedefinieerd als de verzameling punten waarvan het verschil van de afstanden tot twee vaste punten constant is.

In fig. 9 zijn F_1 en F_2 die vaste punten en is $2a$ de afstand. Voor P als punt van

de hyperbool geldt:

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a. \text{ Pas op } \overline{PF_2} \text{ af } \overline{PQ} = \overline{PF_1} \\ \Rightarrow \overline{F_2Q} = 2a.$$

De cirkel met middelpunt F_2 en straal $2a$ is weer richtcirkel. t is symmetrie-as van $\triangle PQF_1$ en tevens raaklijn aan de hyperbool. Bij de opdracht is de richtcirkel gegeven en punt F_1 . Het omvouwen brengt dat punt op de richtcirkel, de vouwlijn is weer symmetrie-as t en tevens raaklijn. Zo ontstaat dan nu een hyperboolsuggestie.

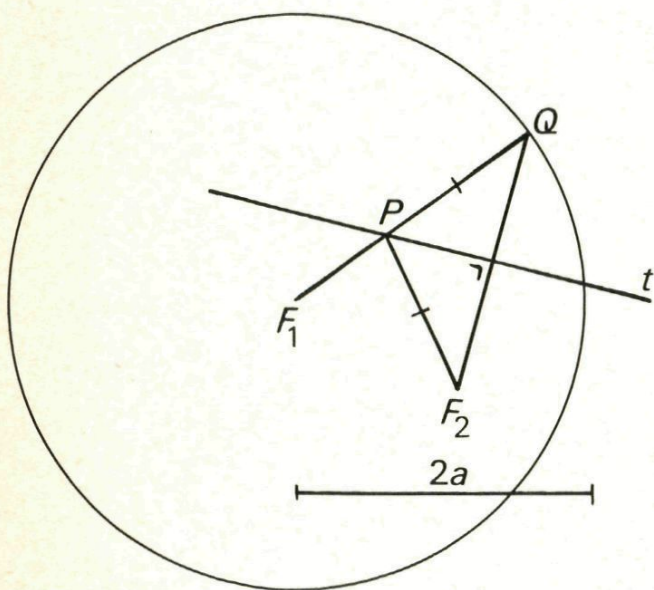


Fig. 8

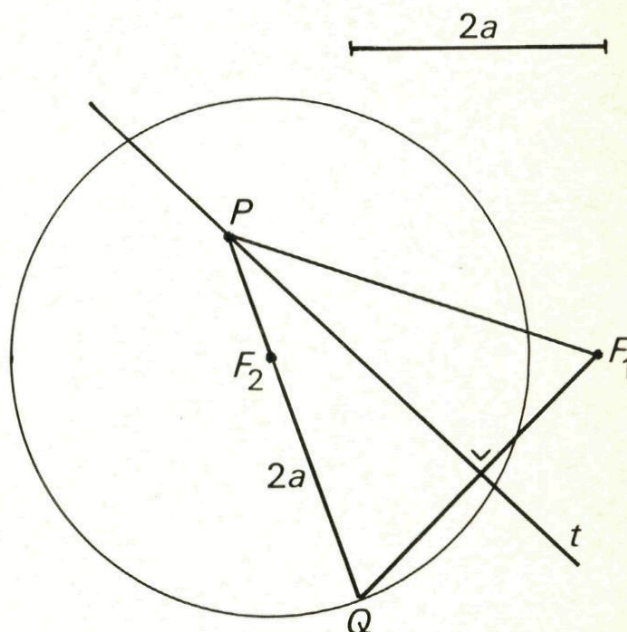


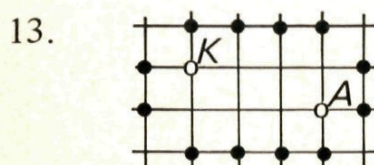
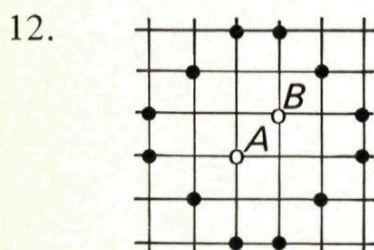
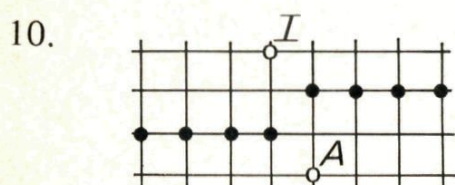
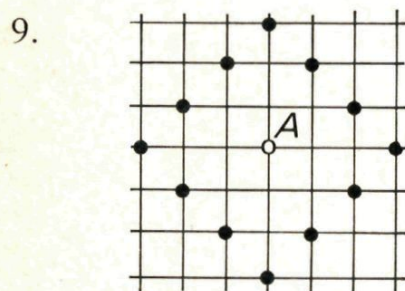
Fig. 9

Antwoorden op de denkertjes uit no. 1

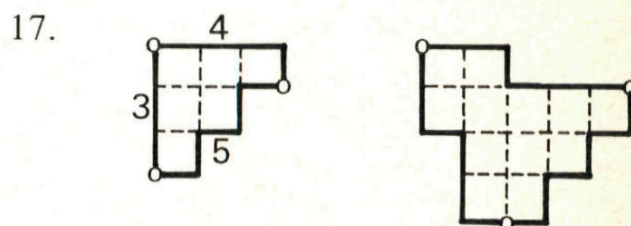
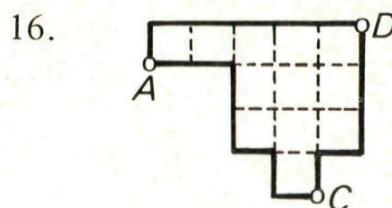
1. Een cirkel met als middellijn de straal van de inversiecirkel. Beide cirkels raken elkaar in het raakpunt van de lijn en de inversiecirkel.
2. De inversiecirkel is zijn eigen inverse! Dit volgt direct uit $OP \cdot OP_1 = r^2$. Nemen we daarin $OP = r$ dan is ook $OP_1 = r$.

3. Als de afstanden tussen de evenwijdige lijnen gelijk zijn aan $\frac{1}{2}r$, verhouden de afstanden van de evenwijdige lijnen zich als $\frac{1}{2} : 1 : 1\frac{1}{2} : 2 \dots = 1 : 2 : 3 : 4 \dots$. De stralen van de cirkels verhouden zich dan als: $\frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} \dots$

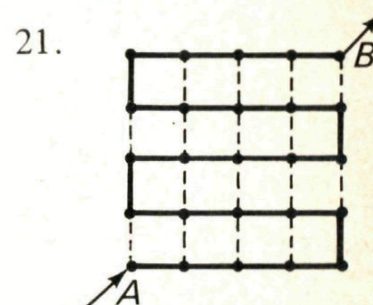
4. Het hele schaakbord staat erop (64 velden!)
5. De hele inverse figuur is niet afgebeeld, want de 4 velden die het midden van een schaakbord vormen, zijn slechts gedeeltelijk weergegeven in de vier hoekpunten van de afbeelding. De rest strekt zich uit tot in het oneindige.
6. De inversen van de hoekpunten van het schaakbord vind je in het midden van de tekening terug als de 4 punten waar de boogjes bij elkaar komen.
7. Het witte vlakje in het centrum is de inverse figuur van het hele platte vlak dat buiten het schaakbord ligt.
8. Taxi-afstand $AF = 7$



14. De verzameling is leeg.
15. B ligt op een taxiweg van A naar D dus geen taxi-driehoek ABD . Wel een taxi-driehoek ACD .



18. Lukt niet.
19. Elke gesloten rondrit in de stad heeft een even lengte.
20. Stel er is een punt P dat gelijke afstanden n heeft tot A en B . A en B hebben een oneven afstand. Een rondrit van A naar P naar B en terug naar A heeft de lengte $2n + \text{oneven} = \text{oneven}$, wat onmogelijk is.



22. Lukt niet.
23. Voor het snijpunt van de 2 rechten:

$$x_{n+1} = 6 - \frac{1}{2}(7 - x_n) \quad \text{of}$$

$$x_{n+1} = 0,5x + 2,5$$

Voor het snijpunt van rechte en parabool:

$$x_{n+1} = 8 - \frac{1}{2}(\frac{1}{8}x_n^2 - x + 3) \quad \text{of}$$

$$x_{n+1} = -0,0625x_n^2 + 0,5x_n + 6,5$$

24. $0 \in \text{dom } f$ maar $0 \notin \text{dom } g$.
Wel $1 \in \text{dom } g$.

25. a. $y = 10 \cdot x^5 \Leftrightarrow \log y = \log (10 x^5)$
 $\Leftrightarrow \log y = \log 10 + \log x^5$
 $\Leftrightarrow \log y = 1 + 5 \log x$.

Stel $\log y = t$ en $\log x = z$ dan vinden we $t = 1 + 5z$:
de vergelijking van een rechte lijn.

Dus dubbellogaritmisch papier.

b. $y = 10 \cdot 5^x$.

$\Leftrightarrow \log y = \log (10 \cdot 5^x)$

$\Leftrightarrow \log y = \log 10 + \log 5^x$

$\Leftrightarrow \log y = 1 + x \cdot \log 5$.

Stel $\log y = t$ dan vinden we

$t = 1 + x \cdot \log 5$: de vergelijking van een rechte lijn.

Dus enkel logaritmisch papier.

Oplossing van de kruiswoordpuzzel uit no. 1

1	g	o	e	2	d		3	p			4	s		5	k	e	6	g	e	l		7	c			8	i		9	r	e	s	10	t
	e				r			a				a						o					o				d			e				o
	b				a			s				m						n					n				e			c				e
	r				g			c				e						i					g				n			h				g
	o				e			a				n						u					13	r	u	i	t		14	t	w	e	e	
11	k	e	e	r			12	l	e	e	g							m					u				i		h				v	
	e											e						e					e				e		o				o	
	n											s						t					n				k		e				e	
	e							15	p	u	n	t						r					t				e		k				g	
	x											e						i					e				v		s				d	
16	p	a	a	r			17	d	e	e	l			18	b	e	e	l	19	d			20	d	r	i	e		21	z	ij	d	e	
	o							e				d		e					e				r			r		ij				n		
	n							r				e		s					l				i			z		d						
	e				22	a		t				f		p					e				e			a		e						
	n					f		i				u		23	r	a	k	e	n				24	h	m	c	m		25	n	o	r	26	m
27	t	e	r	m				g				n		e									o			e							i	
								e				v											e				l						d	
								t				o											k				i						d	
								e				u											e				n			30	s			e
31	e	v	e	n			32	d	r	i	e			g					g				n			g			33	t	i	e	n	

Inhoud:

'Uit de kunst' I: regelmatige vlakverdeling 25

'Uit de kunst' II: inverse figuren 30

e, het 'groeigetal' 34

Bruikbaarheid van muntenstelsels 40

Wat vouwen kan suggereren 45

Antwoorden op de denkertjes uit no. 1 46

PYTHAGORAS

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. Elsenaar, Harderwijk.
W. Kleijne, Heerenveen.
Ir. H. Mulder, Breda.
A. F. van Tooren, Leusden-C.
G. A. Vonk, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Bruno Ernst, Muurhuysen 11, Amersfoort.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden. De oplossingen van denkertjes en prijsvragen naar: A. F. van Tooren, Calabrië 33, Leusden-C.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, *f* 5,— per jaargang.
Voor anderen *f* 7,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

