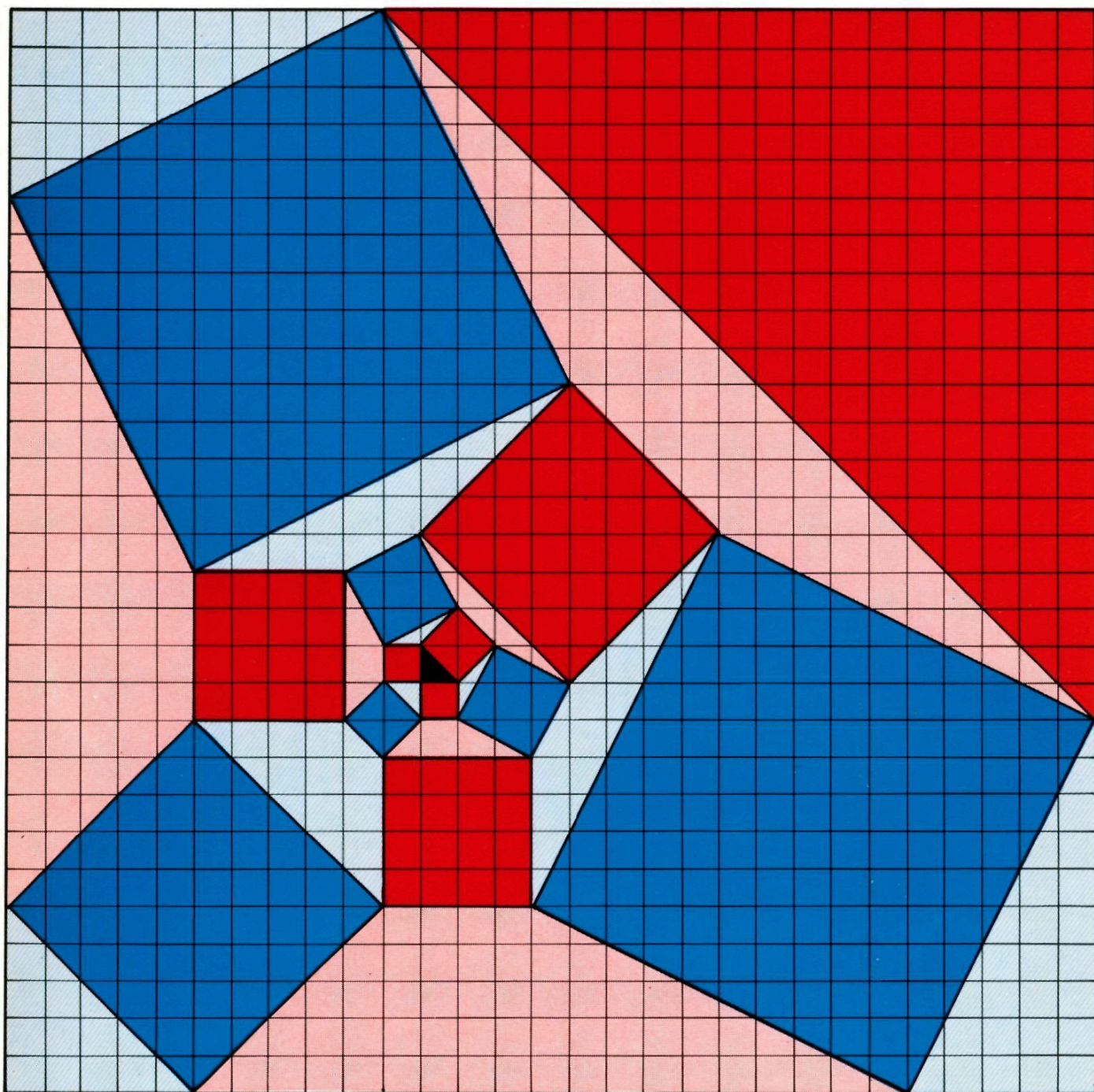


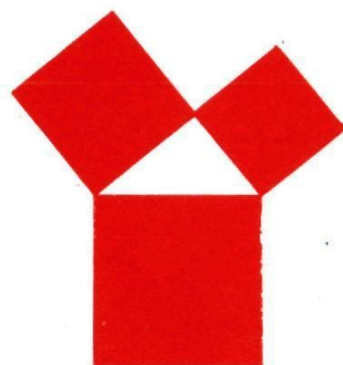


**3**

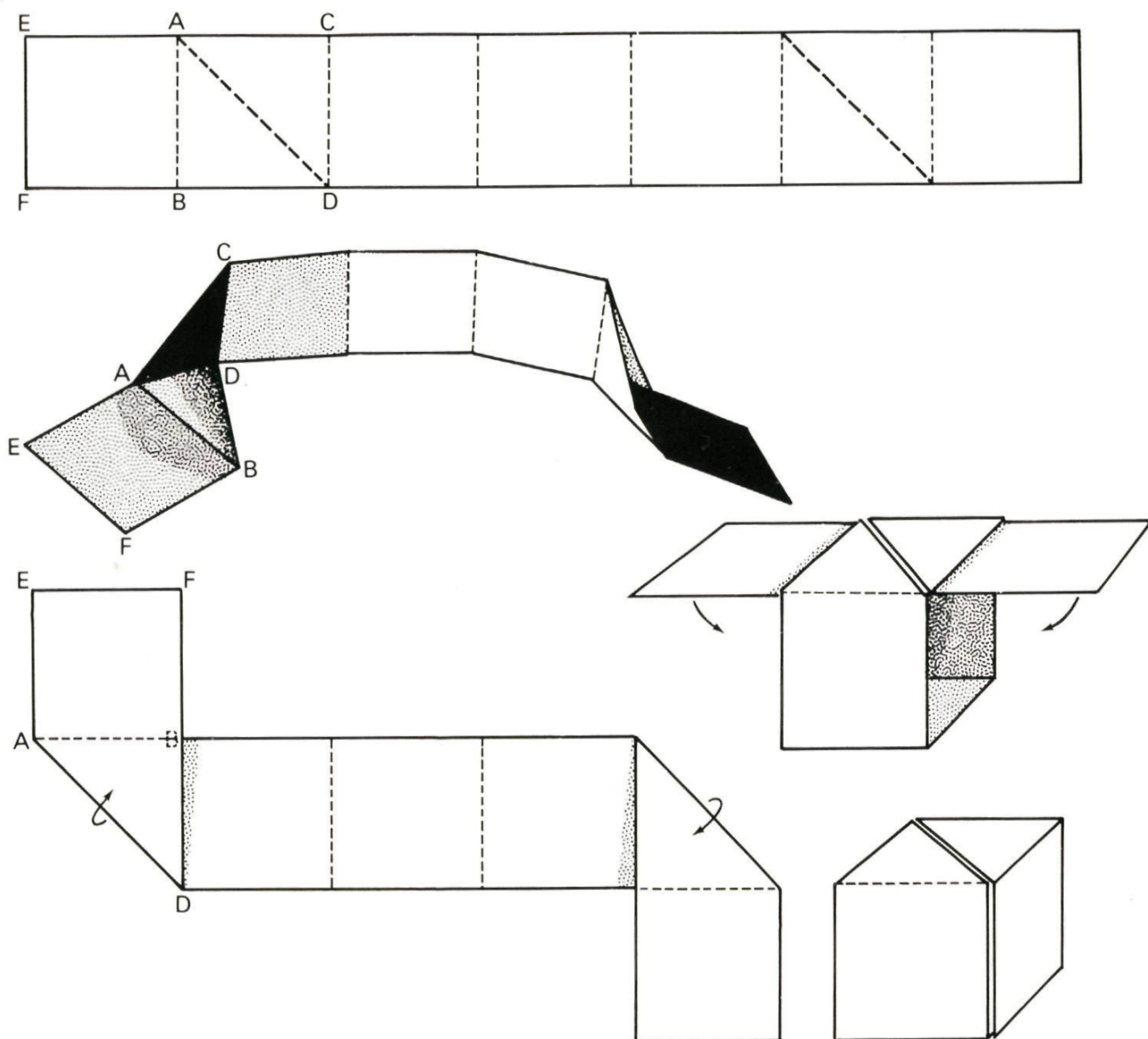
**jaargang 14**

**wiskundetijdschrift  
voor jongeren**

**wolters-noordhoff 1975**



# **Pythagoras**



In het Engelse tijdschrift voor jeugdige liefhebbers van wiskunde vonden we de bovenstaande aardige manier om van een strip van 7 vierkanten een kubus te vouwen.

#### BIJ DE FIGUUR OP DE OMSLAG:

Op de zijden van een gelijkbenig-rechthoekige driehoek zijn vierkanten getekend. De vrije hoekpunten der vierkanten worden door drie sluitlijnen met elkaar verbonden en op deze sluitlijnen worden weer vierkanten getekend, enz.

Rond de kerndriehoek ontstaat op deze manier een krans van steeds nieuwe vierkanten en trapezia. In het artikel 'Pythagoras uitgebreid' gaan we hier verder op in.



# Pythagoras uitgebreid

Een van de vruchtbaarste stellingen uit de meetkunde is de stelling van Pythagoras, die het eenvoudige verband weergeeft, dat tussen de zijden van een rechthoekige driehoek bestaat:  $a^2 + b^2 = c^2$ . We kunnen dit verband ook in beeld brengen door op de zijden van de driehoek vierkanten te tekenen (fig. 1b). Dan is de oppervlakte van het grootste vierkant gelijk aan de som van de oppervlakten der twee kleine vierkanten:  $A + B = C$ .

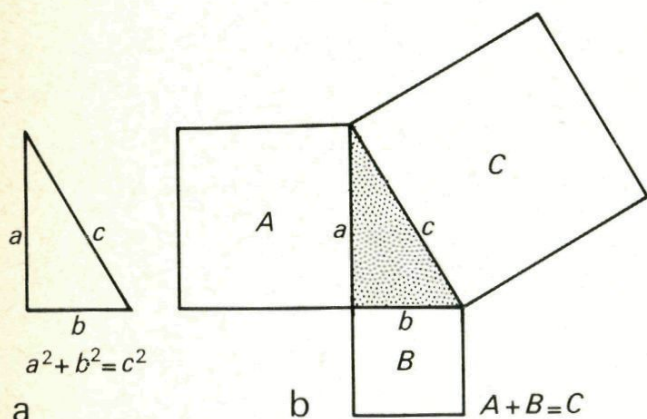


Fig. 1

## Een stapje verder

We verbinden de vrije hoekpunten van de vierkanten met elkaar en tekenen op de drie sluitlijnen weer vierkanten (fig. 2).

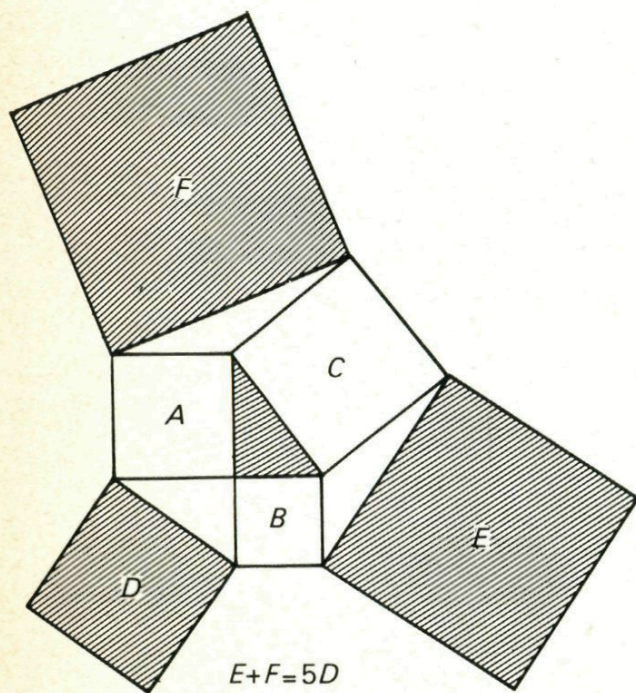


Fig. 2

Is er nu ook zo'n eenvoudige relatie tussen de oppervlakten van deze vierkanten? Ja! Als we de oppervlakte van de vierkanten op de sluitlijnen  $D$ ,  $E$  en  $F$  noemen (fig. 2) dan blijkt:  $E + F = 5D$  ofwel: de som van de twee grootste vierkanten is gelijk aan 5 maal het kleinste. Het bewijs is eenvoudig (fig. 3).

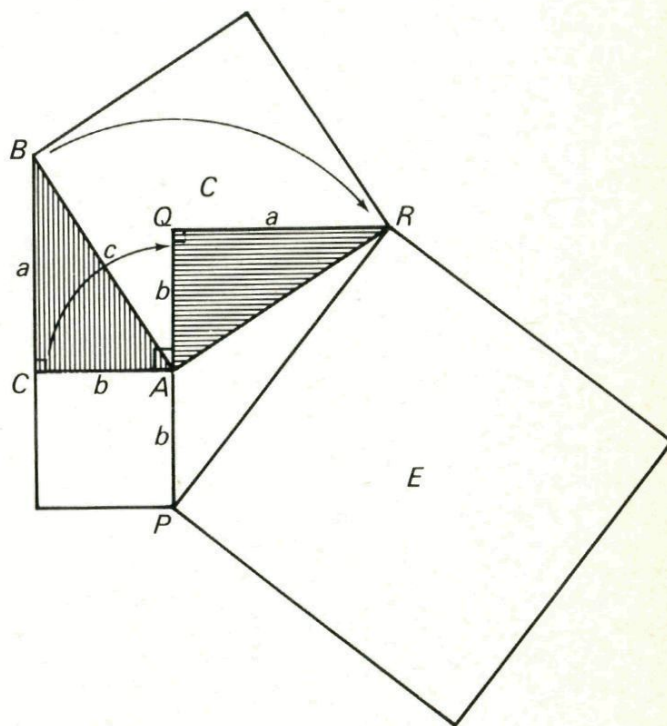


Fig. 3

We roteren de rechthoekige driehoek (gearceerd)  $ABC$  om  $A$  over  $90^\circ$ . Hierdoor ontstaat driehoek  $ARQ$ . We passen nu de stelling van Pythagoras toe op de grote driehoek  $PQR$ .  $PR^2 = (2b)^2 + a^2 = 4b^2 + a^2$ . Dit is dus ook de oppervlakte van het vierkant op de sluitlijn  $PR$ .



Analoog geldt voor het andere grote vierkant (in fig. 2 met  $F$  aangegeven)  $F = b^2 + 4a^2$ . Verder merken we op dat  $C = D$ .

Zetten we dit nu bij elkaar dan krijgen we:

$$E = 4b^2 + a^2$$

$$F = b^2 + 4a^2$$

$$E + F = 5(a^2 + b^2) = 5c^2 = 5C = 5D$$

In fig. 4 is een willekeurige driehoek getekend, met op elke zijde een vierkant. Op de sluitlijnen zijn weer vierkanten getekend.

Is er nu ook een eenvoudig verband tussen de vierkanten  $D$ ,  $E$ ,  $F$  en  $A$ ,  $B$  en  $C$ ? Hierop komen we in het volgende nummer terug.

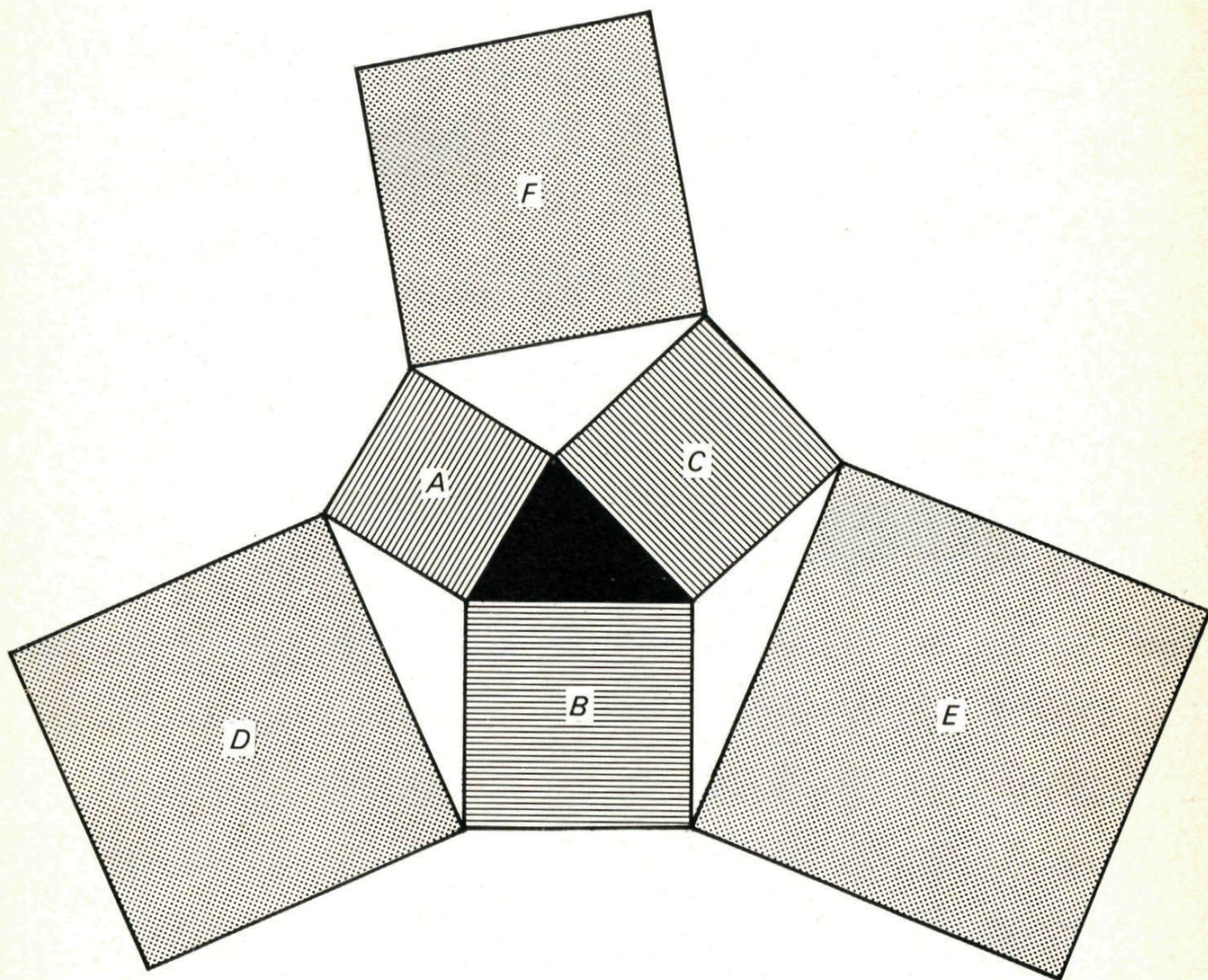


Fig. 4

In fig. 2 kunnen we weer sluitlijnen tekenen, daarop weer vierkanten etc. Welk verband bestaat er tussen de oppervlakten van de vierkanten die dan elke keer tevoorschijn komen? Puzzel dat zelf maar eens uit!



## °Een belangrijke eigenschap van de ellips

Een ellips is de verzameling punten ( $P$ ) waarvan de afstand tot twee vaste punten ( $F_1$  en  $F_2$ ) constant is (hier  $a + b$ ). Fig. 1. Zo'n ellips is eenvoudig te tekenen als je twee spijkertjes in  $F_1$  en  $F_2$  bevestigt en er een lusje garendraad omheenlegt waarvan de lengte  $a + b + c$  is. Met een potloodpunt trekken we het lusje strak en bewegen het rond.

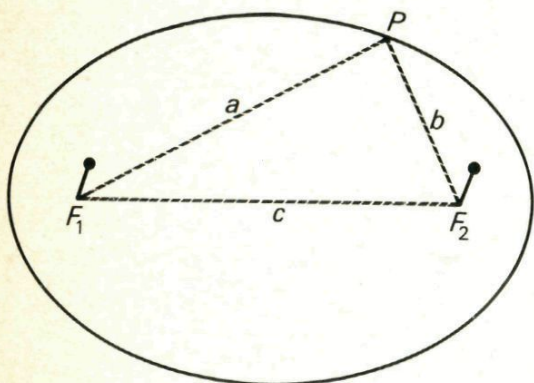


Fig. 1

Nu een eenvoudig probleem: Hoe construeren we een raaklijn in  $P$ ? (fig. 2). We letten even niet op de gestippelde lijnen. Trek  $F_1P$  en  $F_2P$ . Verleng daarna  $F_1P$  met  $PQ = F_2P$ . Trek  $F_2Q$  en construeer vanuit  $P$  een lood-

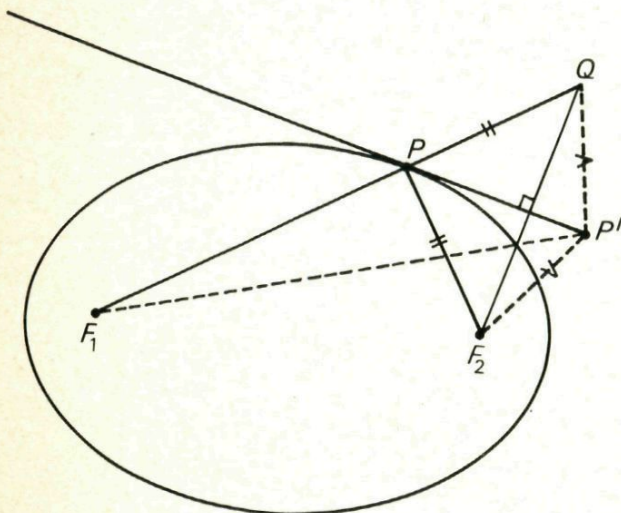


Fig. 2

lijn hierop. Deze loodlijn is de raaklijn in  $P$  aan de ellips.

Het bewijs is niet moeilijk: het komt erop neer aan te tonen, dat  $P$  het enige punt op deze loodlijn is, dat ook op de ellips ligt, ofwel, dat elk ander punt van de loodlijn *buiten* de ellips ligt.

Nemen we nu eens een willekeurig punt van de loodlijn:  $P'$ . We verbinden dit met  $F_1$ ,  $F_2$  en  $Q$ . We bewijzen nu dat  $F_1P' + F_2P' > F_1P + F_2P$ . Dan kan  $P'$  nooit op de ellips liggen, want anders zouden de sommen van beide lijnstukken gelijk moeten zijn.  $F_1P' + F_2P' = F_1P' + P'Q$  en de laatste som is groter dan  $F_1Q$  omdat in een driehoek (hier  $F_1P'Q$ ) twee zijden altijd groter zijn dan de derde.

We kunnen nu dus een raaklijn in een bepaald punt van een ellips construeren. We gaan nog iets verder (fig. 3).

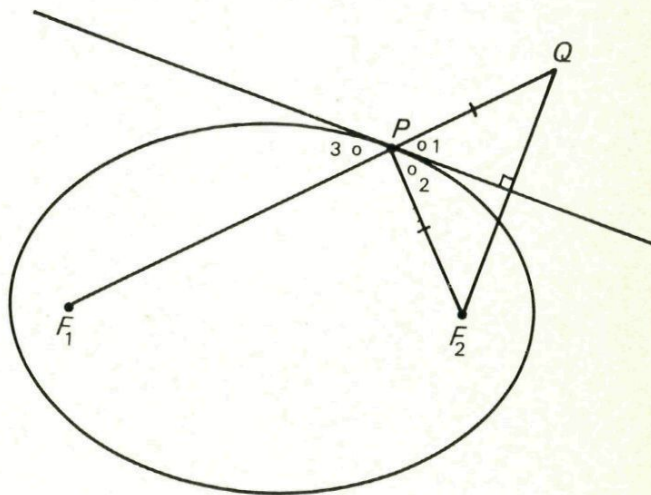


Fig. 3

$\angle P_1 = \angle P_2$  (want  $PF_2Q$  is gelijkbenig).  
 $\angle P_1 = \angle P_3$  (overstaande hoeken), dus  
 $\angle P_2 = \angle P_3$ .

Als we ons de ellips denken als een spiegelende strip, dan zal een lichtstraal, uitgaande van  $F_1$  altijd door  $F_2$  gaan (hoek van inval is gelijk aan de hoek van terug-



kaatsing). Als we een lampje in  $F_1$  zetten (fig. 4), dan zullen alle lichtstralen die van dit lampje uitgaan, weer in  $F_2$  verenigd worden.

Nu zal je wel duidelijk zijn, waarom we  $F_1$  en  $F_2$  de brandpunten van de ellips noemen.

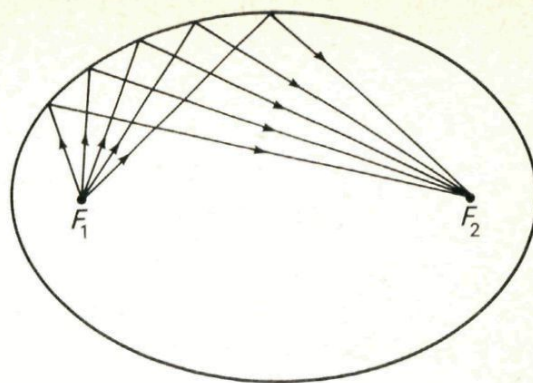


Fig. 4

## °°° Een kaars, een ellips en een sinusöide

Neem een kaars en wikkel daar een strook papier omheen (fig. 1). Snij nu met een mes de kaars door, zodat het snijvlak niet loodrecht op de kaars staat. De doorsnede is een ellips en als we het papier van de kaars afwikkelen zien we een sinusöide (fig. 2).

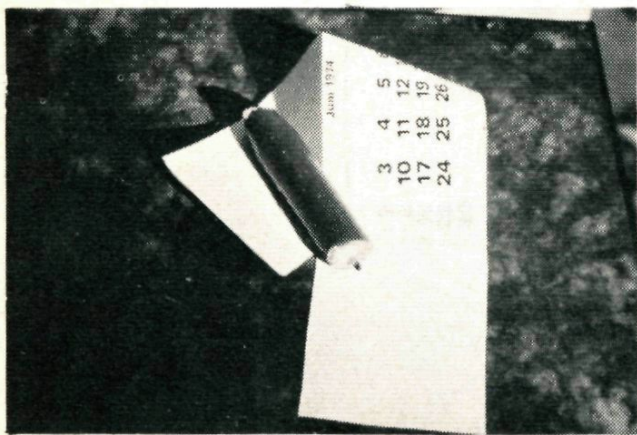


Fig. 1

*De schuine doorsnede van een cilinder met een plat vlak is een ellips*

De Belgische ingenieur Dandelin gaf hiervoor het volgende fraaie bewijs (fig. 3).

In de cilinder brengen we twee bollen aan die de cilindermantel raken volgens cirkels en het snijvlak raken in de punten  $F_1$  en  $F_2$ .

We nemen nu een willekeurig punt  $P$  op

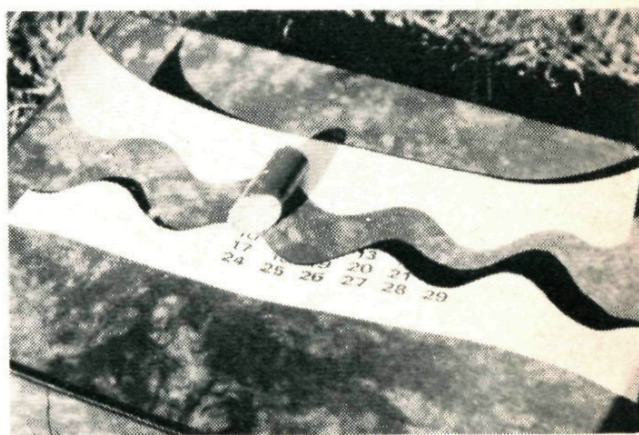


Fig. 2

de omtrek van het snijvlak. Dit punt  $P$  ligt natuurlijk op de cilindermantel.

Door  $P$  trekken we op de cilindermantel een lijn die evenwijdig is aan de as van de cilinder en die de beide raakcirkels snijdt in  $A$  en  $B$ . Vanuit  $P$  trekken we ook lijnen naar de raakpunten  $F_1$  en  $F_2$ .

Nu is  $PF_1 = PB$  (het zijn raaklijnen vanuit  $P$  aan de onderste bol) en om dezelfde reden is  $PF_2 = PA$ .



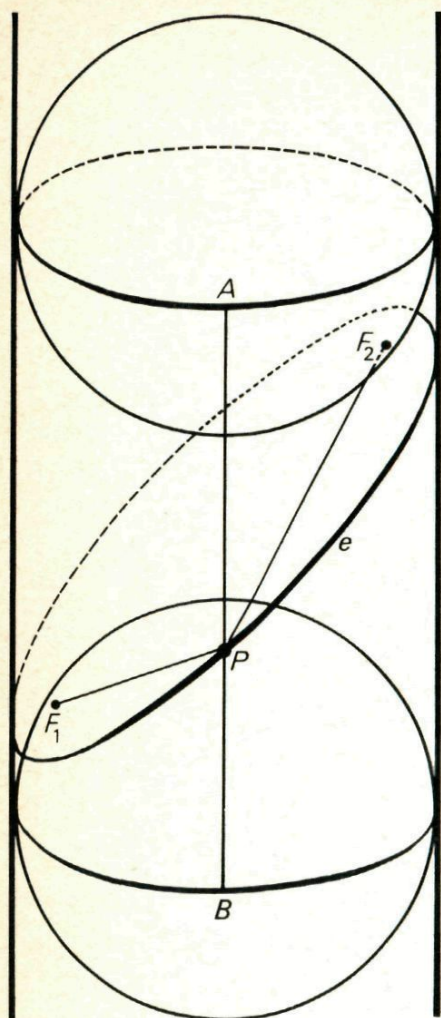


Fig. 3

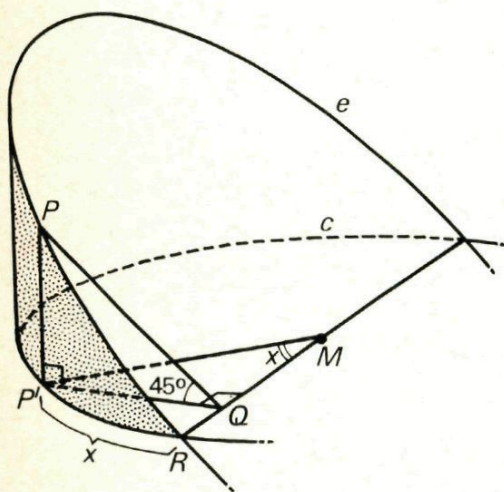
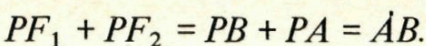


Fig. 4a



$AB$  is de afstand van beide raakcirkels, en die is overal even groot. Dus is ook  $PF_1 + PF_2 = \text{constant}$ . Daaruit volgt dat de doorsnede per definitie een ellips is.

*De uitslag van de schuine doorsnede van de cilindermantel wordt begrensd door een sinusoid*

In fig. 4a zijn twee doorsneden van de cilinder getekend: een doorsnede loodrecht op de as, deze is een cirkel met als middelpunt  $M$ . En een doorsnede die een hoek van  $45^\circ$  met dit vlak maakt en ook door  $M$  gaat. Deze doorsnede is de ellips  $e$ .

De beperking: een snijvlak onder een hoek van  $45^\circ$ , is niet noodzakelijk, zoals je verderop zult zien, maar ze vereenvoudigt het bewijs.

Laat vanuit  $P$  de loodlijn  $PP'$  neer en vanuit  $P'$  de loodlijn  $P'Q$ .

Stellen we de straal  $MP' = 1$  en de boog  $P'R = x$  dan is hoek  $P'MO = x$  rad.

Omdat het snijvlak een hoek van  $45^\circ$  maakt met de horizontale doorsnede is  $PP'Q$  gelijkbenig, dus  $PP' = P'Q$ .  $P'Q = \sin x$ , bijgevolg is  $PP' = \sin x$  (zie ook de uitslag in fig. 4b).  $P$  is dus een punt van een sinusoid.

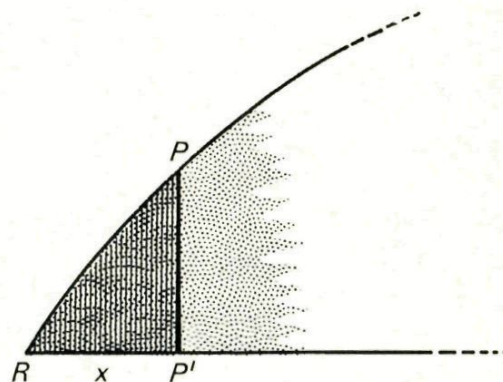


Fig. 4b



### Denkertje 1

Bewijs, dat de uitslag van de cilindermantel ook een sinusoïde is, als het snijvlak een willekeurige hoek  $\varphi$  met het horizontale snijvlak maakt.



# °°°Oplossen van vergelijkingen in water

Aan een balansarm worden drie voorwerpen gehangen: een staaf met een doorsnede van  $1 \text{ cm}^2$  en een kogel met een inhoud van  $1 \text{ cm}^3$ . Een gewicht brengt het geheel in evenwicht (fig. 1). We plaat-

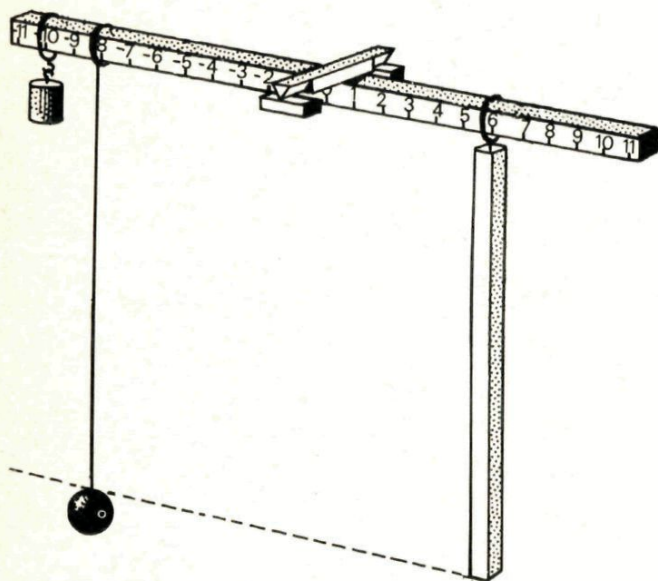


Fig. 1

sen het toestel in een bak en laten langzaam water in de bak stromen. Zodra de kogel onder water is, werkt hierop een opwaartse kracht, volgens de wet van Archimedes gelijk aan de massa van het verplaatste water, dus 1 gf. De balans raakt uit evenwicht. Bij het verder volstromen begint ook op de staaf een opwaartse kracht te werken. Als de staaf tot  $x \text{ cm}$  ondergedompeld is, is de opwaartse kracht gelijk aan  $x \text{ gf}$ . Op het moment dat het evenwicht hersteld is, geldt volgens de momentenstelling:

$$cx = -d$$

( $c$  en  $d$  volgens fig. 2).

De onderdompelingsdiepte  $x$  van de staaf is dus de wortel van de vergelijking

$$cx + d = 0.$$

Bijvoorbeeld het geval weergegeven in fig. 2:  $c = 6$  en  $d = -8$  (de plaatsing aan

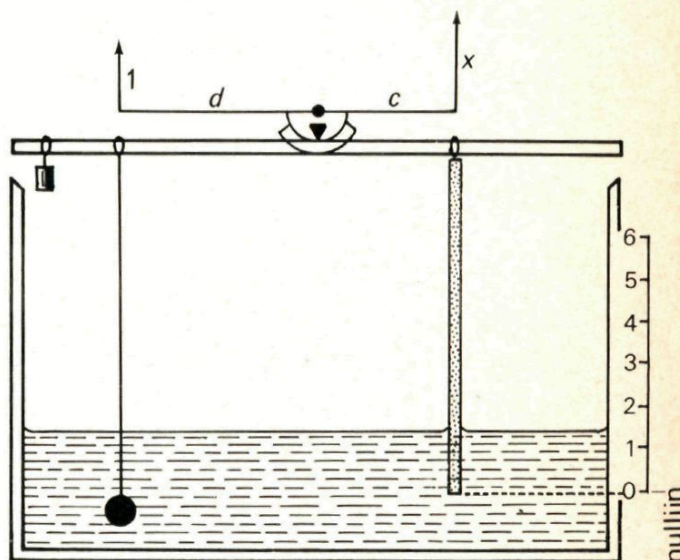


Fig. 2

de linkerkant van de arm geven we negatief aan). De waterhoogte boven de nullijn zal 1,33 bedragen.

Het instrument is niet bepaald indrukwekkend, omdat wij zelf de vergelijking sneller en beter kunnen oplossen. Maar we breiden ons toestel uit met een driehoek van de volgende vorm: gelijkbenig met basis gelijk aan de hoogte. De dikte is 2 cm. (fig. 3). Hij hangt ondersteboven, met de top op dezelfde diepte als de onderkant van de staaf.

Je gaat gemakkelijk na dat de inhoud van het verplaatste water bij waterhoogte  $x$  boven de nullijn gelijk is aan  $x^2$ . Het toestel is nu in staat om een positieve wortel

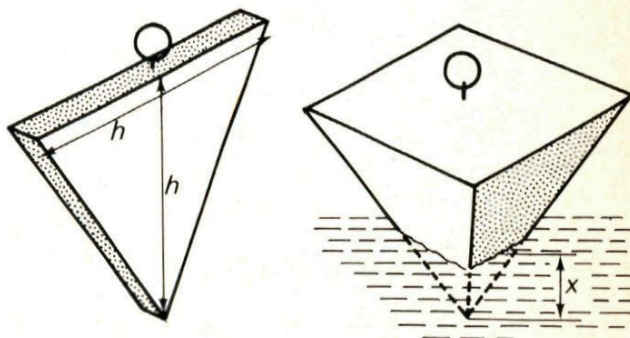


Fig. 3



van de vergelijking  $bx^2 + cx + d = 0$ , indien aanwezig, te benaderen. Een klein probleem is nog, als twee coëfficiënten in de vergelijking gelijk zijn, zoals in  $3x^2 - 8x + 3 = 0$ . Er moeten twee 'hangers' op dezelfde plaats. Door een meerarmige balans (fig. 4) is dit wel op te vangen.

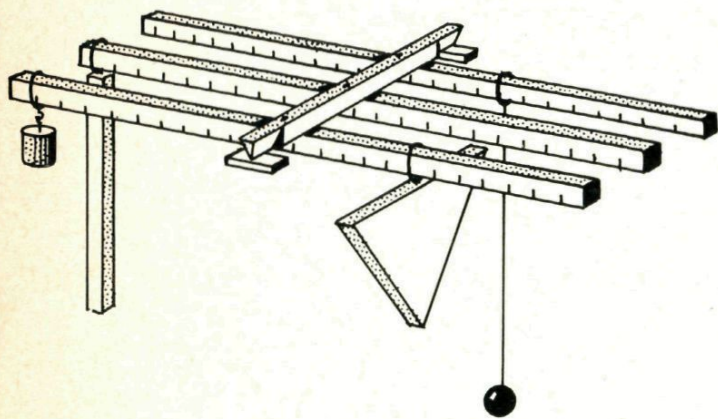


Fig. 4

Als je zelf het oplossen van tweede graads vergelijkingen meester bent zul je ook van dit toestel niet verbijsterd zijn. We breiden echter nog een keer uit. Een regelmatige piramide, waarvan de ribbe van het grondvlak zich tot de hoogte verhoudt als  $\sqrt{3} : 1$  (fig. 3), gaat met de overige hangers in het waterbad. De inhoud van het verplaatste water is volgens de formule voor de inhoudsberekening van piramides:  $\frac{1}{3} \times \text{oppervlakte grondvlak} \times \text{hoogte} = \frac{1}{3}(x\sqrt{3})^2 x = x^3$ .

Toevoeging van de piramide levert ons een toestel voor het benaderen van positieve wortels van derde graads vergelijkingen.

Een drietal opmerkingen tot slot.

1. De piramide met de voorgeschreven vorm is wel erg lomp en geeft aanleiding tot grote onnauwkeurigheid. Beter is het om bijvoorbeeld de ribbe van het grondvlak gelijk te nemen aan de helft van de hoogte. De verplaatste waterinhoud is nu  $\frac{1}{12} x^3$ . We geven deze piramide een eigen balansarm, waarop de schaalverdeling een 12 maal

zo grote eenheid heeft. De zaak is nu weer in orde.

Hierover doordenkend zul je het met ons eens zijn dat het helemaal niet noodzakelijk is dat het kogeltje precies een inhoud heeft van  $1 \text{ cm}^3$ , noch de staaf een doorsnede van precies  $1 \text{ cm}^2$ , enz. Zolang je elk van de hangers maar een eigen arm geeft met een aangepaste schaalverdeling. Dit vereenvoudigt het construeren van het toestel door amateurs aanmerkelijk!

2. Wanneer we op zoek zijn naar een negatieve wortel van  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , kan ons toestel ons niet helpen. De vergelijking  $a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d = 0$ , dus  $-ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$  zal dan een hydraulisch te bepalen positieve wortel hebben, die het tegengestelde is van de wortel die we zoeken.
3. De nauwkeurigheid van het toestel kan worden vergroot door verfijning van het balansmechanisme, aflezen van de waterstand met behulp van een vergrootglas e.d. De nauwkeurigheid die we met behulp van rekenmachines kunnen krijgen, zullen we nooit bereiken. We zijn bovendien beperkt tot vergelijkingen van hoogstens de derde graad.  
Het voordeel van het toestel is zijn eenvoud. Zo zijn we bijvoorbeeld onafhankelijk van het gewicht van de te gebruiken materialen, hoewel het in de praktijk aan te bevelen is om voor de hangers iets te gebruiken met een soortelijke massa groter dan 1, omdat we anders last krijgen van het gaan drijven van deze hangers.

De eerste knutselaar die het toestel in zijn visaquarium aan het werk krijgt zal een goeie foto ervan zeker in Pythagoras gepubliceerd krijgen.



Er zijn verzamelingen met een eindig aantal elementen en andere waarvan het niet mogelijk is het aantal elementen te noemen. We zeggen wel dat het aantal elementen oneindig is, maar dat is een vage manier van zeggen. Er wordt alleen door medegedeeld dat we bij het tellen van de elementen niet tot een einde komen.

Voorbeelden van oneindige verzamelingen zijn:

de verzameling van de natuurlijke getallen  $\mathbb{N}$

de verzameling van de positieve natuurlijke getallen  $\mathbb{N}^+$

de verzameling van de rationale getallen

de verzameling van de punten van een lijnstuk van 1 cm lengte

de verzameling van de punten van een vierkant vlakdeel met een lengte van 1 cm

de verzameling van de reële getallen  $\mathbb{R}$

De bedoeling van dit artikel is te laten zien dat er in het 'oneindig zijn' van deze verzamelingen verschillen zijn: er zijn soorten van oneindigheid.

Verzamelingen met een eindig aantal elementen kunnen we op een rij zetten:

de lege verzameling heeft 0 elementen, dan komen achtereenvolgens de verzamelingen met 1 element, met 2 elementen, met 3 elementen, enz. Zetten we deze 'kardinaalgetallen' van de verzamelingen op een rijtje dan hebben we de verzame-

|        |   |   |   |   |   |    |    |    |
|--------|---|---|---|---|---|----|----|----|
|        | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
|        | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓  | ↓  | ↓  |
| Fig. 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |

ling van de natuurlijke getallen en dat is een oneindige verzameling. Die oneindigheid is van een heel eenvoudige aard en zou gekarakteriseerd kunnen worden door de mededeling: is  $n \in \mathbb{N}$  dan is ook  $n + 1 \in \mathbb{N}$

Wanneer twee eindige verzamelingen eenzelfde kardinaalgetal hebben, dan kan er

een bijectie tot stand gebracht worden tussen de elementen van deze verzamelingen. Zie fig. 1. De verzamelingen heten dan gelijkmachtige verzamelingen.

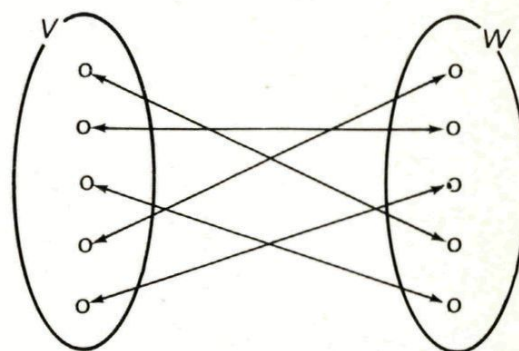


Fig. 1  
De verzamelingen  $V$  en  $W$  zijn gelijkmatig. Ze hebben beide het kardinaalgetal vijf.

Ook oneindige verzamelingen kunnen gelijkmatig zijn. Het is niet moeilijk in te zien dat de verzameling van de even natuurlijke getallen en die van de oneven natuurlijke getallen gelijkmatig zijn. Zie fig. 2:

We zouden in de verleiding komen om te zeggen dat er evenveel oneven als even natuurlijke getallen zijn. Maar dat is een misleidende uitdrukking. We kunnen namelijk ook laten zien dat de verzameling van de natuurlijke getallen gelijkmatig is met die van de even natuurlijke getallen. Zie fig. 3:



|   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |        |
|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|--------|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |        |
| ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕  | ↕  | ↕  | ↕  | ↕  | ↕  |        |
| 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | Fig. 3 |

Oneindige verzamelingen hebben namelijk de vreemde eigenschap gelijkmachting te kunnen zijn met een echte deelverzameling. Dat is bij eindige verzamelingen onmogelijk.

men. Het teken daarvoor is  $\aleph_0$ . Aleph is de eerste letter van het Hebreeuwse alfabet.

$\mathbb{Z}$  is een aftelbaar oneindige verzameling. Zie fig. 4:

|        |   |   |    |   |    |   |    |   |    |   |
|--------|---|---|----|---|----|---|----|---|----|---|
|        | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 | -3 | 4 | -4 | 5 |
|        | ↕ | ↕ | ↕  | ↕ | ↕  | ↕ | ↕  | ↕ | ↕  | ↕ |
| Fig. 4 | 0 | 1 | 2  | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8  | 9 |

Verzamelingen die gelijkmachting zijn met  $\mathbb{N}$  worden *aftelbaar oneindige verzamelingen* genoemd.

Ergens in ons heelal bevindt zich een hotel met aftelbaar oneindig veel eenpersoonskamers. Ze zijn genummerd 0, 1, 2, 3, enz. Op een nacht zijn alle kamers van het hotel bezet, maar onverwacht komt er een bus voorrijden met 40 passagiers die nog onderdak zoeken. De directeur van het hotel vindt dat helemaal geen probleem. Hij heeft een oplossing die wel even wat opschudding onder de gasten verwekt, maar die afdoende is. Via de intercom van het hotel laat hij het volgende bericht omroepen:

‘Alle gasten van het hotel moeten verhuizen naar een kamer waarvan het nummer 40 hoger is dan het nummer van de tot nu toe bewoonde kamer. Dus de gast van kamer 1 gaat naar kamer 41, die van kamer 2 naar kamer 42, enz.’

Op deze manier komen de eerste veertig kamers vrij voor de nieuwe gasten en na een tijd van enige onrust en verhuisdrukte keert de rust in het hotel weer en ieder is volkomen tevreden met deze handige oplossing. Kom daar maar eens om in onze hotels met een eindig aantal kamers.

De grote man van de verzamelingenleer Georg Cantor (1845–1918) heeft voorgesteld het kardinaalgetal van een aftelbaar oneindige verzameling aleph-nul te noe-

Hoe is het nu met  $\mathbb{Q}$ ? Op het eerste gezicht lijkt het erop dat deze verzameling van een grotere oneindigheid is als  $\mathbb{N}$ . Immers tussen twee op elkaar volgende natuurlijke getallen kunnen oneindig veel gebroken getallen geplaatst worden. Sterker nog: Tussen elk tweetal gebroken getallen, hoe dicht ook bij elkaar kunnen er nog weer oneindig veel geplaatst worden. Is het nu mogelijk alle elementen van  $\mathbb{Q}$  af te tellen?

De Amerikaan C. S. Peirce heeft de volgende methode bedacht om systematisch alle positieve rationale getallen (en nul) op te noemen:

Ga uit van de breuken  $\frac{0}{1}$  en  $\frac{1}{0}$

Zie daarbij maar even over het hoofd dat de tweede geen betekenis heeft. Zet er een breuk tussen, waarvan de teller gelijk is aan de som van de tellers en de noemer gelijk aan de som van de noemers van de gegeven breuken:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{0} \quad (1)$$

Herhaal deze procedure voor de beide paren naast elkaar staande breuken:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{0} \quad (2)$$



En doe dat nog eens:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{1}{0} \quad (3)$$

En nog eens:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{1}{0} \quad (4)$$

De op deze manier ontstane rijen rationale getallen hebben een aantal gemakkelijk op te merken bijzonderheden:

De tellers van links naar rechts gelezen zijn dezelfde getallen als de noemers van rechts naar links gelezen.

De tellers van rij (3) herhalen zich in de linkerhelft van rij (4), enz.

De rij met nummer ( $n$ ) begint met  $\frac{0}{1}, \frac{1}{n}$  en bevat alle onvereenvoudigbare breuken met noemer  $n$ . In elke rij kun je nu de rationale getallen aftellen in de volgorde waarin ze voorkomen.

De verzameling van de rationale getallen is ook aftelbaar oneindig en heeft  $\aleph_0$  als kardinaalgetal.

In een volgend artikel zullen we zien dat er oneindige verzamelingen bestaan die 'meer dan aftelbaar oneindig' zijn.

## °°°Zes saamhorige krommen

In de brugklas maak je als aspirant wiskundige kennis met belangrijke figuren. Je ontmoet bij de eerste grafieken al een parabool en later teken je een hyperbool. Nauw verwant aan deze twee is de ellips, maar die krijgt voorlopig geen kans door zijn moeilijker structuur. Het prille van de eerste studie krijgt uitbreiding en verdieping mede o.a. bij de natuurkunde, waar de drie genoemde krommen een grote rol spelen. Vrijwel verloren voor de wiskunde duikt bij dat vak een eigenaardige kromme op, die brandlijn heet. Evenwijdige lichtstralen zullen na terugkaatsing op een holle spiegel samenkomen in één punt, het brandpunt. Dat geldt alleen bij een kleine openingshoek. Is die groot, dan ontstaat geen brandpunt, maar een brandlijn. Een gladde ring op een stuk papier gelegd in de buurt van een lamp, ziet zich eveneens daarvan vergezeld. Ook wordt hij wel te voorschijn getoverd door lichtinval in een kopje (fig. 1).

De bedoelde kromme heet ook wel cardioïde of hartlijn en is één van de drie verschijningsvormen van de slaklijn van Pascal. Fig. 2 vertoont er een als omhullende van een verzameling cirkels.

Zo ogenschijnlijk hebben de genoemde krommen niet veel met elkaar te maken.

In werkelijkheid zijn ze nauw verwant en er bestaat zelfs een relatie, waarbij de een als origineel optredend de ander als beeldfiguur heeft. Om dat interessante verband te zien, moet je het schoolboek even degraderen tot vergeetboek, zodat je de daarin gestelde definities en de gebruike-



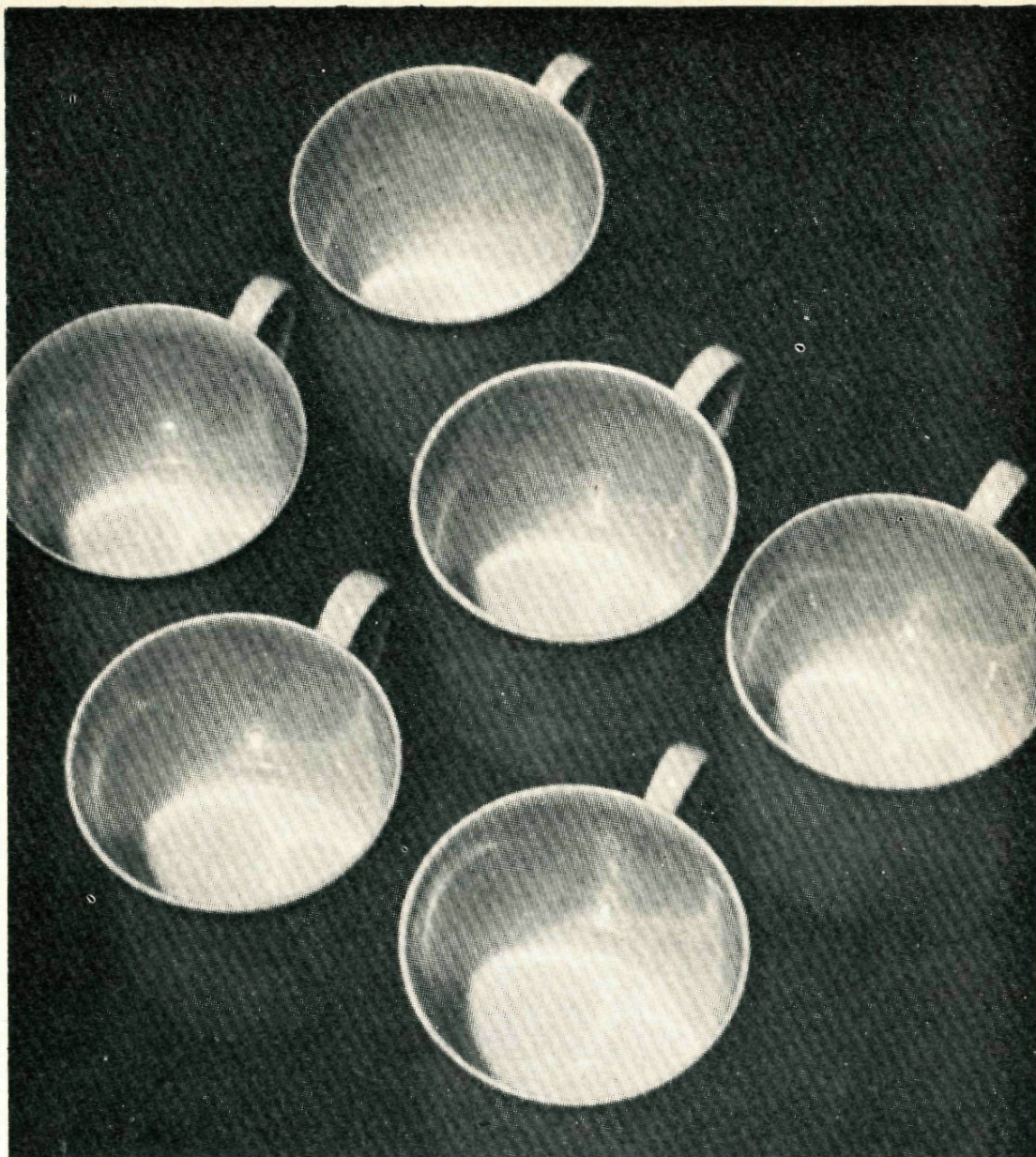


Fig. 1

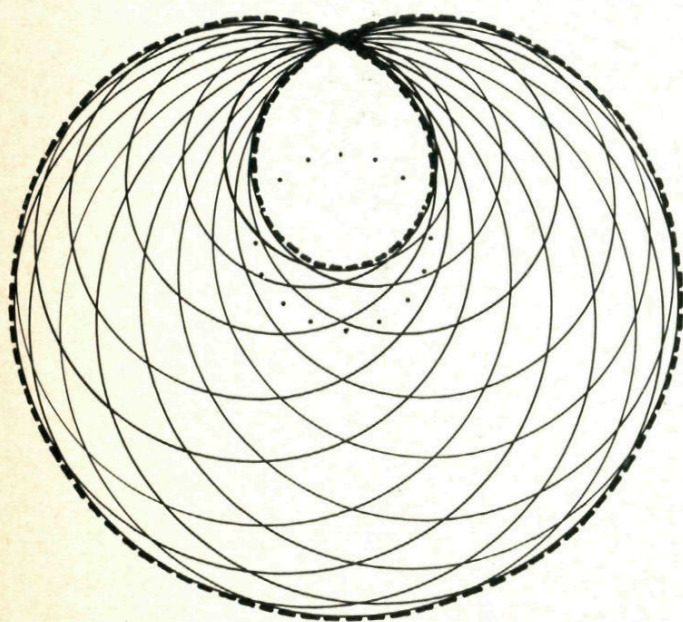


Fig. 2

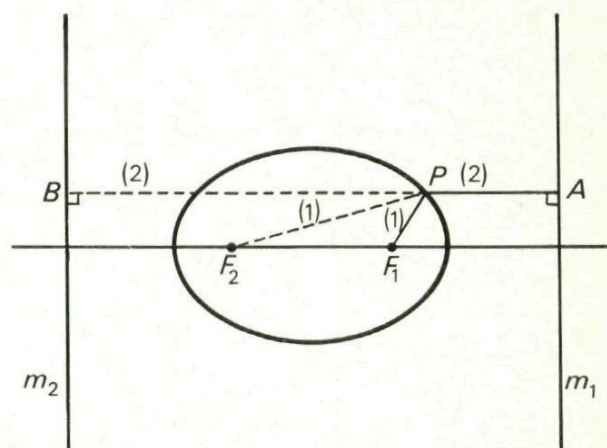


Fig. 3

lijke  $(x, y)$ -coördinaten kwijt bent.  
In fig. 3 zijn allereerst gegeven een vast punt  $F_1$  en een vaste lijn  $m_1$ . Daarna is geconstrueerd de verzameling punten  $P$



zó, dat de afstanden tot  $F_1$  en  $m_1$  de constante verhouding  $\frac{1}{2}$  hebben. Dus  $\overline{PF}_1 : \overline{PA} = 1 : 2$ .

De zo verkregen kromme ontvangt de naam ellips.

Er is nog een tweede lijn  $m_2$  met een vast punt  $F_2$  mogelijk bij deze verhouding, zodat geldt  $\overline{PF}_2 : \overline{PB} = 1 : 2$ .

Verdere eigenschappen laten we hier rusten.

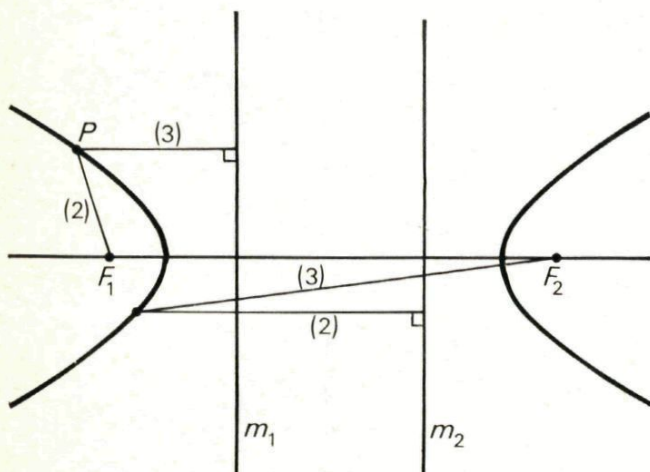


Fig. 4

In fig. 4, weer beginnend met  $F_1$  en  $m_1$ , is de verhouding  $\frac{3}{2}$  gekozen, waardoor een kromme ontstaat, die hyperbool heet. Ook nu zijn nog een punt  $F_2$  en een lijn  $m_2$  mogelijk.

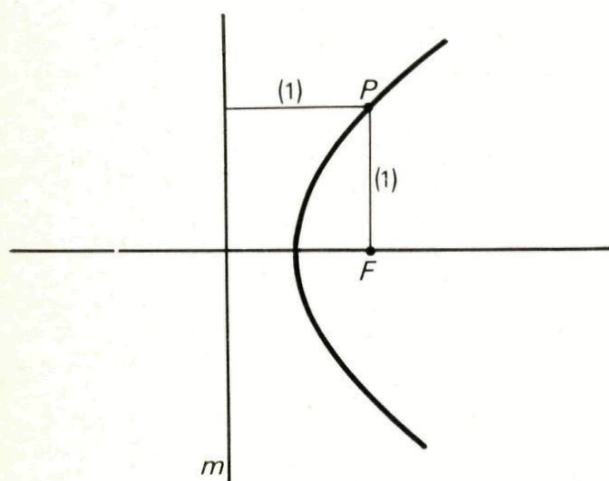


Fig. 5

Fig. 5 ontstaat, wanneer als verhouding  $\frac{1}{1} = 1$  wordt genomen. De parabool is het resultaat.

Ellips, parabool en hyperbool kunnen dus worden gevangen in één definitie:

*De verzameling punten, waarvoor de verhouding van de afstanden tot een vast punt en een vaste lijn constant is.*

Noemen we die verhouding  $e$ , dan hoort bij  $e < 1$  een ellips, bij  $e = 1$  een parabool en bij  $e > 1$  een hyperbool. ①

Bij deze éne definitie past één algebraïsche uitdrukking. Die wordt gevonden bij toepassing van poolcoördinaten. Daarbij wordt een punt vastgelegd door een hoek  $\varphi$  en de lengte  $\overline{OP} = r$ . Zie fig. 6.

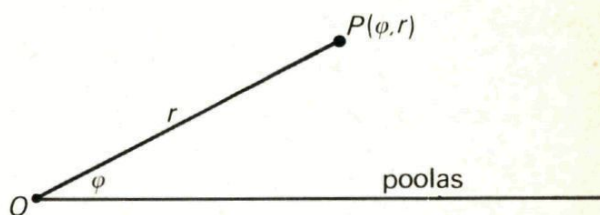


Fig. 6

$O$  is de oorsprong of pool en  $\varphi$  is steeds de hoek tussen poolas en  $\overline{OP}$ .

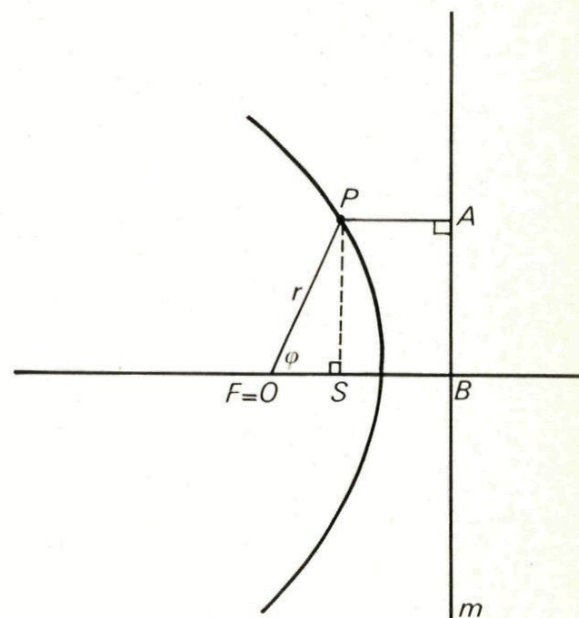


Fig. 7

In fig. 7 is de constante verhouding  $\overline{PF} : \overline{PA} = e$ .

$F$  is genomen als oorsprong.



Dus:

$$\overline{PA} = \overline{FB} - \overline{FS}$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{PA} &= d - r \cos \varphi \\ \frac{\overline{PF}}{\overline{PA}} &= e \Rightarrow \overline{PA} = \frac{r}{e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{r}{e} = d - r \cos \varphi$$

$$r = e(d - r \cos \varphi)$$

$$r = \frac{de}{1 + e \cos \varphi} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

$$de = p \text{ gesteld.}$$

Hiermee is dan één vorm voor alle drie krommen gevonden met voor  $e$  de onderscheiding ①.

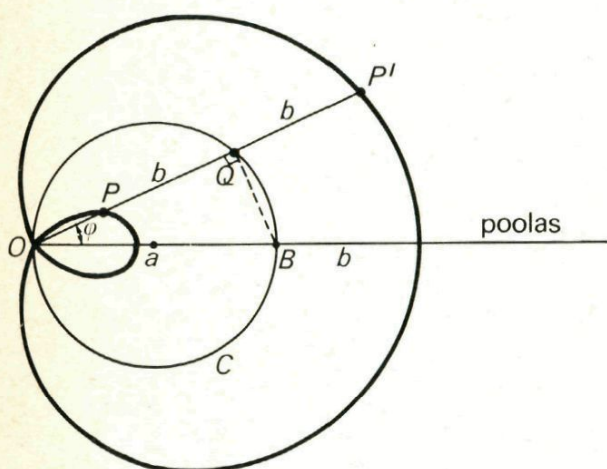


Fig. 8

De slaklijn van Pascal ontstaat op geheel andere manier. In fig. 8 is een vaste cirkel  $C$  met middellijn  $a$  en een vast punt  $O$  op die cirkel getekend. Punt  $O$  wordt genomen als pool. Een rechte door  $O$  snijdt cirkel  $C$  in punt  $Q$ , waarna aan weerszijden van  $Q$  lijnstuk  $b$  is afgepast.  $b < a$ . Bij variabele rechte door  $O$  ontstaat de verzameling punten  $P$  en  $P'$ , de slaklijn van Pascal, die binnen de cirkel een lus vertoont.

$$\text{Stel } \overline{OP} = r \text{ en } \overline{OP'} = r'$$

$$\overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{PQ}$$

$$\angle OQB = \frac{1}{2}\pi$$

$$\overline{OP'} = \overline{OQ} + \overline{QP'}$$

$$\Rightarrow r = a \cos \varphi - b$$

$$r' = a \cos \varphi + b$$

$$\text{voor } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi$$

Zoals eenvoudig is na te gaan kan hier voor geschreven worden  $r = a \cos \varphi + b$  voor  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

De slaklijn kan gedefinieerd worden als de verzameling punten  $P$  en  $P'$  van een door een vast punt  $O$  van een gegeven cirkel getrokken veranderlijke rechte, waarop aan weerszijden van het tweede snijpunt  $Q$  van die rechte met de cirkel  $\overline{QP}$  en  $\overline{QP'}$  gelijk aan een gegeven lijnstuk  $b$  worden afgepast.

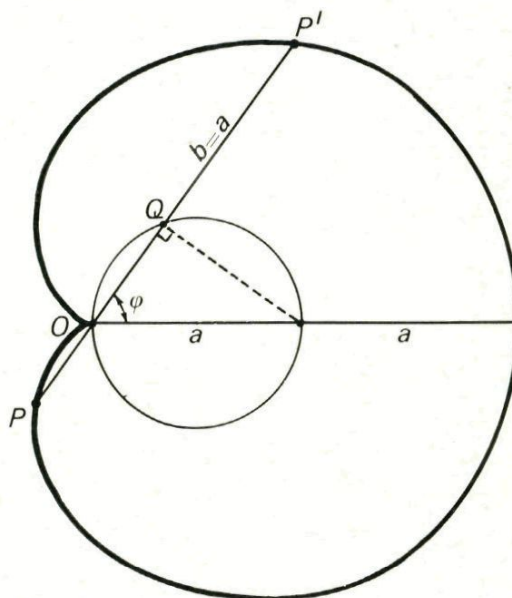


Fig. 9

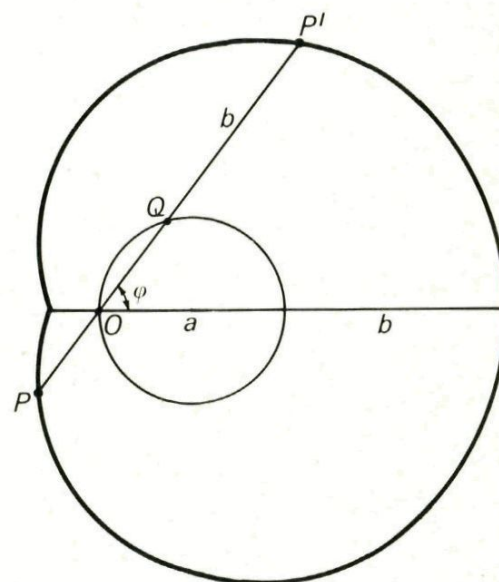


Fig. 10

Voor  $b < a$  ontstaat de lusvorm van fig. 8; voor  $b = a$  de hartlijn van fig. 9, waarin de lus is verschrompeld tot een punt; voor  $b > a$  ontstaat fig. 10, zonder lus. ②



De optredende analogie in ① en ② maakt nieuwsgierig naar een eventueel verband tussen ellips, parabool en hyperbool enerzijds en de drie slaklijnvormen anderzijds. Dat verband is de inversierelatie, die in een vorig nummer van Pythagoras uitvoerig is behandeld. Het voor dit artikel essentiële wordt nog eens duidelijk gemaakt aan de hand van fig. 11.

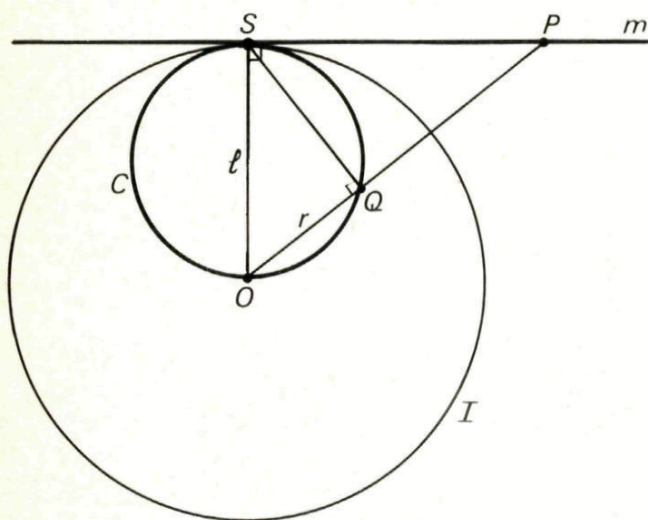


Fig. 11

$m$  is raaklijn aan cirkel  $I$  met middelpunt  $O$  en straal  $l$ . Deze cirkel heet inversie-cirkel. Cirkel  $C$  heeft middellijn  $l$ . Kiezen we nu een punt  $P \in m$  en snijdt  $OP$  cirkel  $C$  in punt  $Q$ , dan geldt wegens  $\angle OSP = \frac{1}{2} \pi$  en  $\angle OQS = \frac{1}{2} \pi$ ,  $OQ = r$  en  $OP = r'$  gesteld:

$$\overline{OS}^2 = \overline{OQ} \cdot \overline{OP}$$

$$l = r \cdot r' \quad \text{Dus } r = \frac{l}{r'} \quad \text{of } r' = \frac{l}{r}$$

Door de relatie  $r \cdot r' = l$  wordt aan punt  $P$  punt  $Q$  toegevoegd. Er komt:

| origineel                     | inversie | beeldfiguur                        |
|-------------------------------|----------|------------------------------------|
| $P$                           |          | $Q$                                |
| $Q$                           |          | $P$                                |
| lijn $m$                      |          | cirkel $C$ , uitgezonderd punt $Q$ |
| cirkel $C$ , behalve punt $Q$ |          | lijn $m$                           |

De relatie  $r' = \frac{l}{r}$  heet de inverse relatie. Poolcoördinaten zijn hier juist zo eenvoudig, omdat bij bekende  $r$  de inverse ontstaat door simpel het omgekeerde te nemen. Ellips, parabool en hyperbool waren gevat in  $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$ . De inverse moet dus ook drie krommen opleveren en volgt onmiddellijk uit

$$r' = \frac{l}{r} = \frac{l + e \cos \varphi}{p} = \frac{l}{p} + \frac{e}{p} \cos \varphi = b + a \cos \varphi,$$

$$\text{waarin } \frac{l}{p} = b \text{ en } \frac{e}{p} = a \text{ is gesteld.}$$

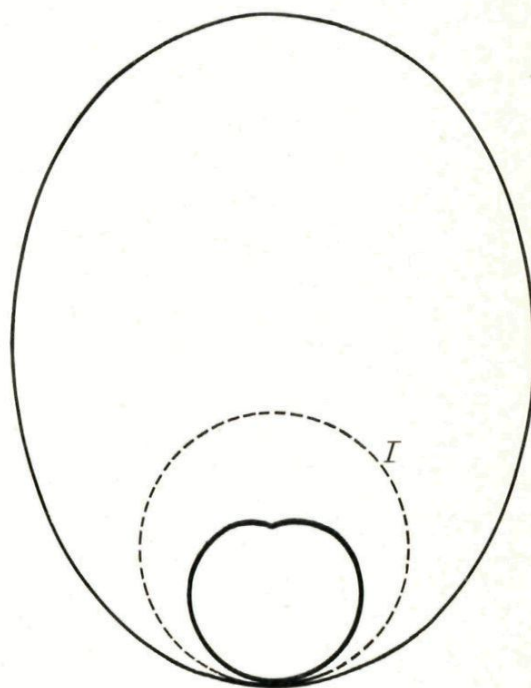


Fig. 12

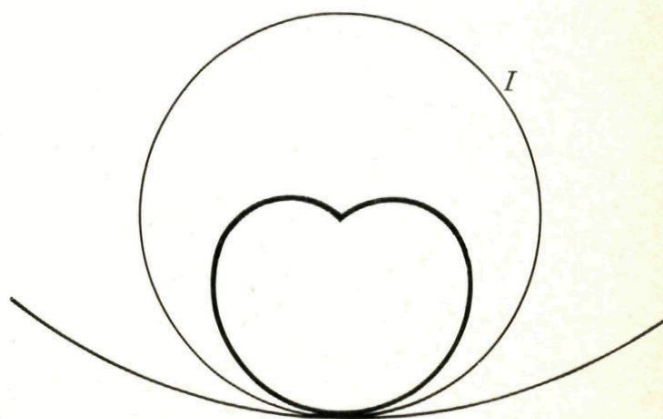


Fig. 13



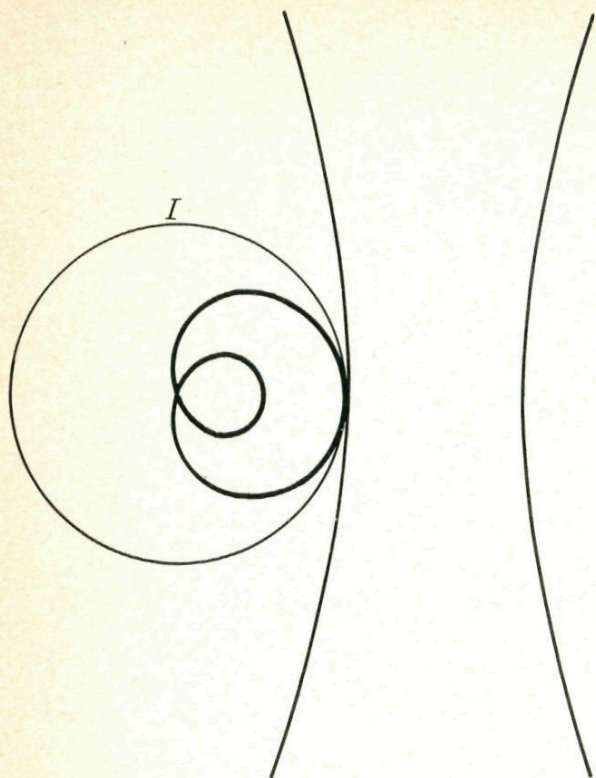


Fig. 14

Alles klopt, want  $b + a \cos \varphi$  vertegenwoordigt de behandelde slaklijn, die drie vormen heeft. In het volgende overzicht is

een en ander samengevat en de figuren 12, 13 en 14 laten ieder origineel met zijn inversepartner zien. En omdat de inverse relatie een bijectie is kunnen in ieder tweetal origineel en beeldfiguur verwisseld worden.

origineel  $\xrightarrow{\text{inversie}}$  beeldfiguur

$$\frac{p}{l + e \cos \varphi} \longrightarrow a \cos \varphi + b$$

bij  $e < l$  ellips  $a < b$ , figuur 12, slaklijn zonder lus

bij  $e = l$  parabool  $a = b$ , cardioïde, figuur 13, met puntlus.

bij  $e > l$  hyperbool  $a > b$ , figuur 14 slaklijn met lus.

#### Opmerking:

De notatie van poolcoördinaten wint het hier van die in  $(x, y)$ -coördinaten. Hoe handig en verrassend deze notatie kan zijn blijkt ook uit de bijpassende denkertjes.



#### Denkertjes:

Gegeven is de kromme voorgesteld door  $r^n = \sin n\varphi$ ,  $n \in \mathbb{R}$

2. Voor welke  $n \in \mathbb{Z}$  is er geen reële kromme?
3. Teken de krommen, die ontstaan voor  $n = 1$  en voor  $n = -1$
4. Teken de krommen, die ontstaan voor  $n = -\frac{1}{2}$  en voor  $n = -2$
5. Teken de kromme voor  $n = 2$

## “Uit de kunst”, figuren van Lissajous

Schoonheid is geen exact begrip; er is geen maat en geen meetinstrument voor. Toch schuilt er schoonheid achter alle dingen. Voor mij is het ervaren van orde en wetmatigheid een bron van schoonheidsbeleven.

Die orde en regelmaat vinden we niet alleen in wat door mensenhanden is gemaakt. Ook de natuur is vaak zo creatief bezig dat we geboeid staan toe te kijken. Wetmatigheden uiten zich soms in wonderlijke figuren. Speciaal in het onderwerp trillingen is er



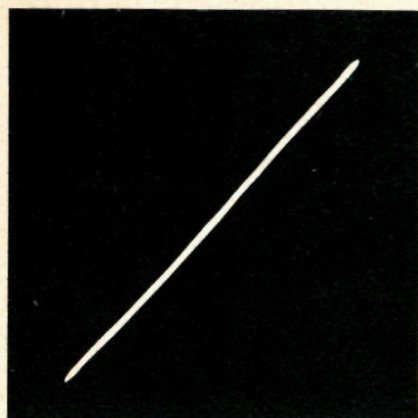


veel te genieten. Fantastische trillingsfiguren verschijnen op het beeldvenster van een oscilloscoop; de schrijfstift is een elektronenstraal. Het lijkt een puur spel; maar onze aard kan zichzelf niet verloochenen: wij analyseren, meten en tellen.

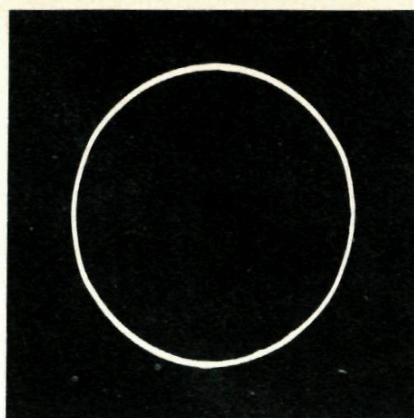
Een serie van dergelijke trillingsbeelden zijn de figuren van Lissajous\*. Ze kenmerken zich door regelmaat en symmetrie. We zullen ons in dit artikel meer met de aard van de vorm bezig houden dan met de ontstaanswijze van de figuren. Over dat laatste kun je de nodige informatie krijgen in het natuurkundelokaal.

\* De Fransman Lissajous bestudeerde deze figuren in verband met zijn onderzoek over geluid (ca. 1850).

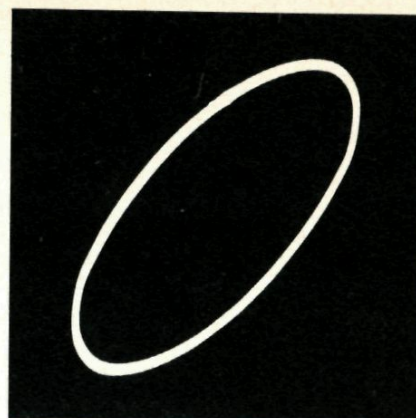




a. lijnstuk



b. cirkel



c. ellips

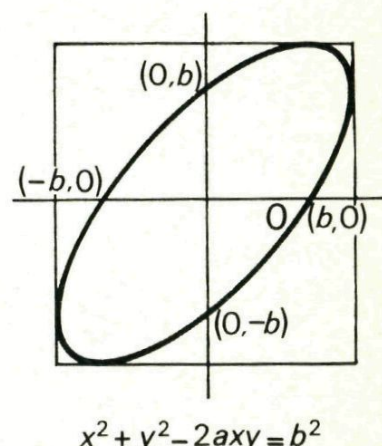
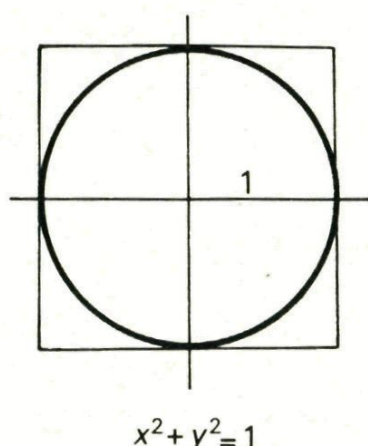
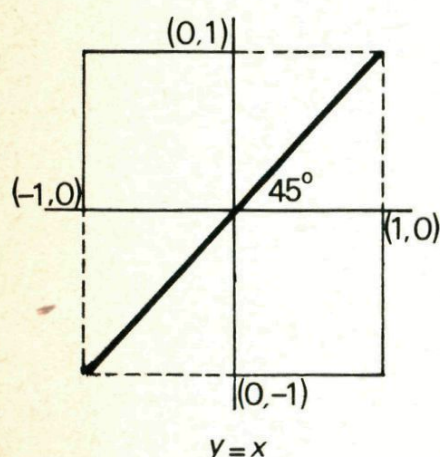


Fig. 1

Als je met je hand heen en weer zwaait beschrijf je een trilling. Iets dergelijks doet een slingerend voorwerp, een dansende veer. Elektronen doen dit bij een wisselstroom. De uitwijking ( $y$ ) als functie van de tijd ( $t$ ) kan men aangeven als de sinusfunctie  $y = A \cdot \sin t$ . Hierin stelt  $A$  de grootste uitwijking of amplitude voor. We zullen deze bij de verdere behandeling voor het gemak gelijk aan 1 stellen.

De functie wordt dus  $y = \sin t$ . Een trilling met een tweemaal zo hoog ritme of frequentie wordt aangegeven met  $y = \sin 2t$ , met een driemaal zo hoge frequentie met  $y = \sin 3t$  enz. Een Lissajousfiguur nu ontstaat als we een trilling in de  $x$ -richting samenstellen met een in de  $y$ -richting. De frequenties kunnen daarbij verschillend zijn. We beginnen met de eenvoudigste vorm. De foto's zijn van het scherm van een oscilloscoop genomen.

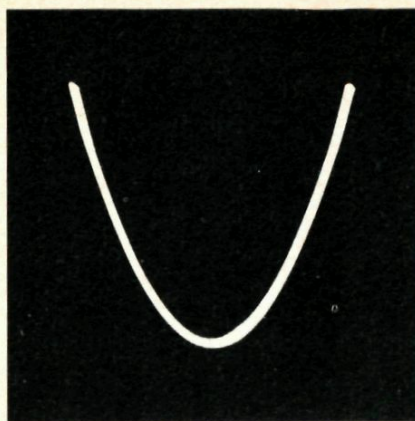
1. a. Als je je hand tegelijkertijd heen en weer beweegt ( $x$ -richting) en op en neer ( $y$ -richting), beschrijf je in werkelijkheid een samengestelde beweging, waarbij je hand bijvoorbeeld een onder  $45^\circ$  gericht lijnstuk doorloopt (fig. 1a). Wiskundig is de analyse aldus:

$x = \sin t$  en  $y = \sin t$  dus  $y = x$ .

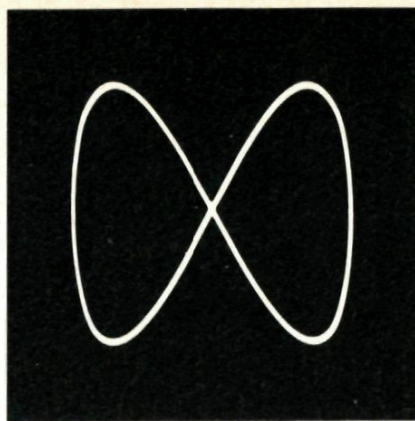
Daarbij wordt dan wel verondersteld dat beide trillingen dezelfde frequentie hebben en zogenaamd in fase zijn, dat wil zeggen: de beweging naar rechts start op hetzelfde moment uit 0 als de beweging naar boven. Tevens geldt steeds als domein van de functie  $-1 \leq x \leq +1$

- b. Je kunt het ook anders doen. De horizontale beweging start in 0, maar de verticale juist in de uiterste stand. We zeggen dan: er is een faseverschil

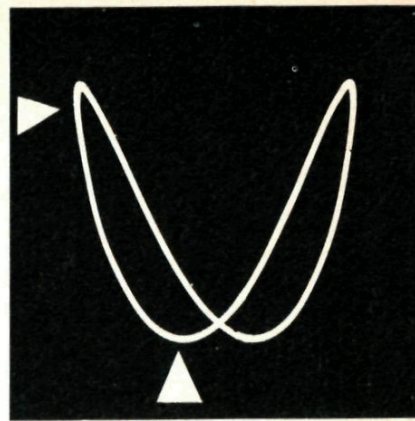




a. parabool



b.



c.

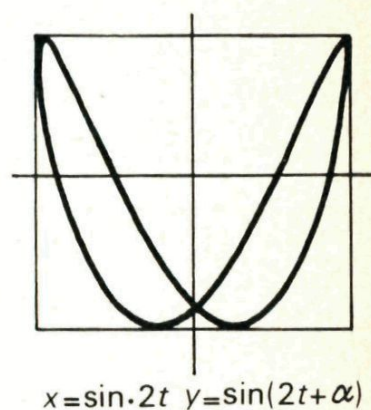
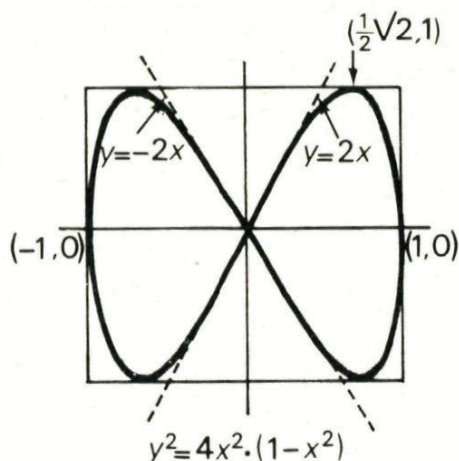
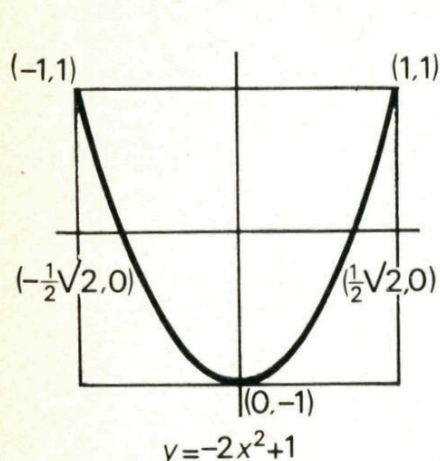


Fig. 2

van een kwart trillingstijd of, in hoekmaat uitgedrukt, van  $90^\circ$ .

We kunnen deze trillingen verbeelden met:

$$x = \sin t \text{ en } y = \sin(t + 90^\circ) \text{ ofwel}$$

$$x = \sin t \text{ en } y = \cos t$$

omdat  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$  geldt hier  $x^2 + y^2 = 1$  en dat is de vergelijking van een cirkel met middelpunt 0 en straal 1 (fig. 1b).

c. Heeft het faseverschil een andere waarde dan ontstaat een ellips (fig. 1c).

Je kunt dit als volgt inzien.

$$x = \sin t \text{ en } y = \sin(t + \alpha) \text{ dus}$$

$$y = \sin t \cdot \cos \alpha + \cos t \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{We stellen nu } \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2} \text{ en verder } \cos \alpha = a \text{ en } \sin \alpha = b \text{ waarbij } a^2 + b^2 = 1$$

Je krijgt zodoende

$$y = ax + b\sqrt{1 - x^2}$$

Als we de wortels verdrijven krijgen we:

$$(y - ax)^2 = b^2(1 - x^2) \text{ of}$$

$$y^2 - 2axy + a^2x^2 = b^2 - b^2x^2 \text{ vervolgens } x^2(a^2 + b^2) + y^2 - 2axy = b^2 \text{ of } x^2 + y^2 - 2axy = b^2 \text{ en dit is de vergelijking van een ellips.}$$

Deze ellips met middelpunt 0 snijdt de assen in de punten op afstand  $b$  van 0 waarbij  $b = \sin \alpha$ .

Samenvattend kun je zeggen: lijnstuk, cirkel en ellips behoren tot één familie. Karakteristiek daarbij is wel dat de periode voor de heen en weer gaande beweging dezelfde is als voor de op en neer gaande. We zeggen: de trillingsfrequenties zijn gelijk ofwel ze verhouden zich als 1 : 1.

Ga zelf nog maar eerst even na dat, als je één van deze figuren doorloopt, je eenmaal omhoog en omlaag gegaan bent en tevens eenmaal naar rechts en links.

Dat hoeft natuurlijk niet altijd zo te zijn.



2. a. Als je een '8' schrijft, ga je eenmaal omhoog en omlaag tegenover tweemaal naar rechts en links.

We gaan deze bewering eerst toetsen aan fig. 2b.

Doorloop de figuur horizontaal, uiterst links (zie pijl) beginnend. Om de figuur eenmaal te doorlopen, gaan we daarbij eenmaal naar rechts en terug naar links. Nu verticaal: begin onderaan (zie pijl); doorloop de figuur: omhoog, omlaag, omhoog, omlaag (twee trillingen). Dus in dezelfde tijd dat er één trilling horizontaal volbracht wordt, worden er twee trillingen verticaal beschreven.

De frequentieverhouding bij de 'achtvormige' figuren is dus horizontaal : verticaal = 1 : 2.

Laten we nu eerst de figuur nemen die door 0 gaat. We gebruiken weer de parameter voorstelling.

Vanwege de frequentieverhouding 1 : 2 wordt dat:

$$x = \sin t \text{ en } y = \sin 2t \text{ dus}$$

$$y = 2 \sin t \cdot \cos t = 2x\sqrt{1-x^2} \text{ ofwel } y^2 = 4x^2 \cdot (1-x^2).$$

De oorsprong van deze achtvormige lus (fig. 2a) met twee symmetrieassen is een zogenaamd knooppunt. De uiterste waarden liggen bij  $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ . Door differentiëren kun je dat misschien zelf wel vinden. Er zijn vanwege het knooppunt 2 raaklijnrichtingen in O en wel de lijnen  $y = \pm 2x$ .

- b. Een ander type uit de 1 : 2-serie is die waarbij een faseverschil van  $90^\circ$  bij de start optreedt.

$$x = \sin t \text{ en } y = \sin (2t + 90^\circ) \text{ dus}$$

$$y = \cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t \text{ of}$$

$$y = -2x^2 - 1 \text{ en dit is een parabool (fig. 2a).}$$

De nulpunten liggen  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  van 0. De y-as is symmetrieas.

In het vervolg zullen we niet meer proberen om  $t$  te elimineren; de vergelijking  $y = f(x)$  wordt te gecompliceerd.

- c. Het algemene type van de 1 : 2-serie moet je stellen op

$$x = \sin t \text{ en } y = \sin (2t + \alpha).$$

Deze is dan het half-open type naast de 8-vorm die open is en de parabool als het gesloten exemplaar.

Bij elke frequentieverhouding tref je een open, een gesloten en een half-open type. Bij de 1 : 1-serie waren dat cirkel, lijn en ellips.

3. a. We betreden een nieuw terrein: de 1 : 3-serie.

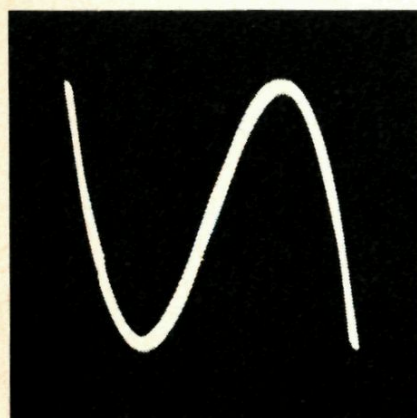
Het eenvoudigste exemplaar hier heeft de S-vorm (fig. 3a).

Het wordt voorgesteld door de vergelijkingen:

$$x = \sin t \text{ en } y = \sin 3t$$

De nulpunten kun je als volgt vinden:  $y = 0$  dus  $3t = 0^\circ$  of  $180^\circ$  of  $360^\circ$  of  $540^\circ$  of  $720^\circ$

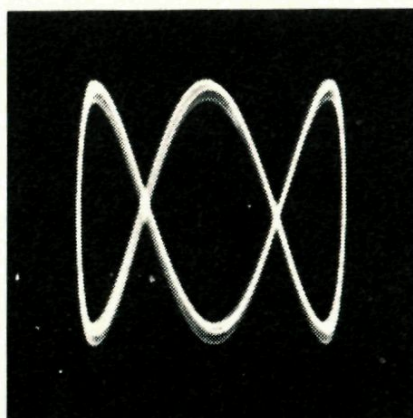
dus  $t = 0^\circ$  of  $60^\circ$  of  $120^\circ$  of  $180^\circ$  of  $240^\circ$



$$x = \sin t \quad y = \sin 3t$$

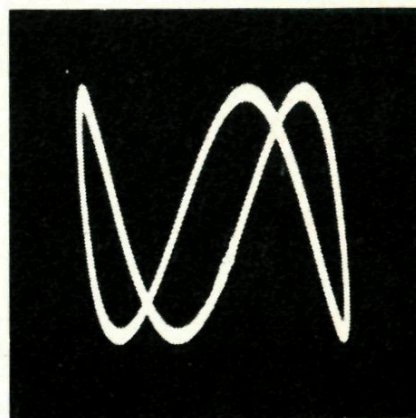
Fig. 3

a.



$$x = \sin t \quad y = \sin (3t + 90^\circ)$$

b.



$$x = \sin t \quad y = \sin (3t + \alpha)$$

c.



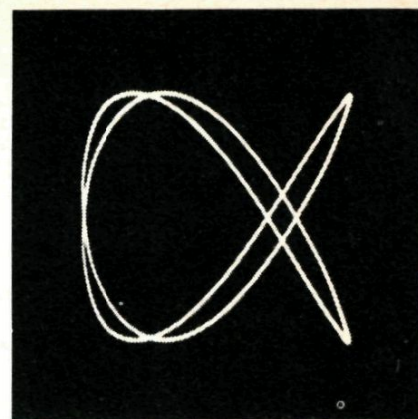
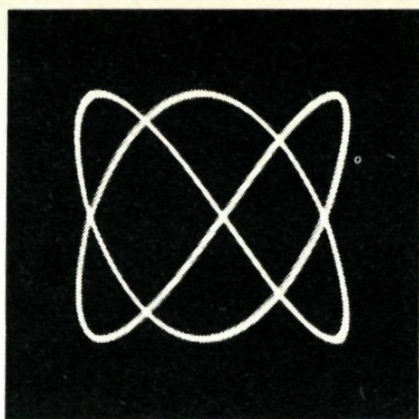
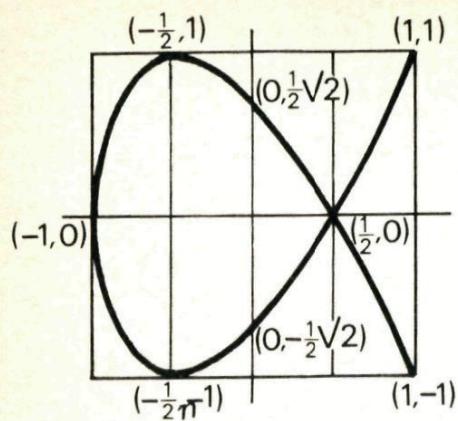


Fig. 4

omdat  $x = \sin t$  wordt  $x = 0$  of  $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  of  $x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

b. Het open type heeft bij  $x = 0$  juist een maximum. Deze kromme wordt voorgesteld door:

$$x = \sin t \text{ en } y = \sin(3t + 90^\circ)$$

Het wordt een krakeling met dubbele lus en twee knooppunten. Probeer nu zelf maar volgens dezelfde werkwijze te bewijzen dat de nulpunten liggen bij  $x = \pm 1$  en  $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$ , wat tevens de knooppunten zijn (fig. 3b).

c. In fig. 3c staat nog een voorbeeld van een half-open exemplaar.

4. De 2 : 3-serie is nu aan de beurt. De analyse ervan wordt grotendeels aan jezelf overgelaten. Het gesloten type lijkt op de Griekse letter  $\alpha$  (fig. 4a). Ga eerst nog maar eens na dat je, als je bijvoorbeeld rechts boven begint, 2 horizontale bewegingen moet uitvoeren tegen 3 verticale om de figuur geheel te doorlopen.

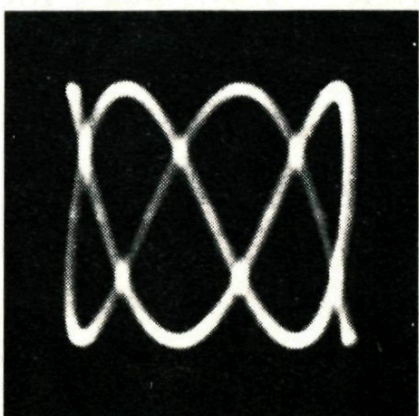
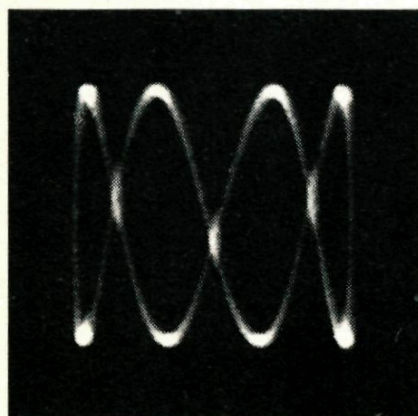
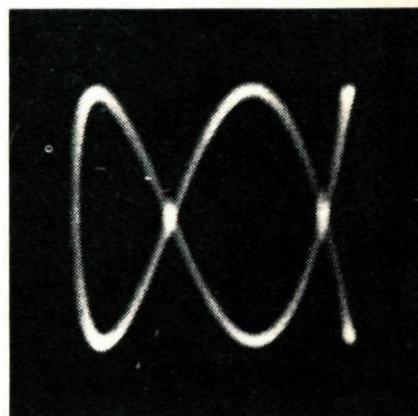
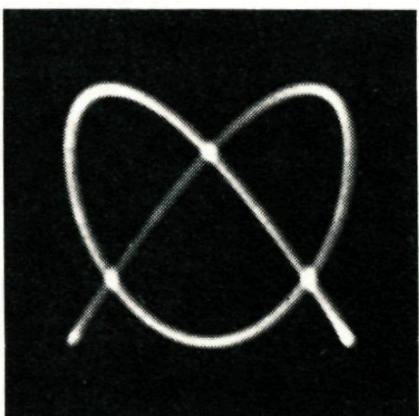
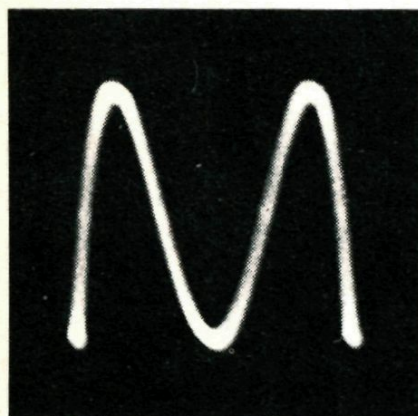


Fig. 5



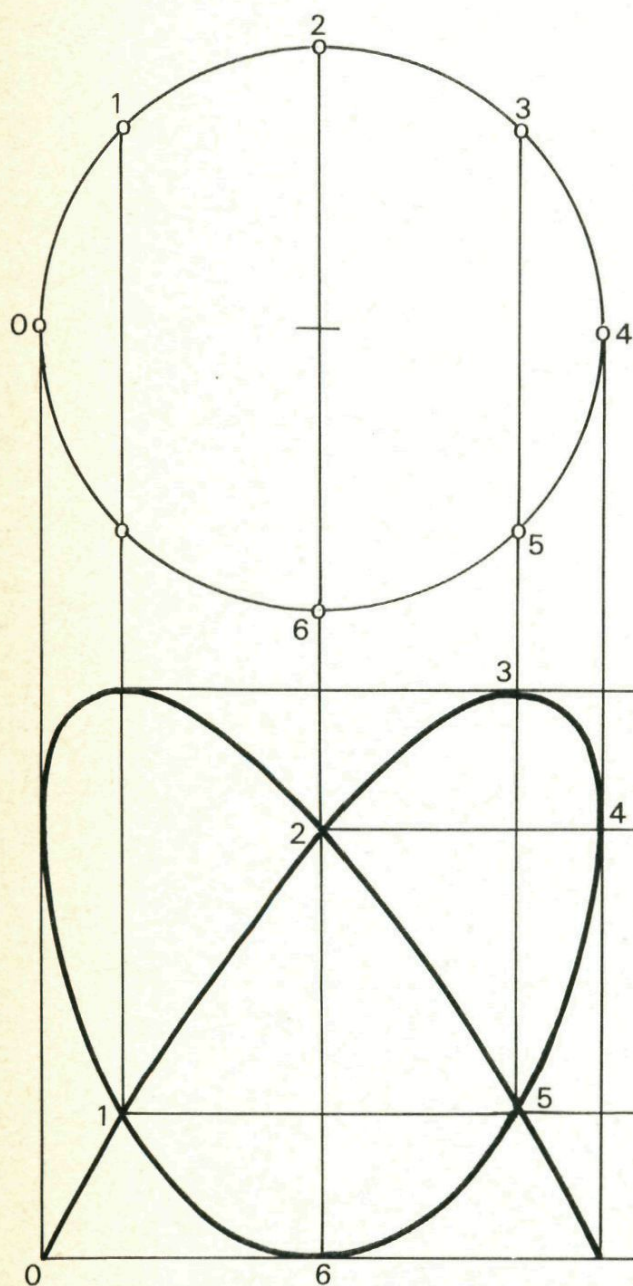
Bij het gesloten type van fig. 4c horen vergelijkingen

$$x = \cos 2t \text{ en } y = \cos 3t$$

De merkwaardigste punten zijn in de figuur aangegeven.

Op de foto aan het begin van dit artikel zie je een dergelijke vorm in een wegkruispunt.

5. We zouden eindeloos door kunnen gaan met krommen te presenteren en te analyseren. Naarmate de frequenties een minder eenvoudige verhouding hebben, ontstaan ook ingewikkelder figuren. We nemen nog enkele voorbeelden.



Bij de *M*-vormige kromme behoort de verhouding 1 : 4 (fig. 5a).

Bij de hartvormige is dat 3 : 4 (fig. 5b).

Wie zin heeft kan naar hartelust tekenen en experimenteren. Probeer snijpunten met de assen te bepalen en andere curiosa. Zou je bij een gegeven gesloten type zelf een open type kunnen verzinnen?

Als je wilt kun je van elke Lissajousfiguur een onbepaald aantal punten construeren, zodat je van elk een keurige tekening kunt maken.

In fig. 6 tref je een werktekening voor de hartvormige. Belangrijk is hierbij de frequentieverhouding en de keuze van de startpunten. We werken verder met 2 cirkels omdat sinusfuncties te schetsen zijn door punten van een cirkel te projecteren op een middellijn. Beide cirkels hebben een gelijke straal. In verband met de gewenste 3 : 4-verhouding is de ene cirkel in 6 delen verdeeld en de andere in 8 delen. Als je de werktekening goed bestudeert, is de procedure wel te volgen.

Voor creatieve tekenaars is er volop werk aan de winkel. Een wijd onderzoeksterrein ligt voor je.

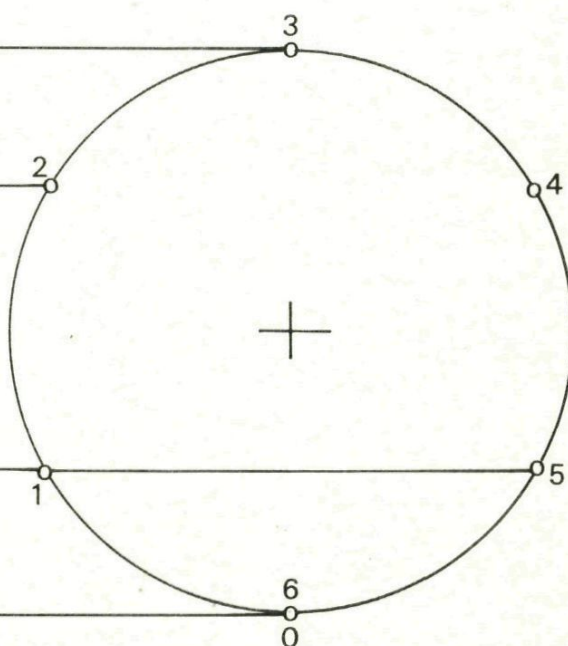


Fig. 6



Als we enige ervaring met Lissajousfiguren hebben opgedaan zouden we kunnen proberen algemene karaktereigenschappen vast te stellen.

Bij elke familie wordt het karakter bepaald door de frequentieverhouding. In elke familie zijn het open en het gesloten type duidelijk de randfiguren.

De gesloten figuur ontstaat telkens als beide trillingen starten met de grootste uitwijking. Anders gezegd: ze beginnen in de hoek van de vierkante lijst die je om al onze figuren heen kunt maken.

De gesloten figuren hebben altijd 2 omkeerpunten. Daar staat het trillende voorwerp even stil. De baan heen en terug is daar identiek.

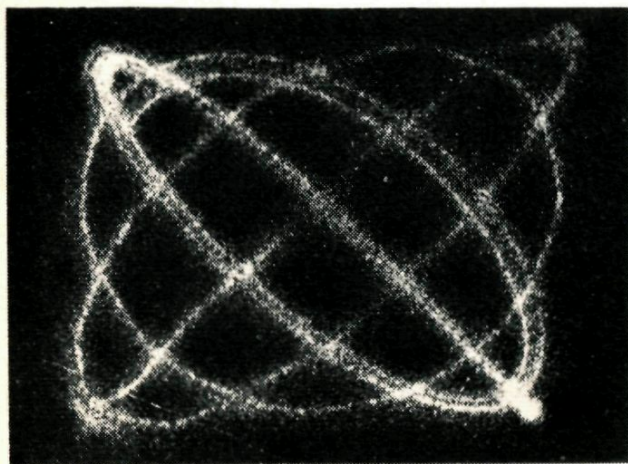
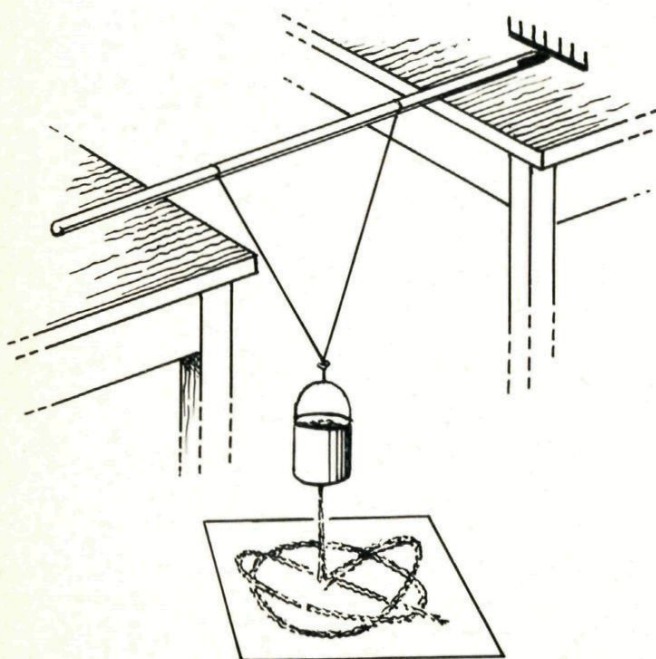


Fig. 7

De omkeerpunten liggen soms diametraal tegenover elkaar zoals bij lijnstuk, parabool en S-figuur; soms aan één zijde zoals bij  $\alpha$ , M en hartvormige figuur.

We zouden zodoende 2 categorieën kunnen onderscheiden: de diametrale en de eenzijdige. De diametrale soort heeft puntsymmetrie; de eenzijdige soort één symmetrieas. De open figuren bezitten puntsymmetrie en 2 symmetrieassen; bovendien gaat bij de eenzijdige soort de figuur door de oorsprong. Controleer deze uitspraken maar.

In de natuurkundeles wordt gedemonstreerd hoe je met een zandstrooier Lissajousfiguren kunt beschrijven. In fig. 7 vind je de opstelling en een resultaat. De beweging is al vrij gecompliceerd. Er is pas een deel van één volledige beweging gemaakt.

Zoek in de foto naar het begin en het eind van dat deel. Welk gedeelte van de totale figuur schat je dat nu beschreven is? Probeer ook de frequentieverhouding uit te tellen. Je zou het zelf ook wel met zo'n zandstrooier kunnen proberen.

Als je zulk een strooier bezig ziet, lijkt het alsof deze aanvankelijk een nagenoeg rechte lijn beschrijft, later een ellips en

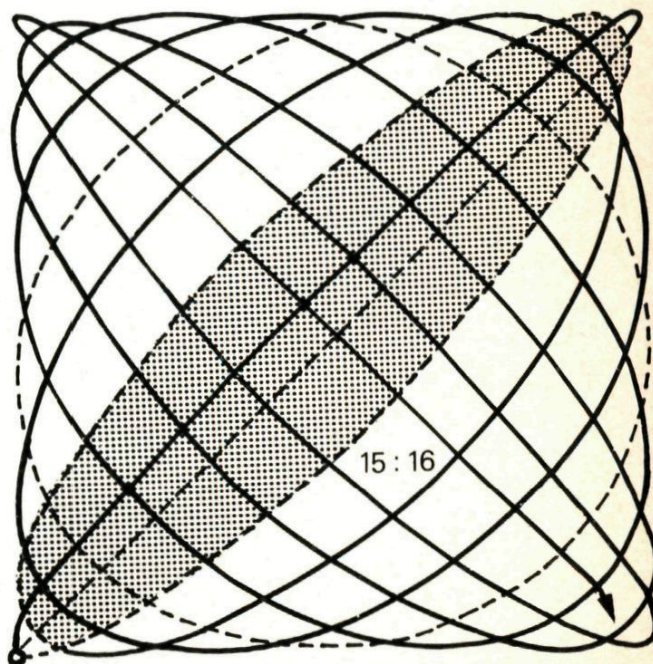


Fig. 8



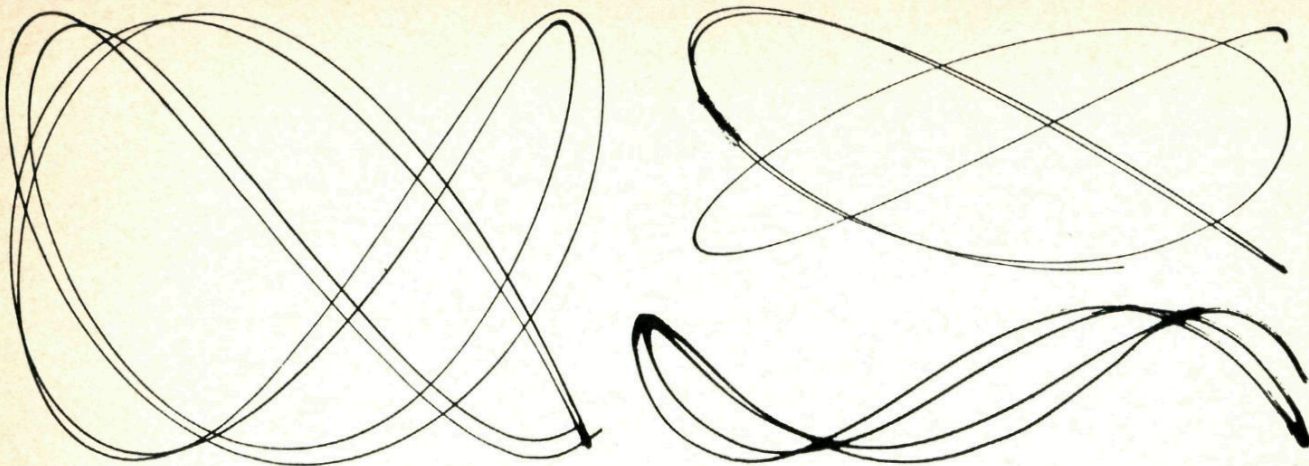


Fig. 9

tenslotte een cirkel. Daarna gaat het hele spelletje weer vrolijk terug. Dit doorlopen van de diverse variaties is echter bedrog. Cirkel, ellips en lijnstuk horen tot de serie 1 : 1.

In fig. 8 is de gesloten figuur 15 : 16 geconstrueerd.

Loop deze kromme maar eens na, in de hoek beginnend. Merk op dat de figuur vrijwel volgens de diagonaal begint, overgaat via een ellipsachtige figuur in een kwasicirkel en deze weer in de schijnbare rechte lijn enz.

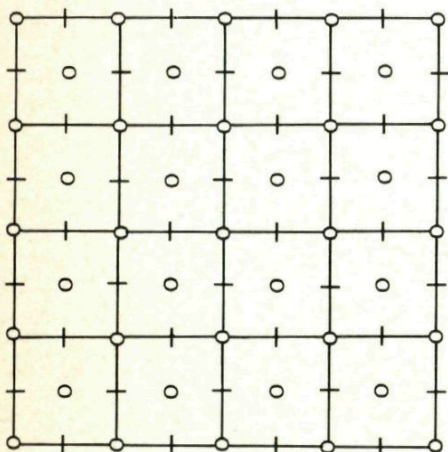
Dit alles heeft zijn oorzaak in het feit dat de verhouding 15 : 16 zo dicht in de buurt van 1 : 1 ligt.

In fig. 9 zie je tenslotte nog foto's gemaakt door een leerling van het Bredase Lyceum met een slingerende lamp. Zo geven de Lissajousfiguren werk aan tekenaars en rekenaars, aan knutselaars en fotografen.

Misschien reken je jezelf ook tot een van deze groepen!

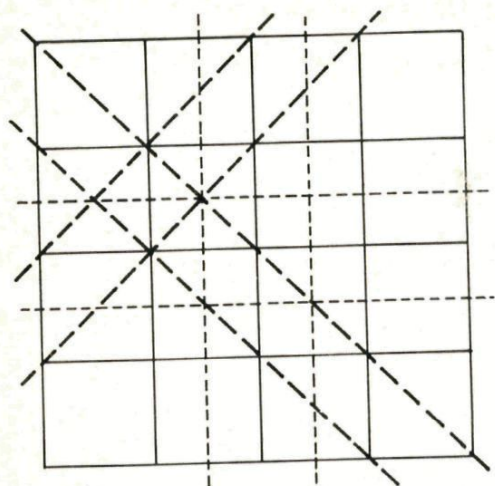
## Oplossingen van de denkertjes uit no. 2

- 1 Translatie in verticale en horizontale richting over de zijde van één vierkant.
- 2 De rondjes geven de rotatiepunten over  $90^\circ$  aan. De streepjes geven de rotatiepunten over  $180^\circ$  aan.

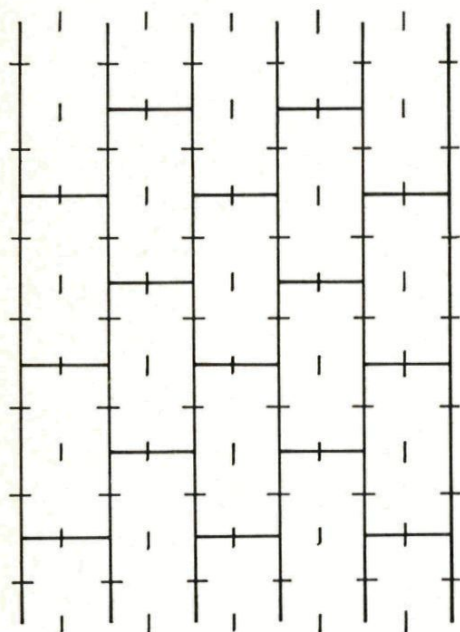




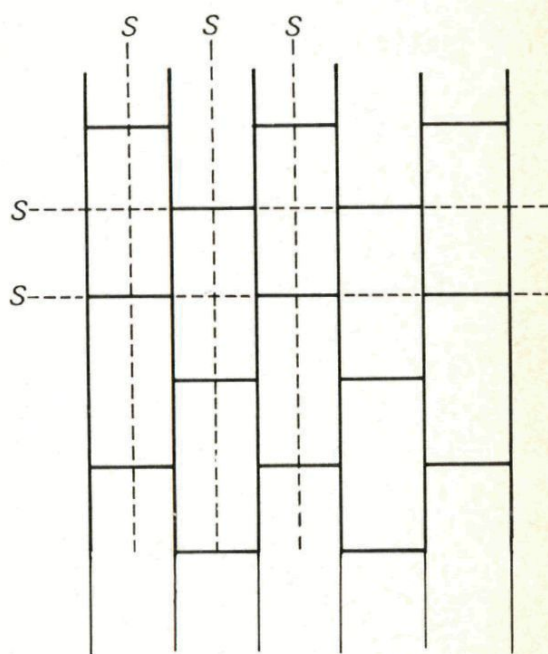
De spiegellijnen zijn zowel de lijnen van de vlakverdeling zelf als de gestippelde lijnen ertussen. Ook de diagonale streeplijnen zijn spiegellijnen.



3 De rotatiepunten ( $180^\circ$ ) zijn met streepjes aangegeven.



5 De spiegellijnen zijn gestippeld.



4 Er zijn geen andere glijspiegellijnen.

6 De rotatiepunten liggen waar 3 kopjes bij elkaar komen en ook waar 3 pootjes bij elkaar komen.

7 Als translatiecel kunnen we deze ruit kiezen.  
Een zwart en een wit reptiel komen er vrijwel onbeschadigd in voor. Het grijze reptiel vinden we in stukjes terug.





Het is een bekend, maar niettemin mysterieus feit, dat een mens in cirkels rondloopt als hij zich niet kan oriënteren. In bossen of op vlakten zonder paden, in dichte mist of verblindende sneeuwstormen blijkt steeds dat iemand, die denkt in een rechte lijn te lopen, op zijn punt van uitgang terugkeert.

Deze eigenschap is trouwens niet puur menselijk: een geblinddoekte hond en een kip zonder kop lopen in cirkels; blinde vogels vliegen in cirkels.

De Noorse bioloog F. O. Guldberg, die dat verschijnsel onderzocht, vertelt van drie reizigers, die in een nacht, waarin het sneeuwde, probeerden vanuit een blokhut een dal van vijf kilometer breed over te steken. Tot vijf maal toe kwamen ze weer terug bij de blokhut, waarna zij hun pogingen opgaven tot de volgende morgen. Ook vertelt hij van roeiers, die in de mist probeerden een baai van vijf kilometer breed over te steken. Na lang roeien zagen zij land: het was de plek waar ze waren vertrokken.

Het zal duidelijk zijn dat, als iemand rechtsom een cirkel met een middellijn van 4 kilometer loopt, zijn linkerbeen een langere weg aflegt dan zijn rechterbeen. Stel de afstand tussen zijn voeten 10 cm, dan is de afstand die zijn linkerbeen aflegt  $2\pi$  (2000,1) m en de afstand die zijn rechterbeen aflegt  $2\pi$  (2000) m. Het verschil is dus  $0,2\pi$  m (dus 63 cm). Als ons slachtoffer een staplengte heeft van 1 m, dan heeft hij  $4000\pi$  stappen gedaan ( $\approx 12600$ ). Dat wil dan zeggen, dat de staplengte van zijn linkerbeen gemiddeld  $0,2\pi/4000\pi = 5 \cdot 10^{-5}$  m =  $5 \cdot 10^2$  nm = 0,05 mm langer is dan de staplengte van zijn rechterbeen; dit werkelijk minimale verschil verhinderde de reizigers uit Guldbergs waarnemingen de overkant te bereiken.



## Inhoud:

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| Pythagoras uitgebreid                    | 49 |
| Een belangrijke eigenschap van de ellips | 51 |
| Een kaars, een ellips en een sinusoid    | 52 |
| Oplossen van vergelijkingen in water     | 54 |
| Aleph-nul                                | 56 |
| Zes saamhorige krommen                   | 58 |
| 'Uit de kunst', figuren van Lissajous    | 63 |
| Oplossingen van de denkertjes uit no. 2  | 71 |
| Kringetjes lopen, pag. 3 omslag          |    |



## PYTHAGORAS

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

### REDACTIE

A. J. Elsenaar, Harderwijk.

W. Kleijne, Heerenveen.

Ir. H. Mulder, Breda.

A. F. van Tooren, Leusden-C.

G. A. Vonk, Naarden.

### REDACTIESECRETARIAAT

Bruno Ernst, Muurhuysen 11, Amersfoort.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden. De oplossingen van denkertjes en prijsvragen naar: A. F. van Tooren, Calabrië 33, Leusden-C.

### ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, f 5,— per jaargang.

Voor anderen f 7,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

