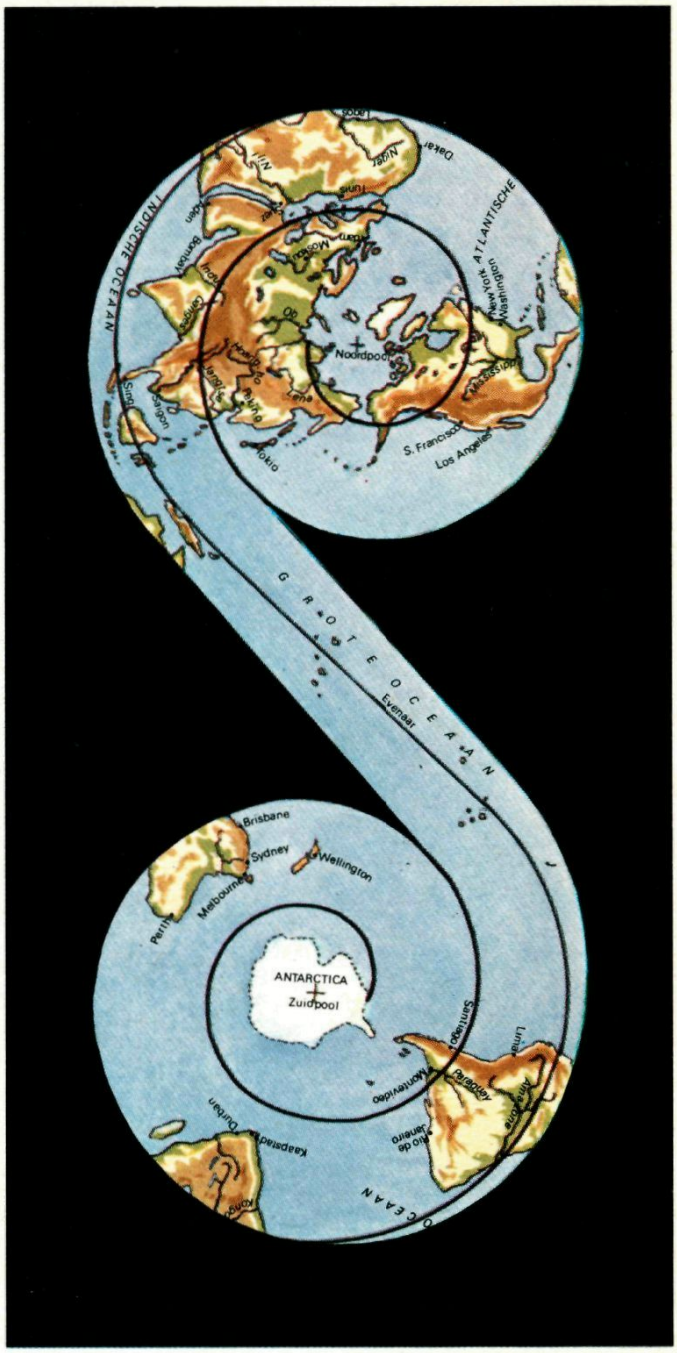


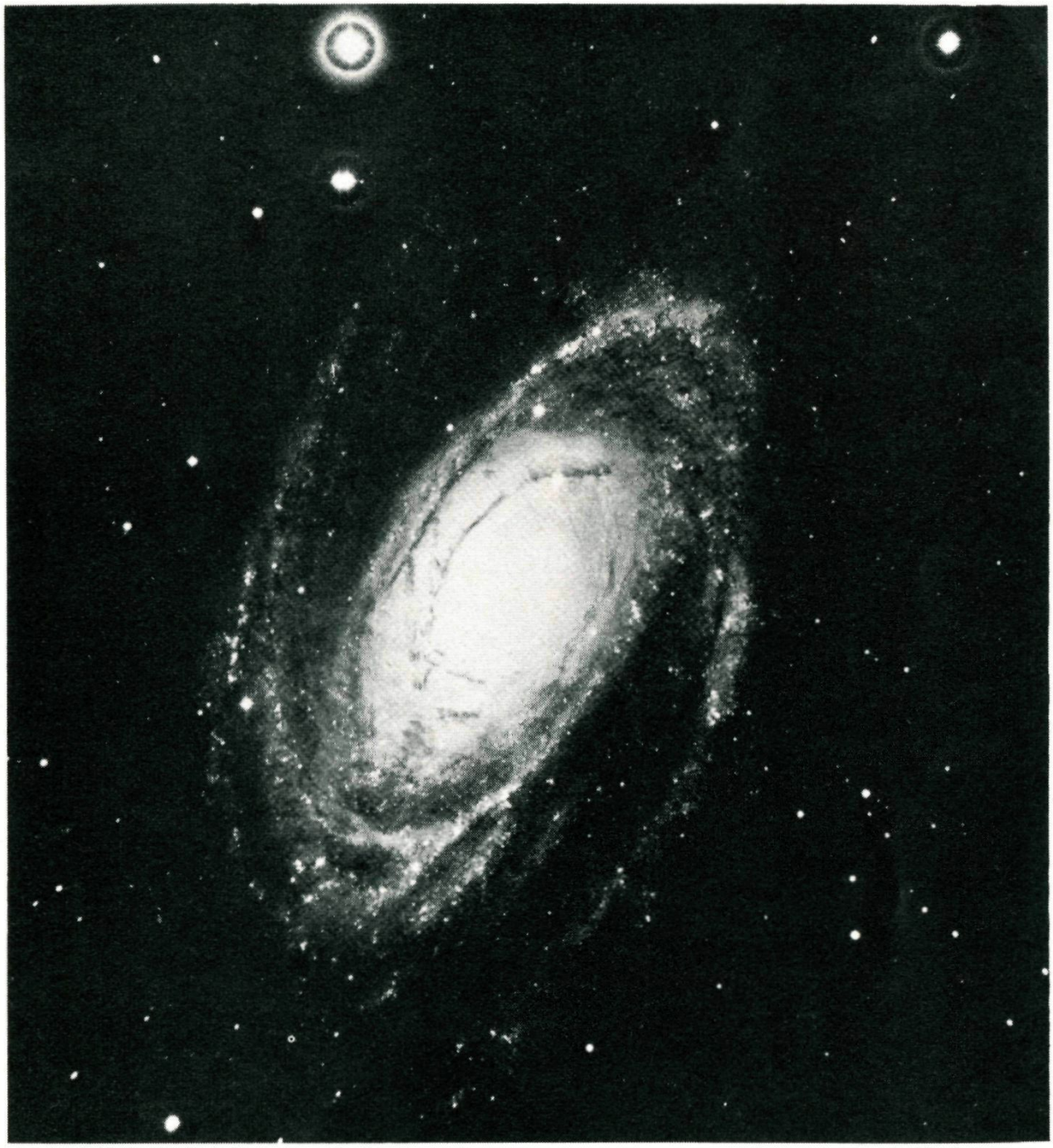
5
jaargang 14 / april 1975

wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff

verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Het sterrenstelsel M 81, ca. 10 miljoen lichtjaren van ons verwijderd.
Meer dan 100 000 miljoen sterren en nog eens zo veel massa aan stof en gas, gerangschikt in spiralen!

BIJ DE FIGUUR OP DE OMSLAG:
Wie een sinaasappel, of een andere bolvormige vrucht, helemaal afschilt, snijdt eigenlijk *loxodromen* (zie pag. 116) in het oppervlak. Natuurlijk nemen we het niet erg nauw, want dan zou aan het schillen geen eind komen: een loxodroom, of bolspiraal blijft zonder einde rond de pool spiralen. Zij komt er steeds dichter bij, zonder de pool te bereiken.
Had je ooit gedacht, dat je een sinaasappelschil in zijn geheel zo kon neerleggen als op de foto op de omslag? De meeste mensen aan wie je het vraagt, zullen zeggen: dan is de ene helft oranje en de andere toont de binnenkant en die is wit.
Een globe kunnen we ook op deze manier 'afschillen', dan ontstaat een afbeelding van de aarde die veel lijkt op de prent DRAAIKOLKEN van M. C. Escher. Zie verder pag. 118.

Spiralen

Dit nummer is helemaal gewijd aan figuren, die je niet in de schoolwiskunde tegenkomt: SPIRALEN. Blader het nummer eerst eens door, dan krijg je een indruk van de wereld der spiralen die je in natuur en kunst tegenkomt. Als je een slakkenhuis van boven bekijkt zie je een spiraal; bij vele sterrenstelsels, die evenals onze melkweg miljarden sterren bevatten, is de materie spiraalvormig gerangschikt. Ook in de plantenwereld is de spiraal niet zeldzaam: vrijwel alle bloemhoofden van composieten tonen ons spiralen.
In de architectuur is de spiraal veel gebruikt; ze is verder een van de oudste versieringselementen die de mens op allerlei gebruiksvoorwerpen heeft aangebracht.
Ook Escher had een bijzondere belangstelling voor spiralen, zoals je aan de hier gereproduceerde prenten kunt zien.
We hebben maar een zeer beperkte keuze kunnen maken uit al het beschikbare materiaal om dit nummer te illustreren.
Er zijn vele soorten spiralen en de wiskundigen hebben daarvan in de loop der eeuwen een groot aantal eigenschappen aan het licht gebracht. Hier hebben we ons nog meer moeten beperken, omdat het bewijs van deze eigenschappen en zelfs de omschrijving ervan meer wiskundekennis veronderstelt, dan je op school doorgenomen hebt. Er komen nu toch al wat moeilijke stukjes in voor. We hopen dat je je daardoor niet zult laten afschrikken.

°De afwikkelingslijn van de cirkel

Plaats een potlood met z'n stompe kant loodrecht op het papier. Om het potlood is een garendraadje gewikkeld; op het eind zit een lusje en daarin steken we een potloodpunt. Nu wikkelen we het garendraadje af, terwijl we het met de potloodpunt strak houden. Er ontstaat een mooie spiraal (fig. 1).
We tekenen de spiraal nog eens, maar dan om een gulden (fig. 2): het uiteinde van het garendraadje leggen we onder de gulden en houden het klem met de wijsvinger van de linkerhand op de gulden te drukken. Dan winden we het draadje met de lus éénmaal om de gulden, zodat de lengte ervan gelijk is aan de omtrek van de gulden.
We beginnen het afwikkelen bij P en gaan daarmee door tot we bij Q zijn. PQ is dan raaklijn aan de cirkel en de lengte van PQ is $2\pi r$, waarin r de straal van de gulden is.
De spiraal noemen we de *afwikkelingslijn* (de evolvente) van de cirkel, een naam die het ontstaan van deze spiraal heel goed weergeeft.
We proberen nu enige eigenschappen van deze spiraal te vinden. Bekijken we de lijn RS (fig. 2). Bewegen we de punt S een klein stukje, dan kunnen we R beschouwen als het middelpunt van een cirkel en het kleine boogje bij S als een stukje van de cirkelomtrek, met RS als straal. Daaruit volgt dat RS loodrecht op de spiraal staat.
Bedenk nu zelf een raaklijnconstructie met de volgende gegevens:
Gegeven de cirkel met het middelpunt M en een punt S van de spiraal. Construeer in S de raaklijn aan de spiraal. (Het punt R is dus niet gegeven!)

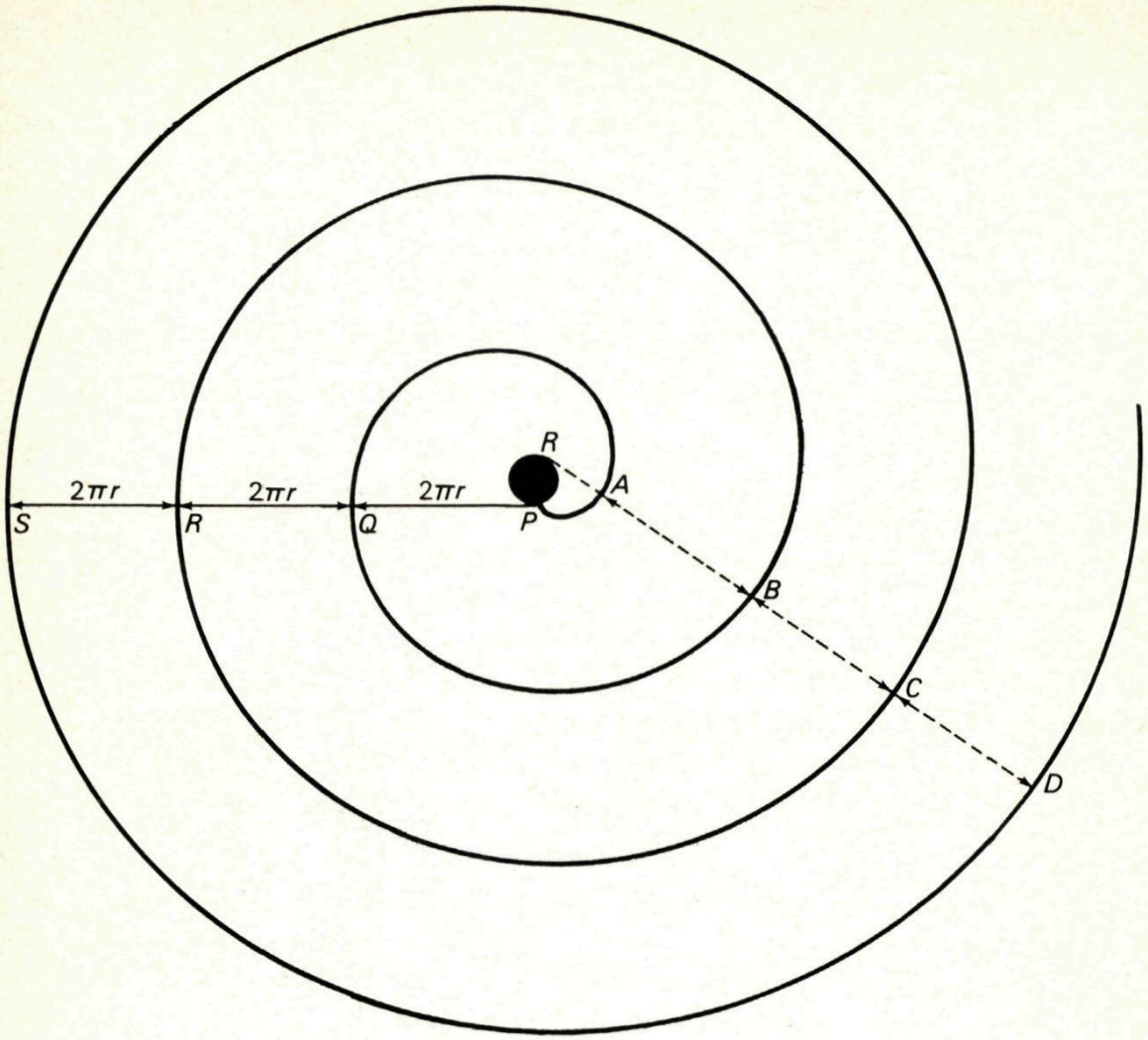


Fig. 1.

Misschien vermoed je al dat de spiraal bij P ook loodrecht op de cirkel staat. Probeer dat eens te bewijzen.

Misschien rijst de vraag bij je op: als ik van een spiraal weet dat het een afwikkelingslijn is, kan ik dan de cirkel terugvinden waarvan hij afgewikkeld is? Bekijk fig. 3 eens.

In de punten S_1, S_2 etc. hebben we loodlijnen op de spiraal getekend. Dit moeten allemaal raaklijnen aan de oorspronkelijke cirkel zijn. Je ziet dan ook dat ze een cirkel omhullen. De cirkel noemen we de *afgewikkelde* (de evolute) van de spiraal. Nu je toch in deze richting aan het zoeken bent, kun je je afvragen of elke figuur een afwikkelingslijn heeft.

Hoe ziet de afwikkelingslijn van een gelijkzijdige driehoek er uit?

Van de andere kant is het de moeite waard eens te overwegen of elke figuur opgevat kan worden als de afgewikkelde van een andere figuur. Het zijn geen vragen met pasklare antwoorden maar ze geven je ruimschoots de gelegenheid tot eigen onderzoek.

We gaan nog even terug naar fig. 1. Als we bij P beginnen af te wikkelen is duidelijk, dat PQ gelijk is aan de cirkelomtrek ($2\pi r$). Beredeneer dat ook $QR = RS = 2\pi r$.

Trek in een willekeurig punt R een raaklijn aan de cirkel.

Deze snijdt de spiraal in de punten A, B, C en D.

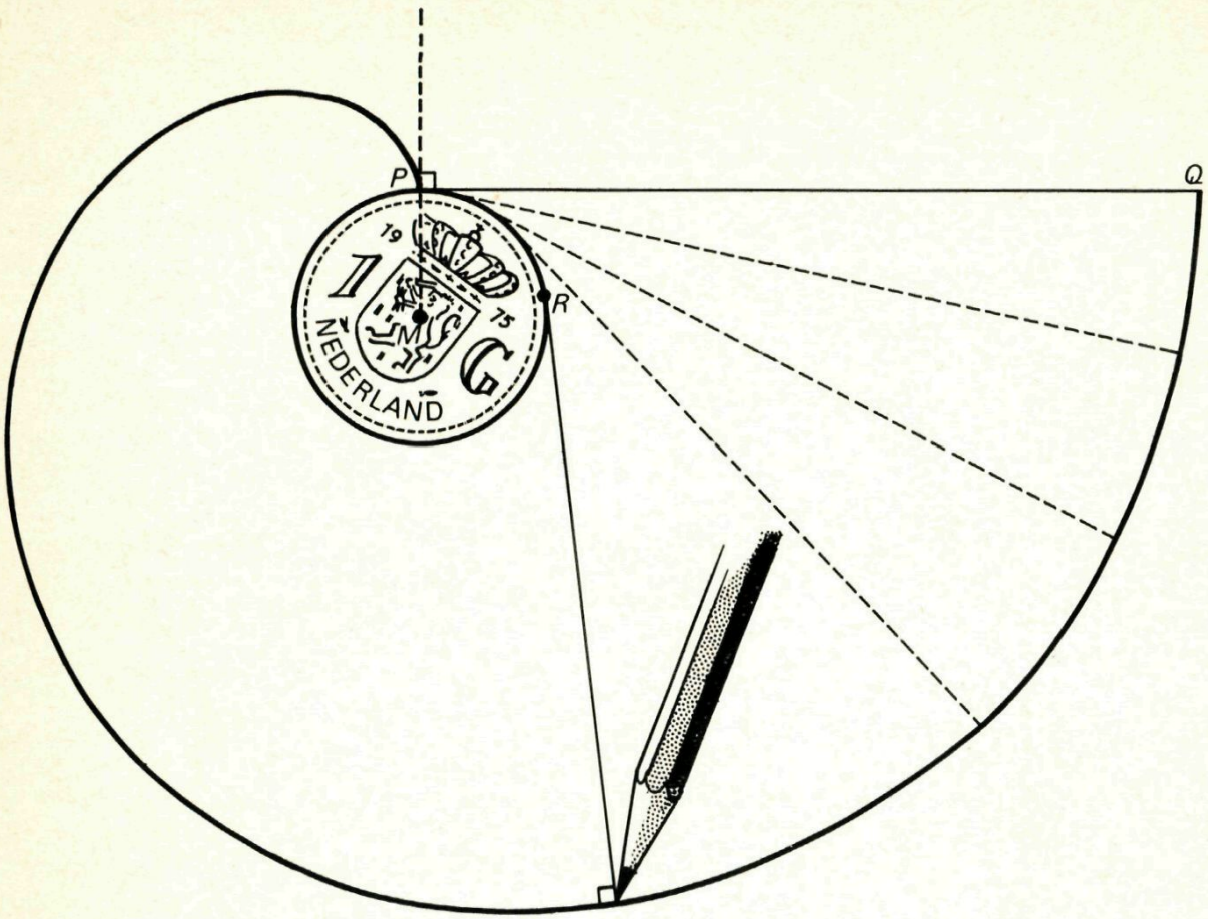


Fig. 2. De afwikkelingslijn (evolvente) van de cirkel.

Hoe groot zijn *AB, BC* en *CD*?
De windingen van deze spiraal blijven dus overal even ver van elkaar af; bekijk je slechts een deel van de spiraal, dan lijken de kromme lijnen bogen van concentrische cirkels.
Misschien vind je alles wat we tot nu toe over deze spiraal gevonden hebben nog niet de moeite waard. Je zou iets willen weten over de lengte van een deel van de spiraal zelf, of van de grootte van de door een deel van de spiraal ingesloten oppervlakte. Dat zijn nu juist zaken waarover grote wiskundigen zich het hoofd gebroken hebben en er was heel wat inventiviteit nodig om deze problemen met de klassieke meetkundige methoden op te lossen. We zullen dat verderop nog zien.

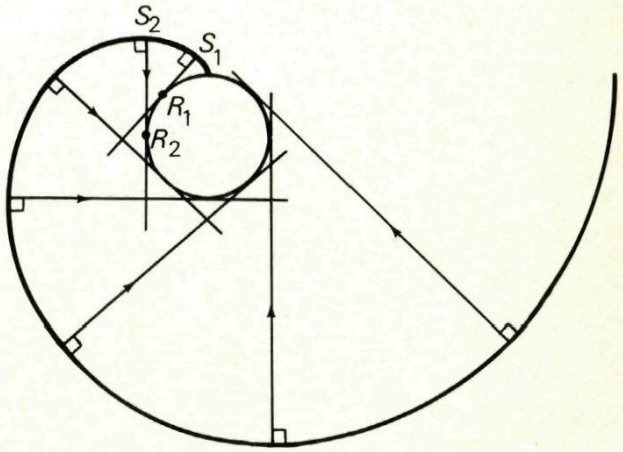


Fig. 3. De omhullende van de spiraal

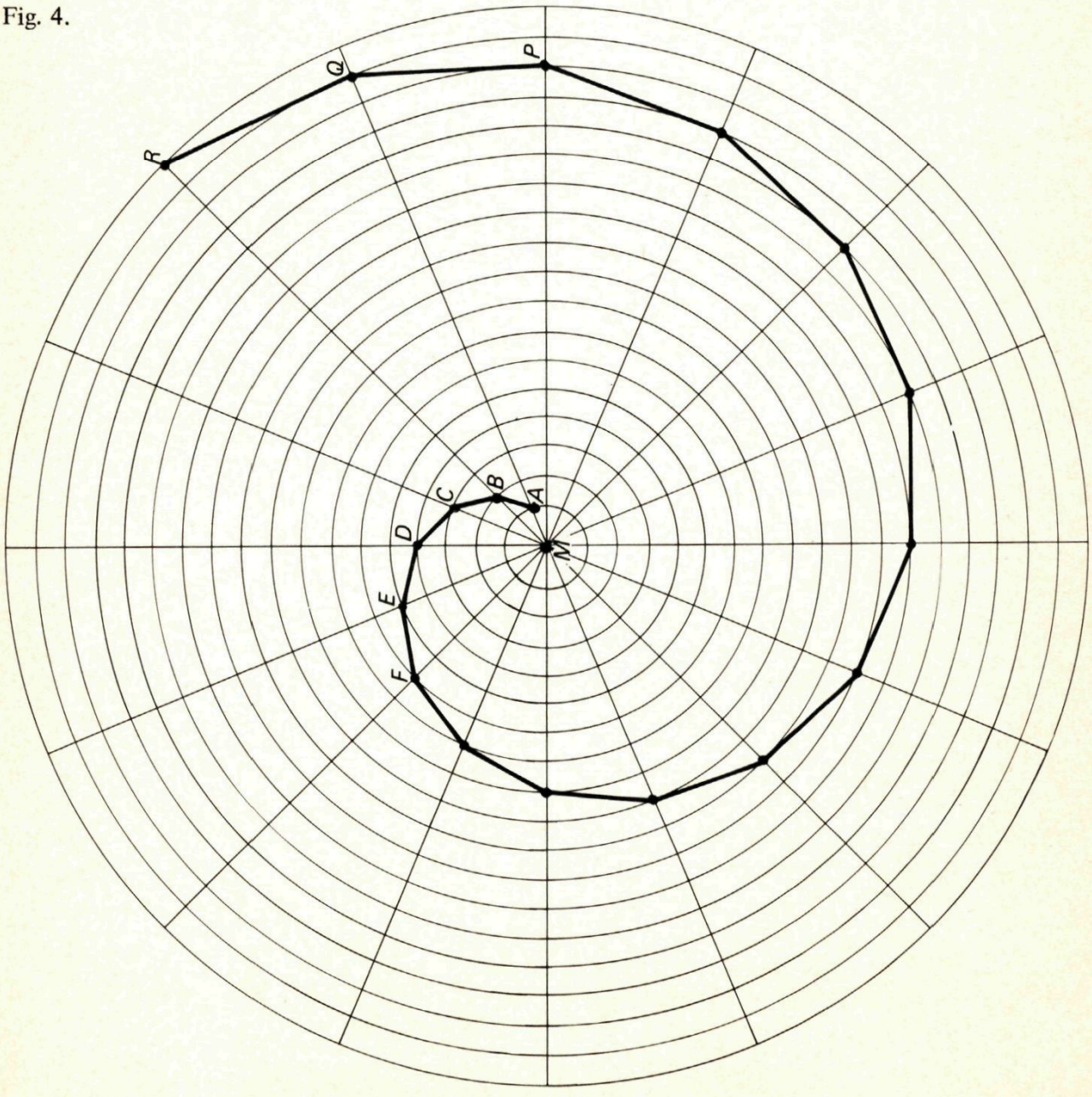
°De spiraal van Archimedes

In fig. 4 zijn een aantal concentrische cirkels getekend op gelijke afstanden van elkaar en tevens stralen die een hoek van $22\frac{1}{2}°$ met elkaar maken. Het snijpunt van MQ met de eerste cirkel is A, dat van de tweede cirkel met MR is B etc. Als we de punten M, A, B, C, D, etc. met elkaar verbinden ontstaat een spiraalvormige figuur opgebouwd uit rechte lijnstukjes. Als we het aantal stralen verdubbelen en tussen elke cirkel er nog een tekenen, gaat de figuur er wat vloeiender uitzien. Zo kunnen we eindeloos doorgaan tot we een volkomen vloeiende kromme krijgen: *de spiraal van Archimedes*.

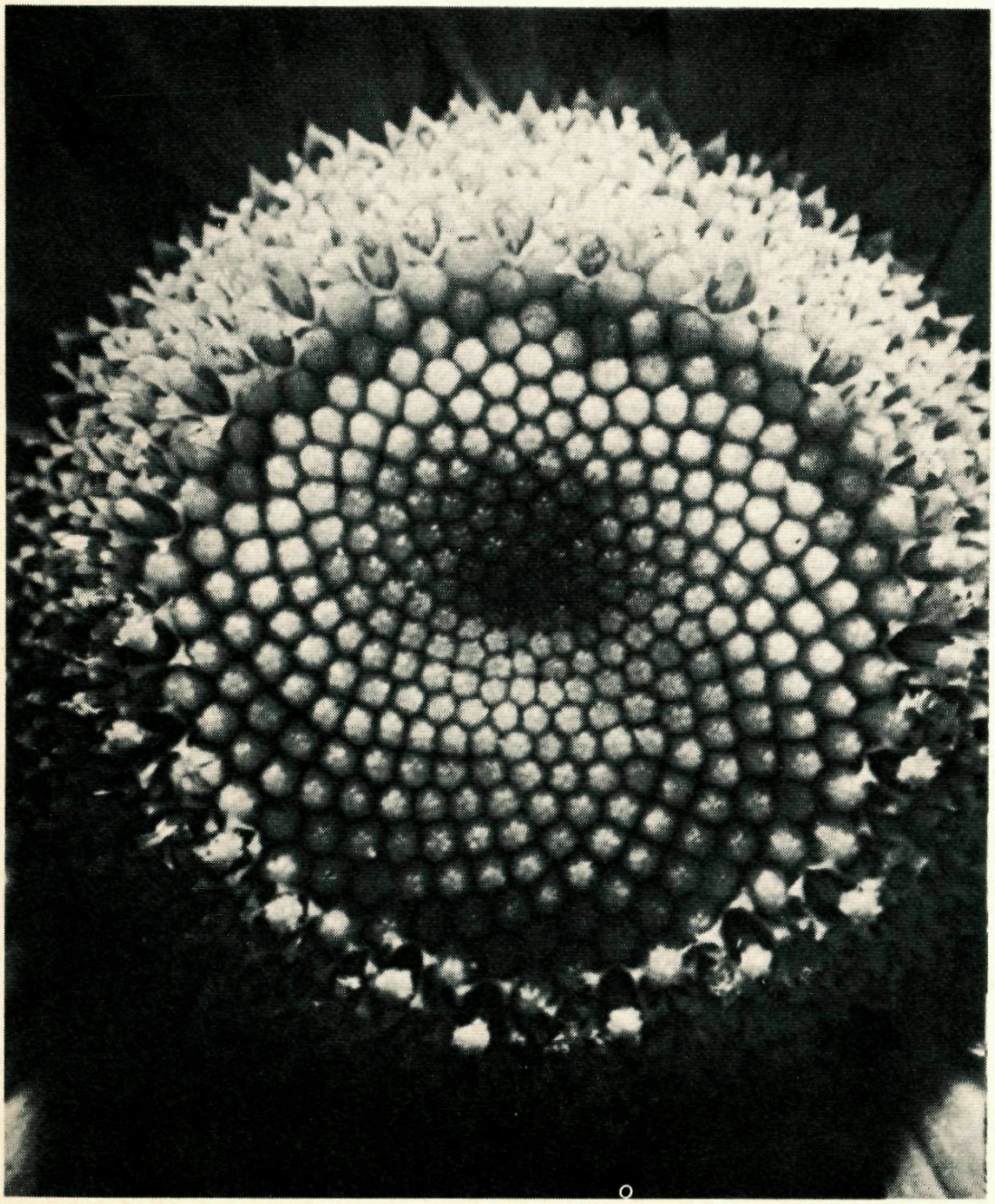
We kunnen deze spiraal ook als volgt laten ontstaan: we laten de straal MP gelijkmatig ronddraaien en tegelijk een punt op deze straal gelijkmatig (eenparig) naar buiten lopen. De baan die dat punt volgt is een spiraal van Archimedes.

In fig. 4 zien we dat $MP = AQ = BR$ etc.

Fig. 4.



en het is niet moeilijk in te zien dat ook hier de windingen even ver van elkaar blijven. Alleen heeft dat even ver van elkaar blijven hier een andere betekenis als bij de afwikkelingslijn van een cirkel. Daar waren de gelijkblijvende afstanden loodlijnen die twee windingen van de spiraal verbonden, hier niet.
Merk op dat de spiraal aanvankelijk een kleine hoek met de stralen maakt, maar dat deze voortdurend toeneemt. We zouden kunnen vermoeden dat deze hoek na een aantal windingen tot 90° zal naderen.
Is de spiraal van Archimedes ook een afwikkelingslijn van een cirkel? Of is de afwikkelingslijn van de cirkel een bijzonder geval van de spiraal van Archimedes? Dit is een interessante puzzel die we zullen laten rusten.
Archimedes is de eerste die deze spiraal grondig bestudeerd heeft in verband met twee problemen waarvoor de Griekse wiskundigen tevergeefs een oplossing zochten.



De bloemhoofden van alle composieten bestaan uit vele bloempjes die in spiralen gerangschikt zijn.

°°De spiraal van Archimedes en de trisectie van een hoek

Het construeren van een deellijn van een hoek met passer en liniaal is eenvoudig. Vanzelfsprekend zochten de Griekse wiskundigen ook naar methoden om een hoek in *drie* gelijke hoeken te delen: de trisectie van een hoek. Men onderzocht heel wat verschillende methoden... en met succes. Maar al deze methoden voldeden niet aan de spelregels die men zichzelf gesteld had: de constructie moest uitgevoerd kunnen worden met passer en liniaal.*

Ook de spiraal van Archimedes staat in verband met het probleem van de trisectie van een hoek. Nemen we eens aan, dat de spiraal gegeven is (fig. 5). De hoek die we in drieën willen delen is $\angle AOB$. OA laten we samenvallen met de beginstand van de ronddraaiende straal waarmee de spiraal is voortgebracht. OB snijdt de spiraal in P. Nu delen we OP in drie gelijke stukken en tekenen de aangegeven cirkelbogen. De snijpunten Q en R van de cirkelbogen verbinden we met O. Nu is:

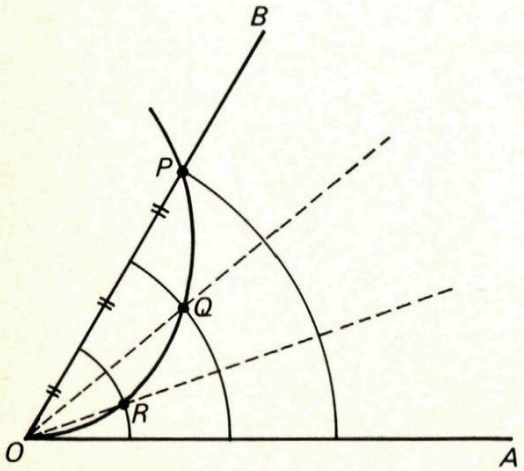
$$\angle AOB = \angle ROQ = \angle QOP$$

Het bewijs is niet lastig. Bij de spiraal van Archimedes is de afstand van een punt van de spiraal tot het beginpunt O recht evenredig met de hoek die de bewegende straal doorlopen heeft. Noemen we deze afstand r en de hoek θ, dan kunnen we dit als volgt noteren $r = a\theta$. Hierin is a een willekeurige evenredigheidsfactor. Als a klein is, liggen de windingen van de spiraal dicht bij elkaar en is a groot dan liggen de windingen ver van elkaar. Noemen we $OR = r_1$, dan is $OQ = 2r_1$ en $OP = 3r_1$ Voor de bijbehorende hoeken geldt dan:

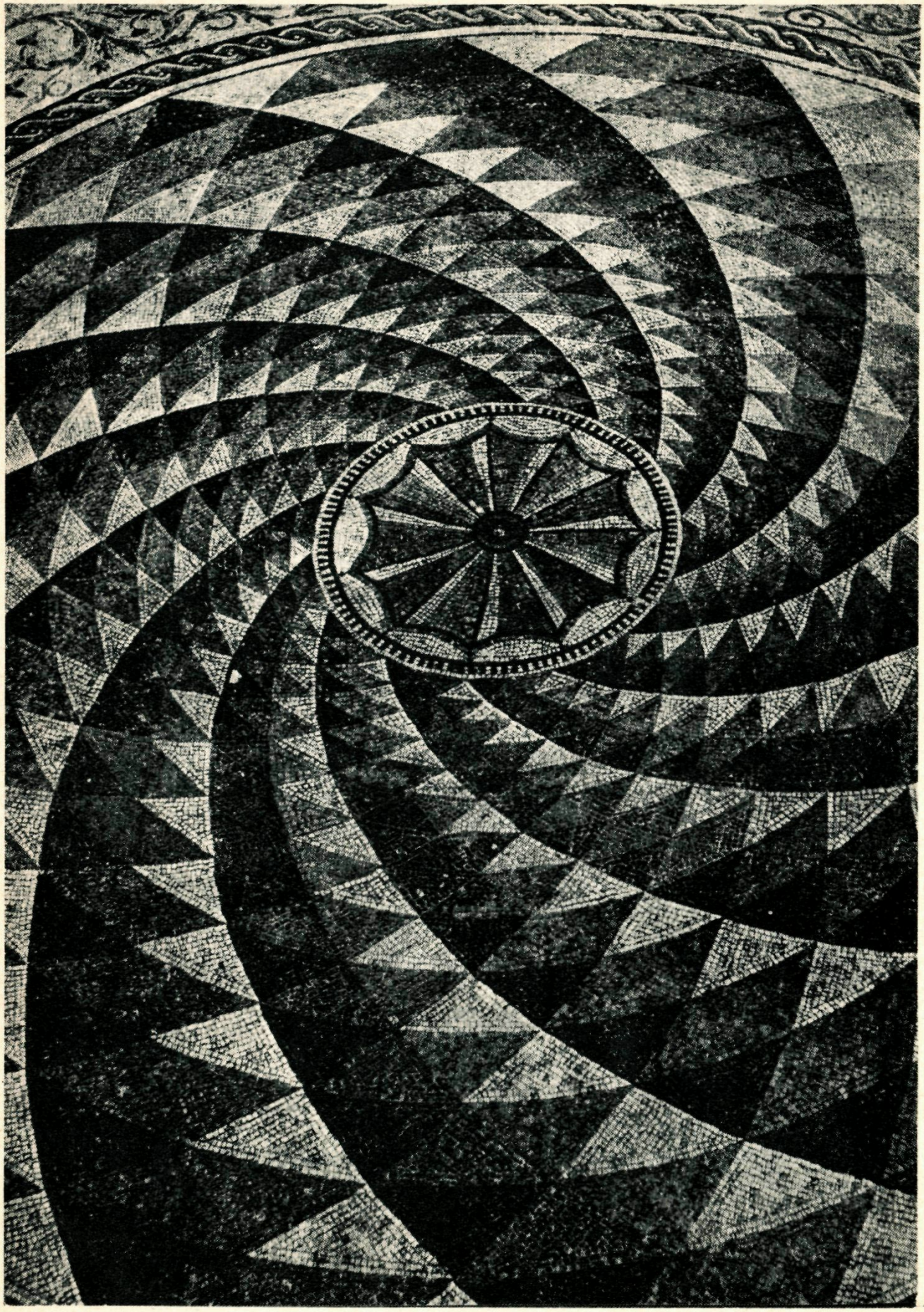
$$\theta_1 = \frac{r_1}{a}, \quad \theta_2 = 2\left(\frac{r_1}{a}\right) \text{ en } \theta_3 = 3\left(\frac{r_1}{a}\right)$$

Het is duidelijk, dat we met behulp van een vaste spiraal van Archimedes elke willekeurige hoek in een willekeurig aantal gelijke delen kunnen verdelen. Het bleek echter niet mogelijk hieruit een 'passer- en liniaal-constructie' af te leiden.

Fig. 5.



* In 1837 bewees Pierre Wantzel dat zo'n constructie onmogelijk is.



Hellenistisch mozaïek.

°°De spiraal van Archimedes en de kwadratuur van de cirkel

Onder de kwadratuur van de cirkel verstaat men letterlijk: het construeren van een vierkant met dezelfde oppervlakte als die van een gegeven cirkel. Omdat de oppervlakte van een cirkel πr^2 is, kunnen we ook zeggen dat de kwadratuur van de cirkel is opgelost als we een lijnstuk kunnen construeren dat π maal zo groot is als een gegeven lijnstuk. Ook hier zochten de griekse wiskundigen naar een methode die alleen met passer en liniaal uitgevoerd kon worden.*

Als we uitgaan van een spiraal van Archimedes is de constructie niet moeilijk. In fig. 5a is P een punt van een gegeven Archimedes-spiraal en OA de beginstand van de draaiende straal. Met O als middelpunt construeren we een cirkel met de straal a. Hierin is a de constante die bij de spiraal behoort ($r = a\theta$). Nu is de cirkelboog AC gelijk aan OP want beide zijn gelijk aan $a\theta$.

Om precies dezelfde reden is in fig. 7 (θ is daar $\frac{1}{2}\pi$ radialen) de lengte van de kwart cirkel AB gelijk aan OQ. Ofwel $OQ = \frac{1}{2}\pi a$. Ook hieruit was geen constructie af te leiden die alleen met passer en liniaal uitgevoerd kon worden.

Nog even dit: de cirkel snijdt de spiraal in D (fig. 6). Hoe groot is θ? En hoe lang is de cirkelboog AD? ($\theta = 1$ rad. en $AD = a$).

Fig. 5a.

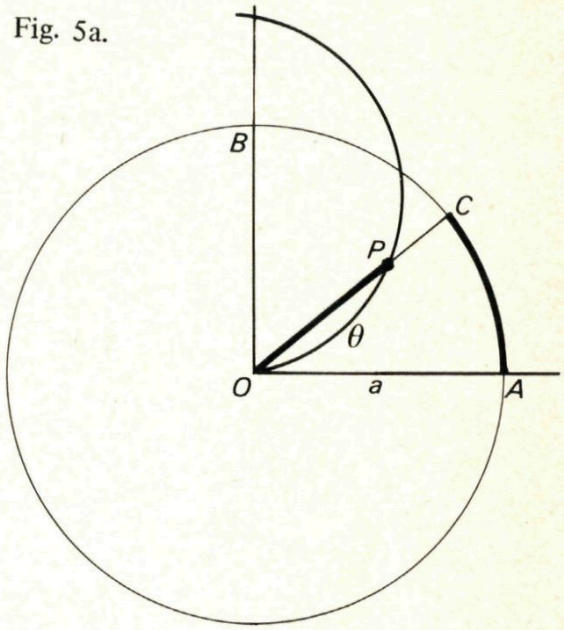


Fig. 6.

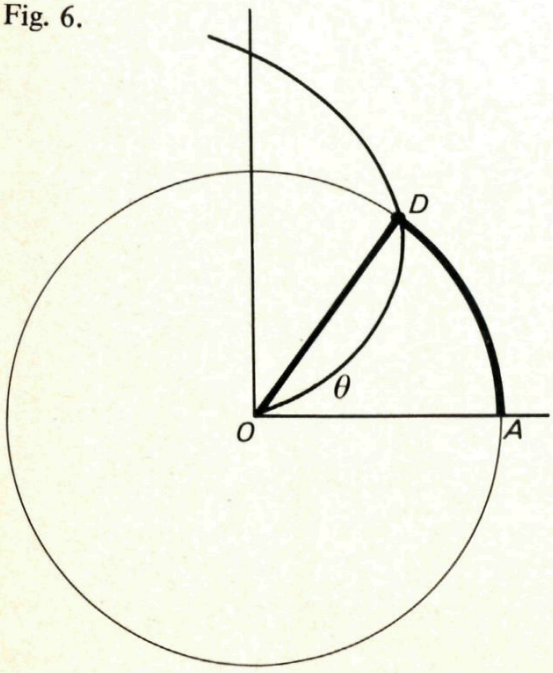
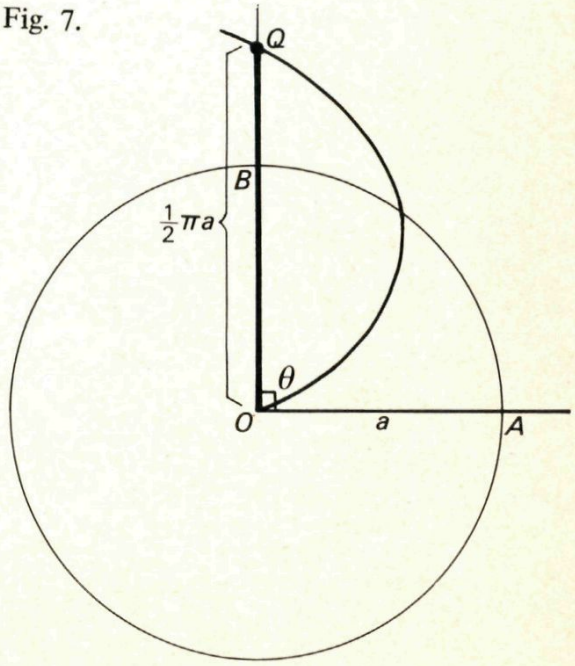
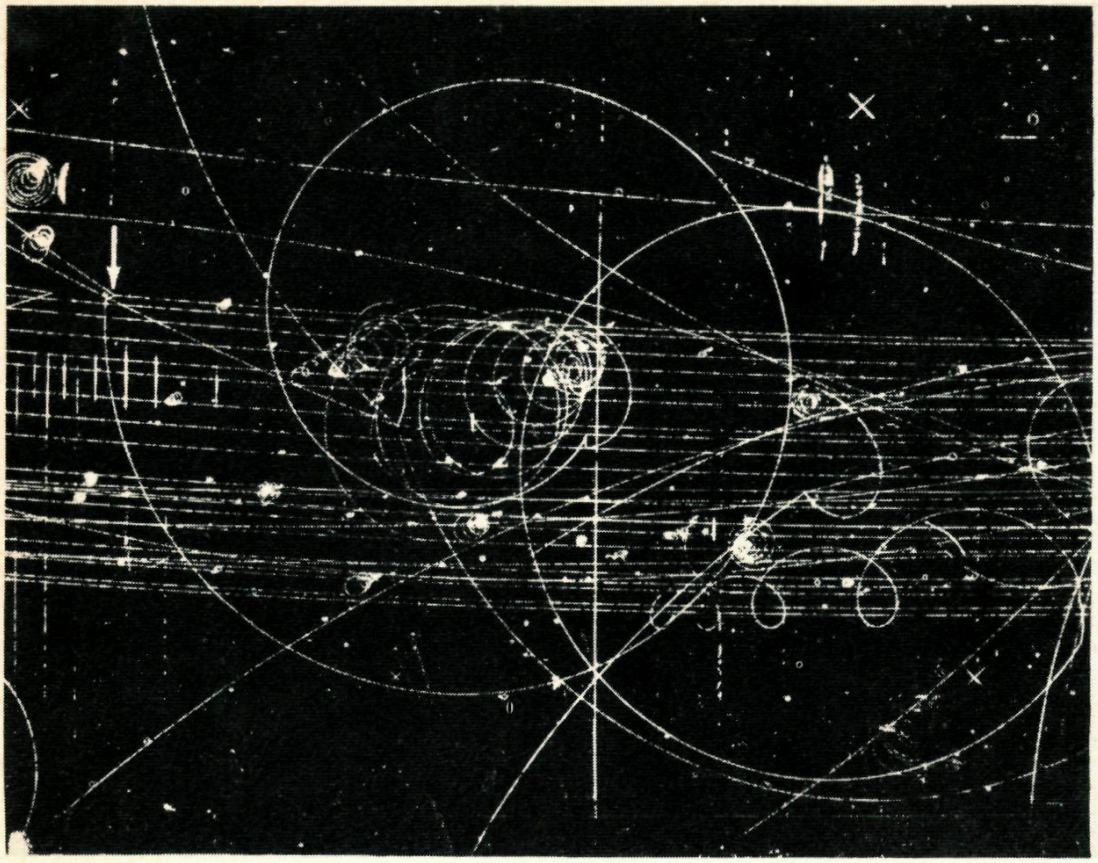


Fig. 7.

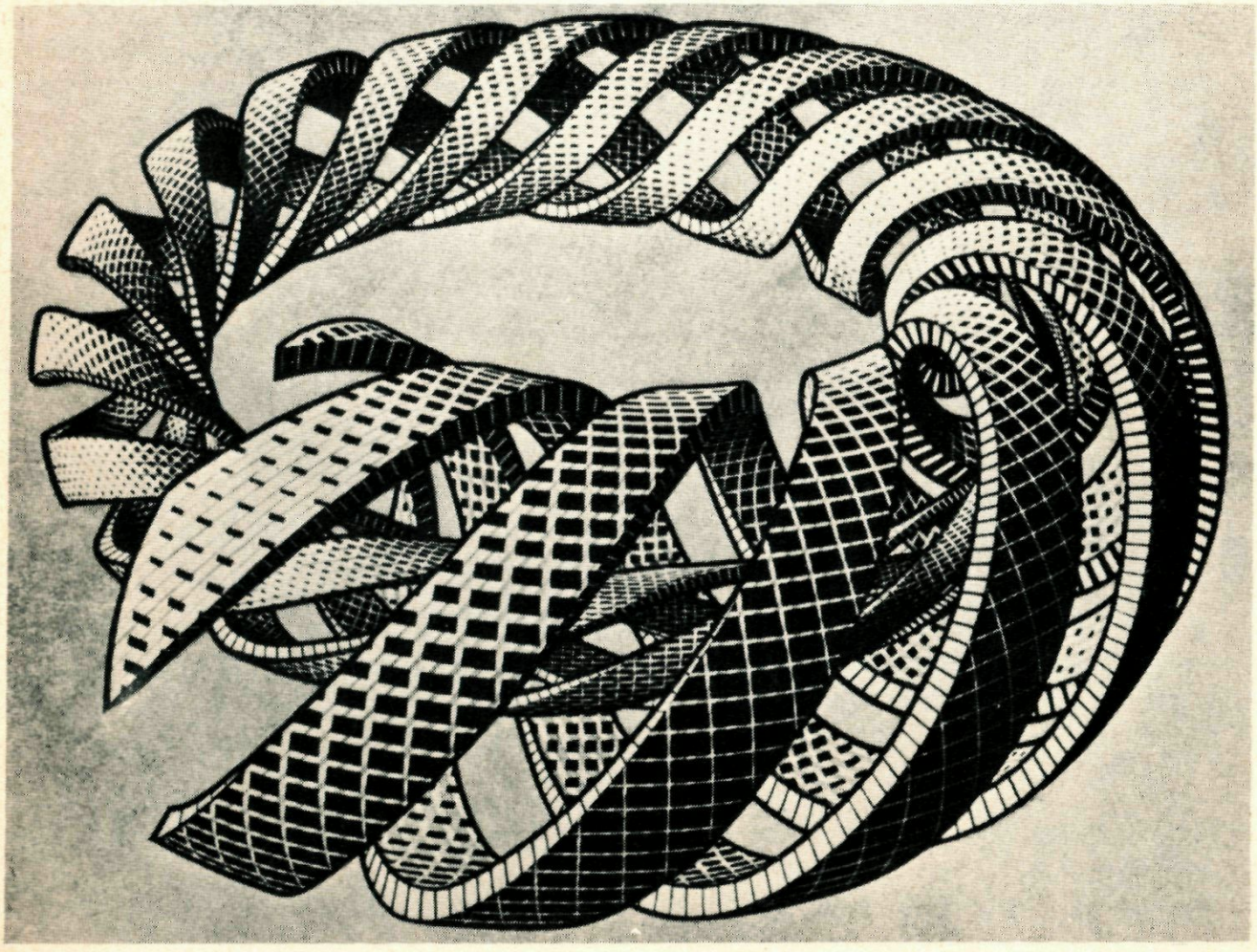


* Ook dit probleem is onoplosbaar, zoals Ferdinand Lindemann in 1882 bewees.

Sporen van elementaire deeltjes volgen spiraalvormige banen onder invloed van een magnetisch veld.



Houtsnede van M. C. Escher: SPIRALEN



°°°De oppervlakte van de spiraal van Archimedes

De spiraal is een open figuur en we zullen dus eerst moeten aangeven wat we onder de oppervlakte willen verstaan. Zie hiervoor fig. 8: we vragen naar de oppervlakte begrensd door de eerste spiraalwinding en de beginstand van de straal. Bij de spiraal waarvoor geldt $r = a\theta$, wordt op de uitgangsstraal het stuk $2\pi a$ afgesneden (daarvoor is $\theta = 360° = 2\pi$rad.) Archimedes vond de grootte van deze oppervlakte op een wonderlijk eenvoudige manier. Zijn afleiding komt hierop neer (fig. 9). Denk de oppervlakte benaderd door cirkelsegmenten met gelijke middelpuntshoeken. De stralen van de cirkels nemen dan steeds met hetzelfde bedrag toe. Als we het aantal cirkelsegmenten tot oneindig laten naderen, nadert de som van hun oppervlakten tot die van de spiraal.
We noemen het bedrag waarmee we de straal van de cirkel telkens laten toenemen d en nemen als eerste cirkelsegment OAB, waarvan $OA = d$.
Als de cirkel in n segmenten verdeeld is, is

$O_1 = \frac{\pi d^2}{n}$, verder is $nd = 2\pi a$ of $d = \frac{2\pi a}{n}$,

zodat $O_1 = \frac{\pi}{n}(\frac{2\pi a}{n})^2 = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3}$.

$O_2 = \frac{\pi(2d)^2}{n}$; vullen we in $d = \frac{2\pi a}{n}$ dan krijgen we $O_2 = \frac{4\pi^3(2a)^2}{n^3}$

O_3 wordt: $\frac{4\pi^3(3a)^2}{n^3}$ etc.

$$O_1 + O_2 + O_3 \ldots + O_n =$$
$$\frac{4\pi^3 a^2}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2)$$

De moeilijkheid was nu te vinden hoe groot de som van die kwadraten was. Zonder bewijs (maar dit kan gemakkelijk door inductie worden geverifieerd) vermelden we

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Dus: $O_1 + O_2 + O_3 + \ldots O_n =$

$= \frac{4\pi^3 a^2}{n^3} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Als we dit uitwerken vinden we:

$O_1 + O_2 + O_3 + \ldots O_n =$

$= \frac{2}{3}\pi^3 a^2(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2})$.

Als nu n tot ∞ nadert, naderen $\frac{3}{n}$ en $\frac{1}{n^2}$ tot 0.

Zodat de oppervlakte van de spiraal wordt:

$\frac{2}{3}\pi^3 a^2 \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$

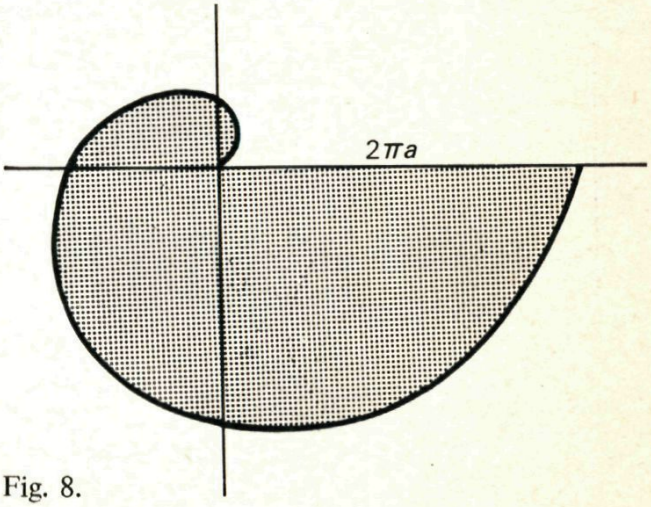


Fig. 8.

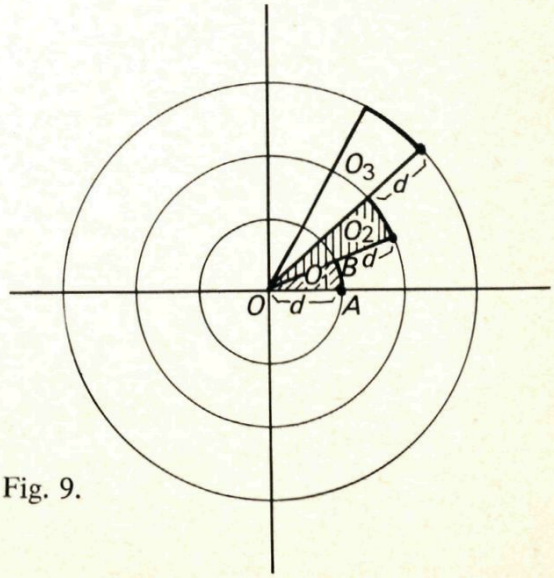


Fig. 9.

Zou je zelf de oppervlakte van de tweede spiraalwinding kunnen berekenen?
Misschien vind je de afleiding toch nog erg lastig. In wezen is zij echter heel simpel en het resultaat is bijzonder frappant. Het is de moeite waard om hem zelf nog eens goed door te werken.

Misschien vraag je nu naar de lengte van de spiraal, die de oppervlakte begrenst. Archimedes heeft ernaar gezocht en het niet gevonden! Het duurde nog heel lang voor dit probleem werd opgelost: in 1640 vonden Roberval en Torricelli onafhankelijk van elkaar de oplossing. We gaan er hier niet verder op in en vermelden alleen, dat het een stuk ingewikkelder is dan de afleiding van een formule voor de oppervlakte.
Nog even terug naar de eerste spiraal waarmee we kennis maakten, de afwikkelingsspiraal. Is daarvan de oppervlakte ook op een eenvoudige manier te berekenen? Ja, het is maar iets lastiger dan de oppervlakteberekening van de spiraal van Archimedes. We geven alleen de uitkomst: $\frac{4}{3}\pi^3 R^2$, waarin R de straal van de cirkel is.

Detail van een schaal uit Rhodos. De spiraal als siermotief, wordt door de mens al meer dan 200 eeuwen gebruikt.

°°°De groeispiraal

Fig. 10 en 11 zijn microfoto's van kleine schaaldieren (foraminiferen). Fig. 12 is een tekening uit het boek waarin Ernst Haeckel talloze fraaigevormde micro-organismen afbeeldde (Kunstformen der Natur).
Wanneer bij een eenkamerig jong exemplaar een deel van het groeiende protoplasma uit de schaalmond naar buiten treedt, dan bouwt het dadelijk een nieuwe en grotere kamer aan de bestaande vast. Al naar gelang de ligging van de opening en de kromming van de schaalwand, ontstaan de meest uiteenlopende erfelijk vastgelegde en vaak zeer gecompliceerde vormen van de schalen. Ons interesseren hier alleen de spiraalvormige.

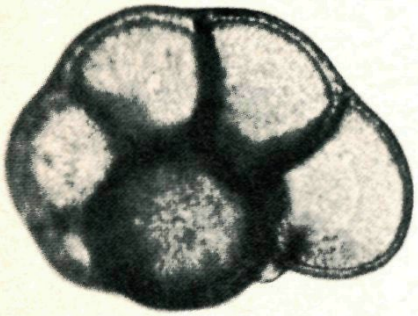
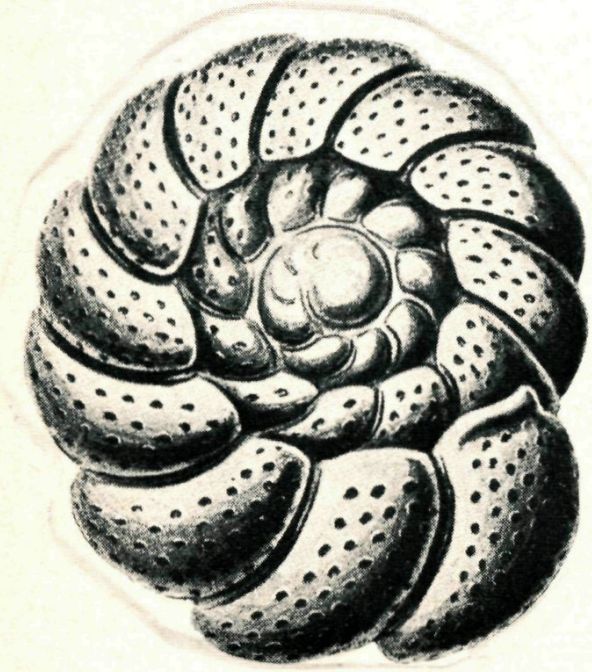


Fig. 10. Anomalina Polymorphina (microfoto)

Fig. 11. Truncatulina uvigerina (microfoto)



Elke nieuwe kamer is groter dan de voorafgaande: het groeiproces is een vermenigvuldigingsproces. De aangroeiing is evenredig met de hoeveelheid reeds aanwezig protoplasma. De grootte der opeenvolgende kamers vormt een meetkundige rij. Noemen we de grootte* p, dan is de tweede kamer een factor a maal zo groot, dus pa. De derde is weer een factor a groter dus pa^2. etc.
De rij is dus: p, pa, pa^2, pa^3, pa^4, pa^5, pa^6, pa^6, pa^7 ....pa^n.
Bij de spiraalvormige schaaldieren is er echter niet alleen sprake van een groei maar tegelijk van een draaiing, een rotatie. We zullen trachten een punt te volgen dat tegelijk aan de aangroeiing deelneemt én aan de rotatie.

* Dat mag de middellijn zijn, of de grootste afmeting van de eerste kamer.

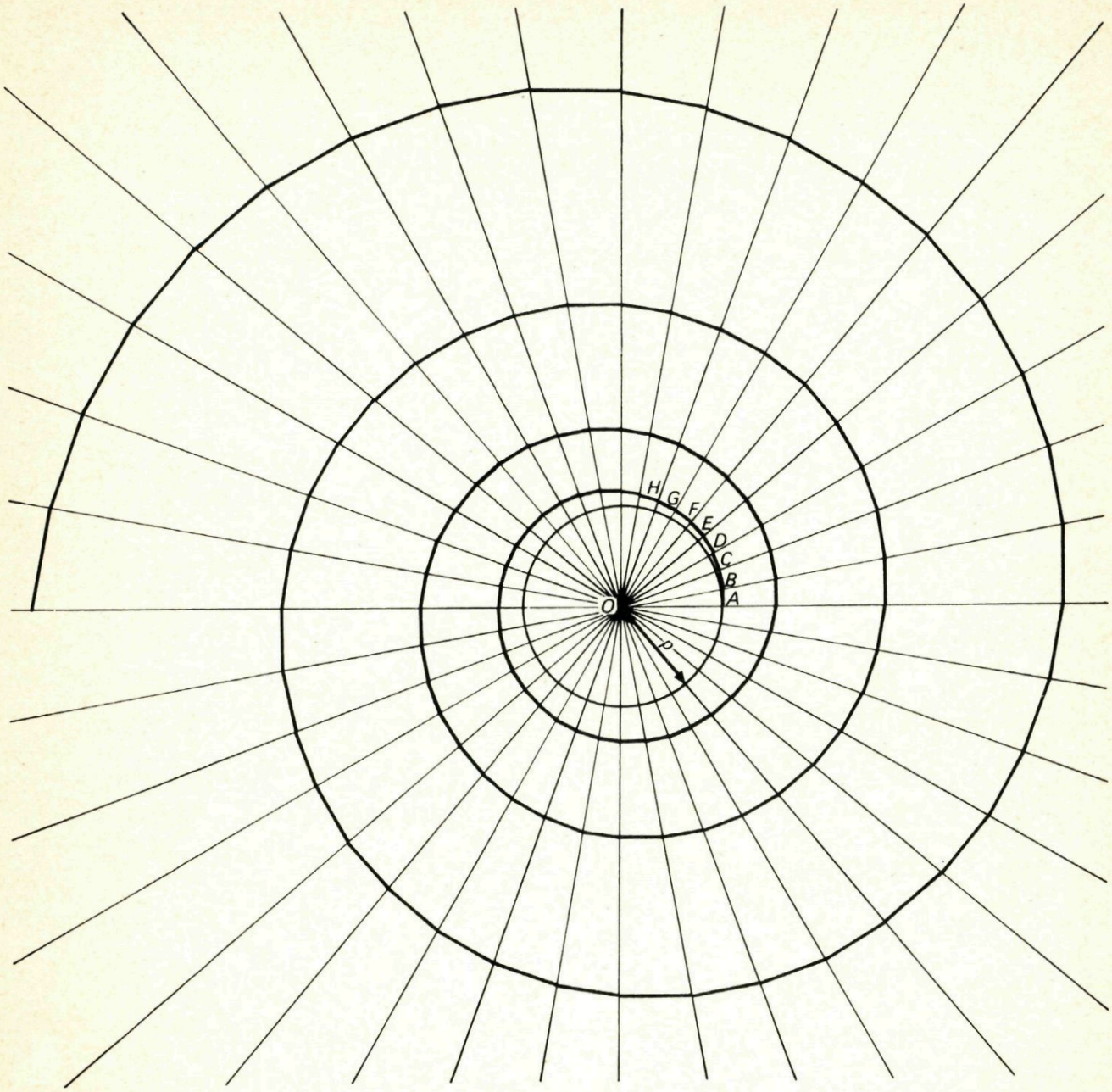


Fig. 13.

Daartoe tekenen we een cirkel met een straal p, met stralen (verlengd tot ver buiten de cirkel) die hoeken van 10° met elkaar maken. Een eenvoudig procedé om op de opeenvolgende stralen lengten af te passen die een meetkundige rij vormen is de volgende: richt in A een loodlijn op, deze snijdt de volgende straal in B. Richt in B een loodlijn op, deze snijdt de volgende straal in C etc. (fig. 13). We kijken even naar fig. 14 om te verifiëren, dat op deze manier werkelijk de lengten van OA, OB, OC... etc. een meetkundige rij vormen:

$$\frac{OA}{OB} = \cos 10^\circ \rightarrow OB = \frac{1}{\cos 10^\circ} OA$$

$$\frac{OB}{OC} = \cos 10^\circ \rightarrow OC = \frac{1}{\cos 10^\circ} \cdot OB =$$

$$(\frac{1}{\cos 10^\circ})^2 OA$$

De op deze wijze geconstrueerde figuur kan ook *binnen* de cirkel met de straal p voortgezet worden. We laten daartoe een

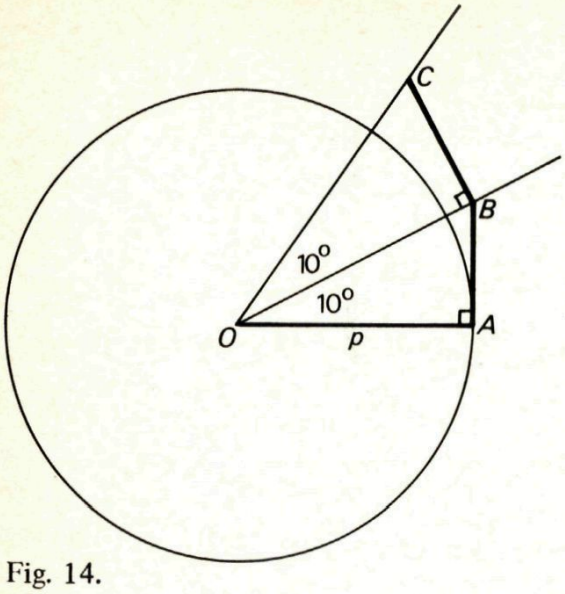


Fig. 14.

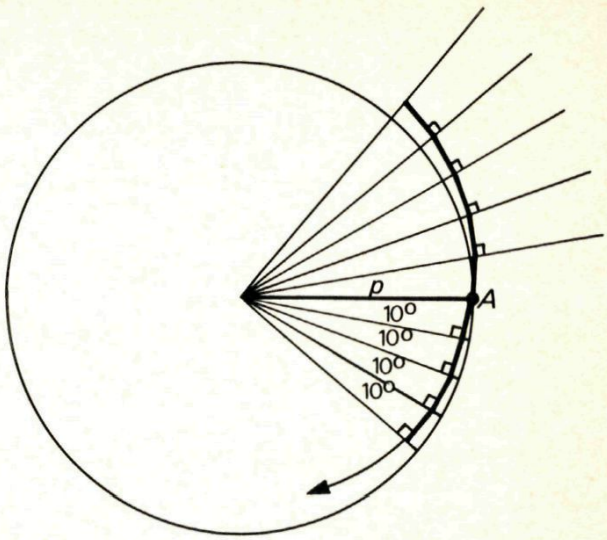


Fig. 15.

loodlijn neer op de eerstvolgende straal eronder. Vanuit dit voetpunt laten we weer een loodlijn neer op de daaronder gelegen straal enz.
De spiraalvormige figuur (we zeggen nog niet: *spiraal*, want hij bestaat voorlopig nog uit een aaneenschakeling van rechte lijnstukjes) windt zich nu op rond het middelpunt van de cirkel. Je ziet dat we met dit neerlaten van loodlijnen eindeloos door kunnen gaan. We kunnen ons afvragen of de totale som van dit oneindig aantal loodlijntjes ook oneindig lang is. Daarvoor bekijken we fig. 16.
De lengten die van de stukken die van de opeenvolgende stralen worden afgesneden, zijn resp.:

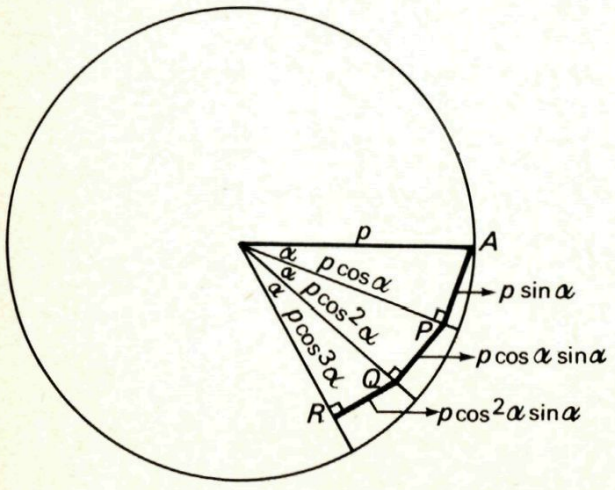


Fig. 16.

$p \cos \alpha$, $p \cos^2 \alpha$, $p \cos^3 \alpha$... $p \cos^n \alpha$.

De lengte van de loodlijnen is dan:

$p \sin \alpha$, $p \cos \alpha \sin \alpha$, $p \cos^2 \alpha \sin \alpha$.... $p \cos^n \alpha \sin \alpha$.

Dit is een meetkundige rij, met een vermenigvuldigingsfactor kleiner dan 1 (nl. cos α). De som van alle termen is dus eindig. De spiraal die door de voetpunten *A*, *P*, *Q*, *R* etc gaat is weliswaar groter dan deze eindige som, maar ze is toch ook eindig: i.p.v. de rechte loodlijnen krijgen we nu de som van de iets grotere boogjes. Hiermee hebben we aangetoond, dat de lengte van de groeispiraal eindig is.
Dat wil zeggen: de lengte van de spiraal vanaf een bepaald punt tot het middelpunt.

De som van de termen van een oneindig voortlopende meetkundige rij is $S = \frac{a}{1-r}$, waarin a de eerste term en r de vermenigvuldigingsfactor is.
Hierin is $a = p \sin \alpha$ en $r = \text{Cos } \alpha$, zodat $S = \frac{p \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$.

We kunnen dit ook schrijven als
$S = \frac{2p \sin \frac{1}{2}\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha} = p \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = p \text{ cotg } \frac{1}{2}\alpha$

Misschien kom je op het lumineuze idee, dat we nu op een eenvoudige manier de lengte van de logaritmische spiraal kunnen bepalen: we laten de hoeken tussen de opeenvolgende stralen (10° in fig. 5) steeds kleiner worden en naderen tot O°. Dan zal de nu nog wat hoekige figuur overgaan in een vloeiende kromme.
Dat laatste is zeker waar maar,... deze kromme is de cirkel met de straal p!
Tot hier toe hebben we het alleen gehad over afzonderlijke punten van de groeispiraal: Op elke volgende straal kozen we een punt, dat de lengte met dezelfde factor vergrootte als de voorafgaande. De lengte afgepast op de 10-de straal was pa^{10} ,die op de volgende pa^{11} etc. De exponenten 10 en 11 komen overeen met de straal die respectievelijk 10 maal de gekozen hoek (in ons geval van fig. 13 was dat 10°) en 11 maal de gekozen hoek met de uitgangsstraal maakten.
Als we de straal echter geleidelijk willen laten toenemen en niet sprongsgewijs, dan moeten we ook alle tussenliggende hoeken als exponent van a aan bod laten komen.
We kunnen de lengte van een straal die een hoek met de uitgangsstraal maakt dan noteren als: $r_\theta = pa^\theta$

Natuur en architektuur: een boomwortel en een wenteltrap (kathedraal van Auch) vertonen grote overeenkomst in vorm.

°°°Het grafschrift van een groot wiskundige

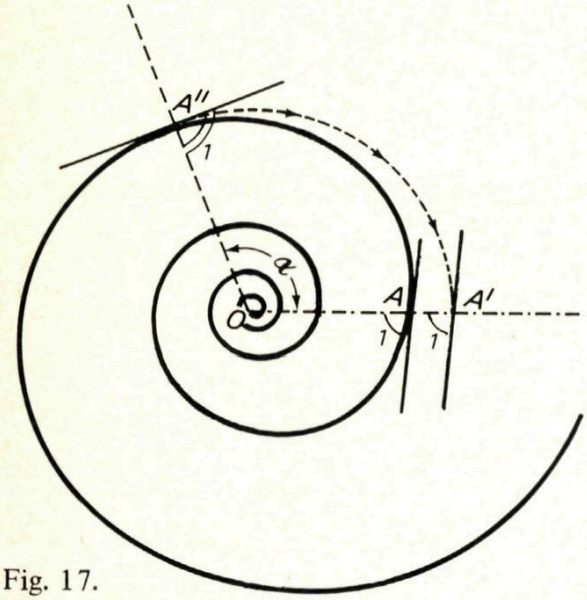


Fig. 17.

Jacob Bernoulli (1654–1705) ligt in de Münsterkerk in Bazel begraven. Op zijn grafsteen zien we een spiraal met daarbij de tekst: *Eadem mutata resurgo*. Vrij vertaald luidt dit: hoewel veranderd, zal ik als dezelfde herrijzen. Bernoulli heeft zelf om dit grafschrift gevraagd, om hiermee zijn eigen verwondering te vereeuwigen over de eigenschappen van de groeispiraal die hij had ontdekt.*

Wat is er nu zo bijzonder aan deze *spira mirabilis* (wonderlijke spiraal), zoals Bernoulli hem noemde?

Als we een figuur met een bepaalde factor $\neq 1$ vermenigvuldigen, ontstaat een nieuwe figuur die gelijkvormig is met de oorspronkelijke. Er ontstaat dus duidelijk een andere figuur. Als we echter de groeispiraal vermenigvuldigen dan ontstaat..... precies dezelfde groeispiraal! Niet een die *gelijkvormig* is met de oorspronkelijke, maar een die er *congruent* mee is. Dit is een wonderlijke eigenschap en dit zou al de tekst van het grafschrift: Eadem mutata resurgo, rechtvaardigen. Er is nog een aantal transformaties die we op de groeispiraal kunnen toepassen met het gevolg, dat weer dezelfde kromme ontstaat; daarop komen we dadelijk terug.

Maar nu eerst de vermenigvuldiging van de groeispiraal: met O als centrum vermenigvuldigen we alle punten van de spiraal met de factor a^α. Elke r wordt daardoor vermenigvuldigd met a^α. Is de spiraal nu groter geworden? Helemaal niet, kijk maar:

$r_\theta = pa^\theta$ gaat daarbij over in:
$r_{(\theta+\alpha)} = pa^{\theta+\alpha} = pa^\theta a^\alpha = r_\theta a^\alpha$

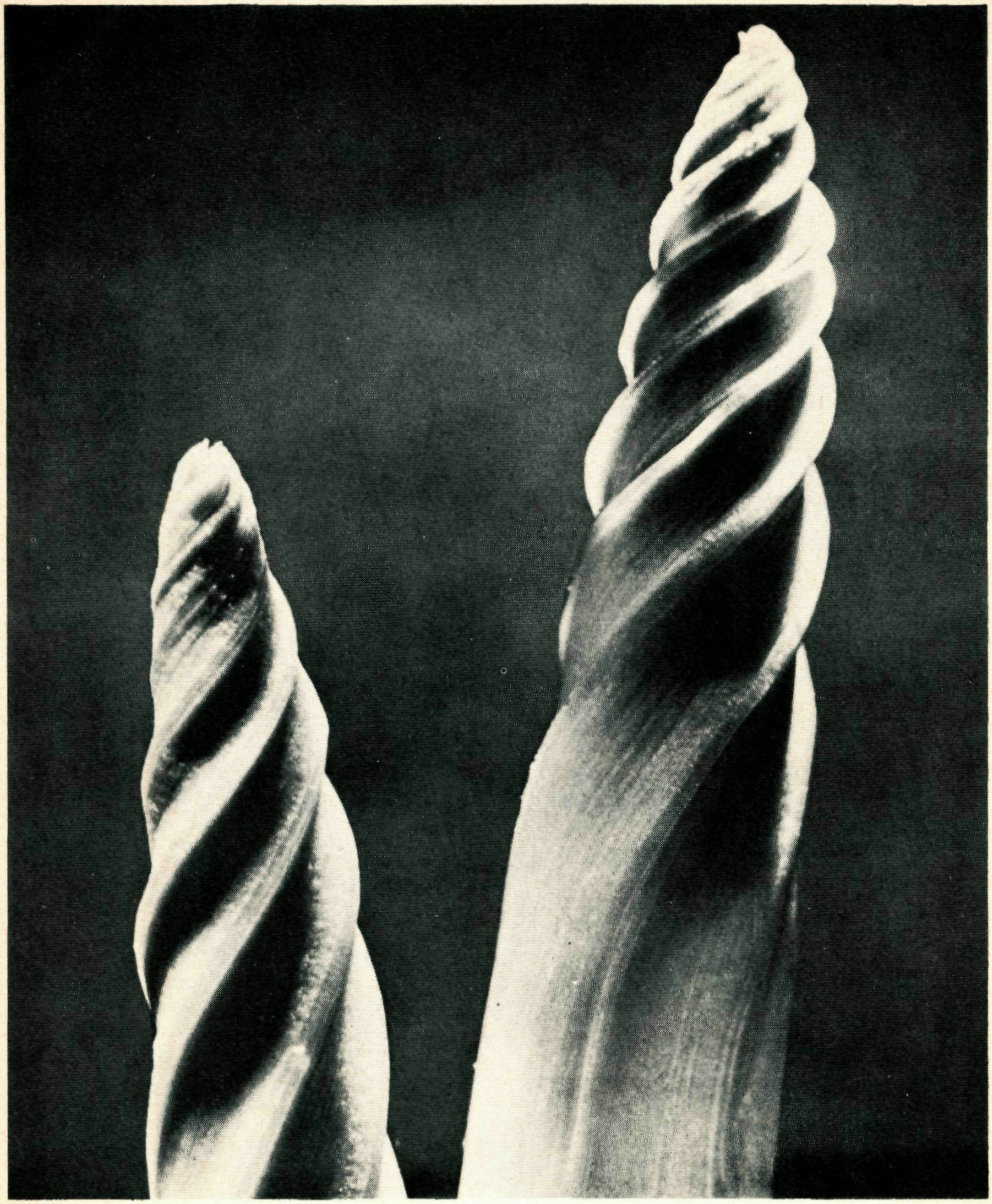
Dat wil zeggen: de draaiing van de oorspronkelijke spiraal over een hoek α heeft hetzelfde effect als het vermenigvuldigen van deze spiraal met de factor a^α!**

We leiden hierbij nog een andere belangrijke eigenschap van de groeispiraal af: De spiraal snijdt alle stralen onder dezelfde hoek.

In fig. 17 is A een punt van de groeispiraal, tevens is in A de raaklijn getekend, die in A de hoek A_1 met OA maakt. We vermenigvuldigen de spiraal vanuit O met de factor a^α.
Het punt A komt dan in A' en $\angle A_1 = \angle A'_1$, want door de vermenigvuldiging verandert de hoek niet.

* Niet altijd worden de wensen van grote wiskundigen omtrent hun grafschrift vervuld. Carl Friedrich Gauss, een der geniaalste wiskundigen aller tijden, wilde op zijn grafsteen een regelmatige zeventienhoek gebeiteld hebben, omdat deze in verband stond met een van zijn belangrijkste ontdekkingen. Dit gebeurde niet, omdat de steenhouwer vol bleef houden, dat die zeventienhoek niet van een cirkel te onderscheiden zou zijn.

** Natuurlijk moet je je hierbij voorstellen dat je de *hele*, d.w.z. ook naar de buitenkant oneindig voortgezette, figuur vermenigvuldigt en roteert.



Twee knoppen van de akkerwinde; enige dagen later zullen ze zich ontvouwen als trompetvormige bloemen.

We hebben gezien dat de vermenigvuldiging met $a\alpha$ op hetzelfde neerkomt als de rotatie van de oorspronkelijke spiraal over een hoek α. Nemen we nu aan, dat A'' een punt van de oorspronkelijke spiraal is, die door rotatie over α in A' terecht komt. In A'' is ook een raaklijn getekend die met de OA'' een hoek A''_1 maakt. Bij de rotatie verandert deze hoek A''_1 niet. Dus $\angle A''_1 = \angle A'_1$. Dan is ook $\angle A_1 = \angle A'_1$, m.a.w. De raaklijnen aan de spiraal snijden de stralen naar de raakpunten altijd onder dezelfde hoek.

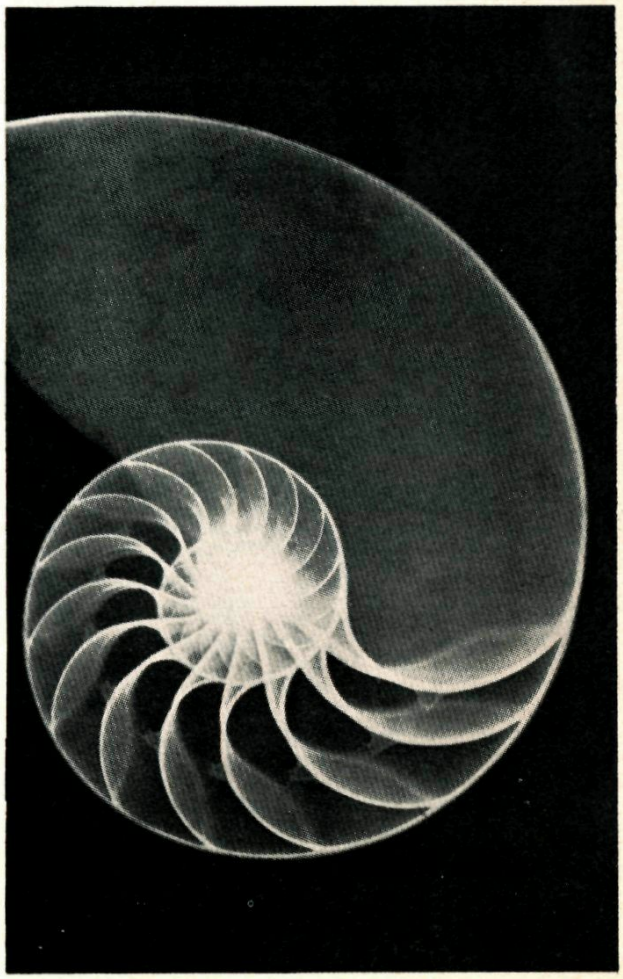
°Metingen aan de Nautilus-schelp

De spiraalvormige huisjes van microscopisch kleine Foraminiferen (pagina 108) waren voor ons aanleiding om de groeispiraal te definiëren en er enige eigenschappen van af te leiden. Als we een groeispiraal construeren, dan krijgen we het ideaalbeeld van zo'n spiraalvormig kalkomhulsel. In de natuurlijke vormen kunnen echter allerlei afwijkingen voorkomen. Als bijvoorbeeld de groeisnelheid tijdens het leven van zo'n beestje wat geremd wordt door afwijkingen van de optimale watertemperatuur, of door gebrek aan voedsel, dan zou dat betekenen, dat de windingen naar buiten toe dichter bij elkaar komen te liggen dan in het ideaalbeeld. Verder is het nog maar de vraag of gedurende het hele leven van zo'n diertje de aangroeiing evenredig blijft met de reeds bereikte grootte. Dit was een idealisering van het groeiproces en daaruit hebben wij de vorm van de groeispiraal afgeleid.

Het is daarom interessant om eens een spiraalvormige schelp na te meten en te kijken in hoeverre de vorm overeenkomt met de ideaalvorm: de groeispiraal. We hebben daarvoor een foto genomen van een grote Nautilus-schelp (een exemplaar uit het natuurhistorisch museum in South Kensington (Engeland). In fig. 18 vind je daarvan een nauwkeurige lijntekening. Fig. 19 is daarvan overgetrokken, waarbij alles, behalve de spiraal, weggelaten werd. In A hebben we zo nauwkeurig mogelijk (op het zicht) een raaklijn getrokken. Daarna hebben we de liniaal evenwijdig aan zichzelf verschoven, tot hij de eerste naar binnen gelegen winding raakte in B. Daarna werd AB getrokken.
Hetzelfde werd gedaan in C en D en in E en F.
Zoals je in de figuur kunt zien snijden de lijnen AB, CD en EF elkaar vrijwel in hetzelfde punt. Daarom promoveerden we dit punt tot het centrum van de spiraal. We kunnen nu op twee manieren, die onafhankelijk van elkaar zijn, nagaan of de spiraal van de Nautilus-schelp dicht bij het ideaal van de groeispiraal komt.
We meten de hoeken A, C en E. Deze blijken alle vrijwel $79\frac{1}{2}^\circ$ te zijn. De gelijkheid van deze hoeken is een der eigenschappen van de groeispiraal.
Verder meten we de lijnstukken
OB en OA (resp 10,9 en 3,4 cm)
OD en OC (resp 4,8 en 1,5 cm)
OF en OE (resp 6,9 en 2,2 cm)

Bij de ideale groeispiraal moeten de stukken die door twee opeenvolgende windingen van een straal worden afgesneden overal dezelfde verhouding hebben.
Dit komt hier bijzonder goed uit, reken maar na.
Zou je de lengte van een willekeurige straal van *deze* spiraal kunnen schrijven in de vorm $r = a^\theta$?

Röntgenfoto van een Nautilusschelp.



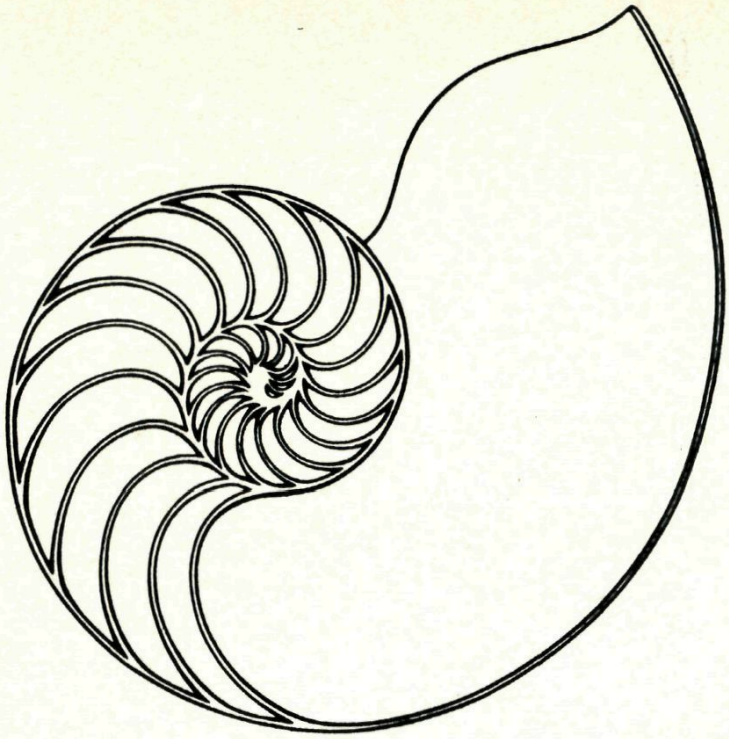


Fig. 18.

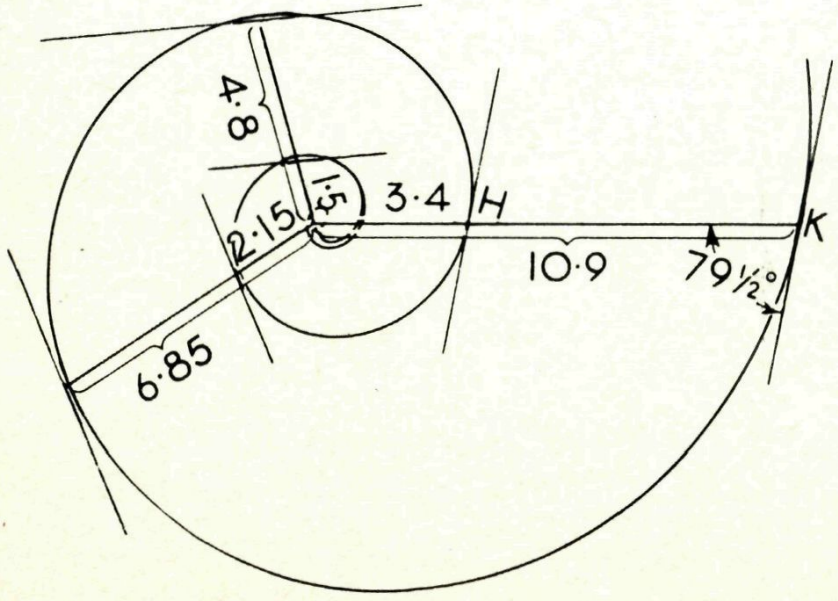


Fig. 19.

°°Spiralen op de bol en de Mercatorprojectie

Het ideaal van de oude zeevaarders is altijd geweest de kortste route te varen tussen de vertrekhaven en de plaats van bestemming. De kortste verbinding tussen twee punten op de aardbol is een deel van een zgn. grote cirkel, d.w.z. een cirkel met het middelpunt van de aarde als middelpunt. (De evenaar en de meridiaancirkels zijn grote cirkels, de breedtecirkels echter niet.)

Fig. 20.

Als we over een globe beschikken en de kortste weg tussen bijv. Lissabon en New York willen vinden, gaan we eenvoudig als volgt te werk: span een touwtje strak tussen beide plaatsen (fig. 20). We zien dan echter meteen iets, dat voor de stuurman erg hinderlijk is. Deze kortste verbindingslijn maakt voortdurend een andere hoek met de meridianen die hij snijdt. In dit geval begint de koers met 68° om te groeien tot 90°, ongeveer halverwege de reis, om daarna nog verder toe te nemen tot ongeveer 100°.

Voor we antwoord geven op de vraag: welk systeem volgde de stuurman om zoveel mogelijk de kortste weg tussen Lissabon en New York te varen, gaan we eerst eens na, waar het schip zou komen, als het steeds dezelfde koers zou aanhouden. We denken ons daarvoor even een aardbol die geheel met water bedekt is. Dan komt het schip uiteindelijk bij de Noordpool! Zijn baan is een spiraal, die overeenkomt met de logaritmische spiraal in het platte vlak (daar werden immers ook alle stralen onder dezelfde hoek gesneden). Zo'n bolspiraal noemt men een loxodroom*.

Escher heeft twee prenten gemaakt waarop loxodromen afgebeeld zijn: *Bolspiralen*, (1958), waarop 4 banden spiraalgewijs van de noord- naar de zuidpool lopen, en *Boloppervlak met vissen* (1958), waarop zeer geschematiseerde witte en zwarte vissen langs 8 loxodromen van de noord- naar de zuidpool zwemmen. Vlak bij de noordpool zijn ze nog microscopisch klein, dan groeien ze aan tot maximale grootte, als ze de evenaar passeren om daarna weer kleiner en kleiner te wor-

* Van de Griekse woorden: *loxos* = scheef, en *dromos* = loop.

Fig. 21. Bolspiralen.

den, naarmate ze de zuidpool naderen.
Is een loxodroom een logaritmische spiraal? We zullen dit eens nader bekijken. Op een halve bol is één loxodroom getekend. Je kijkt boven op de bol. We kunnen de vraag nu ook zo stellen: Als we deze loxodroom projecteren op het vlak, dat door de evenaar gaat, is deze projectie dan een logaritmische spiraal?

De projectie van een loxodroom op een plat vlak is geen logaritmische spiraal. Immers: als we een hoek op een plat vlak projecteren, hangt de grootte van de projectie van die hoek af van de stand van het vlak waarin de hoek ligt ten opzichte van het projectievlak. De projectie is even groot als de hoek zelf als beide vlakken evenwijdig zijn, en de projectie is zelfs 0°, als het vlak waarin de hoek ligt loodrecht op het projectievlak staat. Nu worden de meridianen op de bol door de loxodroom steeds onder dezelfde hoek gesneden, maar het vlak waarin deze hoek ligt staat bij de evenaar loodrecht op het projectievlak en aan de pool is dit vlak evenwijdig met het projectievlak. In de projectie worden de meridianen als rechte lijnen (als stralen vanuit de noordpool) afgebeeld en de spiraallijn snijdt deze stralen onder steeds groter wordende hoeken.

Dus is de projectie geen logaritmische spiraal.
De loxodroom is een figuur, die alleen maar op het boloppervlak bestaat; we zouden de relatie tussen loxodroom en logaritmische spiraal zo kunnen uitdrukken: de loxodroom is de logaritmische spiraal op het boloppervlak!
Een jaar voordat Escher *Bolspiralen* en *Boloppervlak met vissen* maakte, ontstond *Draaikolken* (fig. 23). Ogenschijnlijk heeft deze prent niets met loxodromen te maken en Escher zelf heeft de prent ook niet bedacht via het begrip loxodroom. Heel kleine rode vissen zwemmen al groeiende uit de bovenste poel naar de onderste. Tussen beide poelen bereiken ze hun maximale grootte om dan, kleiner wordend te verdwijnen in de onderste poel. De blauwe vissen zwemmen in tegengestelde richting.
De overeenkomst met *Boloppervlak met vissen* is opvallend. Het blijkt dan ook, dat we de hele figuur zo op een bol kunnen plakken, dat de bovenste poel samenvalt met de noordpool en de onderste met de zuidpool. Om je daarvan te overtuigen, kun je de prent uitknippen en de witte spiralen, die de ruggegraten van de vissen vormen (er blijken twee spiralen te zijn) zo ver mogelijk open te knippen en dan de figuur zo goed mogelijk te plakken op een bal met een middellijn die ongeveer de breedte van de prent heeft. Dat is nogal wat omslachtig. Je kunt ook omgekeerd te werk gaan en een sinaasappel zò schillen dat de hele schil van begin tot eind één 'brede loxodroom' vormt. Je kunt de schil dan in dezelfde S-vorm leggen als *Draaikolken* te zien geeft, zoals op de omslagfoto. *Draaikolken* is een afbeelding van een stel loxodromen op een plat vlak; elk punt van de bol komt overeen met een punt van de prent en omgekeerd. Een globe zouden we op dezelfde manier op een plat vlak kunnen afbeelden. De omslagfoto laat zien hoe deze wereldkaart eruit ziet.

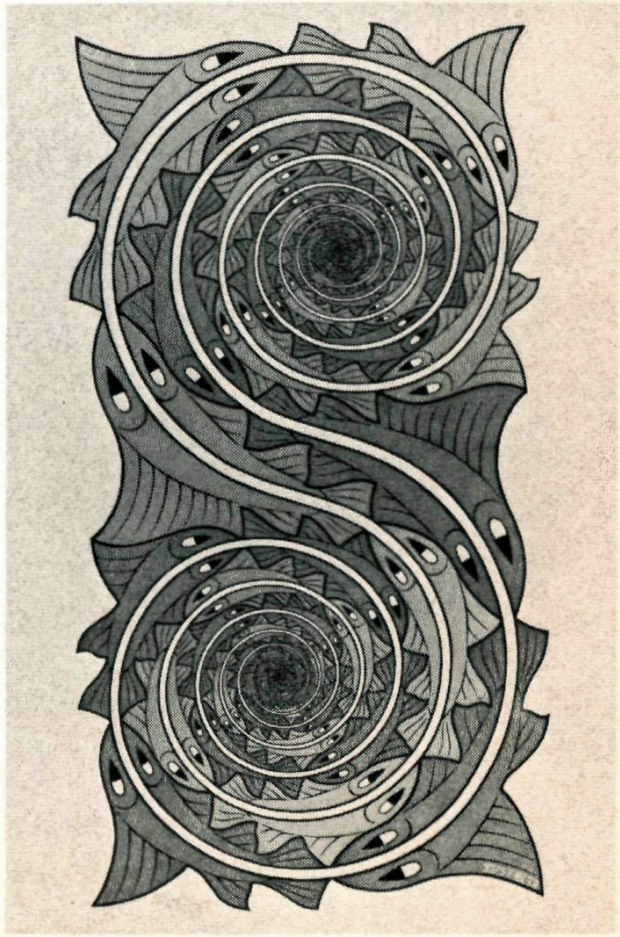


Fig. 23. Draaikolken.

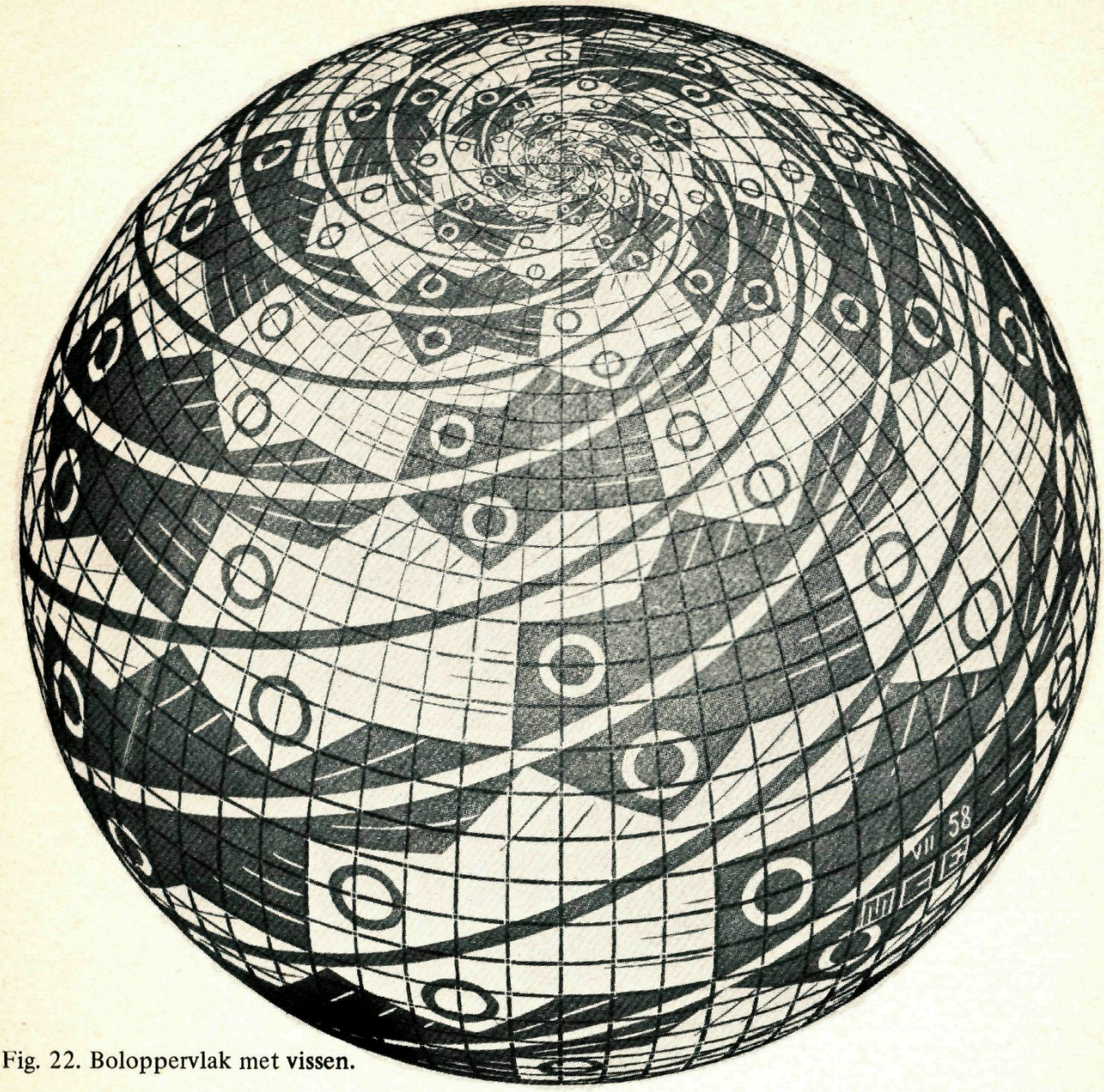


Fig. 22. Boloppervlak met vissen.

Als we terugkeren tot het navigatieprobleem, komen we vanzelf weer bij de loxodromen terecht èn op een heel bijzondere afbeelding van de wereldbol: de mercatorprojectie.

Goed navigeren betekent op de eerste plaats: dáár terecht komen waar men wil. De navigator wil de koers bepalen die het schip moet volgen om op de plaats van bestemming te komen, d.w.z. hij moet bepalen welke hoek de baan van het schip moet maken met de meridiaan. Bij niet al te verre reizen kan hij het beste het schip over de loxodroom laten varen die het vertrekpunt met de plaats van bestemming verbindt. Deze maakt steeds dezelfde hoek met de meridianen, zodat het schip steeds dezelfde koers kan behouden. Het vinden van deze koers zou een eenvoudige zaak zijn, als er kaarten bestonden waarop de loxodromen rechte lijnen zijn: de navigator verbindt dan op de kaart de beide havens met een rechte lijn en meet welke hoek deze lijn met de meridianen maakt.

Mercator, de beroemde Nederlandse kartograaf heeft in de 16-de eeuw zo'n kaart bedacht. Op het eerste gezicht ziet een wereldkaart naar de mercatorprojectie eruit, alsof alle punten van de aardbol van-

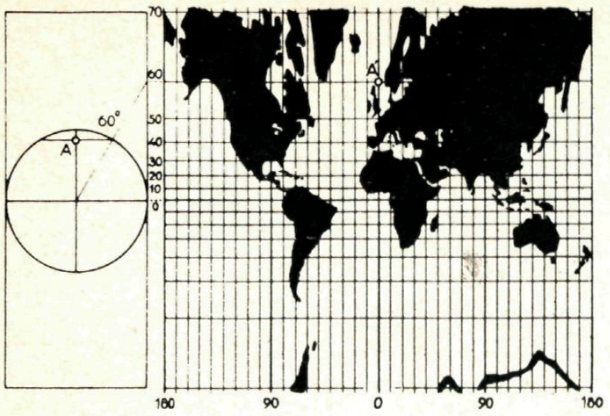


Fig. 24

uit het middelpunt van de bol geprojecteerd zijn op een cylindermantel (fig. 24), de meridianen en de breedtecirkels staan hier loodrecht op elkaar maar loxodromen zijn beslist geen rechte lijnen. Daarvoor moeten de afstanden tussen de breedtecirkels aan zeer bepaalde voorwaarden voldoen. Mercator was niet in staat het probleem geheel wiskundig op te lossen; de daarvoor nodige wiskunde werd pas een eeuw later ontwikkeld. Hij heeft de juiste afstanden gevonden door zorgvuldig passen en meten vanaf een globe (fig. 25).

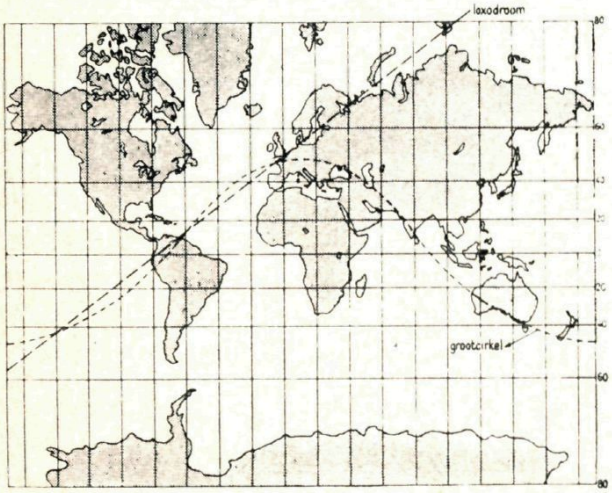
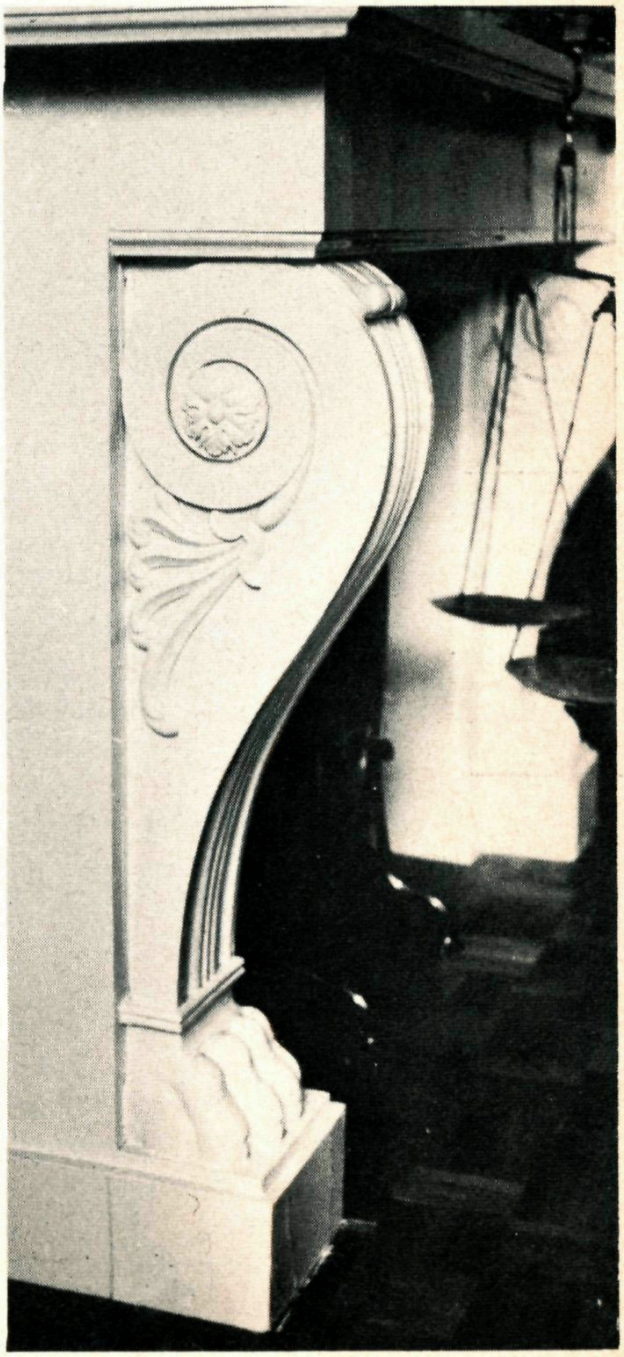
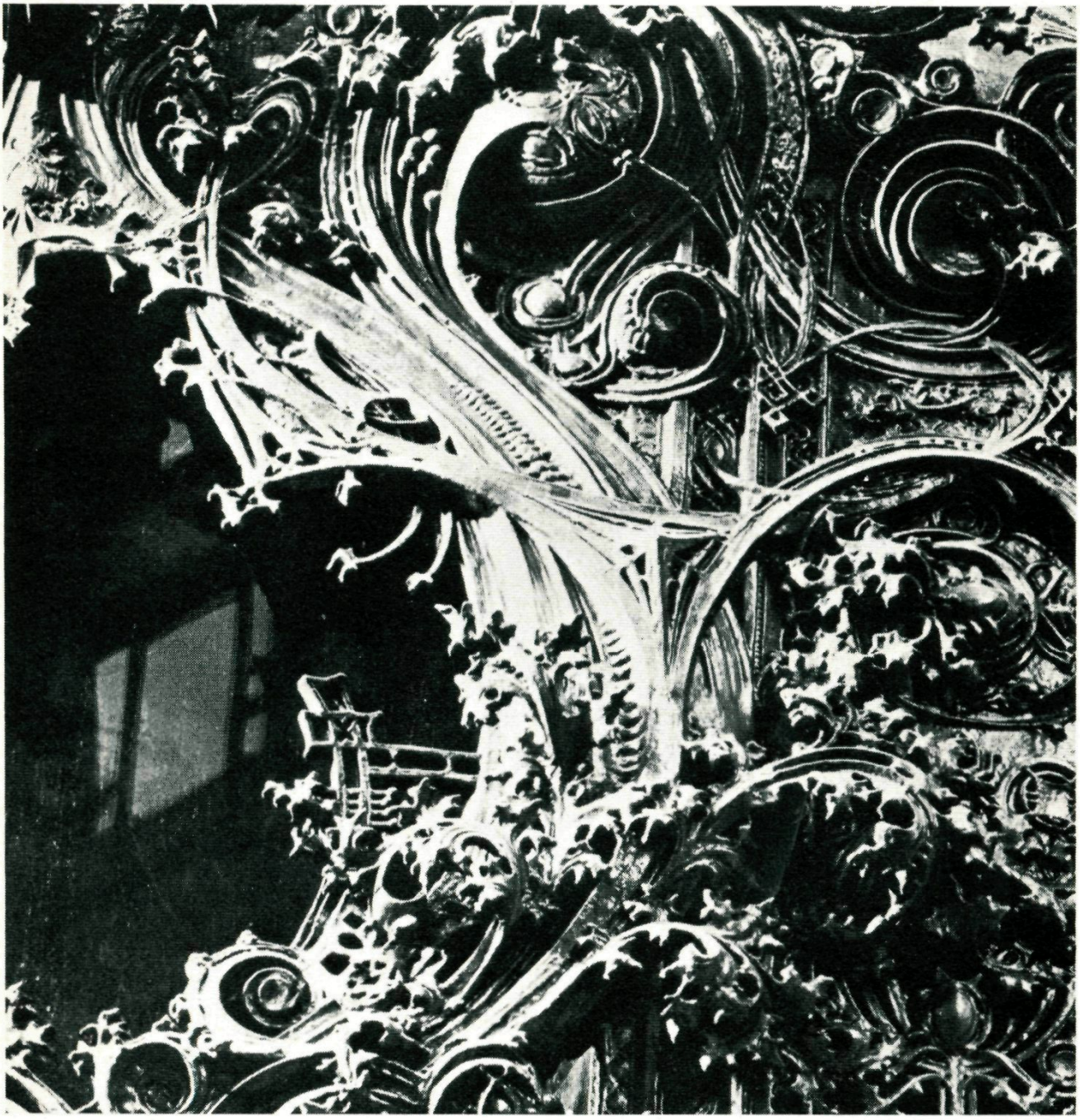


Fig. 25

Ook bij het varen van de kortste weg was de mercatorprojectie uitstekend te gebruiken. Eerst bepaalde men op de globe welke hoeken de grote cirkel, die beide plaatsen verbond ongeveer maakten met meridianen die 10° van elkaar lagen. Daarna werden deze hoeken op een kaart volgens de projectie van Mercator uitgezet. De baan van het schip werd dan op de kaart weergegeven door een gebroken lijn die de grote cirkel vrij goed benaderde. In feite voer het schip dan telkens op een gedeelte van een andere loxodroom.

Zijkant van een Biedermeyer schoorsteenmantel.





Overdadig spiraalornament van Louis Sullivan. (Chicago ca. 1900)

Inhoud:

De afwikkelingslijn van de cirkel
De spiraal van Archimedes
De spiraal van Archimedes en de trisectie van een hoek
De spiraal van Archimedes en de kwadratuur van de cirkel
De oppervlakte van de spiraal van Archimedes
De groeispiraal
Het grafschrift van een groot wiskundige
Metingen aan de Nautilusschelp
Spiralen op de bol en de Mercatorprojectie

PYTHAGORAS

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. Elsenaar, Harderwijk.
W. Kleijne, Heerenveen.
Ir. H. Mulder, Breda.
A. F. van Tooren, Leusden-C.
G. A. Vonk, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Bruno Ernst, Mùurhuysen 11, Amersfoort.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden. De oplossingen van denkertjes en prijsvragen naar: A. F. van Tooren, Calabrië 33, Leusden-C.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, *f* 5,– per jaargang.
Voor anderen *f* 7,50.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.
Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.