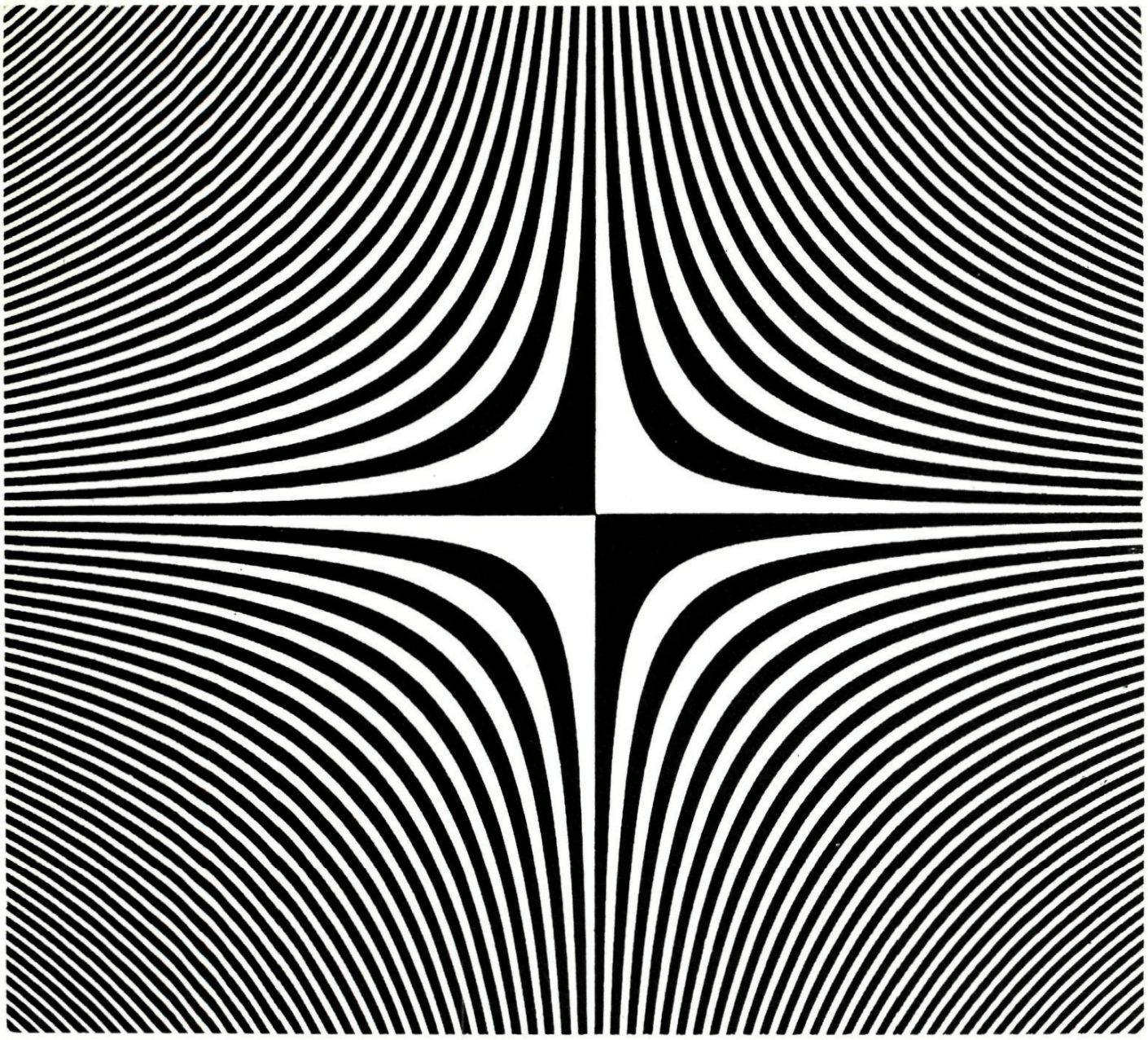
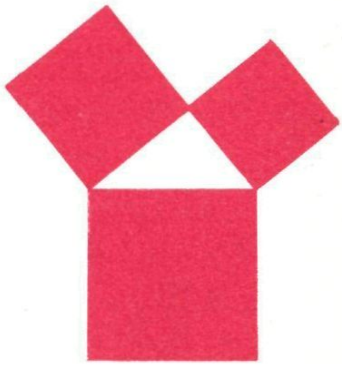


2
jaargang 15 / november 1975

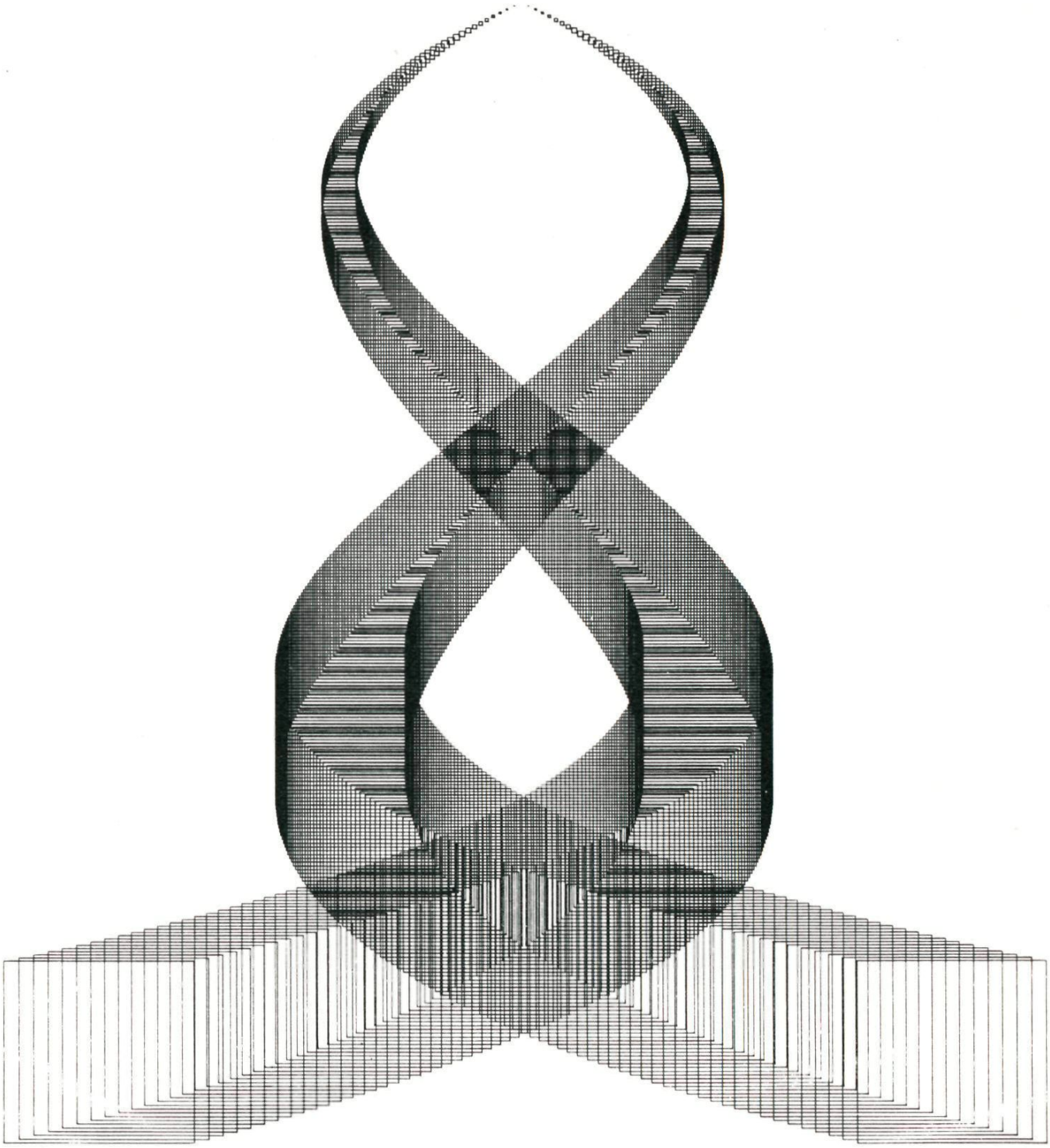
wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Deze figuur is getekend door een tekenmachine gestuurd door een computer. De opdracht was: teken vierkanten waarvan de zijden lineair toenemen, zo dat de middelpunten liggen op de kromme $y = x(x-1)\,(x-2)$. Je ziet waarschijnlijk zelf wel, dat de x-as hier verticaal loopt en dat óók het spiegelbeeld van de vierkantenreeks is getekend. (Ontwerp: Michel Bel).

BIJ DE AFBEELDING OP DE OMSLAG:
hyperbolen. De tussenruimten zijn afwisselend kleur en zwart. Gewoon mooi om naar te kijken. Je mag er ook bij nadenken. We geven enige suggesties:
Als op de x-as en de y-as centimeters zijn afgezet, zou je dan de vergelijkingen van deze hyperbolen kunnen vinden? Wat zou de vergelijking van het assenkruis zijn? Vreemde vraag? Hier dringt hij zich aan ons op, want we kunnen steeds meer hyperbolen in het open vlak rond de oorsprong tekenen.

°Exponentiële groei

Exponentiële groei – je kent die term zeker al als een stukje wiskunde dat de dagbladen heeft veroverd. Waar doet hij je aan denken? Ik wed, aan bevolkingsaanwas en voedselproblemen, aan lucht- en waterverontreiniging en natuurlijk aan de Club van Rome, om het meest actuele erbij te halen.

Bacteriën

Een bacterie op een voedingsbodem – 'Petrischaal' genaamd door wie bacteriën kweken – deelt zich, laten we zeggen, één keer per uur door celdeling in tweeën, in twee bacteriën die zich op dezelfde wijze en in hetzelfde tempo voortplanten. En zo gaat het door.

Er zijn

op uur 0 : 1 bacterie
1 : 2 bacteriën
2 : 2×2 = 4 bacteriën
3 : $2 \times 2 \times 2$ = 8 bacteriën
4 : $2 \times 2 \times 2 \times 2$ = 16 bacteriën.

Je begrijpt direct het nut van machten en exponenten: er zijn

op uur n : $2 \times 2 \times \ldots \times 2$ (n faktoren) = 2^n bacteriën.

Hoeveel is dit bij voorbeeld voor n = 80? Als je maar een rond antwoord wilt hebben, dus niet nauwkeurig, op één bacterie af, kun je het beste als volgt redeneren:

$2^5 = 32$,
$2^{10} = 2^5 \times 2^5 = 1024 \sim 1000 = 10^3$,
$2^{20} = 2^{10} \times 2^{10} \sim 10^3 \times 10^3 = 10^6$,
$2^{40} = 2^{20} \times 2^{20} \sim 10^6 \times 10^6 = 10^{12}$,
$2^{80} = 2^{40} \times 2^{40} \sim 10^{12} \times 10^{12} = 10^{24}$,

en dat is een één met 24 nullen.

Stel zo'n bacterie heeft een middellijn van een honderdste millimeter:

$100 \times 100 = 10\,000 = 10^4$ overdekken samen dan een vierkante millimeter,
$10^6 \times 10^4 = 10^{10}$ een vierkante meter,
$10^6 \times 10^{10} = 10^{16}$ een vierkante kilometer; voor 't geheel dat er na 80 uren door celdeling is ontstaan, heb je dus 10^8 vierkante kilometer nodig, een terrein van 10 000 km lang en 10 000 km breed, dus een flink part van de aardbol.

Natuurlijk is het al eerder spaak gelopen: toen de rand van de Petrischaal werd bereikt, na 24 uur, zo niet door allerlei omstandigheden veel eerder.

Maar in 't begin, met genoeg ruimte en voedsel voor allen, was er wel degelijk ongeremde 'exponentiële groei'.

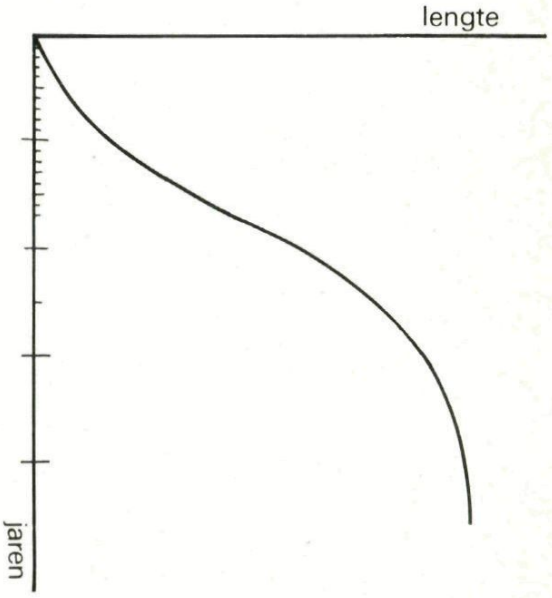
Waarom *exponentieel*? Kijk eens terug naar de formule met de n:

op uur n zijn er 2^n bacteriën.

Het aantal bacteriën in de groeiende bevolking hangt af van n en die staat in de *exponent*.

Er bestaan natuurlijk andere groeiwetten. In het natuurlijke groeiverloop van mensen en dieren bestaan er hele stukken van *lineaire* groei, d.w.z. waar de aanwas evenredig met de tijd is: na n dagen (of jaren) is de lengte of het gewicht

$a + bn$.



In de figuur hierboven kun je na de aanloop een periode van lineaire groei onderkennen, gekenmerkt door het rechtlijnig

verloop van de grafiek. Je ziet daar duidelijk het toenemen van de lengte met eenzelfde stuk in dezelfde tijd, terwijl na deze periode van lineaire groei de groei snel minder wordt en tenslotte tot stilstand komt.

Samengestelde interest

De tegenstelling van lineaire en exponentiële groei is vanouds bekend. Als je een kapitaal van *f* 100 hebt belegd tegen 5% jaarlijkse rente, maar de rente niet opnieuw belegt dan is het na

0 jaar: *f* 100
1 jaar: *f* 105
2 jaar: *f* 110
⋮
n jaar: *f* $100 + 5n$.

Het kapitaal groeit in *lineaire* afhankelijkheid van de tijd n.

Wie handig is, belegt echter zijn rente opnieuw (tenzij hij genoodzaakt is van die rente te leven). De *f* 105 na 1 jaar verloop dragen opnieuw 5% rente, die dus niet alleen door de 100 oorspronkelijke guldens, maar ook door de 5 nieuwe wordt gekweekt. Het lijkt een onbeduidend verschil, maar het telt aan.

Hoe berekenen we zoiets het handigste? Uit *f* 100 zijn na 1 jaar *f* 105 geworden, of – eenvoudiger – iedere gulden is met 1,05 vermenigvuldigd in een jaar tijds. En dit blijft zo: in een jaar tijds vermenigvuldigt een gulden zichzelf met 1,05. Het doet ons denken aan de groeiende bacteriënbevolking. Die deed het met een factor 2 in een uur. Het geld doet het langzamer, met een factor 1,05 in een jaar. Maar in principe is het hetzelfde. Na

0 jaar: *f* 1
1 jaar: *f* 1,05
2 jaar: *f* $1{,}05 \times 1{,}05 = 1{,}05^2$
⋮
n jaar: $(1{,}05)^n$.

Groei volgens samengestelde interest is dus ook exponentieel.

We krijgen een beter overzicht als we ons afvragen in welk tijdvak het oorspronkelijke kapitaal is verdubbeld. Dus, voor welke n is

$(1{,}05)^n = 2$?

Zo iets rekent men met logaritmen uit. Ik heb de uitkomsten hier neergezet voor verschillende rente-percentages.

rente	verdubbeling na ongeveer jaar
1%	70
2%	35
5%	24
4%	18
5%	14
10%	7

Ruw gezegd: Als je bij gewoon interest verdubbeling van het kapitaal in
d jaren
zou verwachten, is het bij samengestelde interest
0,7 d jaren.

Het een keer verdubbelen gaat met een factor 0,7 vlugger. (Maar let wel, dit klopt alleen voor 'kleine' waarden van interest, zoals in de tabel boven bijeengebracht.)

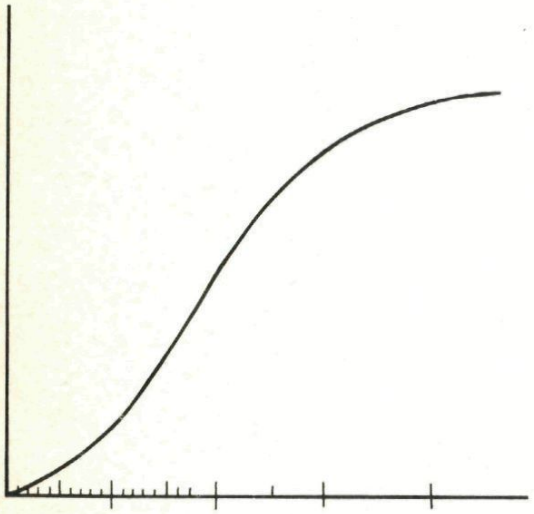
Tegen 5% is het kapitaal na
jaar 14 met 2 vermenigvuldigd
jaar 28 met 4 vermenigvuldigd
jaar 42 met 8 vermenigvuldigd.

Een gulden, in de tijd van Claudius Civilis tegen 5% samengestelde interest belegd, zou thans uitgegroeid zijn tot een bedrag groter dan de jaarlijkse Nederlandse rijksbegroting. Natuurlijk zijn er ook voor de exponentiële financiële groei grenzen afgepaald.

Afremming van de groei

Onbelemmerde groei is exponentieel. Dit was met de groei van de menselijke bevolking zo in 't verleden en het is nu nog zo. Alleen was vroeger het groeipercentage, voornamelijk tengevolge van ziekten, veel

kleiner dan nu. Van 1600 tot 1800 had de mensheid 200 jaar voor een verdubbeling nodig. In Zuid-Amerika is de groei thans per jaar 3%, en dit betekent verdubbeling in een kwarteeuw; in de rijke landen gaat het met 0,8% per jaar, hetgeen verdubbeling in 90 jaren betekent.
Het wereld-energieverbruik groeit met 4% per jaar – verdubbeling na 18 jaren. Maar alles kent een grens. Bij het exponentieel groeiende energieverbruik ligt die daar waar de voorraad op is. Zolang voorraden onbeperkt zijn, gaat het exponentieel. Maar met het plafond in zicht heerst een andere wet.
De exponentiële wet zegt dat de groei evenredig is met wat er al is. Maar volgens een verfijnd model komt er een groeiremming bij, omgekeerd evenredig met wat er nog te verteren valt. Het gevolg is een kromme, ook welbekend uit toepassingen van de wiskunde.



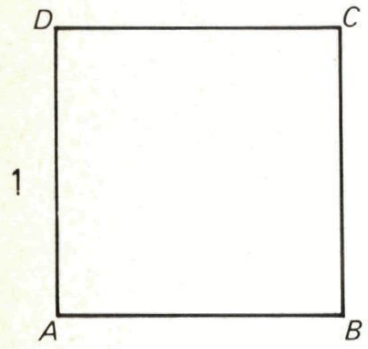
Natuurlijk zou de kromme, als er catastrofen komen, ook eens naar beneden kunnen gaan.

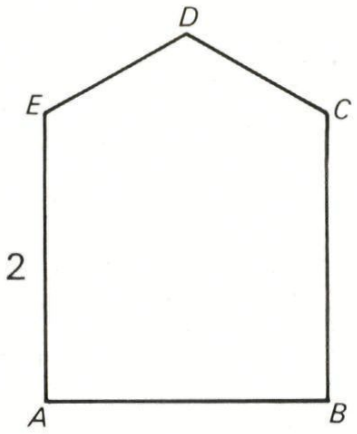
Exponentieel verval
Naast de exponentiële *groei* is er als tegenhanger, het exponentieel *verval.*
Van een radio-actieve stof vervalt per jaar een zekere kleine fractie, waarvoor straling wordt uitgezonden. De vervallende fractie is evenredig met wat er nog over is. Als het met de hoeveelheid m begint en van het aanwezige elk jaar één duizendste vervalt, is er na
0 jaar de hoeveelheid m
1 jaar de hoeveelheid $0{,}999\ m$
2 jaar de hoeveelheid $(0{,}999)^2\ m$
⋮
n jaar de hoeveelheid $(0{,}999)^n\ m$.

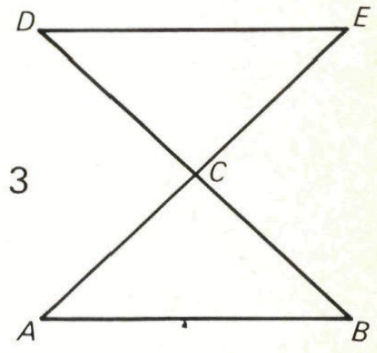
Zoals daarstraks de verdubbelingstijd, interesseert ons hier de *halveringstijd* of, zoals men het ook noemt, de halve-waardetijd. In 't onderhavige geval zou dit 700 jaren zijn. Radio-actieve stoffen hebben zeer uiteenlopende halveringstijden, van seconden tot miljoenen jaren. De radioactieve elementen gaan door verval in andere over, bijv. uranium in radium. In de uraniumertsen is de verhouding uranium tot radium ongeveer 10 miljoen tot 3. Het uranium vervalt dus $\frac{10}{3}$ miljoen keer zo langzaam als het radium. Inderdaad is de halveringstijd voor radium ongeveer 1500 jaar en voor uranium 5000 miljoen jaren.

°De pen niet van het papier

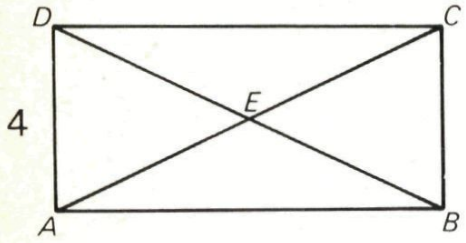
We kennen allemaal wel de opdracht een tekeningetje na of over te trekken zonder de pen van het papier te halen.
Voorbeelden waarbij dit lukt



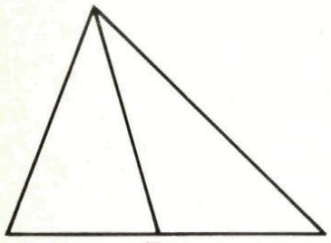


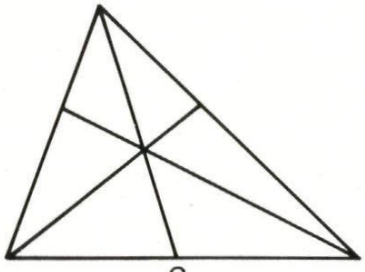


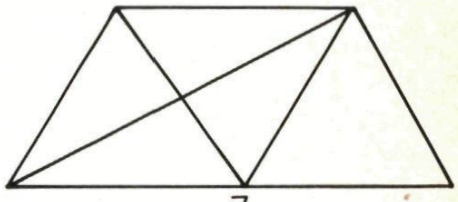
Er zijn ook tekeningen waarbij het niet lukt, zoals

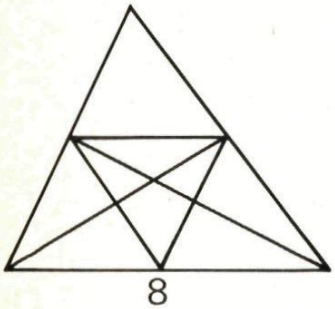


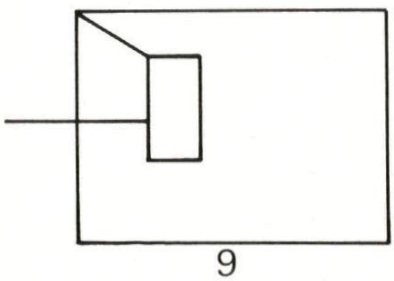
We zullen nu eens proberen te ontdekken waarom sommige tekeningen wel en waarom andere niet in één keer overgetrokken kunnen worden. Probeer eens welke van de volgende tekeningen in één trek getekend kunnen worden.

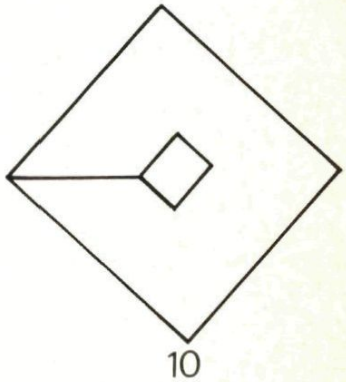


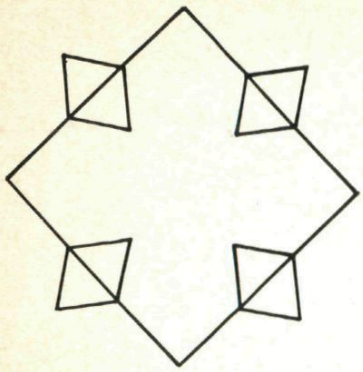




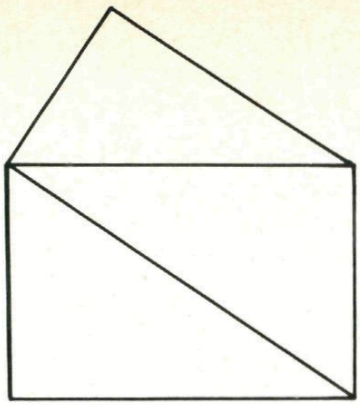






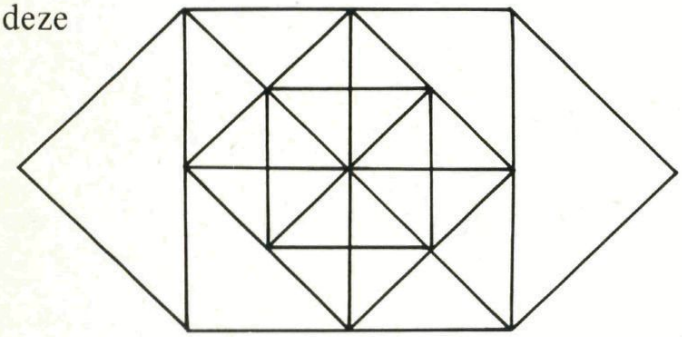


11



12

maar nu deze

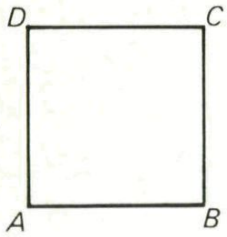


13

Je begrijpt, dat het wel eens lang kan duren voor je alle mogelijkheden uitgeprobeerd hebt. Als je nu vooraf wilt weten of je een tekening in één trek kunt tekenen is er dan een eenvoudig maniertje om dit snel te ontdekken?

Nu dat is er inderdaad. Om het te vinden spreken we eerst het volgende af. Als in een punt van een tekening precies één lijntje aankomt, zeggen we dat dat punt de orde 1 heeft. Als er precies 2 lijntjes aankomen dan heeft dat punt de orde 2. Bij 3 lijntjes de orde 3. enz.

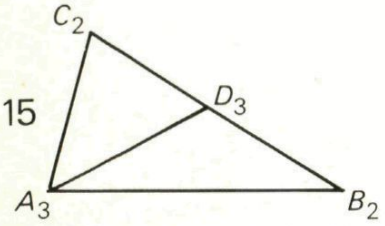
Dus b.v.



14

punten	A	B	C	D
orde	2	2	2	2

We kunnen de ordes ook bij de punten in de figuur plaatsen zoals



15

Doe dit nu eens bij alle voorgaande figuren.
Bekijk de gevonden ordes van de punten van deze tekeningen nu eens goed. Wat merk je dan op?
Stel jezelf hierbij de volgende vragen:
1. Hoeveel punten zijn er waarvan de orde een even getal is?
2. Hoeveel punten hebben een oneven orde?
3. Was deze figuur in één lijn te trekken?

Maak nu eens het volgende schemaatje:
(en vergelijk de antwoorden met elkaar)

antwoord op vraag fig. no.	1	2	3
.			
.			
.			
.			
.			
.			
14	4	0	ja
15	2	2	ja

Wat valt je op?
Je krijgt hieruit het vermoeden dat een tekening uitsluitend in 1 keer over te trekken is als er geen of 2 punten met oneven orde in voorkomen.
Dit vermoeden is inderdaad juist.
Verklaring:
Als je bij het overtrekken een bepaald punt 3 keer *passeert* (en niet meer keren) dan is de orde van dat punt 6. En als je het precies 5 keer passeert is de orde 10. In het algemeen is de orde van een punt dat je een aantal keren *passeert* een even getal. De orde kan oneven zijn in een begin- of in een eindpunt.

We gaan het ons nu nog een beetje moeilijker maken:
Probeer de tekeningen over te trekken zó dat je weer op je beginpunt terugkeert. Probeer voor deze opdracht ook eens een regel te ontdekken. Denk hierbij aan wat we hiervoor hebben vastgesteld over de orde in een begin- of eindpunt. Als je alle punten moet passeren (één of meer keer) en bovendien in het beginpunt moet uitkomen, wat kun je dan zeggen over de ordes van de punten?

°°Wat vijven en zessen rond zeven

Fig. 1.

In de rekenkunde kennen we verschillende kenmerken van deelbaarheid. Ze worden veelal beperkt tot de getallen: 2, 4, 8, . . . 5, 25, 125, . . . 3, 9 en 11. Samenstellingen zijn ook mogelijk; zo is b.v. een getal deelbaar door 6, wanneer het tegelijk voldoet aan de kenmerken van deelbaarheid voor 2 en voor 3. Nu is het je misschien wel eens opgevallen, dat het getal *zeven* bij de kenmerken van deelbaarheid niet aan de orde komt. Het ligt dan natuurlijk wel voor de hand dat je jezelf afvraagt: 'Zou er voor het getal *zeven* geen bijzonder kenmerk van deelbaarheid bestaan?' Om op deze vraag een antwoord te vinden zullen we eerst de kenmerken van deelbaarheid voor 9 en 11 afleiden om daarna op overeenkomstige manier 7 in de molen te stoppen.

Wanneer we een getal willen voorstellen dat gevormd wordt door een willekeurig aantal cijfers, dan zouden we elk van de cijfers kunnen voorstellen door een letter; b.v. edcba. Je begrijpt wel dat dit aanleiding zou kunnen geven tot verwarring met de algebraïsche notatie, waarbij *edcba* betekent: $e \times d \times c \times b \times a$.

Om nu het verschil aan te geven, wordt boven een 'rekenkundig' getal een horizontale teksthaak getekend; dus $\overline{edcba}$. Door het aanbrengen van dit dakje heeft het getal de volgende betekenis gekregen:

$\overline{edcba} = a + 10b + 100c + 1000d + 10000e.$

Met dit soort analyse van getallen zullen we ons nu verder bezig gaan houden om het antwoord te vinden op de eerder gestelde vraag. Hierbij zul je wel moeten bedenken dat we vaak getallen moeten voorstellen met meer dan vijf cijfers maar dat doet aan de methode niets toe of af.

Deelbaar door 9?

Eerst bekijken we het kenmerk van deelbaarheid voor 9. We redeneren nu als volgt:

We hebben het getal $\overline{edcba}$.

Wat betreft het getal 9, kunnen we het volgende noteren:

$10 =$ 9-vd $+ 1$	en	$100 =$ 9-vd $+ 1$
$20 =$ 9-vd $+ 2$		$200 =$ 9-vd $+ 2$
$n \times 10 =$ 9-vd $+ n$		$n \times 100 =$ 9-vd $+ n$

1, 10, 100, enz. zijn de termen van de schaal in het tiendelig stelsel die we op deze wijze zolang moeten onderzoeken tot er een herhaling optreedt van de vorm die achter het eerste = - teken staat. Bij de 9 zouden we na 100 dus eigenlijk niet verder behoeven te gaan. We zijn echter uitgegaan van een getal van vijf cijfers en zullen dat nu als volgt ontleden:

$$
\begin{array}{rl}
a = & a \\
10b = & \text{9-vd} + b \quad (10b = b(\text{9-vd} + 1)) \\
100c = & \text{9-vd} + c \\
1000d = & \text{9-vd} + d \\
+\ 10000e = & \text{9-vd} + e \quad + \\
\hline
\overline{edcba} = & \text{9-vd} + (a + b + c + d + e)
\end{array}
$$

In de hier verkregen gelijkheid staat nu te lezen, dat elk willekeurig getal kan worden geschreven als een 9-voud + de som der cijfers waaruit dat getal is samengesteld. Wanneer de som der cijfers nu ook weer een 9-vd is, dan is het getal de som van twee 9-vouden en dus in zijn geheel eveneens een 9-vd. Als kenmerk van deelbaarheid voor 9 noteren we de regel:
Een getal is deelbaar door 9, wanneer de som der cijfers van dat getal deelbaar is door 9.
Omdat een 9-vd ook meteen een 3-vd is mogen we in bovenstaande regel voor de 9 ook een 3 invullen, zodat daarmee in één moeite het kenmerk van deelbaarheid voor 3 is afgeleid.

Deelbaar door 11?
Om het kenmerk van deelbaarheid voor 11 te vinden gaan we op dezelfde manier te werk, maar de zaak ligt daar toch iets anders. We gaan even na welke relatie er bestaat tussen de termen van de schaal van het tientallig stelsel en het naastbijgelegen 11-voud.

We zien dan het volgende:

$$
\begin{array}{rlll}
10\ (10^1) = & 11 - 1 & = \text{11-vd} - 1 \\
100\ (10^2) = & 99 + 1 & = \text{11-vd} + 1 \\
1000\ (10^3) = & 990 + 10 = \text{11-vd} + 10 & = \text{11-vd} - 1 \\
10000\ (10^4) = & 9999 + 1 & = \text{11-vd} + 1 \\
\text{enz.} & &
\end{array}
$$

We zien hier dus, dat de even machten van 10 altijd een 11-voud + 1 zijn en de oneven machten een 11-voud – 1.
Is nu: 1000 = 11-vd – 1, dan is: 3000 = 11-vd – 3 en n x 1000 = 11-vd – n
Zo gaan we het getal $\overline{edcba}$ weer uitelkaar halen:

$$
\begin{array}{rl}
a = & a \\
10b = & \text{11-vd} - b \\
100c = & \text{11-vd} + c \\
1000d = & \text{11-vd} - d \\
+\ 10000e = & \text{11-vd} + e \quad + \\
\hline
\overline{edcba} = & \text{11-vd} + (a + c + e) - (b + d)
\end{array}
$$

Om de plaats van de verschillende cijfers te kunnen aanduiden geven we ze een rangcijfer gerekend vanaf het getal der eenheden. Zo is: a het eerste cijfer, b het tweede cijfer enz., a, c, e, ... zijn de cijfers op de oneven plaatsen; b, c, ... de cijfers op de even plaatsen.

In de gevonden betrekking lezen we dus, dat elk getal een 11-voud is vermeerderd met de som der cijfers op de oneven plaatsen en verminderd met de som der cijfers op de even plaatsen. Blijkt nu dat de staart achter 11-vd weer een 11-voud (of nul) is, dan is het getal zelf deelbaar door 11, zodat we als regel kunnen vastleggen:
Een getal is deelbaar door 11, wanneer de som der cijfers op de oneven plaatsen, verminderd met de som der cijfers op de even plaatsen, door 11 deelbaar of nul is.
In de praktijk maakt het geen verschil of je even en oneven van voren of van achteren neemt, immers zouden we alleen maar de tegengestelde waarde van het officieel te vinden getal krijgen en dat doet aan het kenmerk als zodanig niets af. Ga dat maar eens na!

Deelbaar door 7?
Ziezo, nu heb je enige ervaring in de aanpak van getallen om een kenmerk van deelbaarheid op te sporen. Dan gaan we nu eens kijken hoe dat zit met het getal 7.
We zullen uitgaan van een getal van acht cijfers, wat we voorstellen door de vorm:
$\overline{hgfedcba}$

Ongekend?

Allereerst moeten we nagaan hoe de veelvouden van de termen van de schaal van het tientallig stelsel in relatie staan tot het getal 7:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
(1)a & = & & & & 1a \\
10 & = & 7\text{-vd} + 3 \Rightarrow & 10b & = & b(7\text{-vd} + 3) = 7\text{-vd} + 3b \\
100 & = & 7\text{-vd} + 2 \Rightarrow & 100c & = & c(7\text{-vd} + 2) = 7\text{-vd} + 2c \\
1000 & = & 7\text{-vd} + 6 \Rightarrow & 1000d & = & d(7\text{-vd} + 6) = 7\text{-vd} + 6d \\
10000 & = & 7\text{-vd} + 4 \Rightarrow & 10000e & = & e(7\text{-vd} + 4) = 7\text{-vd} + 4e \\
100000 & = & 7\text{-vd} + 5 \Rightarrow & 100000f & = & f(7\text{-vd} + 5) = 7\text{-vd} + 5f \\
1000000 & = & 7\text{-vd} + 1 \Rightarrow & 1000000g & = & g(7\text{-vd} + 1) = 7\text{-vd} + 1g \\
10000000 & = & 7\text{-vd} + 3 \Rightarrow & 10000000h & = & h(7\text{-vd} + 3) = 7\text{-vd} + 3h
\end{array}
$$

$$
+ \quad \overline{\qquad} \quad +
$$

$$
\overline{hgfedcba} = 7\text{-vd} + (a + 3b + 2c + 6d + 4e + 5f + g + 3h)
$$

Bij nog grotere getallen zul je steeds een herhaling zien van de coëfficiënten
1, 3, 2, 6, 4, 5
voor de cijfers op de 1e, 2e, 3e, 4e, 5e, 6e, 7e .... plaats; maar nu *wel* van achteraf gerekend. De vorm tussen haakjes heeft zoveel termen als het getal cijfers heeft. Om na te gaan of een getal deelbaar is door 7, moeten we een optelsommetje maken:
$1 \times a + 3 \times b + 2 \times c + 6 \times d + 4 \times e + 5 \times f + g + 3 \times h$ .... enz..
Is de uitkomst hiervan een 7-voud of nul dan is het getal zelf deelbaar door 7. Een moeilijkheid is wellicht de juiste volgorde van de coëfficiënten te onthouden. Om dat wat

eenvoudiger te maken kun je gebruik maken van het volgende ezelsbruggetje:

U die de zevens wilt zeven
1 3 2 6 4 5

Het aantal letters van elk woord in dat zinnetje is precies wat je nodig hebt.
Degenen onder jullie die het bezwaarlijk vinden om op deze wijze zes cijfers in volgorde te onthouden die zullen waarschijnlijk in stilte denken: "k Zal je'. Wanneer je dat inderdaad
1 2 3
doet, dan heb je daarmee het ezelsbruggetje ontdekt voor een kleine variatie op bovenstaande regel. Voor het tweede drietal coëfficiënten, 6, 4, en 5 mogen we andere nemen, immers:

7-vd + 6 = 7-vd – 1
7-vd + 4 = 7-vd – 3 en
7-vd + 5 = 7-vd – 2,

Gekenmerkt !

zodat we net zo goed mogen schrijven voor de grote vorm die we vonden:

$\overline{hgfedcba} = 7\text{-vd} + a + 3b + 2c - d - 3e - 2f + g + 3h$ of
$7\text{-vd} + (a + 3b + 2c) - (d + 3e + 2f) + (g + 3h)$

Hierin herhaalt dus steeds de groep 1, 3 en 2, zoals die in de uitroep "k Zal je!' haar volgorde vindt. Hierbij moet je wel bedenken dat de volgorde van de cijfers wel zó moet worden aangehouden, maar de volgorde van de plussen en minnen vóór de haakjes mogen wel worden verwisseld. Probeer dat maar eens te beredeneren.
Je ziet dus dat er inderdaad een kenmerk van deelbaarheid is voor het getal zeven. Het feit dat je in de meeste gevallen gauwer even kunt delen door zeven is er waarschijnlijk oorzaak van dat dit kenmerk niet zo bekend is als de andere.
Uit de laatst gevonden variant volgt nog, dat een getal gevormd door twee gelijke getallen van drie cijfers (waarbij de nul ook als cijfer mag gelden) achterelkaar geplaatst altijd deelbaar is door 7, 345345, 836836, maar ook 072072 en 001001 of liever 1001, maar dat volgde ook al uit de analyse van de term van de schaal:
1000 = 7-vd + 6, zodat het daarop volgende getal een 7-voud + 7 dus een veelvoud van 7 moest zijn.

Denkertjes

1. Neem een stevig stuk papier
teken hierop de omtrek van één figuur die voldoet aan de volgende eisen:
de figuur kan uitgeknipt worden en blijft dan een stevig geheel;
een rechte lijn kan de figuur in 4 volkomen gelijke delen verdelen.
Of meer practisch gezegd:
één rechte knip van de schaar is nu voldoende om 4 losse gelijke stukken te krijgen.

°Biljarten met één bal .....

Geen bal aan? Dat is nog te bezien.
Een spel staat en valt met de spelregels. Bij normaal biljarten werken we met 3 ballen en 4 banden. We stoten daarbij tegen een bal en proberen rechtstreeks of via banden de beide andere ballen te raken.

We verzinnen nu een nieuw wiskundig biljartspel met slechts één bal, die we puntvormig stellen. We moeten nu zo tegen die ene bal aanstoten dat deze na treffen van alle 4 de banden . . . tegen zichzelf aanbotst of anders gezegd precies op zijn uitgangspunt terugkeert. We stoten daarbij zonder effect te gebruiken.
In fig. 1 zie je zo een 10-bandenstoot, waarbij de bal terugkeert en er aldus een gesloten figuur wordt beschreven.
Als een wiskundige zoiets ziet, komen er een heleboel vragen bij hem op:
Hoe moet je mikken om zoiets klaar te krijgen?
Hoe is de baan op papier te construeren?
is het aantal stoten tegen de banden te berekenen?
Bestaat er altijd een oplossing?
Direct zijn er al 2 zaken op te merken. Vooreerst: bij stoten zonder effect, zal een bal zo tegen een band terugstuiten dat de beide hoeken gelijk worden (fig. 2). De baan na weerkaatsing kan door

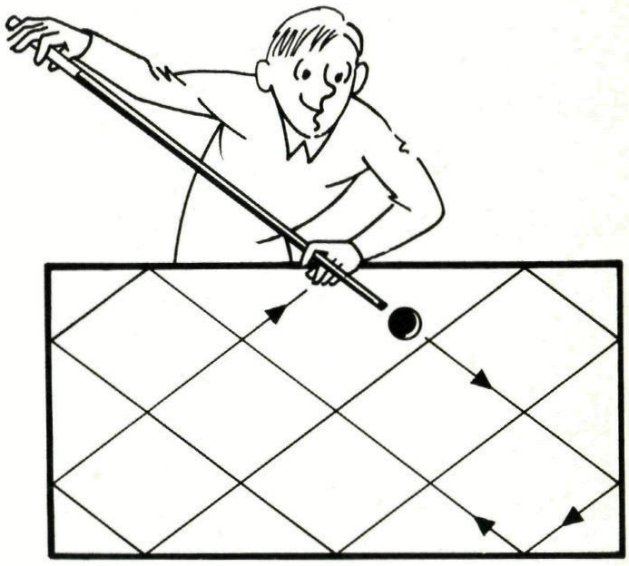


Fig. 1. Een 10 banden-stoot.

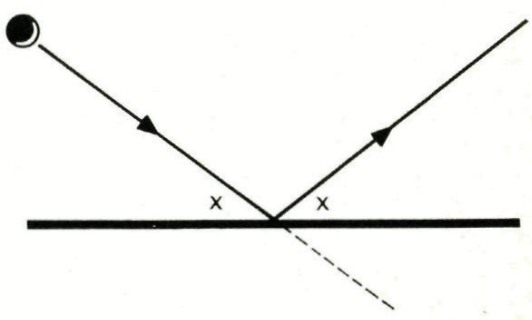


Fig. 2. De hoeken bij de botsing zijn gelijk.

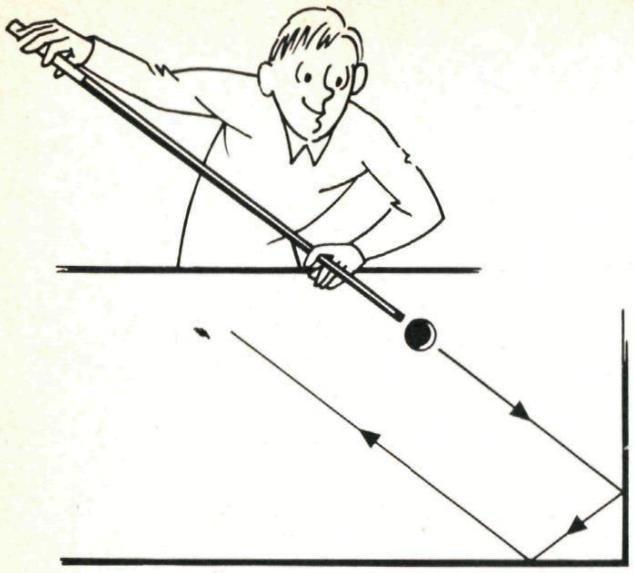


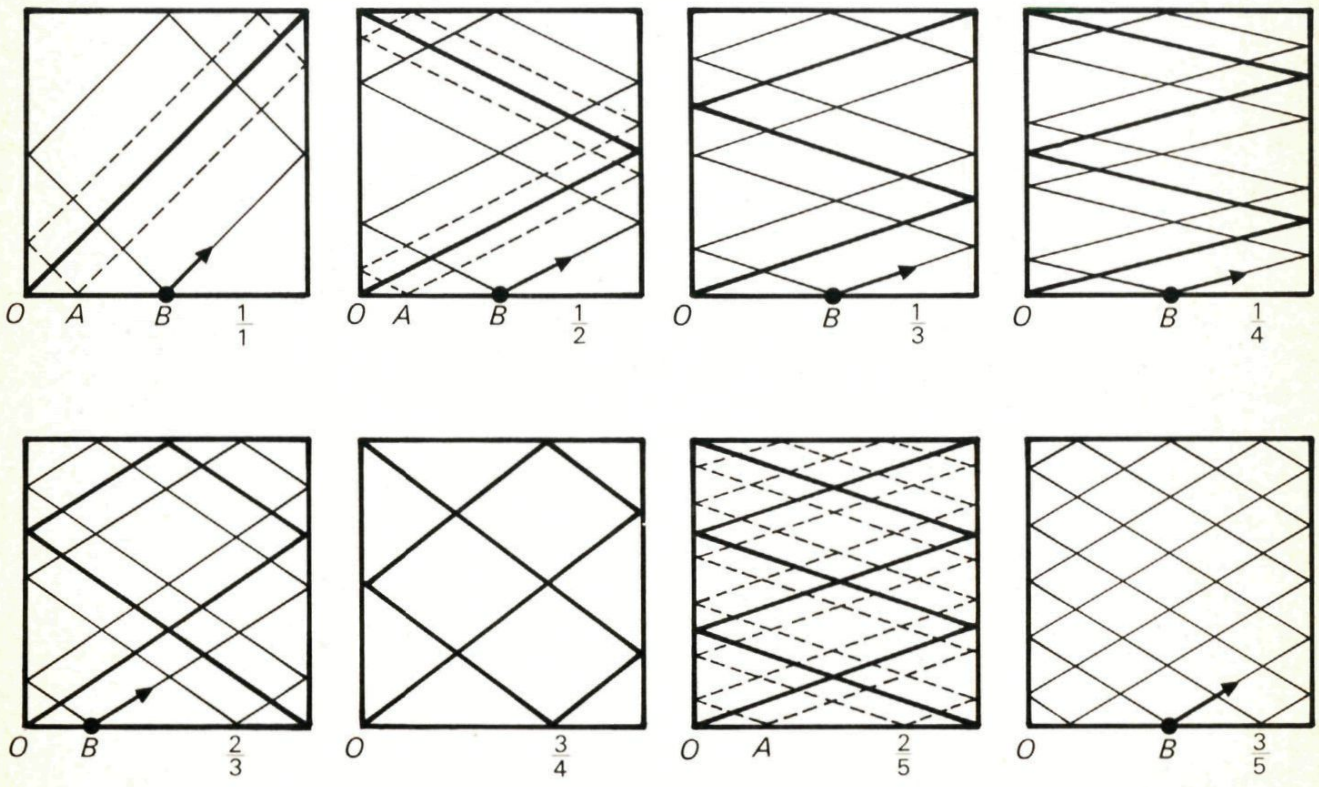
Fig. 3. De bal komt uit de hoek evenwijdig terug.

middel van spiegeling gemakkelijk geconstrueerd worden.
Vervolgens: als je de bal de hoek van het biljart instuurt, komt hij terug in een richting evenwijdig aan de eerste richting (fig. 3). Je kunt dat gemakkelijk zelf bewijzen met de wet van gelijkheid van hoeken. Hieruit volgt tevens dat een bal die precies in de hoek terecht komt, langs dezelfde weg terugkomt.

Een vierkant biljart

Maar nu gaat het moeilijker worden. Als een probleem te ingewikkeld lijkt, wordt het tijd vereenvoudigingen aan te brengen.
Een cafébiljart heeft afmetingen 210 bij 105 cm; een tafelbiljart bijv. 140 bij 70. Elk biljart is een rechthoek met zijden die zich verhouden als 2 : 1.
We gaan ons spel nu eerst analyseren bij een vierkant biljart.
Je ziet in fig. 4 dat als je vanuit het midden van een zijde (punt B) de bal onder 45° stoot er een gesloten vierkant beschreven wordt.
Twee zaken lijken belangrijk voor het welslagen van de stoot:
Vanuit welk punt mik je?
Onder welke hoek wordt gestoten?
Als je vanuit punt A in dezelfde richting stoot, heb je ook succes. De figuur wordt nu een rechthoek. Zelfs als je vanuit 0 onder 45° stoot, lukt het nog. De bal beschrijft dan tweemaal de diagonaal. Van de 4 lijnstukken zijn er nu 2 stuks nul lang geworden. Uit dit alles blijkt dat de

Fig. 4. Gesloten banen bij verschillende richtingen.



keuze van het vertrekpunt weinig belangrijk is. Wel de richting waaronder de bal wordt weggestoten!

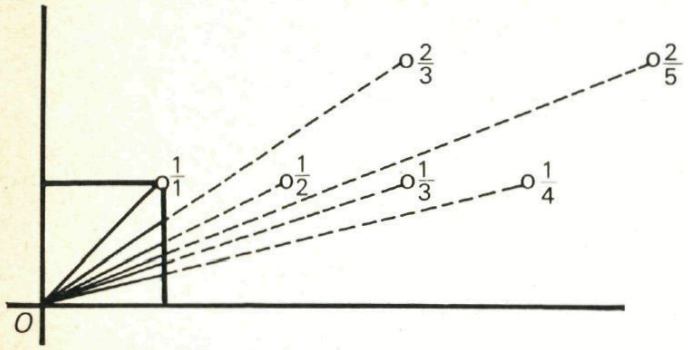


Fig. 5. Constructie van de richtingen.

We gaan nu de richting variëren. We geven de richting aan met de zogenaamde richtingscoëfficiënt, zijnde de tangens van de hellingshoek. In fig. 5 is het vierkante biljart getekend, waarbij de bal vanuit 0 in diverse richtingen wordt weggeschoten. Elke richting wordt gekarakteriseerd door een niet-vereenvoudigbare breuk, zoals: $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ ...

Bij elke van die stoten ontstaat een gesloten figuur.

Zo wordt in de tweede tekening van fig. 4 gestoten vanuit 0 onder een hoek met richtingscoëfficiënt $\frac{1}{2}$. Als je vertrekt vanuit het midden van de zijde (punt B), ontstaat een 8-vormige figuur. Vertrek je vanuit A onder dezelfde hoek dan verschijnt een variatie. Telkens is de figuur gesloten. Opmerkelijk is dat er telkens 3 typen figuren ontstaan: een dichte figuur 0 (in dit geval V-vormig), een open figuur B (hier 8-vormig) en verder tussenvormen A. Bij de verhouding $\frac{1}{1}$, waren dit: lijnstuk, vierkant en rechthoek.

Bij de verhouding $\frac{1}{3}$, begint het met een S-vormige figuur als gesloten type enz.

Zo behoort bij elke soort een zeker verhoudingsgetal.

In fig. 4 zijn toestanden uitgebeeld met verhoudingsgetallen: $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$. Zo kun je eindeloos doorgaan.

°° *Wat valt er verder nog te ontdekken?*

Als je een beetje speurzin hebt zul je ontdekken dat uit de karakteristieke breuk direct het aantal trefpunten op de zijkanten van het biljart en het totaal aantal lijnstukken, waaruit de figuur is opgebouwd, is af te lezen.

Neem bijvoorbeeld het geval met richtingscoëfficiënt $\frac{2}{3}$.

Op de band in de x-richting treden 2 botsingen op en op die in de y-richting 3 botsingen. Totaal zijn er 10 botsingen en bestaat de figuur dus uit 10 lijnstukken. De figuur die in 0 start geldt als een limietstand: sommige lijnstukken vallen nu samen, andere zijn tot 0 gereduceerd. In het algemeen kun je stellen dat bij stoten onder een hoek met richtingscoëfficiënt m/n er een gesloten figuur beschreven wordt, nadat de bal $2\ (m+n)$ keer tegen een band heeft gebotst. De figuur bestaat dan tevens uit $2\ (m+n)$ lijnstukken.

Verder valt het op dat bij de dichte figuur de eindpunten soms op de einden van een diagonaal, soms op de einden van een zijde liggen. Ook daarvoor is een regel te vinden: als het verschil van n en m even is, dan liggen de eindpunten op een diagonaal; is dit verschil oneven, dan op een zijde. Controleer deze stelling zelf maar in fig. 4. Misschien heb je nu de indruk dat de figuur altijd wel gesloten is en de bal dus op zijn uitgangspunt terugkeert. Dit alles wel in de veronderstelling dat hij geen bewegingsenergie verliest door wrijving of onelastisch botsen. Toch is die indruk niet juist. Stel de zaak maar eens anders. Wat gebeurt er bijv. als je de bal stoot onder een hoek van 16°? In de tabel vind je nu voor de richtingscoëfficiënt:

$\text{tg } 16^\circ = 0{,}287 = 287/1000$.

De bal zal dan volgens de eerder ontwikkelde theorie totaal $2(287 + 1000)$ ofwel 2574 keer tegen een band botsen alvorens de figuur rond is. De figuur zal dan wel knap ingewikkeld geworden zijn. Hij bestaat dan immers uit 2574 lijnstukken.

Het hele vierkant is dan vrijwel volgeschreven. Maar nu moet je wel bedenken dat tg $16^\circ = 0{,}287$ nog slechts een benadering is. In werkelijkheid zijn er immers oneindig veel decimalen. Dan snap je de rest ook wel. Als de figuur ooit gesloten zou worden, zou deze ook oneindig veel zijden moeten krijgen. Je kunt dan ook beter zeggen: bij een stoothoek 16° komt de bal niet meer op zijn uitgangspunt terug.

Het rechthoekige biljart

Keren we nu weer terug naar de 10-bandenstoot op het rechthoekige biljart van fig. 1.

Deze figuur is dezelfde als die van fig. 4 met verhouding $\frac{2}{3}$, en wel het open type. Door ten opzichte van de x-as een lijnvermenigvuldiging toe te passen met een factor 2, en de rechthoek dan nog 90° te draaien, ontstaat fig. 1.

Denkertjes

2. Is er een gesloten figuur mogelijk bij een stoothoek van 30°?

°Scherpzinnige speurders gevraagd

Hoe gaat het vaak bij huiswerk of een repetitie? Wel, zo: hier zijn de vraagstukken, los ze op, bewijs ze. Je moet vrijwel altijd naar de antwoorden zoeken. Laten we het nu eens omkeren: hier zijn de antwoorden, stel zelf de opgaven samen. Dit is een boeiende bezigheid, waarbij de beginneling in de wiskunde het winnen kan van de gevorderde.

Het is wel nodig, dat je enkele spelregels in acht neemt. Die zijn voor deze serie:

1. Uitsluitend worden gebruikt de getallen uit figuur 1.
   Deze moeten in iedere opgave één keer en niet meer dan één keer gebruikt worden.

Fig. 1.

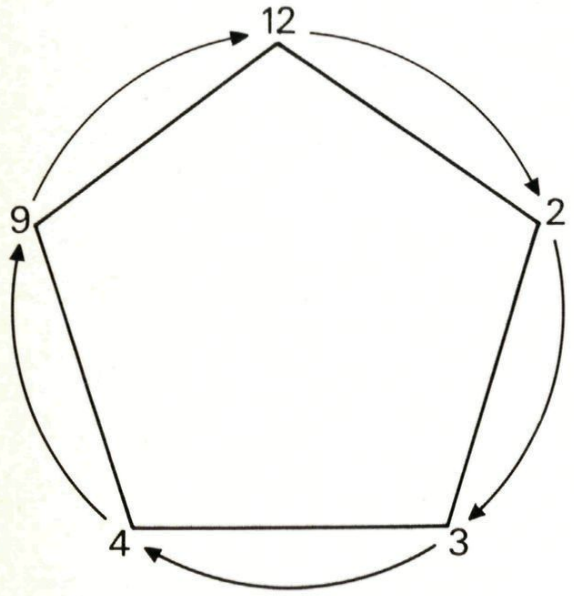


Fig. 2.

$-2 \times 3 + 4 - 9 + 12 =$	1	= 13
	= 2	= 14
	= 3	= 15
	= 4	= 16
	= 5	= 17
	= 6	= 18
	= 7	= 19
	= 8	= 20
	= 9	= 21
	= 10	= 22
	= 11	= 23
	= 12	= 24

2. De in de rechthoeken van figuur 2 geplaatste getallen zijn uitkomsten van de opgaven. Gekozen mag worden uit de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen. De opgave is: maak figuur 2 af!
3. Haakjes zijn toegestaan.
4. De volgorde van figuur 1 is verplicht. Bijvoorbeeld bij 2 als begingetal ontstaat de volgorde 2, 3, 4, 9, 12.
   Een opgave zou kunnen zijn:
   $-2 \times 3 + 4 - 9 + 12 = 1$
   of ook:
   $2 - [\,3 : (4 \times 9)] \times 12 = 1$
   Wie begint met 9 is gebonden aan de volgorde 9, 12, 2, 3, 4 en kan eureka roepen bij de vondst
   $(9 - 12) \times 2 + 3 + 4 = 1$

Zo ogenschijnlijk is alles heel, heel eenvoudig. Te eenvoudig? Schijn bedriegt echter. Weliswaar zijn de bewerkingen elementair en misschien ontdek je al gauw enkele passende opgaven, maar hier en daar krijg je zeker een harde noot te kraken. Zelfs voor fijne speurneuzen zitten er wel één of meer uurtjes gezellig puzzelen in. Veel genoegen met de omkering van dit alledag wiskundewerk.

'Oplossingen' staan achter in dit nummer.

°°°Slinky; meten en rekenen

Meten en rekenen

Slinky is een intelligent stuk speelgoed, overgekomen uit de Verenigde Staten en nog steeds stijgend in populariteit. Het is een vreemde lange veer met veel windingen, vervaardigd van plat bandstaal (0,6 mm).

Slinky is een echte kunstenmaker; hij kan in zijn eentje de trap aflopen; langs een helling van ongeveer 1 : 4 kan hij bij voldoende wrijving omlaagbuitelen. Je kunt de windingen achter elkaar uit de ene hand in de andere laten lopen, zoals je water hevelt van een hoog niveau naar een lager niveau.

We laten de veer nu eens gewoon uithangen in verticale richting (fig. 1). Het lijkt een spannende vraag hoe hij er dan bijhangt.

Bij veerproeven op school is het gebruikelijk een veer van onderen te belasten en het gewicht van de veer zelf te verwaarlozen. Bij de slinky hangen we er juist niets onder aan en daardoor is de vervorming die we waarnemen enkel een gevolg van het eigen gewicht van de windingen. Je zou slinky kunnen opvatten als een serieschakeling van een groot aantal afzonderlijke veren, in dit geval de afzonderlijke windingen of ringen. Hoe hoger je komt des te meer wordt zo'n elementaire veer uitgerekt, als gevolg van een groter gewicht van de windingen die eronder hangen. Onze kernvraag is nu:

welke is de wetmatigheid in de onderlinge

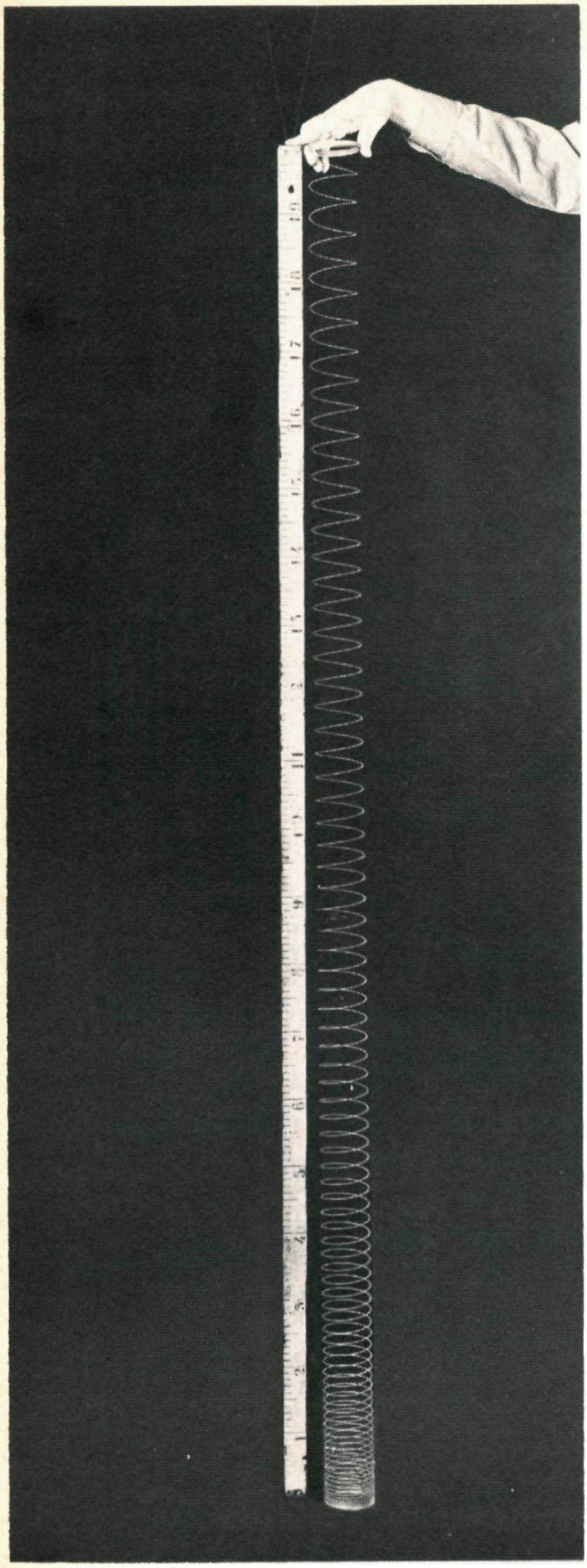


Fig. 1. Uitgehangen veer (Schaal 1 : 10).

afstanden? Het is wel vrij voor de hand liggend dat de afstanden naar boven toe steeds groter worden, maar hoeveel?
In plaats van verder te fantaseren kunnen we eerst beter gaan meten.
de windingen hebben een diameter 7 cm totaal zijn er 100 windingen (fig. 2)

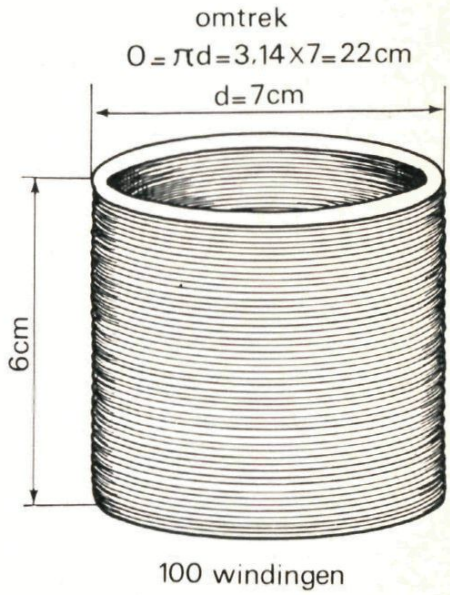


Fig. 2. Slinky in rust.

Hieruit volgt:
de omtrek van één winding
$O = \pi d = 3{,}14 \times 7 = 22$ cm
de totale draadlengte is
100×22 cm = 2200 cm.
Als je wilt kun je zelf de meting mee volgen met behulp van de foto van de uitgehangen veer (fig. 1). Daartoe is naast de veer een lat van 2 meter gehangen, waarop je de standen van de verschillende ringen kunt aflezen. Zorg dat je niet scheef afleest.
Je zou nu telkens de afstand kunnen bepalen tussen 2 ringen. Maar dat geeft vooral bij kleinere afstanden te grote meetfouten. In plaats daarvan is het beter de positie te bepalen van een winding ten opzichte van een zeker nulpunt. Wij nemen daarvoor het begin van de onderste ring (fig. 3). Het meest praktisch lijkt metingen te verrichten telkens 5 ringen verder. Wij hebben daarvoor telkens na 5 ringen een klein strookje plakband aangebracht. Zo kun je preciezer meten. De

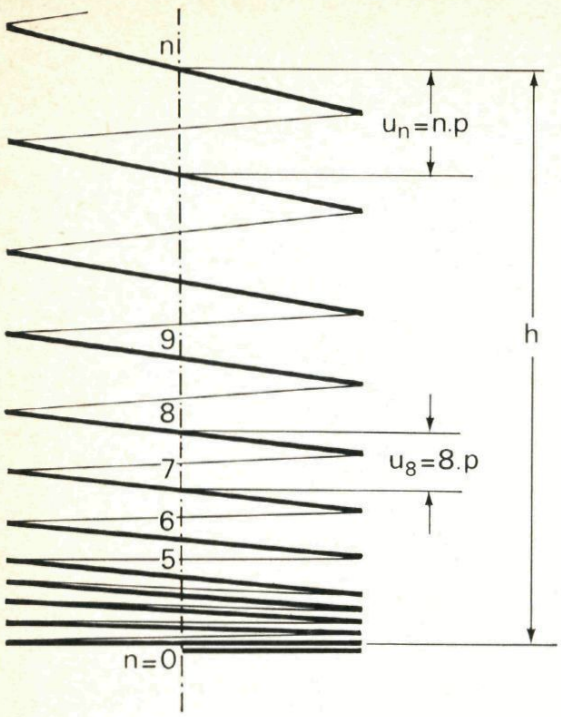


Fig. 3. Tussen de windingen nemen de afstanden toe.

diverse hoogten werden vervolgens op de meetlat van beneden naar boven afgelezen.

In fig. 4 zijn de gemeten waarden in een tabel en een grafiek aangegeven. Horizontaal staat het rangnummer van de betreffende winding (n) en verticaal de hoogte (h) in cm, gemeten vanaf het onderste punt.

De grafiek is duidelijk niet recht. Dat zou wel bij een 'gewone veer' het geval geweest zijn. Daar veronderstellen we immers dat alle windingen onderling gelijke afstanden hebben.

Hoe zou hier de relatie zijn?

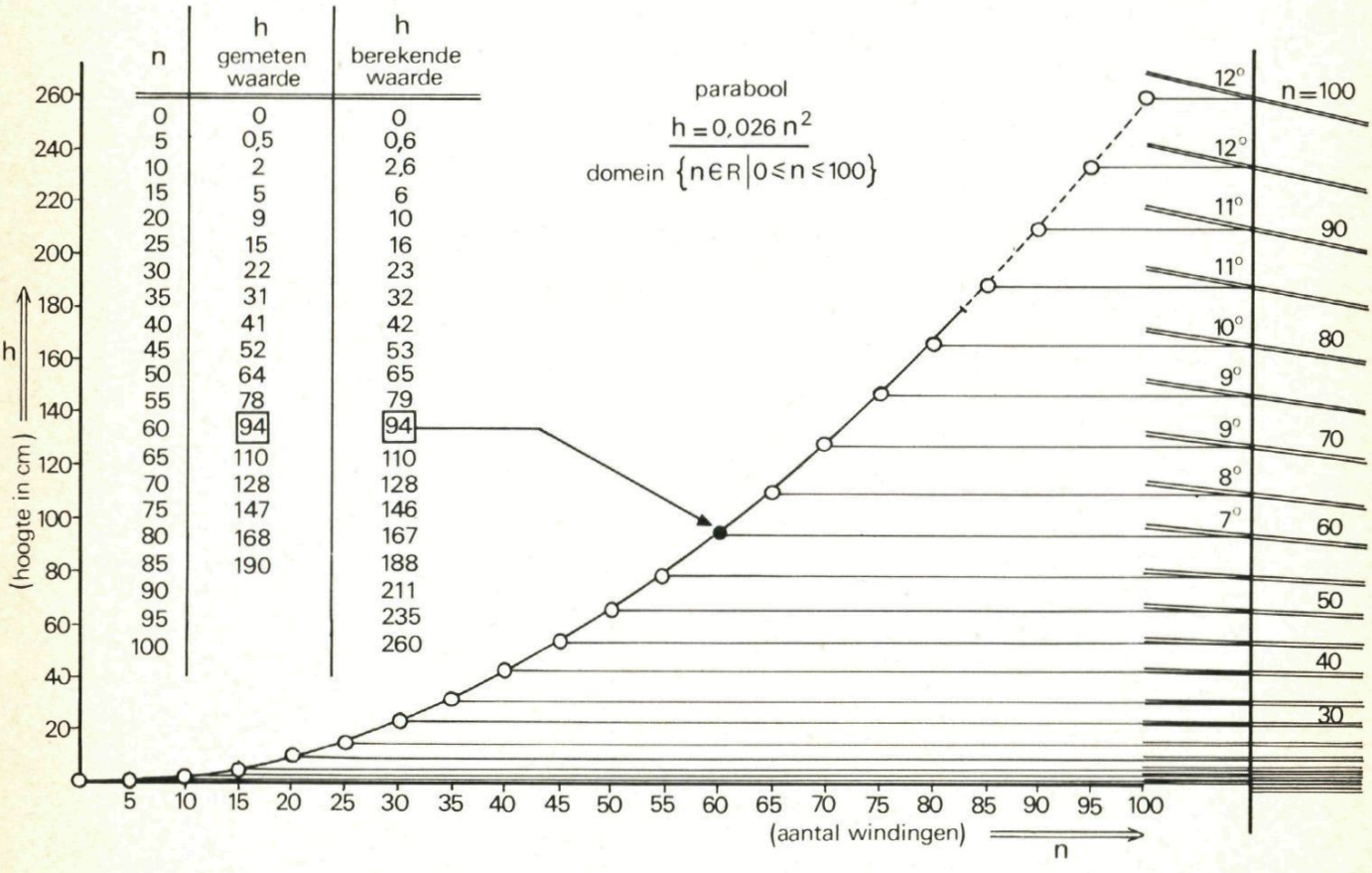
De grafiek gaat in ieder geval door de oorsprong. De verzameling meetpunten lijkt wel ....een parabool met misschien de h-as als symmetrie-as. Een dergelijke parabool is eigenlijk al bepaald als we nog slechts één punt geven. Laten we eens dat gokje wagen. Voor dat punt kiezen we het meetpunt met coördinaten $n = 60$ en $h = 94$.

De algemene paraboolformule luidt $h = a \cdot n^2$, waarin we a nog nader moeten bepalen. Vullen we de gegeven waarden in dan vinden we:

$94 = a \cdot 60^2$ dus $a = \frac{94}{3600} = 0{,}026$

Fig. 4. Tabel en grafiek van de metingen.

n	h gemeten waarde	h berekende waarde
0	0	0
5	0,5	0,6
10	2	2,6
15	5	6
20	9	10
25	15	16
30	22	23
35	31	32
40	41	42
45	52	53
50	64	65
55	78	79
60	94	94
65	110	110
70	128	128
75	147	146
80	168	167
85	190	188
90		211
95		235
100		260



Als er dus een parabool door de meetpunten zou gaan, zou deze moeten luiden:
$h = 0{,}026\, n^2$
We gaan deze parabool nader uittekenen. Daartoe worden telkens voor $n = 5$, $n = 10$, $n = 15$, $n = 20$,..... $n = 99$, $n = 100$ de betreffende waarden voor h berekend en als punten uitgezet. Als je berekende en gemeten waarden met elkaar vergelijkt zie je dat het verschil beslist gering is.
Alleen bij $n = 0$ en $n = 60$ is de relatieve fout natuurlijk exact gelijk aan nul. Vooral bij kleine waarden van n is de fout betrekkelijk groot.
We besluiten dat $h = a \cdot n^2$ inderdaad de *SLINKY-formule* is.

Afleiding van een formule

Zouden we deze relatie ook theoretisch kunnen bewijzen?
We zullen een poging wagen.
Aanvankelijk lagen alle windingen tegen elkaar aan (fig. 2). Elke winding is op te vatten als een elementaire veer, waarvan aanvankelijk de lengte en de uittrekking nul waren. Als de totale veer uithangt, vertoont elke ring een uitrekking, die volgens de wet van Hooke, evenredig is met het gewicht van alle eronder hangende windingen. Laten we stellen dat de uitzakking van de windingen dus evenredig met het rangnummer n oploopt en wel van 0 tot de waarde np (fig. 3). Zo heeft de 8-ste winding een uittrekking $8p$ enz.
De gemiddelde uitrekking voor de eerste n windingen is zodoende $\frac{1}{2}$ (0 + np) = $\frac{1}{2}$ np.
De hoogte van de n-de winding volgt dus uit:
$h_n = \frac{1}{2}\, np \cdot n = \frac{1}{2}\, pn^2$
Stel hierin $\frac{1}{2}p = a$ en we hebben de SLINKY-formule.
Het is hierbij beslist niet noodzakelijk voor n een geheel getal te kiezen; je kunt zelf wel nagaan dat n net zo goed $2\frac{1}{2}$ of 70,3 zou kunnen zijn.

°°i

In het eerste artikel is het getal van Euler e in verband met *groeien* naar voren gekomen. We gaan nu eens kijken naar een getal, dat eveneens van Euler (1707–1783) zijn schrijfwijze ontvangen heeft, nl. het getal i.

Het is in de geschiedenis van de wiskunde al verscheidene keren voorgekomen, dat er nieuwe getallensoorten bedacht werden. We kunnen wel zeggen, dat dit gebeurde om vergelijkingen, die tot dan toe geen wortels hadden, toch te kunnen oplossen. Voor het oplossen van vergelijkingen als $x + 7 = 2$ zijn de negatieve getallen bedacht, voor vergelijkingen als $3x = 5$ de breuken, voor vergelijkingen als $x^2 = 3$ de irrationale getallen. Maar geen van deze getallen kan als wortel dienen van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$. Al in 1572 verscheen er een algebraboek (geschreven door een zekere Bombelli), waarin getallen werden gebruikt, die als wortels van een vergelijking als deze zouden kunnen optreden. Men noemde ze 'imaginaire getallen' en sprak daarmee uit, dat ze toch eigenlijk onmogelijk waren, want het Latijnse woord 'imaginarius' betekent 'slechts in schijn bestaande'.
De bedenkers moesten eens geweten hebben, welk een grote rol deze getallen tegenwoordig spelen, niet alleen in de wiskunde, maar bijvoorbeeld ook in de elek-

tronica. (Omdat in de elektronica de letter i al gebruikt wordt voor het aanduiden van de stroomsterkte, worden daar de imaginaire getallen meestal geschreven met behulp van de letter j)

De wortels van de vergelijking $x^2 - 1 = 0$ zijn +1 en −1, dus de positieve en negatieve eenheid. Men heeft nu als wortels van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ ingevoerd de getallen +i en −i die men dan wel de positieve en negatieve imaginaire eenheid noemt. Nu is het gemakkelijk genoeg om even af te spreken, dat in het vervolg een getal i zal bestaan zo, dat $i^2 = -1$. Wanneer er geen regels bestaan, die zeggen hoe men met zo'n nieuw getal kan rekenen, dan heeft men er nog niets aan. Het is niet de bedoeling van dit artikel na te gaan op welke manier de rekenregels voor de imaginaire getallen zijn opgesteld. Slechts op enkele bijzonderheden willen we de aandacht vestigen.
Eerst de machten van i: Volgens de regels, die voor het rekenen met dit getal zijn opgesteld, vinden we

$i^1 = i,$
$i^2 = -1,$
$i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i,$
$i^4 = i^3 \times i = -i \times i = -i^2 = +1,$

Nu is weer $i^5 = i,$
$i^6 = -1,$
$i^7 = -i,$
$i^8 = 1,$ enz.

Dus in het algemeen: Voor elk natuurlijk getal k is

$$i^{4k} = 1$$
$$i^{4k+1} = i$$
$$i^{4k+2} = -1$$
$$i^{4k+3} = -i$$

Deze formules zijn ook juist voor $k = 0$ en voor elke negatieve gehele waarde van k, hetgeen de lezer zelf wel kan constateren. De getallen 1, i, −1 en −i vormen dus een bijzonder viertal, nl. een verzameling van vier elementen, die gesloten is ten opzichte van het vermenigvuldigen. Dat wil dus zeggen, dat het produkt van elk willekeurig tweetal elementen van deze verzameling weer een lid van de verzameling is. Hier is de vermenigvuldigtabel:

×	1	i	−1	−i
1	1	i	−1	−i
i	i	−1	−i	1
−1	−1	−i	1	i
−i	−i	1	i	−1

Niet alleen is deze verzameling gesloten ten opzichte van het vermenigvuldigen, maar deze operatie bezit bovendien de volgende eigenschappen:

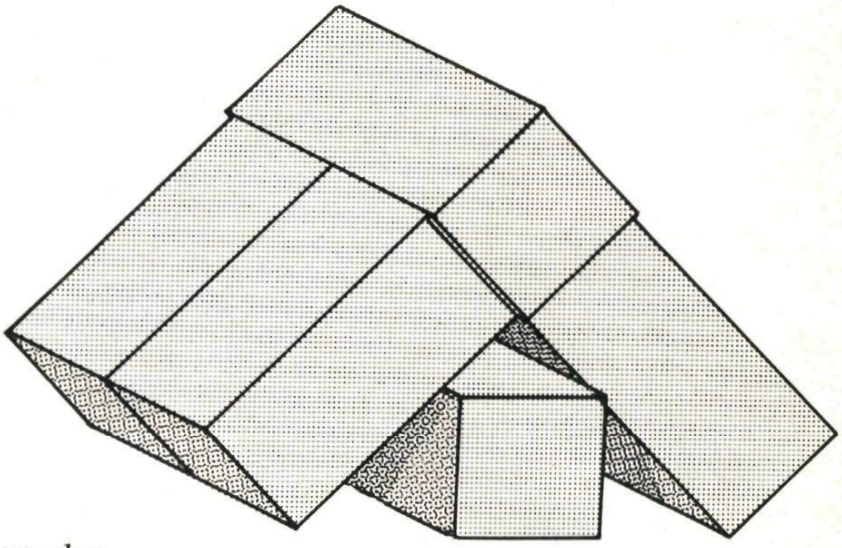
1. de vermenigvuldiging is associatief: als a, b en c elementen zijn van de verzameling, dan is $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$, bijv. $i \times (-i \times 1) = i \times -i = 1$.
   en $(i \times -i) \times 1 = 1 \times 1 = 1$.
2. er is een eenheidselement, nl. het getal 1, in deze verzameling.
3. bij elk der elementen behoort een inverse, d.w.z. bij elk der elementen behoort er een, die met de eerste vermenigvuldigd 1 oplevert. De inverse van 1 is 1, van i is −i, van −1 is −1 en van −i is i.

Wegens het bezitten van deze eigenschappen is de verzameling een *groep*. Deze groep is in dit geval zelfs commutatief, dat wil zeggen dat voor elk tweetal elementen a en b daarvan geldt $a \times b = b \times a$. We kunnen dit vergelijken met rotaties van een vierkant om zijn middelpunt. Stellen we het draaien over 0° voor door I (Identieke afbeelding), over 90° door R_1, over 180° door R_2 en over 270° door R_3, dan kunnen we voor het na elkaar uitvoeren van twee van die afbeeldingen de volgende tabel opstellen:

	I	R_1	R_2	R_3
I	I	R_1	R_2	R_3
R_1	R_1	R_2	R_3	I
R_2	R_2	R_3	I	R_1
R_3	R_3	I	R_1	R_2

Vergelijk deze tabel nu eens met de vermenigvuldigtabel van de getallen 1, i, −1 en −i, dan zie je, dat ze er precies gelijk uitzien. Let maar eens op de plaatsen van de 1 en de I of de i en de R^1. Het is één van de belangrijkste ontdekkingen van de wiskunde van de laatste tijd, dat er gelijke patronen zijn voor talrijke bewerkingen. De studie van deze gelijke patronen heeft aanleiding gegeven tot de invoering van het begrip *isomorfie* in de wiskunde. De groep gevormd door de verzameling der getallen 1, i, −1 en −i en de operatie vermenigvuldigen is isomorf met de groep der draaiingen I, R_1, R_2, R_3 en het na elkaar uitvoeren daarvan.

Denkertje



3. *Strobalen stapelen.*

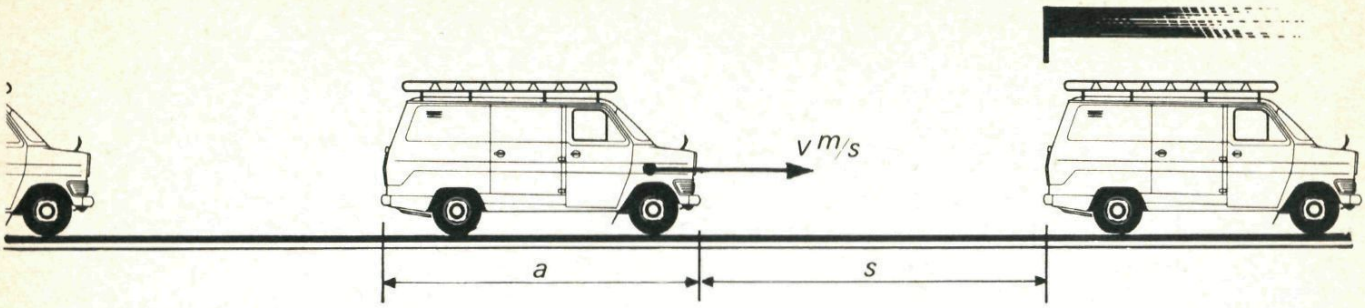
Een boer heeft zijn strobalen op het veld in aantallen van 6 achtergelaten om het stro nog wat verder te laten drogen. De balen hebben de vorm van een blok met één vierkante doorsnede.
vraag:

a. hoe moet zich de derde ribbe van het pak stro verhouden tot de beide andere om te zorgen dat de stapel aan de voorkant precies sluit?
b. hoeveel % steken de beide dwarsliggende pakken dan aan voor- en achterkant uit?

°°Aansluiten en doorrijden, maar .... niet te snel!

Een half uur geleden is er een belangrijke voetbalwedstrijd geëindigd in het Feijenoordstadion te Rotterdam. Een bijna onafgebroken stoet auto's trekt door de Maastunnel. De taak van de verkeerspolitie is nu om een vlotte doorstroming op gang te houden. Hoe moet dat? Het antwoord lijkt eenvoudig: hoe sneller we rijden, des te vlugger is de chaos voorbij. Is dat zo? Er moet toch ook een zekere afstand tussen de wagens blijven. Houd remafstand is de leus. Maar voor een auto die sneller rijdt, wordt ook de remweg groter.

Fig. 1. Autofile.



De natuurkunde leert dat de remweg stijgt met het kwadraat van de snelheid. De politie hanteert voor de remweg van een auto de formule:
$s = \frac{1}{8} v^2$ waarbij v de snelheid in m/s
Hierbij wordt verondersteld dat er geremd wordt met de minimaal verplichte remvertraging van ongeveer 4 m/s^2. De remweg mag dus niet langer worden in noodgevallen dan de bovenstaande formule aangeeft.
Dit is dan tevens de formule voor de minimale afstand tussen 2 auto's.
Bij 20 km/h wordt dit dan ongeveer 4 m, bij 40 km/h 16 m enz.
Door de auto's dus sneller te laten rijden krijgt men nog niet per se een vlottere verkeersafwikkeling. Bij hogere snelheid moeten de onderlinge afstanden immers ook groter worden.
Voor de verkeerspolitie is de vraag interessant:
bij welke snelheid passeren er per minuut zoveel mogelijk auto's?
Zonder wiskunde is deze vraag onoplosbaar. We zullen proberen een formule te maken voor de frequentie en daar een uiterste waarde zien te bepalen.
De lengte van de tunnel zelf speelt daarbij geen rol. Immers als in de doorlopende file per minuut een zeker aantal auto's de tunnel inrijden, dan gaan er ook per minuut evenveel uit.

Een maximum voor de frequentie

We willen bepalen bij welke snelheid de situatie het gunstigst wordt om de verkeersstroom zo vlot mogelijk af te werken.

We stellen daarbij dat alle auto's met dezelfde snelheid rijden (v) en dat alle auto's dezelfde lengte hebben (a). Voor de remweg ofwel de onderlinge afstand van de wagens nemen we zoals reeds aangegeven de letter s. Omdat de beweging eenparig is geldt de formule: tijd is afstand gedeeld door snelheid.
In fig. 1 is uitgebeeld dat een bepaalde wagen net de tunnel is binnengereden. Na hoeveel tijd is dan de volgende binnen?
Wel, dat zal zijn na een tijd

$$T = \frac{a + s}{v}$$

Hierbij kunnen we voor s invullen: $s = \frac{1}{8}v^2$

$$\text{dus } T = \frac{a + \frac{1}{8}v^2}{v} = \frac{8a + v^2}{8v}$$

Als we nu eens voor de lengte van personenwagen a = 4m invullen, krijgen we:

$$T = \frac{32 + v^2}{8v}$$

Onder de frequentie verstaan we nu het aantal wagens dat per sec de tunnel inrijdt of passeert. Als na elke $\frac{1}{4}$ sec een auto zou passeren, zouden er dus per sec 4 passeren. Hieruit blijkt dat passeertijd T en frequentie f elkaars omgekeerden zijn. Het aantal auto's dat dus per sec de tunnel in verdwijnt is:

$$f = \frac{8v}{32 + v^2}$$

Onderzoek van de functie

In fig. 2 zijn voor een aantal waarden van v de bijbehorende waarden van f uitgerekend.
Voor v zijn waarden aangegeven in m/s en

snelheid v		aantal per tijdseenheid f		remweg of afstand s
m/s	km/h	f/s	f/min	m
0	0	0	0	0
2	7,2	0,40	24,0	0,5
4	14,4	0,67	40,2	2,0
→ 6	21,6	0,71	42,3	4,5
10	36,0	0,61	36,6	12,5
15	54,0	0,47	28,0	28,1
20	72,0	0,37	22,2	50,0

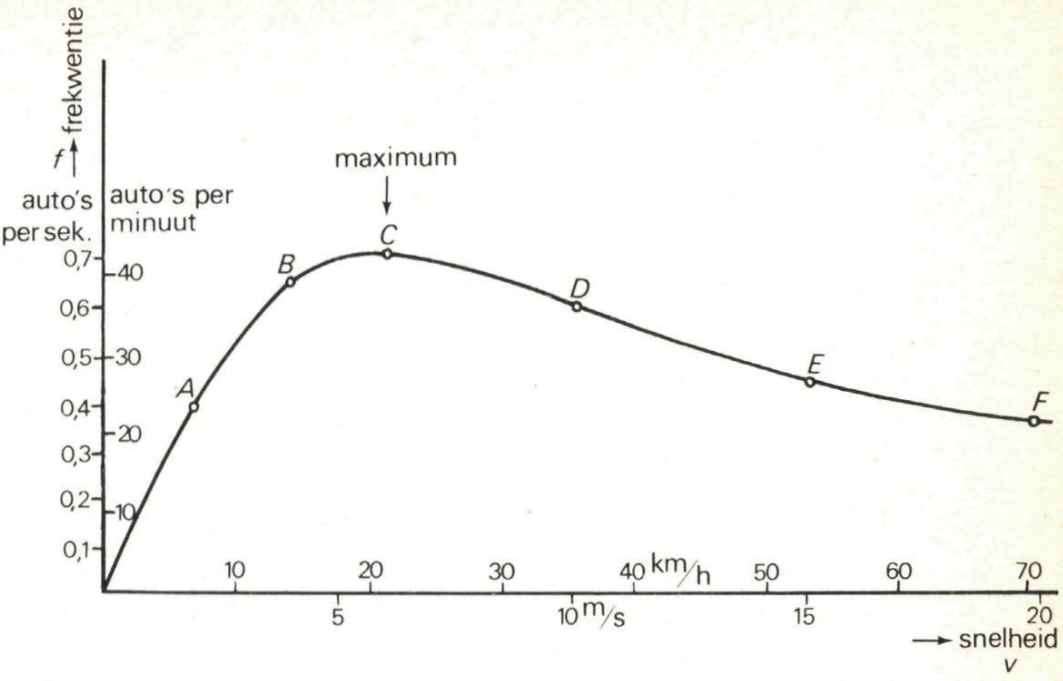
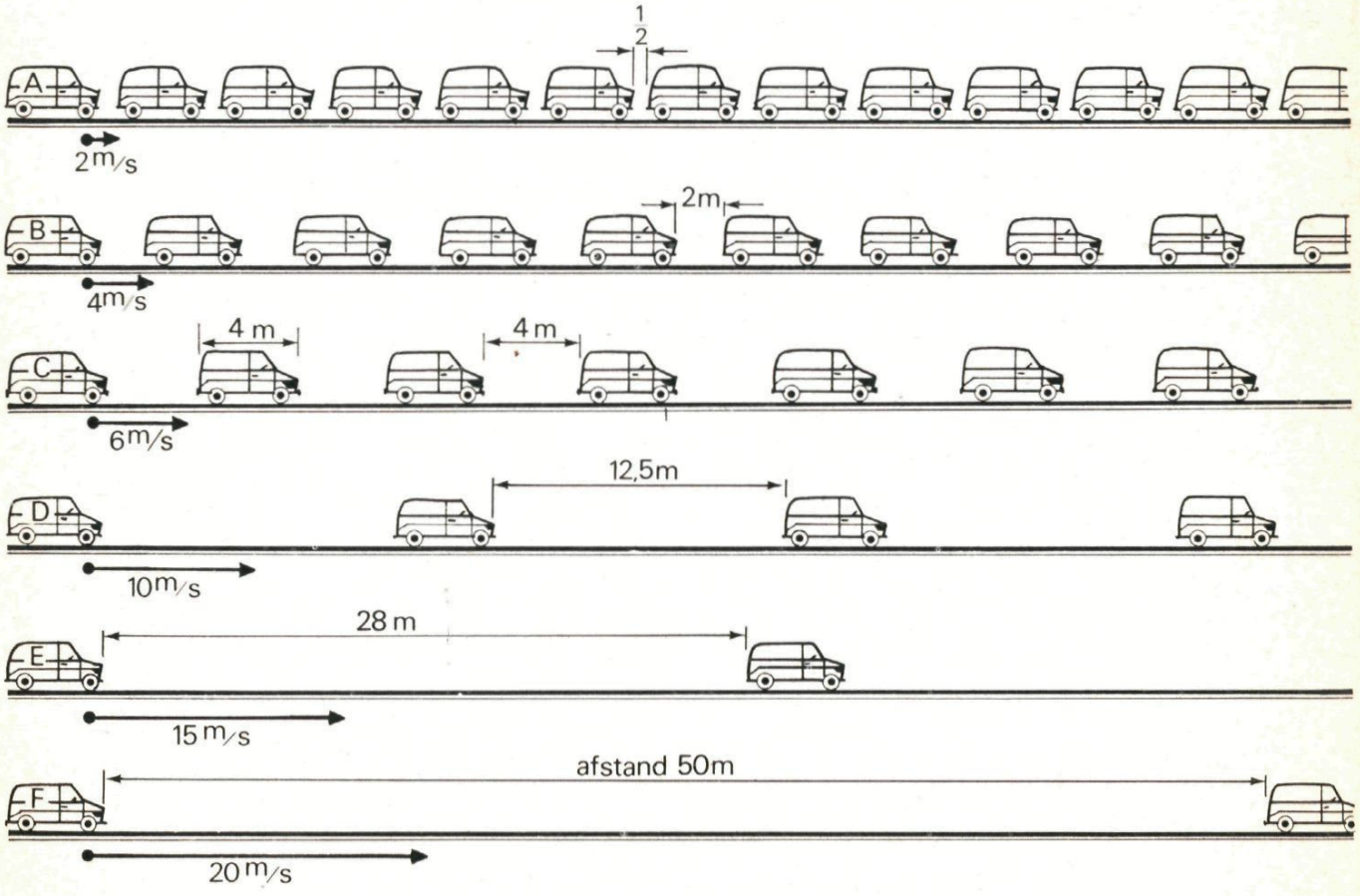


Fig. 2. Grafiek van de functie.

in km/h. Voor f de bijbehorende waarden in auto's per sec en tevens per minuut. De laatste kolom vermeldt de bijbehorende remwegen of afstanden in m. Tevens zijn de berekende punten in grafiek gebracht. De grafiek gaat door de oorsprong (bij $v = 0$ behoort $f = 0$). Dat verbaast niemand. Immers als de auto's stilstaan is er

Fig. 3. Files in verband met snelheid en afstand.



helemaal geen doorstroming. Als nu de snelheid van de voertuigen toeneemt, stijgt ook de frequentie. Dat hadden we ook verwacht. Maar voor hogere waarden van v daalt de frequentie weer.

Om die situatie beter te begrijpen, moet je in figuur 3 kijken. Daar zijn de files A, B, C, D, E en F in beeld gebracht met de vereiste remafstanden op schaal erbij.

In de gevallen D, E en F rijden de wagens wel harder, maar doordat ze steeds verder uit elkaar moeten, vermindert toch de frequentie.

Wat ons nu speciaal interesseert is: waar ligt het maximum van de f-functie? Zuiver grafisch gezien lijkt het in de buurt van $v = 6$ m/s of 21 km/h te liggen. De bijbehorende waarde van f wordt dan $f =$ 42 auto's per minuut.

Voor de liefhebbers is het mogelijk aan te geven hoe dit punt exact te bepalen is.

We snijden daartoe de grafiek met een horizontale lijn en wel zo dat de beide snijpunten samenvallen. In dat geval treedt raking op en zitten we in het maximum.

Schrijf $f = \dfrac{8v}{32 + v^2}$ als een vierkantsvergelijking in v.

$fv^2 - 8v + 32f = 0$. We zoeken nu die waarde voor f waarbij de beide waarden van v samenvallen. Daartoe moet de vierkantsvergelijking een discriminant $= 0$ krijgen.

Zodoende geldt dan:

$64 - 4 \cdot 32 \cdot f^2 = 0 \quad f^2 = \frac{1}{2} \quad f = 0{,}71$

Door invullen kun je dan zelf gemakkelijk vinden dat de bijbehorende waarde van v dan $4\sqrt{2}$ of 5,7 m/s wordt.

We hadden dat punt zojuist uit de grafiek bij $v = 6$ m/s geschat.

Het is natuurlijk ook mogelijk het maximum van de functie door differentiëren te bepalen.

We hebben dan gevonden dat bij een snelheid van ruim 20 km/h het hoogste doorstroomrendement wordt bereikt. Er blijkt tevens dat de verlangens van de weggebruiker en van de politie niet helemaal samenvallen.

De automobilist wil zo hard mogelijk rijden om zo vlug mogelijk thuis te zijn. De politie wil zo veel mogelijk auto's per minuut zien passeren om zo snel mogelijk van de verkeerschaos af te komen. En voor dat laatste is er een ideale snelheid.

De ideale afstand

Berekening leert dat het maximum precies ligt bij $v = 4\sqrt{2}$ (of 5,7 m/s). De onderlinge afstand van de wagens moet dan worden

$s = \frac{1}{8} v^2 = \frac{1}{8} \cdot 16 \cdot 2 = 4$ m

De onderlinge afstand van de wagens is dus juist hun eigen lengte. Is dat toeval, of geldt dat in het algemeen?

Verdere berekening leert dat dit altijd zo is!

Men zou ook een oplossing kunnen zoeken in het geval van vrachtwagens, waarbij a dus meer is. In de grafiek blijkt het maximum dan lager te liggen en tevens verder naar rechts. Dat betekent dus dat vrachtwagens harder moeten rijden voor maximaal rendement van de tunnel, maar daarbij blijft het rendement toch lager dan bij de personenauto's. Maar ook daar geldt dat in het ideale geval de onderlinge afstand van de wagens gelijk moet zijn aan hun totale lengte.

Eindconclusie

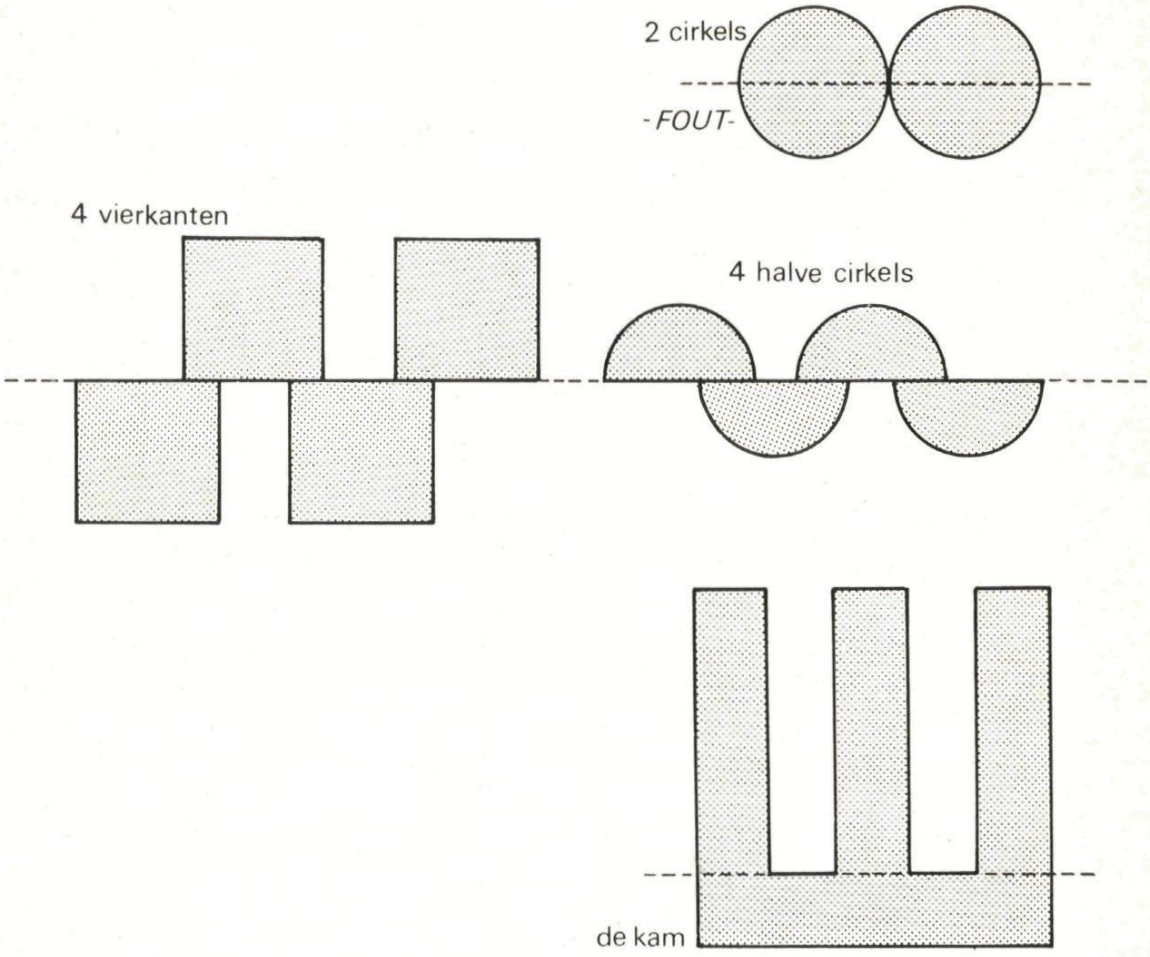
In de tekening van fig. 2 zie je dat de grafiek rechts van het maximum niet erg sterk daalt. Omdat de chauffeurs zelf liever harder willen rijden zou de politie gerust een punt tussen C en D kunnen aangeven.

Om dus zoveel mogelijk aan verlangens van burger en gemeenschap tegemoet te komen zouden we de politie kunnen adviseren: zet een bord aan het begin van de tunnel in geval van langdurige filevorming:

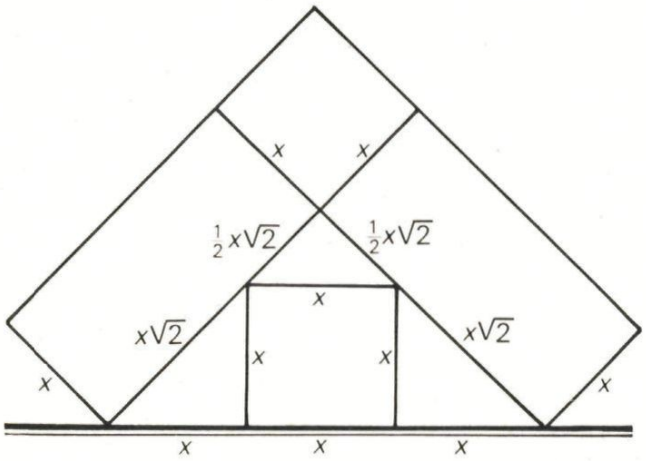
'verplichte snelheid 25 km/h
houd wagenlengte afstand'.

Oplossing van de denkertjes

1. Oplossingen in de stijl van de '2 cirkels' zijn fout.
   Oplossingen in de stijl van de '4 vierkanten' of de '4 halve cirkels' verdienen de waardering 'goed'
   Oplossingen in de stijl van de 'kam' de waardering 'zeer goed'



2. Nee, want tg $30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}57\ldots$.



3. *a.* Uit de figuur is de verhouding af te lezen:
   $1 : \frac{3}{2}\sqrt{2} = 1 : 2{,}12$
   b. de balen onder en boven steken aan weerskanten 3% uit

Oplossingen bij: Scherpzinnige speurders gevraagd.

$-2 \times 3 + 4 - 9 + 12$	$= 1$	$(2 + 3 + 4) : 9 + 12$	$= 13$
$2 + 3 : 4 - 9 : 12$	$= 2$	$[(9 + 12) : 2 \times 3] \times 4$	$= 14$
$2 \times 3 \times 4 - 9 - 12$	$= 3$	$(2 - 3 + 4) \times 9 - 12$	$= 15$
$2 + 3 - 4 - 9 + 12$	$= 4$	$2 - 3 - 4 + 9 + 12$	$= 16$
$(2 + 3) \times (4 + 9 - 12)$	$= 5$	$2 \times (3 + 4) - 9 + 12$	$= 17$
$2 + 3 + 4 + 9 - 12$	$= 6$	$(2 : 3 \times 4) \times 9 \times 12$	$= 18$
$2 \times 3 + 4 + 9 - 12$	$= 7$	$-2 \times (-3 + 4) + 9 + 12$	$= 19$
$-2 + 3 + 4 - 9 + 12$	$= 8$	$-2 - 3 + 4 + 9 + 12$	$= 20$
$2 \times 3 + 4 \times 9 : 12$	$= 9$	$2 \times 3 \times 4 + 9 - 12$	$= 21$
$(9 + 12) \times (2 : 3) - 4$	$= 10$	$2 + 3 - 4 + 9 + 12$	$= 22$
$2 + 3 \times 4 \times 9 : 12$	$= 11$	$2 \times (-3 + 4) + 9 + 12$	$= 23$
$-2 - 3 - 4 + 9 + 12$	$= 12$	$(-2 + 3) \times 4 \times 9 - 12$	$= 24$

Inhoud:

1. Exponentiële groei 25
2. De pen niet van het papier 28
3. Wat vijven en zessen rond zeven* 31
4. Biljarten met één bal 35
5. Scherpzinnige speurders gevraagd 38
6. Slinky, meten en rekenen 39
7. i. 42
8. Aansluiten en doorrijden maar . . . niet te snel! 44
9. Oplossingen van de denkertjes 48
10. Oplossing van: scherpzinnige speurders 49

* Joh. Eilander
Techn. lab. der R.U., Groningen.

PYTHAGORAS

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. Elsenaar, Harderwijk.
W. Kleijne, Heerenveen.
Ir. H. Mulder, Breda.
G. A. Vonk, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Bruno Ernst, Muurhuysen 11, Amersfoort.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, *f* 6,– per jaargang.
Voor anderen *f* 10,–.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.
Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.