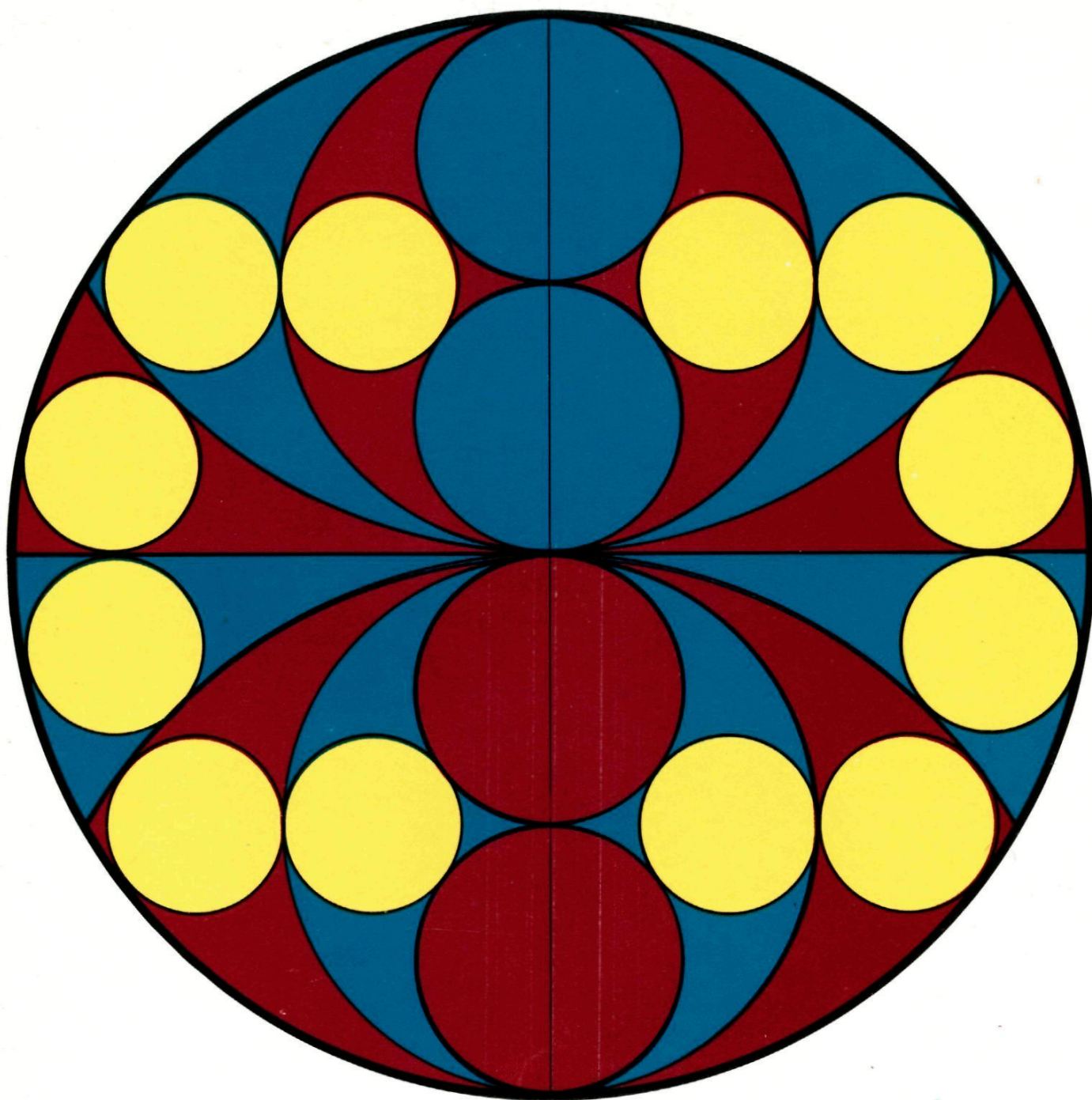


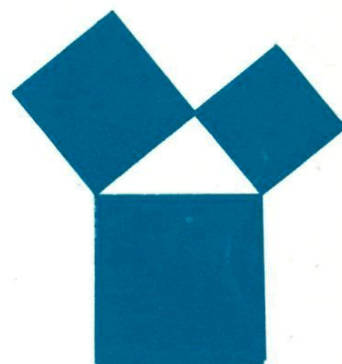


3

jaargang 15 / januari 1976

**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 x per schooljaar

Pythagoras



Dit is een luchtfoto van een gebouwencomplex langs een spoorlijn vlak bij een station. Het gaat om de drie cirkels die gedeeltelijk over elkaar heen liggen. Dit zijn drie kleine vijvers, die terrasvormig oplopen: de kleinste ligt het hoogste. Wat is er nu voor bijzonders aan?

De tuinarchitect had allerlei schetsen gemaakt die hem niet bevielen, tot hij de suggestie kreeg om de middellijnen van de cirkels te kiezen als drie opeenvolgende termen van een meetkundige reeks en toen bleek het er ineens bevredigend uit te zien. Wiskundige wetmatigheid en esthetica gaan dikwijls hand in hand!

BIJ DE FIGUUR OP DE OMSLAG

De constructie van deze figuur is duidelijk. De straal van de grote cirkel is R ; dan zijn er twee cirkels met de straal $\frac{R}{2}$ en vier met de straal $\frac{R}{4}$. Alle gele cirkels raken aan drie cirkels of aan twee cirkels en een middellijn van de grote cirkel. Het eigenaardige is dat de stralen van *alle* twaalf gele cirkels even groot zijn en wel $\frac{R}{6}$!

Het bewijs is niet moeilijk. Als je geschikte hulplijnen trekt hoeft je alleen maar de stelling van Pythagoras toe te passen. Probeer het eens; het is het eerste denkertje van dit nummer en de bewijzen staan achter in.

°° Scherpzinnige speurders gevraagd

De spelregels zijn:

1. De in de rechthoeken geplaatste getallen zijn uitkomsten van te vinden opgaven.
2. De opgaven worden samengesteld uitsluitend met behulp van de getallen 1, 2, 3, 8 en 27. Ieder getal mag in één opgave slechts één keer gebruikt worden. De volgorde is vrij.
3. Toegestaan zijn optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, machtverheffen, wortel-trekken en logaritme nemen.
4. In elke gevonden opgave moet minstens één logaritmevorm voorkomen.

Voorbeeld voor de eerste rechthoek:

$$1 + {}^3\log 27 - {}^2\log 8 = 1$$

of: $1 \times \frac{{}^2\log 8}{{}^3\log 27} = 1$ of: $\frac{27}{{}_3^2\log 8} \times 1 = 1$

Achter in dit nummer vind je mogelijke opgaven.

$1 + {}^3\log 27 - {}^2\log 8 = 1$	= 16
= 2	= 17
= 3	= 18
= 4	= 19
= 5	= 20
= 6	= 21
= 7	= 22
= 8	= 23
= 9	= 24
= 10	= 25
= 11	= 26
= 12	= 27
= 13	= 28
= 14	= 29
= 15	= 30

° Meetkunde in een paraplu

Een fabrikant van paraplu's heeft een nieuw type op de markt gebracht. Zijn bedoeling was om een paraplu te maken, die, zodra een zekere vergrendeling vrij komt, verder vanzelf open gaat.

In fig. 1 staat de normale situatie. Er moet nu een constructie bedacht worden om punt A omhoog te laten schieten. Het zou kunnen met behulp van een veer, die A verbindt met top T . Alleen, die veer zou bij de gegeven maten moeten variëren in lengte van 2 maal 27 ofwel 54 cm tot 10 cm. Vergelijk maar de figuren 2 en 3, waar de paraplu in dichte en open toestand staat. Deze oplossing is weinig elegant. Hoe zou het mogelijk zijn met een kortere veer eenzelfde effect te bereiken? Het kan lukken met een die in lengte slechts verandert van 1 cm in de dichte naar 4 cm in de geopende situatie. In fig. 3 is duidelijk een extra balein te zien met 28 cm lengte. Bij de dichte stand (fig. 2) is de veer compleet ingedrukt. Wordt de vergrendeling nu vrij gegeven, dan springt door het uitzetten van de veer punt A automatisch omhoog.

Als je de paraplu weer wilt sluiten trek je A naar beneden en spant daarmee tevens de veer.

Eigenlijk een merkwaardige zaak: doordat de basis van driehoek ABC langer wordt, gaat de hele basis omhoog!

Dat heeft met wiskunde te maken. Het berust op een eigenschap van een driehoek.

In fig. 4 hebben de zijden AC en BC vaste lengten en wel 27 en 28 cm. Nu gaat de basis AB langer worden. Wat heeft dat voor gevolg? Wel, het lijkt dat daardoor de stompe hoek bij A kleiner wordt. Daardoor zouden dan de basishoeken van de gelijkbenige driehoek TAC juist groter worden. Hierdoor gaat de paraplu open.

Het wiskundige vraagstuk kunnen we als volgt omschrijven.

Van een stomphoekige driehoek ABC met de stompe hoek bij A zijn de lengtes van de zijden AC en BC vast en is de lengte van zijde AB variabel. Bewijs dat als de veranderlijke zijde toeneemt, de stompe hoek afneemt.

Dat te bewijzen is nog niet zo eenvoudig. Als je het klaarkrijgt, stuur dan je oplossing aan de redactie.

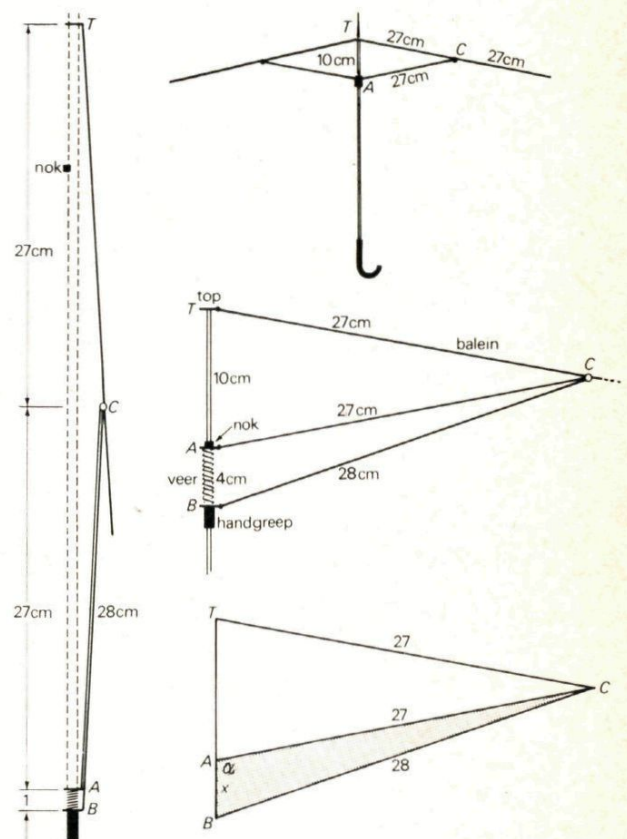


Fig. 1. Paraplu zonder veer en zonder extra balein.

Fig. 2. Paraplu dicht; veer gespannen.

Fig. 3. Paraplu geopend; veer ontspannen.

Fig. 4. Als in $\triangle ABC$ x groter wordt, wordt α kleiner.

° Een gezellig relatiespel

Het relatiebegrip, zo belangrijk bij de wiskundestudie, kan ook worden ingelijfd bij een plezierig ontspannend bezig zijn in vrije tijd. Zelfs niet wiskundig geschoolden kunnen na weinig uitleg alles begrijpen en meedoen.

Het begin is eenvoudig:

Harderwijk eindigt met de letter, waarmee Klaaswaal begint.

Nijverdal eindigt met de letter, waarmee Laren begint.

Iedereen kan nog een groot aantal van deze beweringen vinden en dat is meteen de kern van het bedoelde spel. Meer wiskundig gezegd: De verzameling plaatsnamen van Nederland wordt op zichzelf afgebeeld met behulp van de relatie 'laatste letter is eerste letter'.

Fig. 1 laat de notatie zien. Onder elke naam staat een duidelijke punt, van waaruit de pijlen vertrekken, of waar ze aankomen.

Er ontstaan bijzondere gevallen zoals:

Stiens eindigt met de letter, waarmee Stiens begint.

Noordeloos eindigt met de letter, waarmee Staverden begint.

Staverden eindigt met de letter, waar-

mee Noordeloos begint.

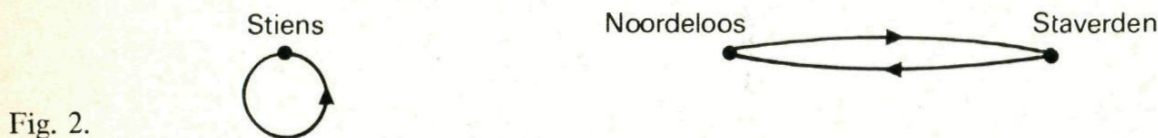
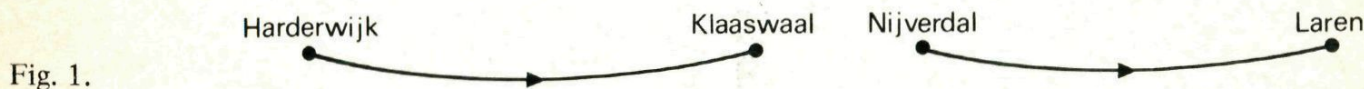
Fig. 2 toont de passende pijlen.

De eenvoudigste vorm van het spel kan nu beginnen.

Kees en Annie spelen een partijtje, waarvan het verloop als volgt is. Om niet in de war te raken tekent Kees rode pijlen en Annie kiest groen. In de figuren zijn de pijlen van Annie onderbroken getekend, die van Kees gewoon doorgetrokken.

Start: Annie wijst aselekt, dat is geheel willekeurig, een plaatsnaam aan in de atlas. Voor de eerlijkheid houdt ze haar ogen gesloten tot potlood of vinger stilstaan. Ze treft Breda en noteert die naam op een vel papier. De atlas gaat nu dicht. Eerste beurt Kees:

Hij zoekt uit het hoofd een plaatsnaam, die met de letter a begint. Dat wordt Amsterdam en daarmee ontstaat fig. 3. Eén pijl is één punt en die wordt in de scorelijst aangetekend.



Scorelijst	
Annie	Kees
	/

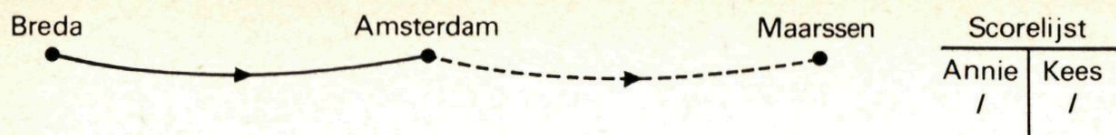


Fig. 4.

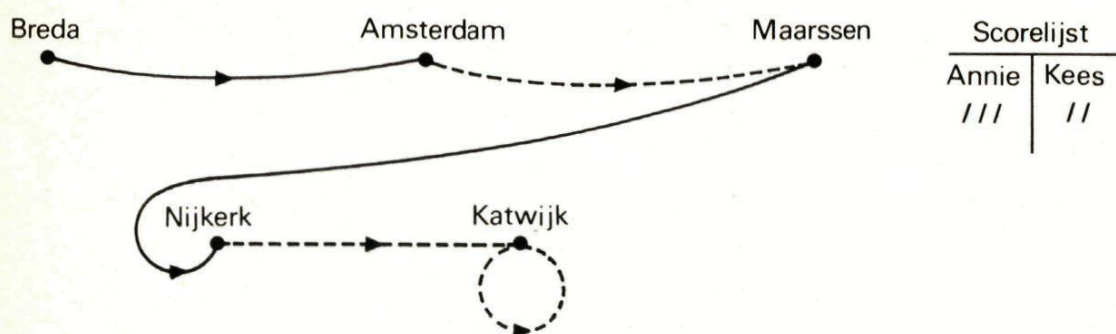


Fig. 5.

Eerste beurt Annie:

Zij moet Amsterdam als origineel nemen en ook uit haar geheugen een bij de relatie passende plaats opdiepen. Ze vindt Maarssen. Eén pijl is weer één punt. Zie fig. 4.

Tweede beurt Kees:

Nijkerk. Opnieuw één pijl met één punt.

Tweede beurt Annie:

Katwijk. Ze mag twee pijlen tekenen, van Nijkerk naar Katwijk en van Katwijk naar Katwijk. Twee punten gescoord. Zie fig. 5.

Derde beurt Kees:

Hij wint twee punten door de twee pijlen Katwijk naar Kerkrade en Nijkerk naar Kerkrade.

Derde beurt Annie:

Ze moet Kerkrade, de laatst geschreven naam, als origineel nemen en de nieuwe plaatsnaam begint dus met de

letter e. Ze denkt aan Epe. Kerkrade naar Epe en Epe naar Epe. 2 pijlen en dus 2 punten. Fig. 6.

Vierde beurt Kees:

Vanwege de laatste letter van Epe weer met een e beginnen. Ede welt in zijn gedachten op en hij kan drie pijlen trekken. Epe naar Ede, Ede naar Epe en Ede naar Ede. In zijn enthousiasme vergeet hij een vierde pijl, die mogelijk is.

Vierde beurt Annie:

Zij tekent eerst de pijl, die Kees vergat, namelijk die van Kerkrade naar Ede. Zo sleept zij een extra punt in de wacht. Ze gaat verder met Eerbeek en tekent nog vijf pijlen:

Kerkrade naar Eerbeek

Epe naar Eerbeek

Ede naar Eerbeek

Een succesvolle beurt, waarmee ze 6 punten veroverd. Fig. 7 toont de eind-

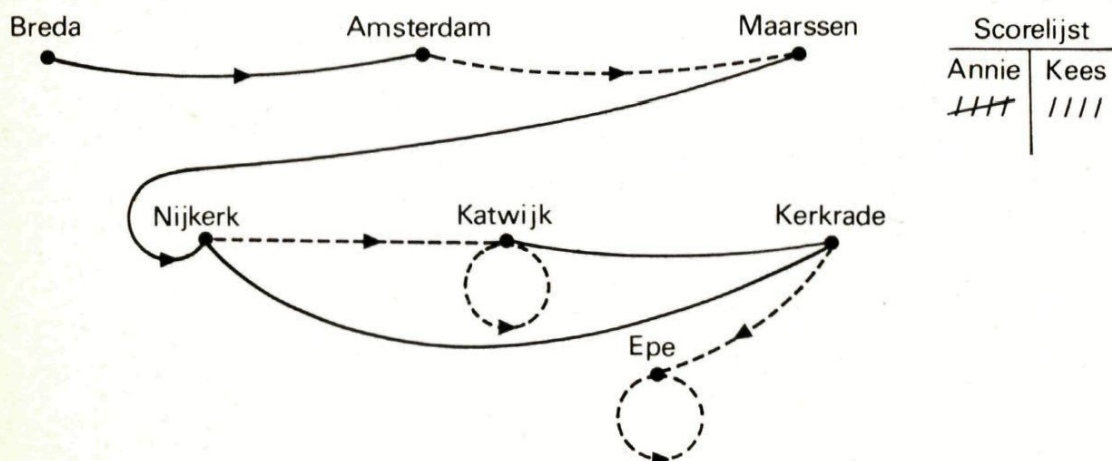


Fig. 6.

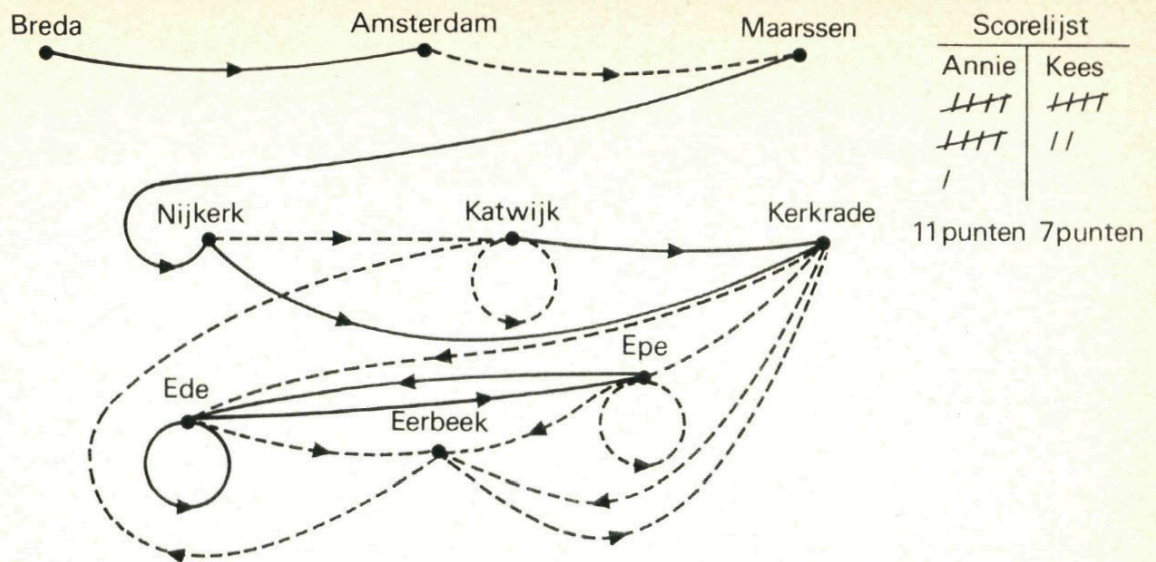


Fig. 7.

stand. Annie heeft gewonnen met 11 tegen 7.

Eerbeek naar Kerkrade

Eerbeek naar Katwijk

Opmerkingen:

1. Bij een volgende ronde start Kees.
2. Het aantal beurten is van te voren afgesproken.
3. Meer beurten geven meer pijlen en steeds meer ingewikkelde figuren. Begin eenvoudig.
4. Er kunnen meer dan twee deelnemers tegelijk zijn. Beperk dan wel het aantal beurten.
5. Als bij de start iemand direct een plaats aanwijst zoals bijvoorbeeld Stiens, dan kan meteen een pijl worden getrokken en wordt dus onmiddellijk een punt genoteerd.

Een tweede spelvorm geschikt voor een groter aantal personen.

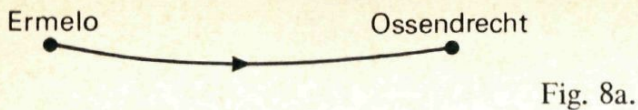
Kies aselekt uit de atlas twee plaatsnamen, die voor alle spelers verplicht worden. Allen krijgen daarna 5 minuten om uit het geheugen 3 plaatsnamen er bij te vinden. Het spannende is om juist die namen te vinden, die zo veel mogelijk pijlen opleveren. Na 5 minuten legt ieder de gevonden pijlenfiguur op tafel voor allen zichtbaar en worden de aantallen punten in een scorelijst genoteerd. Daarna kan een nieuwe ronde beginnen. Na afloop wordt vastgesteld, wie de winnaar is.

Ziezo, dat was dan het spel en daar kun je het bij laten. Misschien heb je wel gedacht: Er zit niet zo veel wiskunde in. Is dit alles? Voor wie verder wil gaan volgt hier een derde spelvorm, die je ook zonder meer kunt spelen, maar waarbij wiskunde te pas komt.

°° Een derde spelvorm met extra punten

Enkele voorbeelden verklaren, hoe je bij handige keuze van de namen extra punten verdient.

In fig. 8a is het eenvoudigste tweetal getekend. De toegevoegde plaatsnaam brengt één pijl voort en dus één punt.



Aan Ermelo wordt in fig. 8b Otterlo toegevoegd. Twee pijlen met dus twee punten. Otterlo wordt aan zichzelf toegevoegd en is dus een bijzonder element. Een element, dat aan zichzelf wordt toegevoegd heet *reflexief* en het bedenken daarvan wordt beloond met een extra punt. Totaal 3 punten.



In fig. 8c wordt Oldenhove aan Ermelo toegevoegd. Meteen kan gelezen worden, dat Ermelo aan Oldenhove wordt toegevoegd. Een tweetal, waarvan de elementen aan elkaar worden toegevoegd heet *symmetrisch*, 2 punten voor de pijlen en 2 punten als premie. Totaal 4 punten.



In fig. 8d treedt een bijzonder drietal op, hier aangeduid met a, b en c. Wie na $a \rightarrow b$, weet toe te voegen c, zó, dat tegelijk $a \rightarrow c$ ontstaat, heeft een drietal (a,b,c) gevormd, dat *transitief* heet. Deze combinatie wordt gehonoreerd met 3 punten extra.

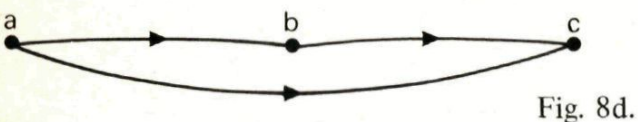
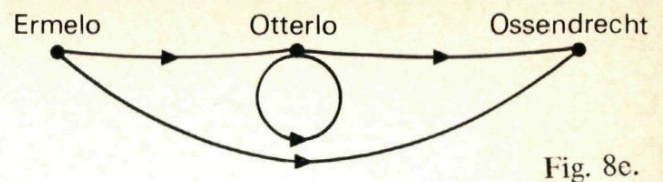
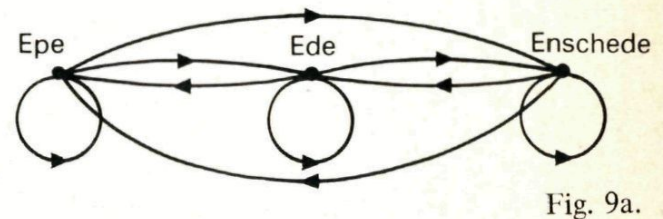
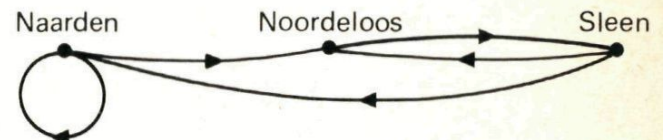


Fig. 8e ontstaat als vervolg van fig. 8b, waarvoor al drie punten waren toegekend. Ossendrecht toegevoegd aan Otterlo wordt eveneens toegevoegd aan Ermelo. (Ermelo, Otterlo, Ossendrecht) is een transitief drietal. De speler, die Ossendrecht bijschrift kan 2 nieuwe pijlen zetten en krijgt dus 2 punten vermeerderd met 3 premiepunten.



In fig. 9a is nog een voorbeeld gegeven.

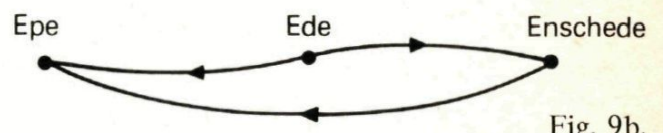
5 pijlen	5 punten
Naarden is reflexief	1 punt extra
(Noordeloos, Sleen)	
is symmetrisch	2 punten extra
gehele figuur	8 punten



Pas op: Er is geen transitief drietal, zoals aan de pijlrichting is te zien.

Fig. 9b is leuk ingewikkeld door een allergunstigste begin- en eindletter combinatie.

9 pijlen	9 punten
3 maal reflexief	3 punten extra
3 maal een symmetrisch	
tweetal	6 punten extra
6 maal een transitief	
drietal	18 punten extra
gehele figuur	36 punten waard



Opmerking bij 9b:

Twee van de zes transitieve drietallen zijn nog eens apart getekend. Dat zijn (Epe, Ede, Enschede) en (Ede, Enschede, Epe). Vind zelf de andere vier drietallen.

Voorbeeld van een spelverloop met extra punten, terwille van de plaatsruimte beperkt tot vier namen.

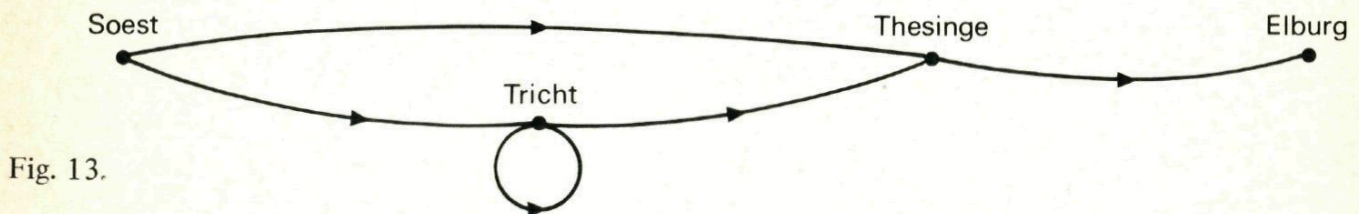
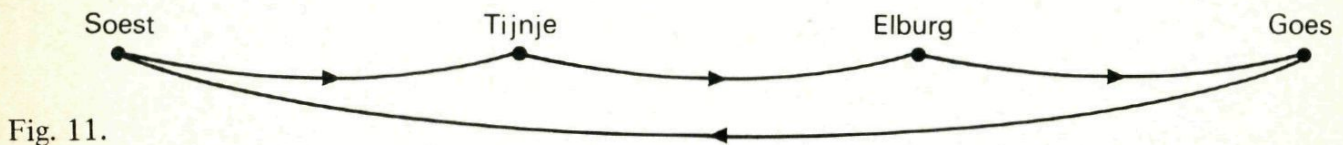
Jan, Kees, Annie en Sidonia spelen, ieder op eigen papier, aan de hand van de volgende spelregels:

- 2 verplichte plaatsnamen worden aselekt gekozen.
- Iedere speler zoekt uit het geheugen twee namen er bij. Tijdsduur 5 minuten.
- Elke pijl geeft 1 punt.
- Elk reflexief element 1 punt extra.
Elk symmetrisch tweetal 2 punten extra.
Elk transitief drietal 3 punten extra.

Start: Aselekt worden aangewezen Soest en Elburg.

Na 5 minuten blijkt de uitslag:

Jan: figuur 10. 3 punten.
Annie: figuur 11. 4 punten.



Kees: figuur 12

4 + 2 (wegens symmetrie) = 6 punten

Sidonia: figuur 13

5 punten uit 5 pijlen

1 punt wegens 1 reflexief element

3 punten uit het transitieve drietal (Soest, Tricht, Thesinge)

9 punten totaal

Sidonia heeft deze ronde gewonnen.

Opmerkingen:

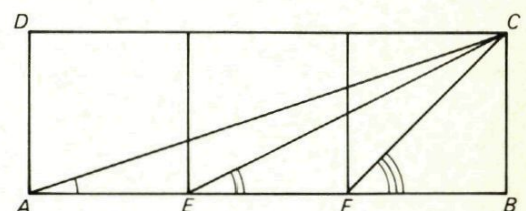
- Een goede variant is 2 aselekt gekozen namen verplicht en 3 bijzoeken. Er kunnen dan alleraardigste combinaties worden gevonden.
- Wie nog een andere spelvorm probeert moet soms ook de spelregels aanpassen.



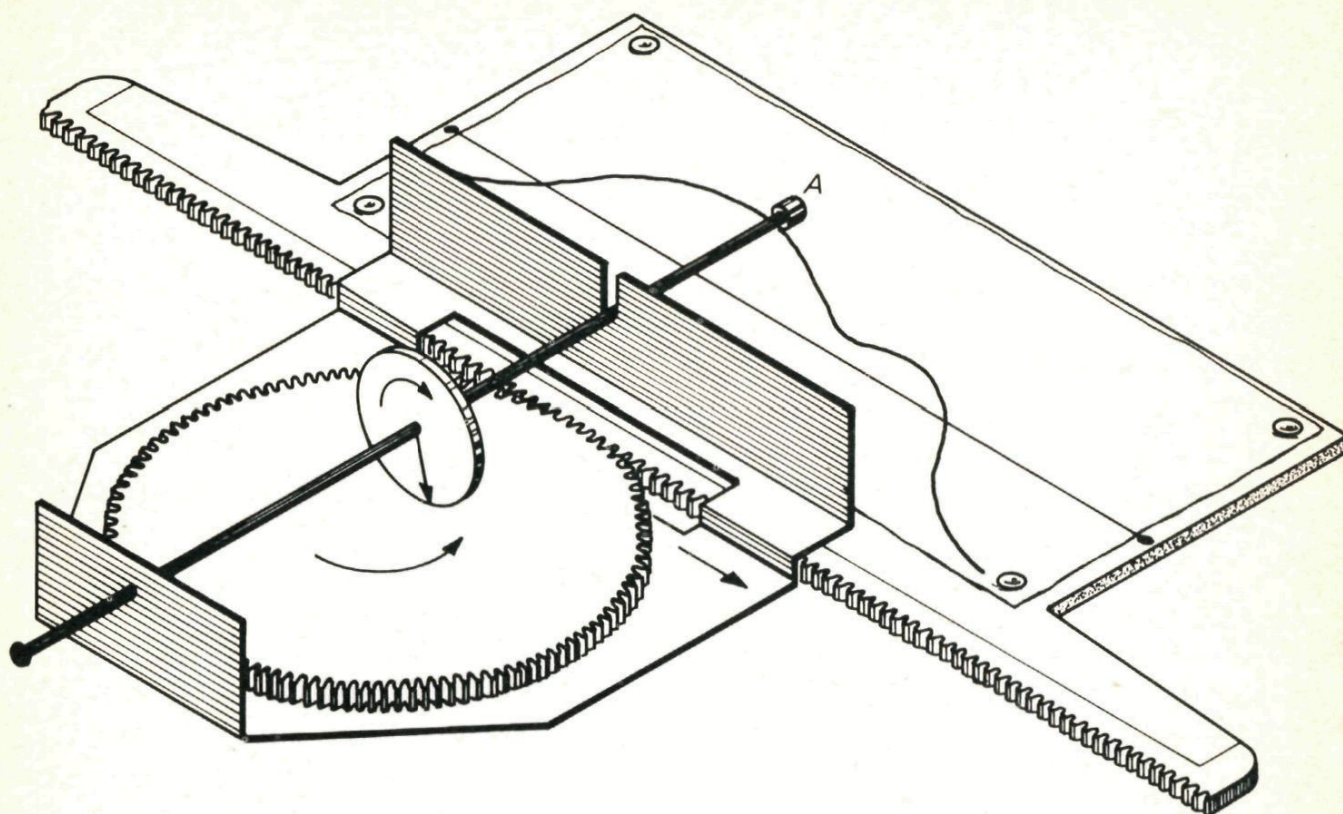
Denkertje.

2. De rechthoek $ABCD$ is opgebouwd uit drie vierkanten.

Bewijs: $\angle F = \angle A + \angle E$.

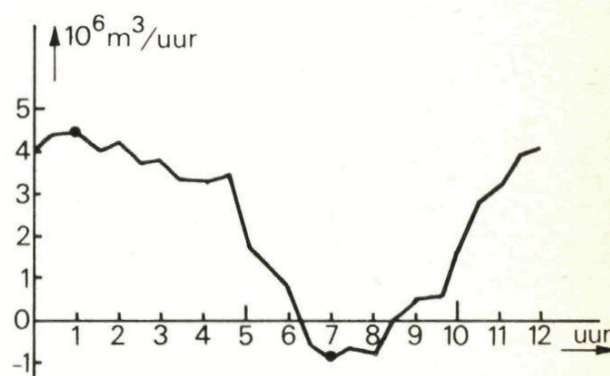


°° De schijfintegrator

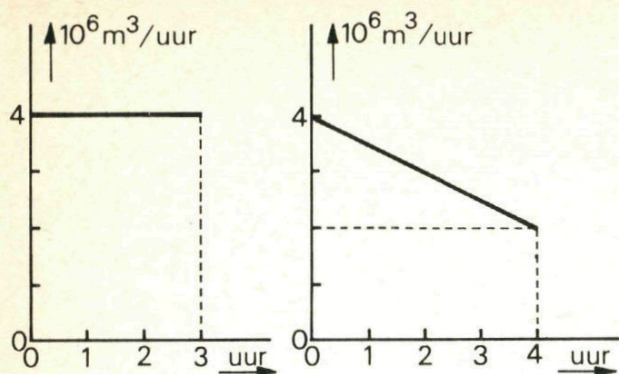


In het vorige nummer hebben we kennis gemaakt met een apparaat voor het oplossen van vergelijkingen van de derde graad. Er zijn wel meer voorbeelden waarin de techniek de wiskunde te hulp komt, ook al is het meestal andersom. In dit nummer vind je een apparaat om bij benadering de waarde van een integraal te bepalen. Als het begrip integraal je onbekend is, volgt er voor jou eerst een voorbeeld dat dit moet verduidelijken.

Het riviertje de *R* stroomt uit in zee. Het grootste gedeelte van de dag is dit ook letterlijk het geval, maar bij het opkomen van de vloed is de stroming tegengesteld: er komt wat zeewater landinwaarts. Hoe heeft men dit geconstateerd? De stroomsnelheid in het midden van de rivier kan afgeleid worden uit de snelheid van een drijvend voorwerp. In twee periodes per dag kan men waarnemen dat een kurk naar binnen drijft. Men kan verder uit de stroomsnelheid in het midden van de rivier, de waterhoogte en de vorm van de doorsnede van de rivierbedding, afleiden wat op elk moment de uitstroomsnelheid in m^3/uur van de *R* is. Men doet in een periode van 12 uur met regelmatige tussentijden metingen en verkrijgt de volgende grafiek.



Zo is op tijdstip 1 (uur) de uitstroomsnelheid $4.5 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{uur}$ en op tijdstip 7 gelijk aan $-0.9 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{uur}$. Hierbij geeft de negatieve waarde aan dat de stroming landinwaarts is. Hoeveel m^3 water is er in deze periode in totaal naar zee afgevoerd? Als de grafiek nu wat eenvoudiger was, zoals bij de twee volgende plaatjes, dan was dat gemakkelijk te berekenen.



Een gelijkblijvende uitstroomsnelheid van $4 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{uur}$ over een periode van 3 uur verplaatst $12 \times 10^6 \text{ m}^3$ water. Deze 12 komt overeen met de oppervlakte van de rechthoek.

Een regelmatig afnemende uitstroomsnelheid van 4 tot 2 maal $10^6 \text{ m}^3/\text{uur}$ over een periode van vier uur, komt overeen met een gelijkblijvende snelheid van $3 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{uur}$ over 4 uur, dat is $12 \times 10^6 \text{ m}^3$. Ook deze 12 komt overeen met de oppervlakte van het getoonde trapezium.

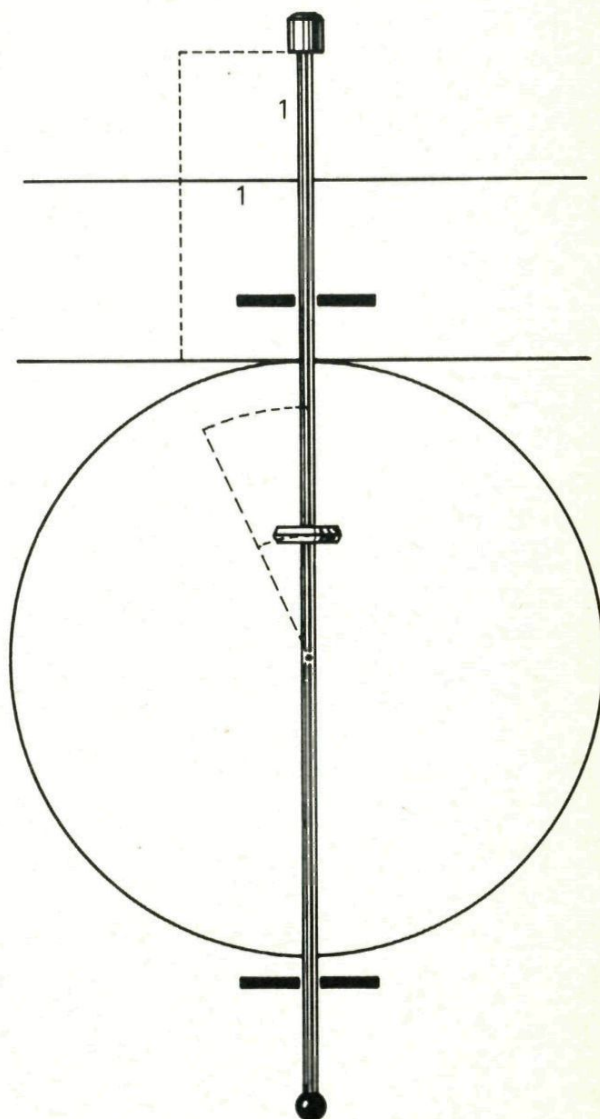
De afgevoerde hoeveelheid water (uitgedrukt in 10^6 m^3) door de R komt overeen met de oppervlakte ingesloten door de grafiek, de horizontale as en de beide verticale lijnen aan begin en eind van de meetperiode, maar het gedeelte van de grafiek dat onder de as ligt ontstond door landinwaartse stroming en dat zal dus een negatieve bijdrage tot de waterafvoer leveren. We zullen daarom oppervlakte onder de as van een minteken voorzien, voordat dit in het geheel wordt meegerekend.

Het getal dat op deze manier van een grafiek van een functie wordt bepaald heet de integraal van die functie op het gegeven interval. Bij een grillige grafiek behorende bij ons riviertje, kan de integraal moeilijker berekend worden dan van

We keren terug tot ons apparaat. Het is de simpelste vorm van een mechanische integraal-berekenaar. We prikken een papier met daarop de grafiek van een zekere functie op een bord. Langs de kant, evenwijdig aan de as, kan een apparaat lopen

met als voornaamste componenten: een schijf die met een vertanding ingrijpt op de kant van het bord, en een (brei)naald met wieltje. Het is de bedoeling dat het geheel zo verschoven wordt dat het knopje A van de naald langs de grafiek beweegt. Het is namelijk mogelijk de naald in zijn lengterichting te verschuiven. Het toestel is zo ingericht dat het knopje A zich op de as bevindt als het wieltje in het centrum van de schijf is.

Bewegen we de integrator langs het bord en houden we het knopje op de as dan draait de schijf wel maar het wieltje niet. Nu plaatsen we de knop op hoogte 1 boven de as en bewegen de integrator een eenheid naar rechts. De schijf draaide daarbij linksom en het wieltje (in de tekening gezien) met de klok mee.



Je kunt je voorstellen dat de grootte van het wielkje zo gekozen kan worden dat het bij deze manoeuvre precies één omwenteling rechtsom maakt (af te lezen door een getekende straal op het wielkje). We plaatsen nu de knop op hoogte 2 boven de as en bewegen een eenheid naar rechts. Het wielkje beschrijft op de schijf een cirkelboog waarvan de middelpunts-hoek weliswaar gelijk is aan die van het voorgaande geval, maar de straal is tweemaal zo groot. De afgelegde weg voor het wielkje dus ook: het maakt twee omwentelingen.

Door nog meer gevallen te beschouwen overtuig je je wel dat het aantal omwentelingen of delen ervan van het wielkje de oppervlakte aangeeft 'onder' de door de knop beschreven kromme, zolang de knop zich tenminste boven de as bevindt. Komt de knop onder de as, dan komt het

wielkje aan de andere kant van het schijfmiddelpunt, wat een draaiing van het wielkje in tegengestelde zin tot gevolg heeft. Overigens precies wat we voor de bepaling van de integraal nodig hebben. Als de straal van de schijf r is, hoe groot zou de straal van het wielkje dan moeten zijn?

De getekende versie van de integrator is wel wat erg simpel. Hierbij zal het niet eenvoudig zijn tijdens het proces de naald in de langsrichting met de hand te verschuiven, zonder het wielkje af te remmen. In de praktijk gebruikte apparaten zijn daarom bovendien voorzien van een constructie waardoor het mogelijk is vanaf twee aan het bord bevestigde hendels de beweging van de naaldknop te regelen zonder nadelige invloed uit te oefenen op de draaiing van het wielkje.

°° Een denkertje doordacht

Denk eens na over het volgende probleem.

In een klas met jongens en meisjes blijkt 57% van de jongens en 41% van de meisjes aan sport te doen.

Hoeveel procent van alle leerlingen in die klas doen aan sport?

Wat denk je van het antwoord? Misschien $(57 + 41)\% = 98\%$. Of stem je voor de helft daarvan: 49%. Of vind je dat er over het antwoord helemaal niets te zeggen valt? Of misschien toch wel iets, namelijk dat het tussen de 41% en 57% in zal liggen.

Lees nog even niet verder en probeer voor jezelf het beste antwoord te kiezen of een nog beter te bedenken.

Het antwoord dat als laatste genoemd staat is wel te bewijzen. Als we aannemen dat er j jongens en m meisjes in de klas zijn, kan het percentage sporters bepaald worden op

$$\frac{57j + 41m}{j + m}$$

De afleiding is zo eenvoudig dat we die

hier niet voordoen. Wel concluderen we hier dat

$$\frac{57j + 41m}{j + m} = 41 + \frac{18j}{j + m} > 41$$

en dat

$$\frac{57j + 41m}{j + m} = 57 - \frac{18m}{j + m} < 57.$$

Hierbij is gebruikt dat $j \in \mathbb{Z}^+$ en dat $m \in \mathbb{Z}^+$; er zijn immers zeker zowel jongens als meisjes in de klas.

Toch duiken we nog wat dieper in de opgave. Er staat 57% van de jongens, wat betekent dat? Wel, 57 van de 100 jongens. Maar er zijn vast geen honderd jongens in de klas, hoe kan dat?

Je hebt inmiddels wel ontdekt, dat $\frac{57}{100}$ niet te vereenvoudigen is. Dus moeten we aannemen, dat het een breuk is als bijvoorbeeld $\frac{17}{30}$, want die komt overeen met 56,6666...%, wat na afronding geschreven wordt als 57%. Er zijn waarschijnlijk wel meer breuken die na afronding dit percentage opleveren, dus een waarde hebben in

$$\frac{56\frac{1}{2}}{100}, \frac{57\frac{1}{2}}{100}.$$

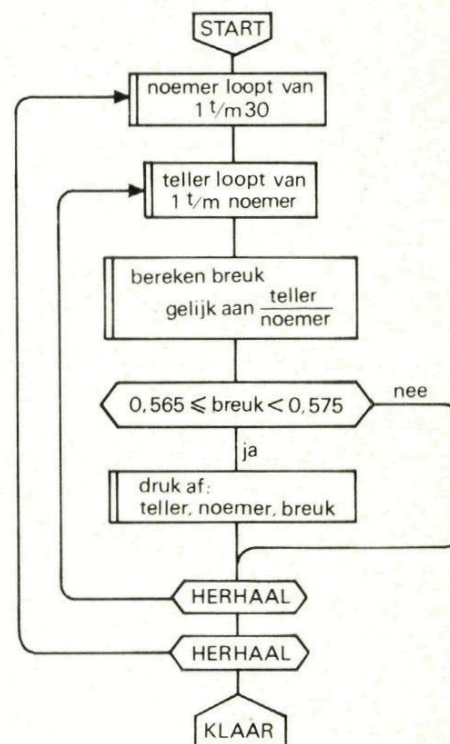
We kunnen al de volgende breuken op hun waarde onderzoeken.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \dots, \frac{17}{30}, \dots, \frac{28}{30}, \frac{29}{30}, \frac{30}{30}.$$

We verwachten zeker niet meer dan 30 jongens in een klas waarin ook nog meisjes moeten worden ondergebracht. Breuken met een noemer groter dan 30 onderzoeken we daarom niet. Er zijn in deze lijst een groot aantal breuken die we zo op het oog kunnen wegschrappen, maar als we een computer gebruiken kost een beetje overbodig werk geen tijd. Hoewel je misschien niet met het instrueren van

computers op de hoogte bent, begrijp je toch wel het schema hiernaast.

Het vertelt de computer precies die breuken te bekijken die in de eerder opgestelde lijst voorkomen. Voor de noemer neemt hij alle gehele getallen van 1 tot en met 30. Bij elke noemer 'loopt' de teller vanaf 1 omhoog, maar niet voorbij de noemer. Ook in de lijst hebben we immers de teller nooit groter genomen dan de noemer, want waarden boven 100% interesseren ons zeker niet.



We passen het schema nog eens aan voor een waarde in 0,405; 0,415 en verkrijgen zo de volgende twee tabellen uit de machine.

R E S U L T A A T

VOOR 57%

4	/	7	=	0,571428
8	/	14	=	0,571428
12	/	21	=	0,571428
13	/	23	=	0,565217
16	/	28	=	0,571428
17	/	30	=	0,566667

VÓÓR ~~41~~%

$$\begin{aligned}7 / 17 &= 0,411765 \\9 / 22 &= 0,409091 \\11 / 27 &= 0,407407 \\12 / 29 &= 0,413793\end{aligned}$$

Als we van beide de bovenste regel eens nemen, dan krijgen we 4 van de 7 jongens en 7 van de 17 meisjes, dat is in totaal 11 van de 24 leerlingen die aan sport doen. Er zijn natuurlijk ook andere combinaties mogelijk, maar het totaal aantal leerlingen komt al gauw ver boven de dertig. Kijk maar.

$$\frac{4 + 7}{7 + 17} = \frac{11}{24} \approx 46\%$$

$$\frac{8 + 7}{14 + 17} = \frac{15}{31} \approx 48\%$$

$$\frac{4 + 9}{7 + 22} = \frac{13}{29} \approx 45\%$$

$$\frac{4 + 11}{7 + 27} = \frac{15}{34} \approx 44\%$$

Nu, zul je zeggen, weten we het nog niet. En gelijk heb je. Als ons daarentegen bekend is dat de betreffende school geen klassen heeft van meer dan 30 leerlingen, krijgen we toch een vrij nauwkeurig resultaat: 45% of 46%.

°°° We stellen de breuk $\frac{y}{x}$ voor door het roosterpunt (x, y) . Nu zoeken we voor de representanten van 57% de roosterpunten in de strook tussen de rechten $y = 0,565x$ en $y = 0,575x$.

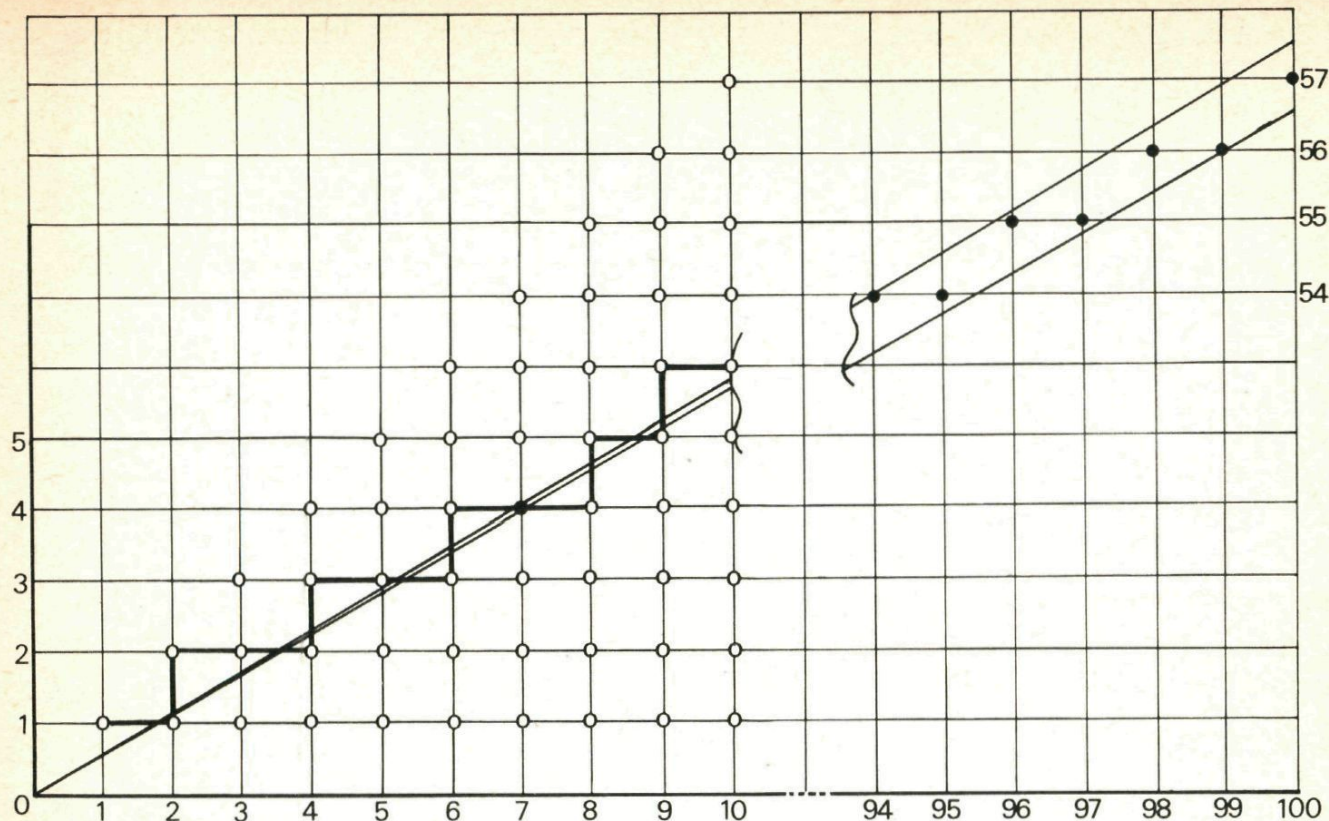
Je ziet wel dat het een zuivere tekening vereist om hieruit alle breuken te ontdekken. We hebben het begin van de figuur aangegeven en ook het gedeelte $94 \leq x \leq 100$, overeenkomend met breuken met deze waarden als noemer (zie tabel).

Nu is dat een oninteressant deel voor de oplossing van ons oorspronkelijke probleem, omdat zulke grote aantallen in de klas niet voorkomen. Toch willen we een conclusie trekken uit dit gedeelte: twee roosterpunten boven elkaar binnen de strook komen niet voor, voor $x < 100$. Want de strook bereikt bij $x = 100$ voor het eerst de 'dikte' 1.

Wat hebben we hiervan geleerd? Dat we er rekening mee moeten houden dat een getal als 41 twee betekenissen kan hebben. In '41 is een priemgetal' bedoelen we precies 41. Maar '41% van de meisjes ...' betekent vaak een getal dicht bij 41%, dan bij 40% of 42%. We moeten rekening houden met het verband waarin de getallen voorkomen. Verder hebben we geleerd dat problemen die van buiten ons wiskundeboekje komen niet altijd precies één antwoord opleveren. We zullen soms naar de vragensteller terug moeten om nadere informatie. Of, als dat niet mogelijk is, onze resultaten met enige voorzichtigheid moeten hanteren.

Ten derde, zul je misschien zeggen, kun je dit soort problemen alleen bekijken als je de beschikking hebt over een computer*. Dat is bij het probleem van dit artikel geen juiste uitspraak. Je kunt met een kleine rekenmachine of met enig rekenwerk op papier ook evenver komen. We zullen dan wel het aantal te onderzoeken breuken drastisch moeten beperken. Dat betekent weer, dat we meer denkwerk moeten verzetten vóór we aan het rekenen slaan. Het wordt vanaf de volgende regel daarom wat moeilijker.

* Dat is gemakkelijker en goedkoper dan je denkt. Er staat een computer tot je beschikking! Schrijf voor informatie een briefkaart, zonder postzegel, naar antwoordnummer 1566 UTRECHT, met als tekst: 'naar aanleiding van Pythagoras' en de afzender.



$$\begin{aligned}
 54/94 &= 0.574468 \\
 54/95 &= 0.568421 \\
 55/96 &= 0.572917 \\
 55/97 &= 0.56701 \\
 56/98 &= 0.571429 \\
 56/99 &= 0.565656 \\
 57/100 &= 0.57
 \end{aligned}$$

Als we in deze tekening weergeven welke punten door de computer werden 'afgetast' (open punten), valt de grote hoeveelheid overbodig werk ons wel op.

Gebruikmakend van de stelling dat de voor ons belangrijke roosterpunten nooit boven elkaar liggen, kunnen we een veel 'zuiniger' methode opstellen:

- 1 — zit je boven de strook, ga een punt naar rechts, NAAR regel 1
- 2 — zit je onder de strook, ga een punt naar boven, NAAR regel 1

- 3 — SCHRIJF breuk, ga een punt naar rechts, NAAR regel 1

Terug vertaald in breuken wordt dit zo iets als:

- 1 — begin met breuk $\frac{1}{1}$
- 2 — breuk $> 57\frac{1}{2}\%$? vergroot noemer met 1, NAAR regel 2
- 3 — breuk $\leq 56\frac{1}{2}\%$? vergroot teller met 1, NAAR regel 2
- 4 — SCHRIJF breuk, vergroot noemer met 1, NAAR regel 2

Op deze manier onderzoeken we de breuken

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \dots, \frac{16}{27}, \frac{16}{28}, \frac{16}{29}, \frac{17}{29}, \frac{17}{30}$$

en dat zijn er aanmerkelijk minder dan in de eerder gegeven lijst. Dit veronderstelt wel dat in de methode een eindstop bij een noemer 30 ingebouwd is, wat niet het geval was.

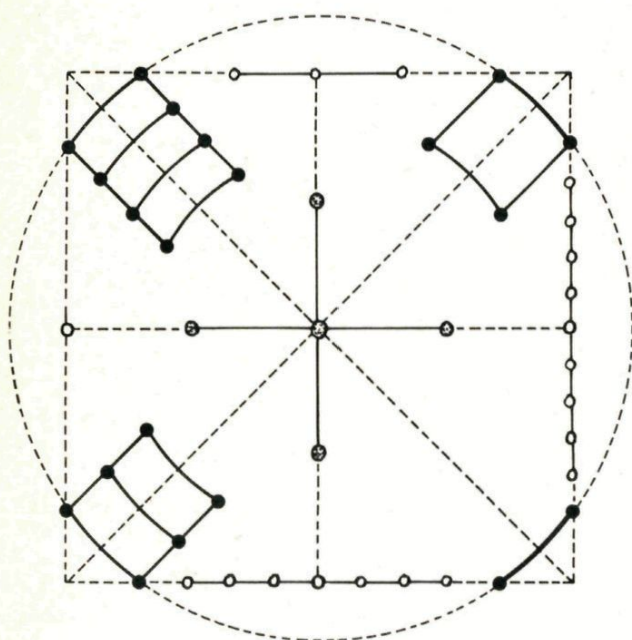


Denkertjes

3. Maak een blokschema van de laatste methode met inbegrip van een stop bij noemer 30.

Op een dag stond de Chinese keizer Yü of Ta-Yü, die regeerde van 2205 tot 2198 voor Chr. aan de oever van de Gele Rivier of Hoang Ho. Terwijl hij peinzend stond te staren naar het gekleurde water, dat aan zijn voeten naar zee stroomde, kwam uit de diepte een enorme schildpad naar boven. Het was geen gewone, maar een heilige schildpad, want op zijn grote schild droeg het beest een vreemde figuur. Omdat de keizer in grote financiële moeilijkheden verkeerde, dacht hij in die vreemde figuur een aanwijzing te mogen zien om zijn moeilijkheden op te lossen.

Dit was die figuur:



Terwijl keizer Ta-Yü vlug de figuur natekende, bleef het beest stil zitten. Daarna verdween het weer, voor altijd.

De keizer haastte zich zijn geleerde raadslieden te vragen, wat de betekenis van deze geheimzinnige figuur zou kunnen zijn. Na lang zoeken dachten zij, dat deze boodschap niets anders kon betekenen dan dat zijn majesteit zijn geluk zou zoeken in het getal 15. Want de figuur zat zo in elkaar, dat zij steeds het getal 15 vonden.

Hoe dat dan in zijn werk gaat zie je het best, door de figuur te vervangen door onderstaande. Als je dit vierkant goed bekijkt, dan valt het volgende op:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

De som van de drie getallen in de eerste rij is $8 + 3 + 4 = 15$.

Evenzo is de som van de drie getallen van de tweede en derde rij 15.

Maar daarnaast geldt: De som van de drie getallen van de eerste kolom is $8 + 1 + 6 = 15$. Evenzo is de som van de tweede en derde kolom 15.

En alsof dit nog niet genoeg was is ook de som van de getallen op de diagonalen 15. Dit is dus inderdaad wel een heel bijzonder getallenvierkant. Zo'n vierkant noemt men een tovervierkant of een magisch vierkant.

Het 'toverachtige', het 'magische' is steeds deze wet:

De som van de getallen in elke rij, in elke kolom en op beide diagonalen, is steeds hetzelfde getal.

Dat laatste getal zullen we het 'tovergetal' van het tovervierkant noemen.

De schildpad van keizer Yü is het begin geweest van de tovervierkanten. Het tovervierkant op deze schildpad is er één van $3 \times 3 = 9$ getallen. Het is natuurlijk mogelijk ook tovervierkanten van $4 \times 4 = 16$ getallen samen te stellen of zelfs tovervierkanten met nog meer getallen.

Oefening 1.

Bepaal van onderstaande tovervierkanten het tovergetal en vul de ontbrekende getallen aan.

67		43
	37	
31		

a

50		22
1		57
36		

b

3		5	
53	11	37	
17	13	41	
29		19	

c

17	24	1	8	15
23	5		14	16
4	6		20	22
10	12	19	21	3
11	18	25		9

d

De 3 bij 3 tovervierkanten uit oefening 1 zijn niet zo mooi samengesteld als het oude Chinese tovervierkant. Dit Chinese tovervierkant bestaat uit negen getallen, die in volgorde van grootte precies 1 t/m 9 zijn. Het grappige is dat er maar één tovervierkant van deze getallen 1 t/m 9 mogelijk is. Men kan er wel ogenschijnlijk verschillende opschrijven, maar alle zijn ze terug te brengen tot de eerste.

4	3	8
9	5	1
2	7	6

a

2	9	4
7	5	3
6	1	8

b

6	1	8
7	5	3
2	9	4

c

Als je a spiegelt om de middelste kolom krijg je het eerste terug.

Hoe kun je b en c weer terugbrengen tot het eerste Chinese vierkant?

Er is nog een manier om 'nieuwe' tovervierkanten samen te stellen.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

 $+$

8	29	11
19	16	13
21	3	24

 $=$

16	32	15
20	21	22
27	10	26

a

b

c

a is het Chinese tovervierkant; b is een ander 3 x 3 vierkant. Als je nu de getallen van overeenkomstige hokjes optelt, krijg je tovervierkant c. Is de som van de tovergetallen ook het nieuwe tovergetal?

Natuurlijk kun je ook een tovervierkant bij zichzelf optellen om daarmee een 'nieuw' tovervierkant te krijgen.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

a

16	6	8
2	10	18
12	14	4

b

Oefening 2.

Stel door optellen een nieuw 4 x 4 tovervierkant samen.

15	2	1	12
4	9	10	7
8	5	6	11
3	14	13	0

a

36	8	2	13
5	10	16	28
14	26	7	12
4	15	34	6

b

c

Kun je door aftrekken ook 'nieuwe' tovervierkanten samenstellen?

Oefening 3.

Stel door verdubbeling een 'nieuw' tovervierkant samen.

12	20	1	33
31	3	22	10
23	11	30	2
0	32	13	21

a

b

Kun je door met 3 of 4 enz. te vermenigvuldigen ook 'nieuwe' tovervierkanten samenstellen?

Kun je ook een 'nieuwe' tovervierkant samenstellen door elk getal te kwadrateren, of door het tot de derde macht te verheffen?

Er is nog een manier om 'nieuwe' tovervierkanten te maken. Je maakt dan gebruik van zgn. 'onechte' tovervierkanten. Dit zijn tovervierkanten waarin niet alle getallen verschillend zijn.

Hier volgt een voorbeeld:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 5 & 9 \\ \hline 6 & 7 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 11 & 6 & 7 \\ \hline 4 & 8 & 12 \\ \hline 9 & 10 & 5 \\ \hline \end{array}$$

a b c

b is zo'n onecht tovervierkant.

Is c weer een echt tovervierkant?

Oefening 4.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 15 & 23 & 4 & 36 \\ \hline 34 & 6 & 25 & 13 \\ \hline 26 & 14 & 33 & 5 \\ \hline 3 & 35 & 16 & 24 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 \\ \hline 0 & 7 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

a b c

Is c weer een echt of een onecht tovervierkant?

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11 & 22 & 18 & 23 \\ \hline 24 & 17 & 21 & 12 \\ \hline 25 & 16 & 20 & 13 \\ \hline 14 & 19 & 15 & 26 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

a b c

Is c weer een echt of een onecht tovervierkant?

Is de som van twee echte tovervierkanten altijd weer een echt tovervierkant? Toets je mening aan het volgende voorbeeld. (a en b zijn echte tovervierkanten.)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 71 & 5 & 23 \\ \hline & & 37 & 1 \\ \hline & 13 & & \\ \hline 29 & 7 & & 47 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 47 & 9 & 65 & \\ \hline 17 & 49 & & \\ \hline & & 39 & \\ \hline 51 & & 41 & 23 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

a b c

Alle 3×3 tovervierkanten kunnen uit het Chinese tovervierkant worden afgeleid. Bijvoorbeeld:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Dit is een variant van het Chinese tovervierkant.

32	72	16
24	40	56
64	8	48

Alle getallen vermenigvuldigd met 8 geeft nevenstaand resultaat.

Dit is weer een echt tovervierkant.

5	5	5
5	5	5
5	5	5

Trek nu dit onechte tovervierkant er af.

27	67	11
19	35	51
59	3	43

Het verschil is weer een echt tovervierkant.

19	38	0
0	19	38
38	0	19

Trek nu het nevenstaande onechte tovervierkant er van af.

8	29	11
19	16	13
21	3	24

Het resultaat is weer een echt tovervierkant!

Oefening 5.

Ga uit van het vierkant op blz. 62 en maak er het volgende toervierkant van.

29	14	17
8	20	32
23	26	11

De gravure 'Melancholie', werd in 1514 door de Duitse schilder en etser Albrecht Dürer gemaakt.

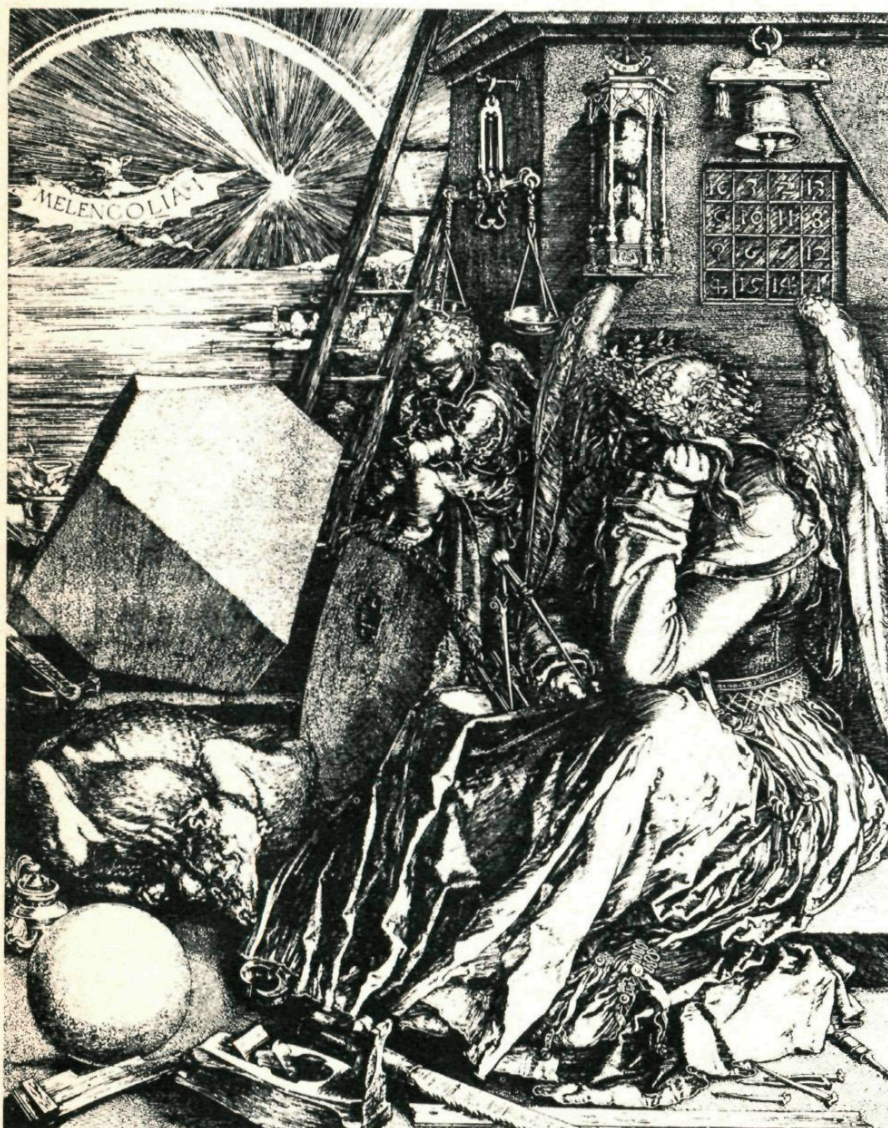
Hierin staat dit tovervierkant.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Is dit een echt of een onecht tovervierkant?

Het blijkt een wel heel bijzonder tovervierkant te zijn!

Je kunt dit zelf ontdekken aan onderstaande figuren waarin de kwadraten en de derde machten van de getallen uit Dürer's tovervierkant opgenomen zijn.



256	9	4	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

4096	27	.	.
125	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Oefening 6.

- Is het tovervierkant van Dürer een echt of een onecht.
- En het kwadraten vierkant?
- Zou het voor de derde machten ook kloppen?

8818		8188	
8181	1888		1118
1811	8118	1181	
1188			

Oefening 7.

- Dit is een echt tovervierkant.
Vul het verder in. Het blijkt dat slechts de cijfers 1 en 8 nodig zijn.

- Houd deze figuur eens voor de spiegel.
Krijg je nu weer een tovervierkant? Is het tovergetal hetzelfde gebleven?

Het tovervierkant op de rug van het schildpad is een 3×3 vierkant. Het wordt gevormd door de natuurlijke getallen 1 t/m 9.

Oefening 8.

- Wat is het tovergetal van dit vierkant?
- Wat is de som van alle getallen van dit vierkant?

Het tovervierkant van Dürer is een 4×4 vierkant. Het wordt gevormd door de natuurlijke getallen 1 t/m 16.

- Wat is het tovergetal en wat is de som van alle getallen?

Stel je nu voor, dat je een 5×5 vierkant hebt met de natuurlijke getallen 1 t/m 25.

- Bepaal het tovergetal van dit vierkant.



Denkertjes

- Stel een tovervierkant samen van de natuurlijke getallen 1 t/m 25.

°Met koningspassen en paardesprongen vooruit

Bij dammen en schaken worden de schijven en stukken telkens per zet volgens bepaalde spelregels verplaatst. Zo mag je bij dammen een schijf per zet één hokje verder plaatsen in de diagonaalrichting. Bij schaken zijn er bij elk stuk andere schuifregels. Zo beweegt een looper in de stijl van een damsteen. Een koning kan een stap recht of schuin zetten. Een paard maakt wel de merkwaardigste sprongen: een recht gevolgd door een schuin of in omgekeerde volgorde. Dat heet de paardesprong. De hoek tussen de beide verplaatsingen is steeds 135° .

We denken ons vierkantenbord nu in beide richtingen oneindig uitgestrekt en stellen de vraag hoe het mogelijk is vanuit een zeker hokje een willekeurig ander hokje te bereiken. Is er een regel te ontwerpen die men blindelings kan opvolgen? Men noemt dat in de wiskunde een algoritme. Is misschien ook het kleinste aantal zetten daarvoor te berekenen?

Het maakt dan natuurlijk wel verschil of je met koningspassen of met paardesprongen vooruit wilt.

Onderzoek

Bij ons onderzoek kunnen we net zo goed steeds vertrekken van het hokje helemaal links onder in de hoek. Dit hokje van ons vierkantenbord nummeren we met (0,0). Het hokje met bijvoorbeeld (4,7) betekent dan het hokje 4 passen naar rechts en 7 omhoog.

1. Eén hokje horizontaal of één verticaal

Als eerste stapmogelijkheid nemen we: schuif telkens één hokje verder in de x - of y -richting.

De algoritme is erg eenvoudig: om vanuit (0,0) het hokje (a,b) te bereiken handelt men als volgt:

1. maak a stappen in de x -richting
2. maak vervolgens b stappen in de y -richting
3. klaar

Zoals fig. 1 laat zien zijn daar nog al wat variaties op mogelijk. Maar bovengenoemd recept werkt in ieder geval feilloos.

Het minimale aantal stappen is nu ook niet moeilijk te bepalen, namelijk $a + b$. Zo heb je om (4,5) te bereiken minimaal 9 zetten nodig.

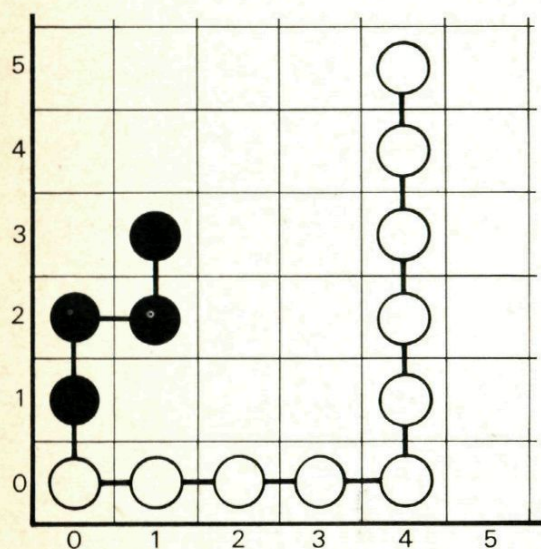


Fig. 1. 'Recht' in minstens 9 zetten van (0,0) naar (4,5)

2. Schuin voorwaarts

We onderzoeken nu een manier van schuiven waarbij enkel verplaatsingen in de diagonaalsrichting zijn toegestaan, vooruit of terug. Dat lijkt wat op dammen. Als je nu weer vanuit (0,0) vertrekt kun je op deze manier alleen vakjes bereiken waarvan de som van a en b even is. Onderzoek dat maar. De gearceerde vakjes in fig. 2a zijn dus onbereikbaar. Je kunt dus wel in (2,2) komen of in (1,3) maar niet in (2,1). Omdat bij iedere zet beide coördinaten met 1 stijgen blijft immers de som even.

Weer stellen we de vraag: is er een algoritme op te stellen om vanuit het eerste hokje, (a,b) te bereiken? Hierbij is de voorwaarde $a + b$ is even.

De algoritme luidt aldus: (zie fig. 2a)

1. maak $\frac{1}{2}(a+b)$ keer een beweging schuin omhoog (één naar rechts, één omhoog)
2. als $a = b$ dan regel 5 vervolgen
3. als $a \geq b$ dan vervolgens nog $\frac{1}{2}(a-b)$ keer schuin omlaag (één rechts, één omlaag)
4. als $a < b$ dan vervolgens nog $\frac{1}{2}(b-a)$ keer schuin omhoog (één links, één omhoog)
5. klaar

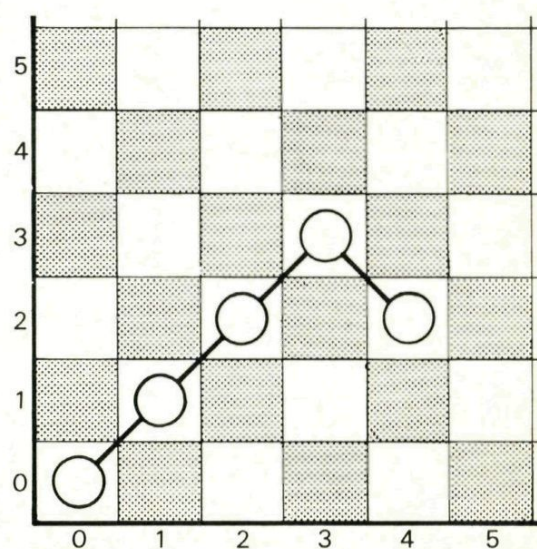


Fig. 2a. 'Schuin' in minstens 4 zetten van (0,0) naar (4,2)

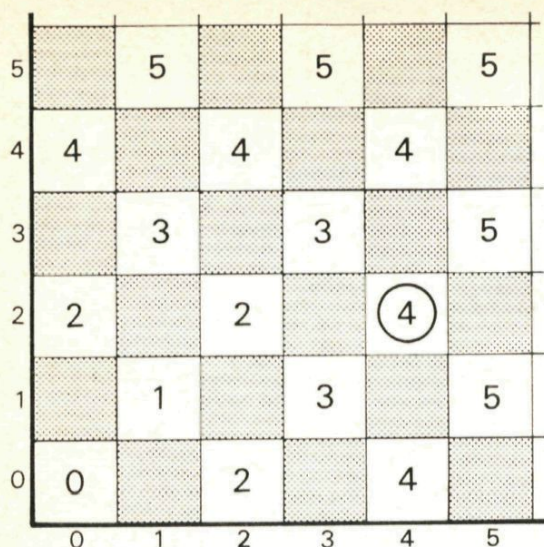


Fig. 2b. Minimaal aantal zetten om schuin van (0,0) in (a,b) te komen

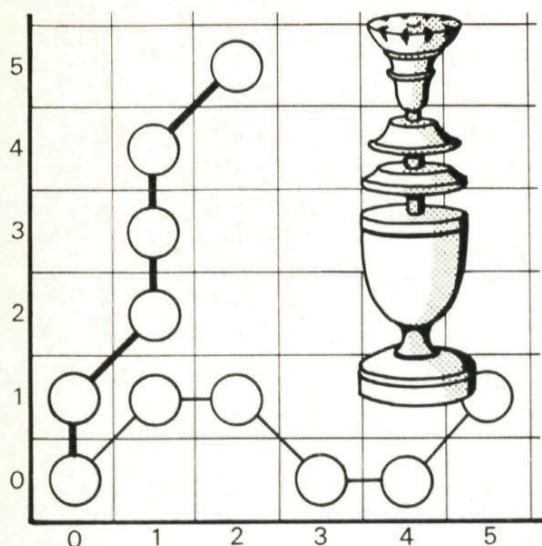


Fig. 3a. Met minstens 5 koningspassen van (0,0) naar (2,5)

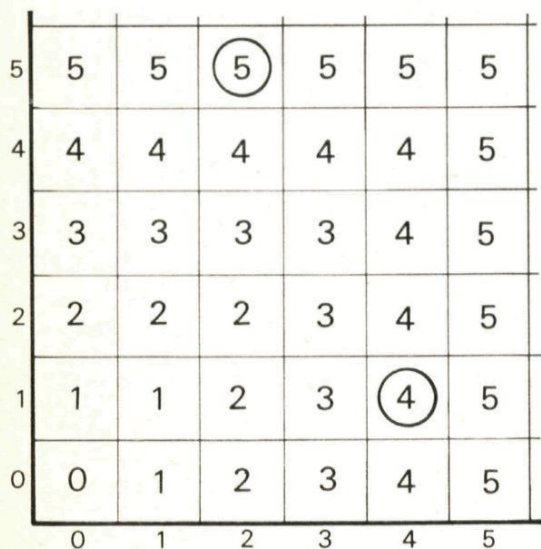


Fig. 3b. Minimaal aantal koningspassen om van (0,0) in (a,b) te komen

Hoeveel schuine stappen zijn er nu minstens nodig om vanuit (0,0) in (a,b) te komen? Je zou er experimenteel achter kunnen komen door gewoonweg van een aantal gevallen de uitkomsten op te schrijven. Dat hebben we gedaan in tabel fig. 2b.

Na wat speuren blijkt de regelmaat.

Het aantal zetten, minimaal nodig om een hokje te bereiken is het grootste van de beide getallen a en b . Dus om bijvoorbeeld (7,19) te bereiken zijn bij deze wijze van schuiven minstens 19 zetten nodig. Heb je opgemerkt dat de uitkomstentabel symmetrie vertoont ten opzichte van de 45° -lijn? Dat geldt trouwens ook voor het voorgaande en de nog komende gevallen.

3. Met koningspassen vooruit

We kiezen nu voor een gemengde wijze van bewegen: één stap in de x -richting of één in de y -richting of één stap schuin. In fig. 3a is aangegeven hoe je op die manier in 5 stappen (2,5) kunt bereiken. Bij deze wijze van voortschrijden is weer elk hokje bereikbaar. De koning bij het schaakspel mag zich deze wijze van verplaatsen veroorloven.

Als algoritme kunnen we hier elk van beide voorgaande aanhouden.

Interessanter lijkt het naar de kortste weg te zoeken ofwel het kleinste aantal zetten. Langs experimentele weg ontstaat tabel 3b. We treffen hier dezelfde regel als in het voorgaande geval.

Om dus bijvoorbeeld (23,15) te bereiken zijn minimaal 23 zetten nodig. Test dat zelf maar.

4. Met paardesprongen voorwaarts

Tot dusver is het ons gelukt de wegen en aantallen te vinden. Nu de paardesprong. Hierbij gaan we telkens een combinatie-sprong maken van 'één recht, één schuin'. De hoek tussen beide richtingen kiezen we steeds stomp (135°). Om het vakje

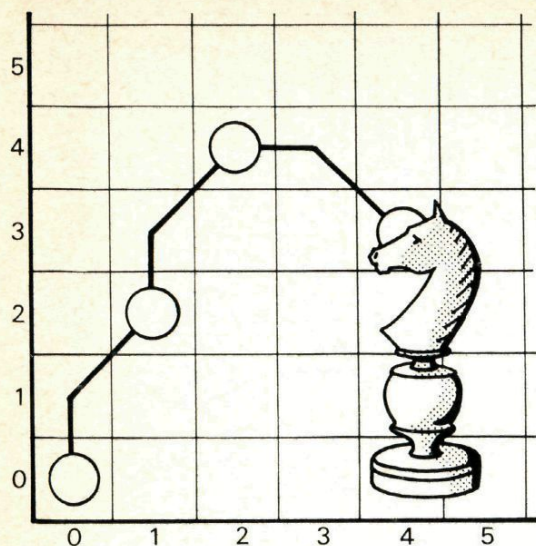


Fig. 4a. Met minstens 3 paardesprongen van (0,0) naar (4,3)

5	3	4	3	4	3	4
4	2	3	2	3	4	3
3	3	2	3	2	3	4
2	2	1	4	3	2	3
1	3	4	1	2	3	4
0	0	3	2	3	2	3
	0	1	2	3	4	5

Fig. 4b. Minimaal aantal paardesprongen om van (0,0) in (a,b) te komen

8	4	5	4	5	4	5	6	5	6
7	5	4	5	4	5	4	5	6	5
6	4	3	4	3	4	5	4	5	6
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5
2	2	1		3	2	3	4	5	4
1			1	2	3	4	3	4	5
0	0		2	3	2	3	4	5	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	K ₀		K ₁		K ₂		K ₃		K ₄

Fig. 4c. Bord verdeeld in kransen van getallenparen (de 4 opengelaten hokjes hebben uitkomsten die de regelmaat verstoren).

(4,3) te bereiken zijn minstens 3 van dergelijke sprongen nodig. Als je het zelf probeert zul je ontdekken dat het nog vrij moeilijk is om te vinden hoe je met paardesprongen (4,3) kunt bereiken. Met minder dan 3 sprongen zal het je niet lukken (fig. 4a).

Hoewel (1,1) dichtbij lijkt te liggen zijn er toch 4 sprongen nodig om het te bereiken, tenzij we het paard toestaan even een paardebeen in een naburig kwadrant te zetten. Dan worden het er 2. Voor de hokjes (1,0) en (0,1) gaan het er in ieder geval 3 worden. In fig. 4b staan onze uitkomsten weer verzameld. Merk de symmetrie weer op. Het kost dus altijd evenveel paardesprongen om (a,b) als (b,a) te bereiken.

Bij nader inzien blijkt de getallenverdeling niet zo chaotisch als het aanvankelijk lijkt. Je zou daartoe het bord moeten verdelen in kransen (fig. 4c); in elk daarvan staan steeds slechts 2 getallen. Enkele hokjes vallen hierbij uit de toon, te weten (0,1), (1,0), (1,1) en (2,2). We laten die hokjes maar even buiten beschouwing. In zo'n krans staat steeds een even en een oneven getal. Er staat kennelijk een even getal, als $(a+b)$ ook even is. Is $(a+b)$ oneven dan staat in het hokje ook een oneven getal.

Welke getallen staan er dan in een bepaalde krans?

In krans 3 staan de getallen 3 en 4; in K₄ de getallen 4 en 5.

in krans K_n staan dus de getallen (n) en (n+1).

We zouden nu een regel willen vinden om te voorspellen welk getal in een bepaald hokje komt.

Daartoe moeten we, met uitzondering van de genoemde 4, eerst een regel hebben om te bepalen tot welke krans een zeker hokje (a,b) behoort. Zonder bewijs geven we daarvoor de volgende regel:

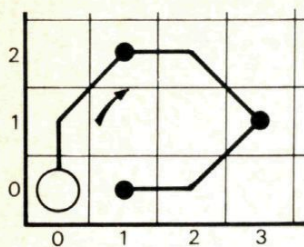


Fig. 5a. In 3 sprongen naar (1,0) of (0,1)

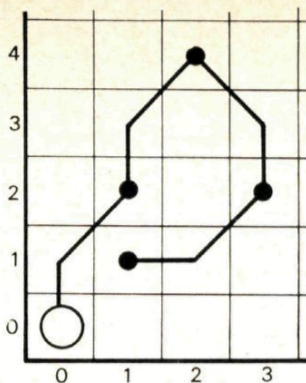


Fig. 5b. In 4 sprongen naar (1,1)

het nummer van de krans waartoe (a,b) behoort is het grootste gehele getal of het eerst daaronder komende van de volgende 3 uitkomsten:

$$\frac{1}{2}(a+1), \frac{1}{3}(a+b+2) \text{ en } \frac{1}{2}(b+1)$$

Hier een voorbeeld:

Volgens fig. 4c zijn minimaal 5 stappen nodig om het hokje (7,4) te bereiken.

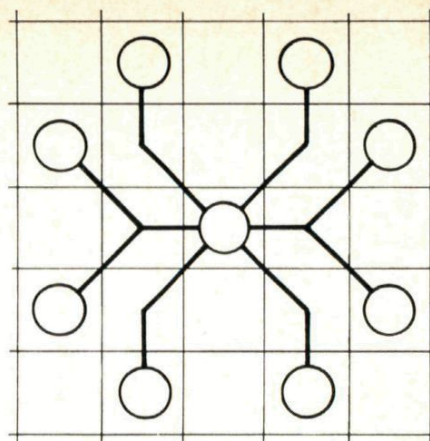


Fig. 6. Vanuit een zeker punt zijn 8 naburige punten via één paardesprong bereikbaar

Hoe is dat te berekenen?

Neem $\frac{1}{2}(7+1)$, $\frac{1}{3}(7+4+2)$ en $\frac{1}{2}(4+1)$ ofwel 4, $4\frac{1}{3}$ en $2\frac{1}{2}$. Het bedoelde getal is dus 4. Dat betekent dat (7,4) tot krans 4 behoort. In krans 4 staan de getallen 4 en 5. Omdat $7+4$ oneven is, wordt het antwoord 5. Probeer de regel nu zelf maar op andere gevallen toe te passen.

Denkertje



5. Gevraagd een algoritme ofwel stapsgewijs voorschrift dat blindelings kan worden opgevolgd, volgens welk men vanuit (0,0) een ander vakje (a,b) in het eerste kwadrant kan bereiken door middel van paardesprongen zoals beschreven in bijgaand artikel.

De grootte van het aantal sprongen interesseert ons daarbij niet.

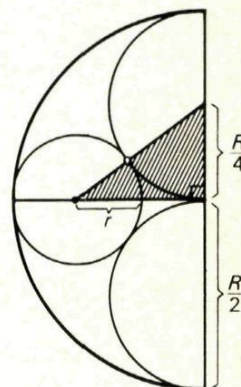
Oplossingen van de denkertjes

1. De figuur op de omslag: Drie gele cirkels in één kwart van de grote cirkel vragen elk een afzonderlijk bewijs.

a. Pas de stelling van Pythagoras toe op de gearceerde driehoek:

$$\left(\frac{R}{4}\right)^2 + \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 = \left(\frac{R}{4} + r\right)^2$$

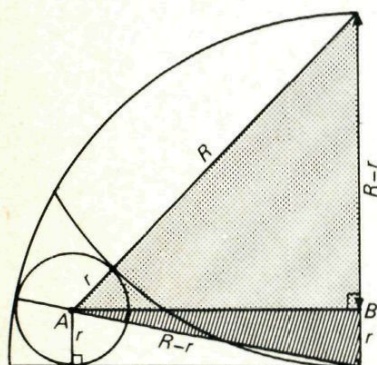
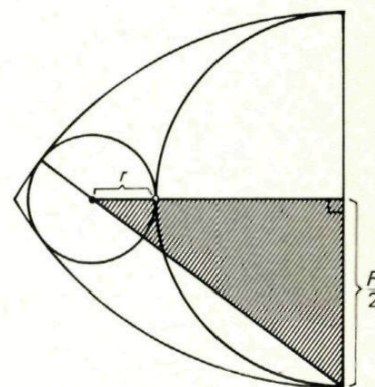
Werk dit uit en je krijgt $r = \frac{R}{6}$



b. Ook dit bewijs is niet moeilijk:

$$\left(\frac{R}{2} + r\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = (R - r)^2$$

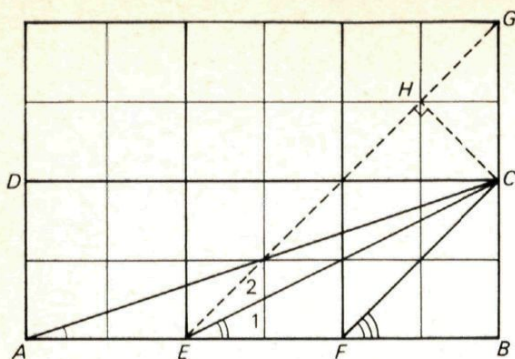
Hieruit volgt weer $r = \frac{R}{6}$



c. Dit is iets ingewikkelder. Als je de stelling van Pythagoras op de gestippelde driehoek wilt toepassen, blijkt dat de lengte van AB niet direct uit de figuur is af te lezen. Dit moet eerst berekend worden in de gearceerde driehoek. We moeten dus twee maal de stelling van Pythagoras toepassen en vinden dan uiteindelijk ook weer $r = \frac{R}{6}$.

2. We geven hiervoor twee bewijzen:

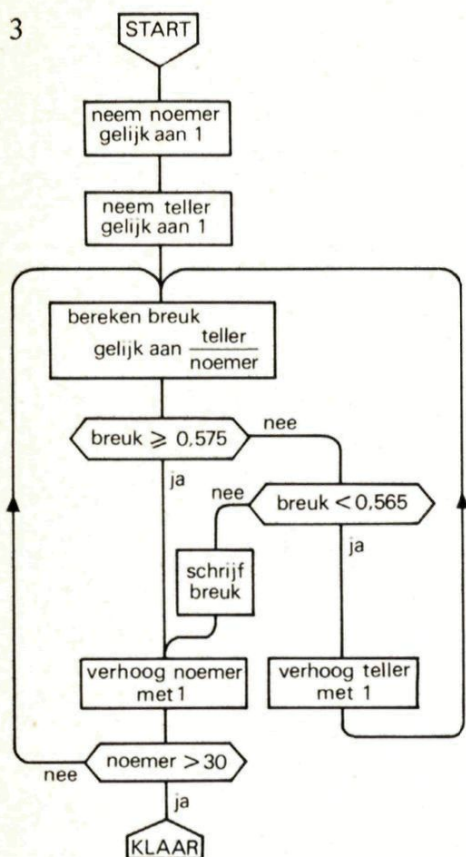
a. We hebben de figuur verdubbeld en twee hulplijnen getrokken (gestippeld). $ABC \sim EHC$, want ze zijn rechthoekig en de rechthoekszijden van beide driehoeken verhouden zich als 3 : 1. Dus $\angle A = \angle E_2$
 $\angle E_1 + \angle E_2 = 45^\circ = \angle F$.



b. Een goniometrisch bewijs gaat als volgt: (de hulplijnen zijn nu niet nodig)

$$\operatorname{tg} \angle F = 1, \operatorname{tg} \angle E = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \angle A = \frac{1}{3} \quad \operatorname{tg} (\angle A + \angle E) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1 = \operatorname{tg} \angle F \quad \text{dus } \angle A + \angle E = \angle F$$

3

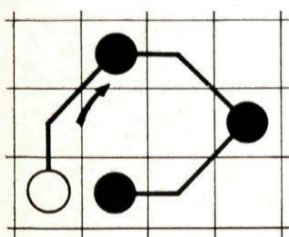


4

8	12	1	25	19
4	23	17	6	15
20	9	13	2	21
11	5	24	18	7
22	16	10	14	3

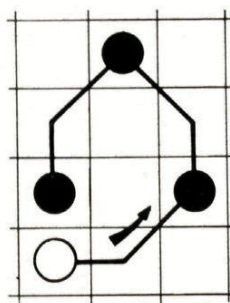
- 5 a. maak a keer de sprongcombinatie van type A
b. vervolgens b keer de combinatie van type B
c. klaar
In totaal worden dan $3(a + b)$ sprongen gemaakt.

Sprongcombinatie A.



3 sprongen om één hokje naar rechts te komen.

Sprongcombinatie B.



3 sprongen om één hokje naar boven te komen.

Oplossing van scherpzinnige speurders gevraagd

$1 + {}^3\log 27 - {}^2\log 8 = 1$	${}^2\log 1 + 27 - 3 - 8 = 16$
$\frac{27}{3} {}^2\log 8 + 1 = 2$	${}^3\log 1 + 27 - 2 - 8 = 17$
$27 - ({}^2\log 1 + 3 \times 8) = 3$	$27 - 1 \cdot 3 \cdot {}^2\log 8 = 18$
$\frac{27}{3} \cdot {}^2\log 8 + 1 = 4$	$27 - 8 - (2+3)\log 1 = 19$
${}^3\log 27 + {}^2\log 8 - 1 = 5$	$27 - {}^2\log 8 - 3 - 1 = 20$
$1 \times ({}^3\log 27 + {}^2\log 8) = 6$	$27 - {}^2\log 8 - 3^1 = 21$
$1 + ({}^3\log 27 + {}^2\log 8) = 7$	$8 \times {}^3\log 27 - 2^1 = 22$
$(1+2) \cdot \frac{8}{3} \log 27 = 8$	$8 \times {}^3\log 27 - 1^2 = 23$
$1 \times ({}^3\log 27 \times {}^2\log 8) = 9$	$1^2 \cdot 8 \cdot {}^3\log 27 = 24$
$1 + {}^3\log 27 \times {}^2\log 8 = 10$	$8 \cdot {}^3\log 27 + 1^2 = 25$
$3 + 8 + (2+27)\log 1 = 11$	$8 \cdot {}^3\log 27 + 2^1 = 26$
$8 + (1+2)\log (3 \times 27) = 12$	$1 \times ({}^2\log 8)^{{}^3\log 27} = 27$
$2 + 3 + 8 + {}^2\log 1 = 13$	$1 + ({}^2\log 8)^{{}^3\log 27} = 28$
$1 + 2 + 8 + {}^3\log 27 = 14$	$(2 + 8) \cdot {}^3\log 27 - 1 = 29$
$2 \cdot {}^3\log 27 + 1 + 8 = 15$	$1 \cdot (2 + 8) \cdot {}^3\log 27 = 30$

INHOUD

1. Scherpzinnige speurders gevraagd 49
2. Meetkunde in de paraplu 50
3. Een gezellig relatiespel 51
4. Een derde spelvorm met extra punten 53
5. De schijfintegrator 56
6. Een denkertje doordacht 58
7. Tovervierkanten 62
8. Met koningspassen en paardesprongen vooruit 66
9. Oplossing van de denkertjes 71
10. Oplossing van scherpzinnige speurders gevraagd 73

PYTHAGORAS

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. Elsenaar, Harderwijk.

W. Kleijne, Heerenveen.

Ir. H. Mulder, Breda.

G. A. Vonk, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Bruno Ernst, Muurhuysen 11, Amersfoort.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, f 6,— per jaargang.

Voor anderen f 10,—.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

