

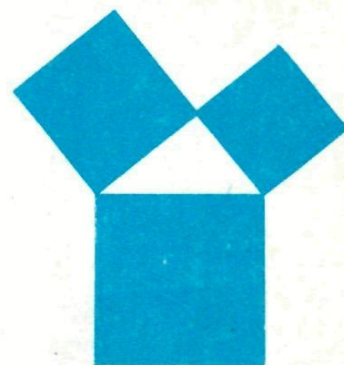


4

jaargang 15 / februari 1976

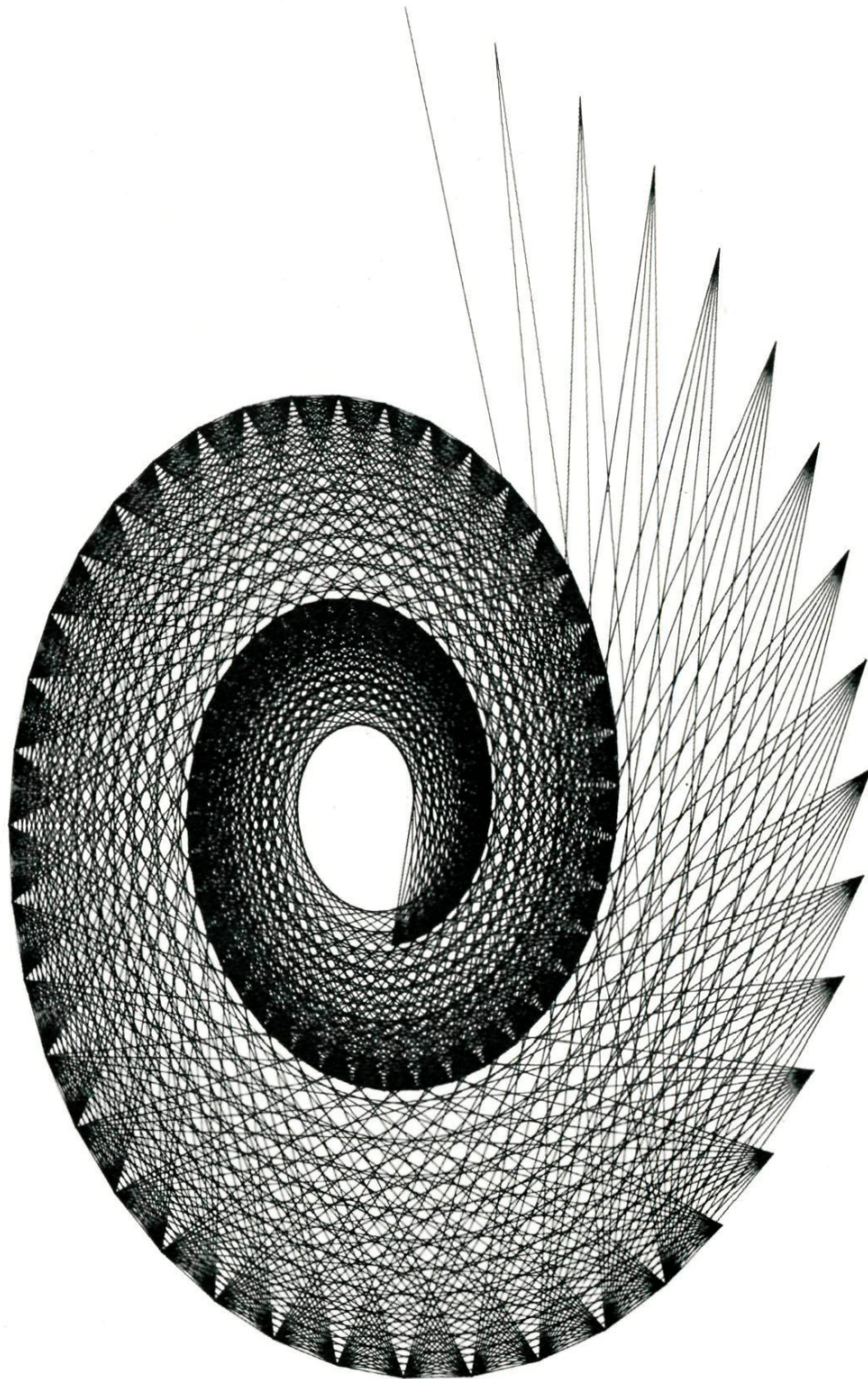
wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Een computertekening bedacht door Michel Bel. Een punt van een spiraal is telkens met een aantal volgende punten verbonden. Daarna is de hele spiraal in één richting samengedrukt.

BIJ DE AFBEELDING OP DE OMSLAG

Detail van het beroemde schilderij: DE SCHOOL VAN ATHENE, van Rafaël. Hier zien we Euclides temidden van vier van zijn leerlingen. De aardglobe en de hemelglobe (met sterren) die Ptolemeus en Zoroaster in de handen houden, zijn in deze perfecte perspectivische afbeelding *niet* volgens de perspectiefwetten afgebeeld. Zie het artikel op pag. 75.

°Napoleon en zijn vrijetijdsbesteding

Begin 1796 trok de jonge Franse generaal Bonaparte als een tweede Hannibal over de Alpen, versloeg de Oostenrijkse legers en hield als overwinnaar op 15 april zijn intocht in Milaan, waar veel vooraanstaande Italianen hem begroetten als bevrijder. Op 17 oktober 1797 werd de vrede van Campo-Formio gesloten, waarna hij terugkeerde naar Parijs.



Zo'n beknopt stukje geschiedenis vertelt niet veel over Napoleon. In het bijzonder niet over zijn doen en laten van elke dag. Heeft hij zich daar in Italië 18 maanden lang laten bejubelen, was hij overbezet met het maken van nieuwe plannen, of kon er tijd overschieten voor totaal andere ontspannende bezigheden? Heeft hij misschien gevist in de Po?

In elk geval had hij diepgaande belangstelling voor wiskunde, speciaal de meetkunde. De situatie was gunstig voor hem. De geleerde Mascheroni legde juist de laatste hand aan zijn boek 'Geometria del Compasso'. Hij bewonderde Napoleon en wist hem voor zijn werk te interesseren. De generaal, voor zijn land bovendien actief importeur van nieuwe ideeën, luisterde aandachtig. Dat was echt iets voor hem: een aparte soort wiskunde, waarin meet-

kundige problemen werden opgelost met uitsluitend de passer als gereedschap.

Wat was nu het karakteristieke van Mascheroni's werk? Wel, doe als Napoleon, grijp de passer en construeer mee aan de hand van een tweetal voorbeelden.

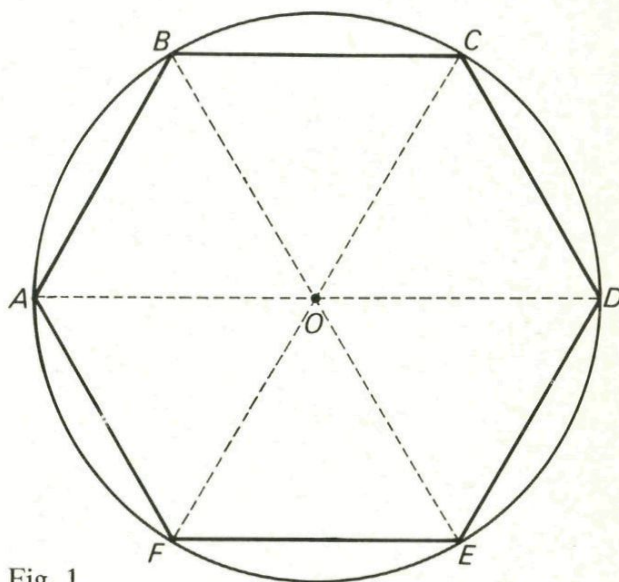


Fig. 1.

Fig. 1, de bekende regelmatige zeshoek met omgeschreven cirkel, wordt ook nu nog wel geconstrueerd precies zoals Mascheroni het deed. De bepaling van de in dit verband belangrijke punten gaat als in fig. 2:

r is de afstand van de punten A en O , die gegeven zijn.

Trek cirkel $(O, r) = c_1$

cirkel $(A, r) = c_2$, waaruit punt B

cirkel $(B, r) = c_3$, waaruit punt C

cirkel $(C, r) = c_4$, waaruit punt D

Let er nu op, dat de punten A , O en D op een rechte lijn liggen en dat O het midden is van lijnstuk AD .

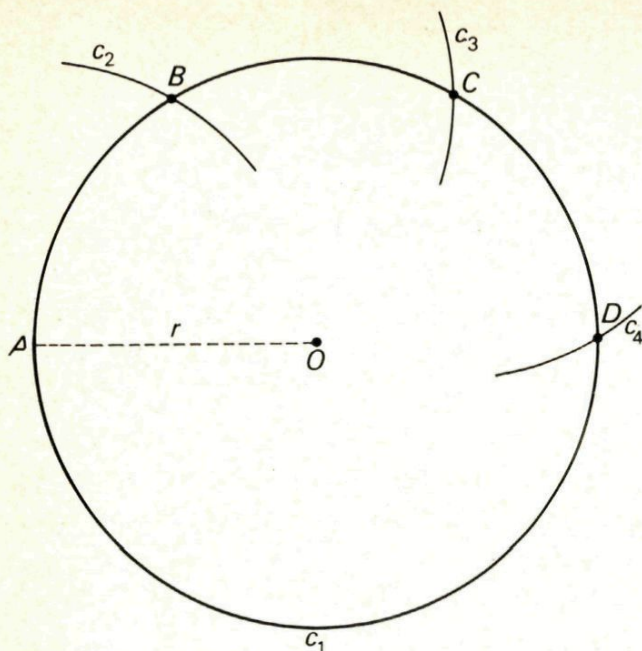


Fig. 2.

Opmerking:

Desgewenst mag lijnstuk AD nu met behulp van de liniaal getrokken worden, want de passer heeft de ligging al bepaald. Het tweede voorbeeld is: Construeer het midden van een gegeven lijnstuk AO . Fig. 3 laat eerst nog eens zien, hoe dat met passer en liniaal gebeurt. De *passer* trekt de bogen, die de punten P en Q bepalen. Snijpunt M is de prestatie van de *liniaal*, als met behulp daarvan lijn PQ wordt getrokken.

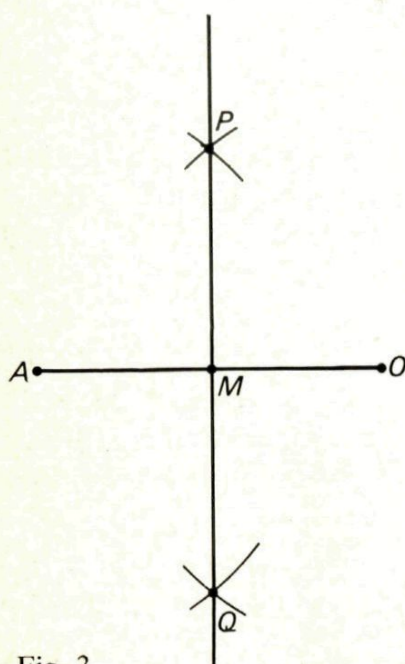


Fig. 3.

Nu wordt de liniaal buiten dienst gesteld, zodat in fig. 4 de passer alleenheerser is. De punten A en O zijn gegeven.

Bepaal de punten B , C en D volgens fig. 2. Trek cirkel $(D, 2r) = c_5$, waaruit de punten P en Q .

Trek de cirkels $(P, r) = c_6$ en $(Q, r) = c_7$, waaruit punt M ontstaat. M moet nu het gevraagde midden van lijnstuk AO zijn. Dat is waar, want:

AD is symmetrie-as, zodat c_6 en c_7 elkaar snijden op AD , en M dus op AD ligt.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle PAM \\ \text{is gelijkbenig} \\ \triangle DAP \\ \text{is gelijkbenig} \\ \angle A \text{ gemeen} \end{array} \right\} \begin{array}{l} hhh \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \triangle PAM \sim \triangle DAP \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \text{evenredigheids} \\ \text{matrix:} \end{array} \left(\begin{array}{cc} PA & AM \\ DA & PA \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} r & AM \\ 2r & r \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$PA = AO = r$$

M is het midden van lijnstuk AO .

Uitsluitend werken met de passer als gereedschap voert soms tot ingewikkelde constructies, die op 'normale' manier, dus bij inschakeling van de liniaal, eenvoudiger kunnen worden uitgevoerd. Maar ja, 't is echt iets voor liefhebbers en dat waren Napoleon en Mascheroni.

Mascheroni kon het zo goed vinden met Bonaparte, dat hij bij de publicatie van zijn boek dit werk opdroeg aan zijn geëerde gast-veldheer. In de opdracht prees hij de generaal, wel wat hoogdravend voor ons gevoel, als volgt:

Aan Bonaparte Italicus.

Ik heb U toch met dezelfde onoverwonnen hand, welke de koninkrijken verdeelt en aan Wenen de vrede dicteert, met mij door middel van cirkelbogen de kromme lijn van de vertrouwde passer zien verdeelen.

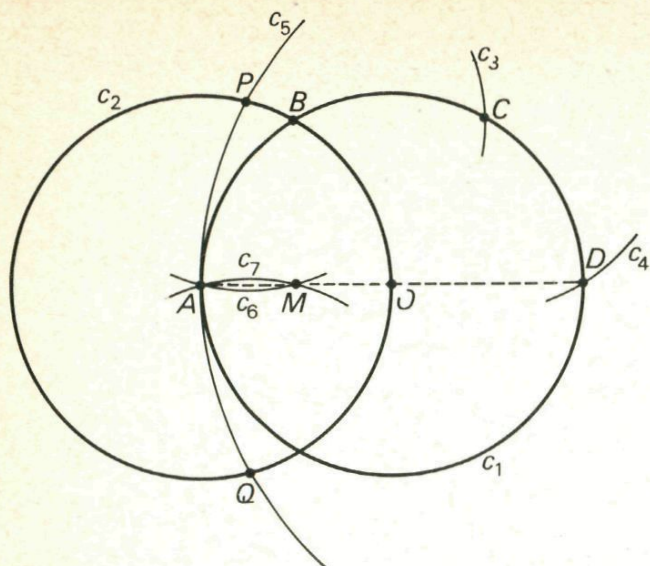


Fig. 4.

Ik heb U met de moed van een meester-wiskundige der oudheid de gesloten burchten van moeilijke problemen zien bestormen en herinnerde mij, dat Gij als een nieuwe Hannibal de Alpen overtrok om Uw geliefde Italië te bevrijden . . .

Met een aureool van onoverwinnelijkheid rond zijn persoon en met de constructies in zijn bagage keerde de generaal terug naar Parijs, waar ook Mascheroni weldra arriveerde als lid van een internationale commissie voor de bestudering van het

nieuwe metriek stelsel. Begin december — let er op hoe voortvarend hij was — woonde Bonaparte een vergadering bij van Franse wis- en natuurkundigen, waaronder de wiskundigen Lagrange en Laplace. Daar demonstreerde hij zelf enkele passerconstructies. Niemand kende blijkbaar oudere publicaties op dit gebied, iedereen werd enthousiast en Laplace zei: 'Nous attendions tout de vous, général, excepté de leçons de mathématiques.' De kranten prezen Napoleon en roemden Mascheroni, velen wilden meer weten en overhaast werd een Franse vertaling van het werk verzorgd: 'Géométrie du Compas'.

Al gauw werd Napoleon geheel in beslag genomen met andere zaken. Hij vertrok naar Egypte om daar de Engelsen te bestrijden. Wat Mascheroni betreft, toen de commissie voor het metriek stelsel in 1799 klaar kwam, werd er in Italië weer gestreden, zodat hij niet naar huis kon. Hij stierf 18 juli 1800 te Parijs. Zijn werk raakte op de achtergrond, doordat nieuwere ontwikkelingen op wiskundig terrein de aandacht opeisten.

'De globes op een schilderij van Rafaël

In de jaren 1509 en 1510 beschilderde Rafaël de muren van een van de zalen van het Vaticaan te Rome (de stanza della segnatura). Een van deze muurschilderingen: 'De school van Athene', zie je hier afgebeeld (fig. 1) terwijl een detail in kleur op de omslag staat.

Van een aantal der afgebeelde personen weten we met zekerheid wie ze voorstellen. Vooraan links onder vinden we Pythagoras (met het boek); op het vierkant ernaast zien we Michel Angelo. Helemaal in het midden onder de boog staan Plato (links) en Aristoteles (rechts). Op de trap zit Diogenes.

Het gaat ons echter om de rechterkant van het schilderij, waarvan een gedeelte op de omslag wat groter is weergegeven. De gebogen figuur die met de passer een tekening voltooit (een vergroting van deze tekening zie je in fig. 2) is Euclides, de auteur van het grondlegend wiskundig werk, de Elementen.



Fig. 1.

Vier leerlingen omringen hem. Op de kraag van het kleed van Euclides heeft Rafaël het schilderij gesigneerd. Het is op de reproductie niet goed te zien, maar er staat: RVSM (Raphaël Vrbinas Sua Manu).

De twee figuren aan de rechterrاند zijn: Rafaël zelf, de enige die vanuit het schilderij naar de toeschouwer kijkt, en Sodoma (witte mantel en hoed), die samen met Rafaël de opzet voor dit schilderij maakte.

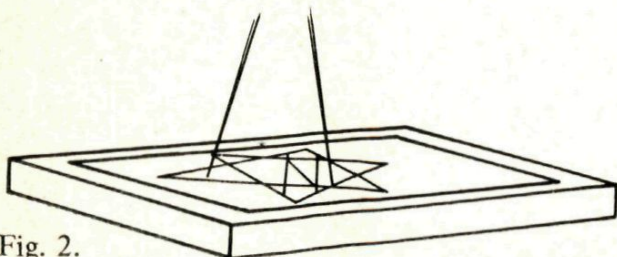


Fig. 2.

De twee globes

Nog niet vernoemd zijn de personen, die de beide globes in de hand houden: de perzische wijsgeer Zoroaster met de hemelglobe, en Ptolemeus, de bekendste astronoom uit de Griekse oudheid, met de aardbol.

De twee globes zijn afgebeeld als zuivere cirkels; vooral aan de hemelglobe is dit duidelijk te zien. En dit is perspectivisch helemaal fout!

Het principe van de perspectiefleer is bijzonder eenvoudig.

Het vlak waarop we de ruimte willen afbeelden (fig. 3) noemen we het tafereel. We verbinden nu het oog (O) met een willekeurig punt (A) van de ruimte. Deze verbindingslijn snijdt het tafereel in A' . Dan is A' de perspectivische afbeelding van A . Op deze manier kunnen we de hele ruimte op het tafereel afbeelden.

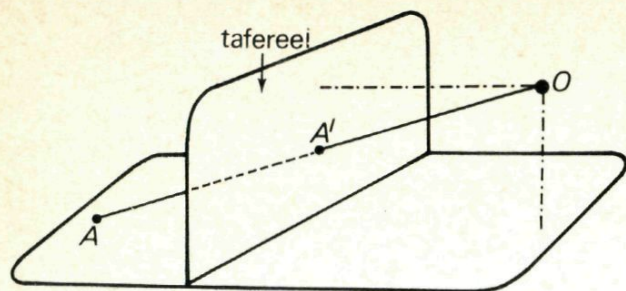


Fig. 3.

Reeds in het begin van de 15-de eeuw werd deze afbeeldingswijze door vele Italiaanse kunstenaars toegepast en een wiskundige behandeling vinden we vrij volledig in het boek: *De pictura* (Over het schilderen) van Leone Battista Alberti, geschreven in 1435.

Rafaël was goed thuis in de perspectiefleer en zijn schilderij 'De school van Athene' is dan ook, wat zijn architectuur betreft, een volmaakte perspectivische afbeelding.

Rafaël (en met hem vrijwel alle schilders en tekenaars uit latere tijden) is echter bewust afgeweken van de perspectiefwetten, waar het de weergave van mensen betrof en ook bij de afbeelding van bollen.

Als we elk schilderij maar vanuit één punt konden bekijken (het oogpunt), dan zou de sterke vertekening aan de randen van het schilderij absoluut niet opvallen: integendeel, we zouden juist een vertekening zien als deze niet was geschilderd! Maar we bekijken het schilderij ook vanuit andere punten, als we er voorbij lopen. Daarom worden mensfiguren altijd zo geschilderd alsof de verbindingslijn van oogpunt met een punt van het afgebeelde gelaat, loodrecht op het tafereel stond.

Hoe ziet de perspectivische afbeelding van een bol er eigenlijk uit?

In fig. 4 en 5 zien wij een perfecte perspectivische afbeelding van bollen. De foto's zijn niet met een lenzencamera gemaakt. Als we daar nl. vertekeningen opmerken, dan zouden die aan afbeeldings-eigenaardigheden van het lenzenstelsel geweten kunnen worden. Nee, voor deze opnamen is een gaatjescamera gebruikt en in principe geeft deze een perspectivische afbeelding. Het oogpunt ligt dan weliswaar tussen het tafereel en de ruimte die afgebeeld wordt, maar de wijze van afbeelden

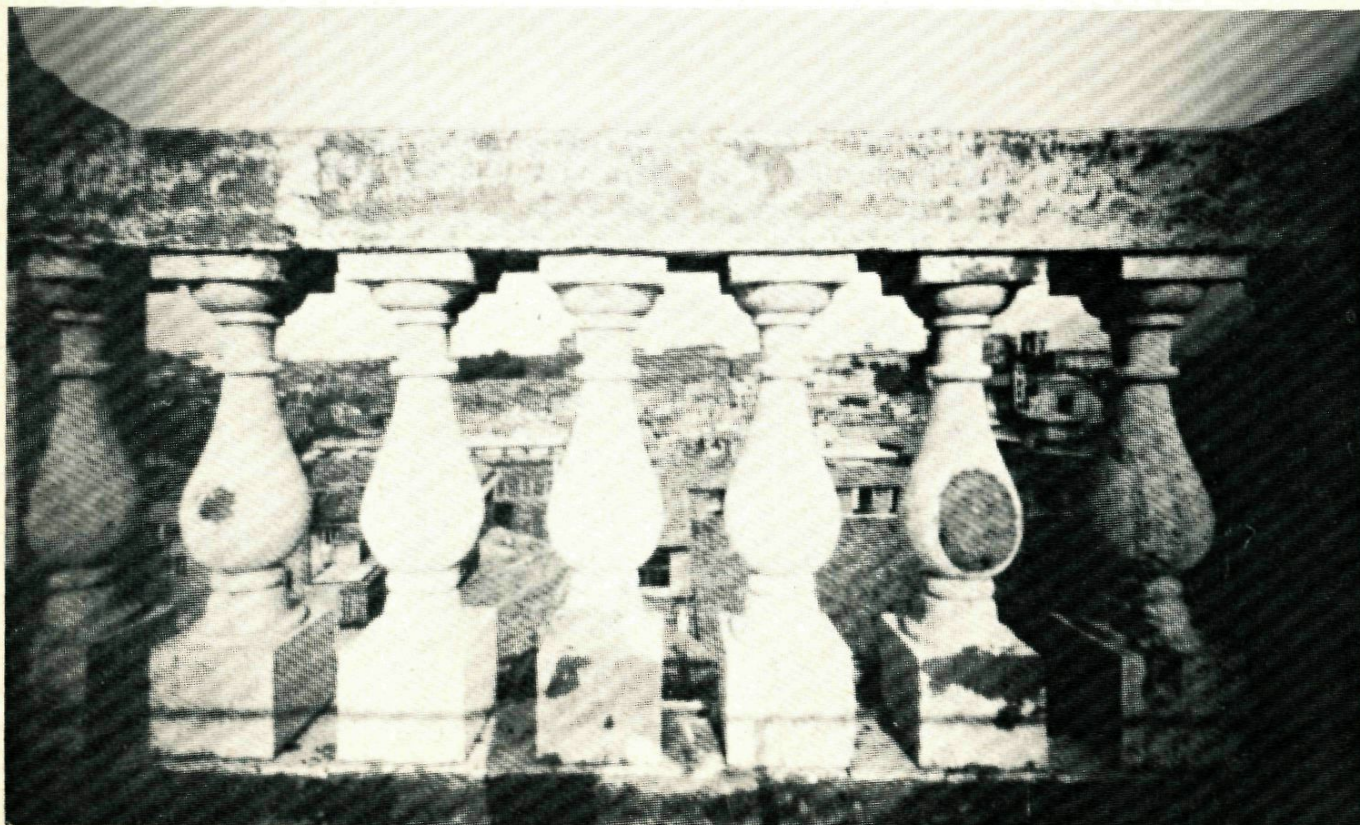


Fig. 4.



Fig. 5.

is precies dezelfde. In fig. 4 zien we dat de bollen in het midden afgebeeld worden als cirkels en verder naar de zijkanten

worden het ellipsen. In fig. 5 is nog te zien, dat de lange as van de ellips gericht staat naar het verdwijnpunt, het punt

waar alle lijnen die loodrecht op het tafereel staan, samenkomen. Hier ligt dit verdwijnpunt precies in het midden van de foto. De dunne witte lijnen die de kanten van de stenen muren markeren, komen ook in één punt op de horizon samen, maar het is duidelijk te zien dat deze lijnen niet loodrecht op het tafereel staan.

Dat een bol in het algemeen als een ellips in perspectivische afbeelding verschijnt, is als volgt gemakkelijk in te zien.

Als we vanuit het oogpunt raaklijnen aan een bol trekken, dan vormen deze raaklijnen een kegel. Alleen als de as van de kegel loodrecht op het tafereel staat is de

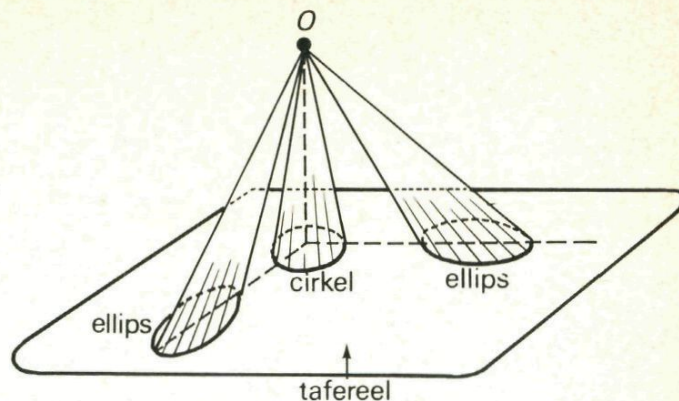


Fig. 6.

snijlijn van de kegel met het tafereel een cirkel, in alle andere gevallen een ellips. In fig. 6 is dit in beeld gebracht. De bollen zijn niet getekend, en het tafereel is horizontaal gelegd.

°Voer voor computers; recursiviteit

Soms kom je in het oplossen van problemen berekeningen tegen, die je wel gemakkelijk kunt uitvoeren maar moeilijk in een formule kunt uitdrukken. Tenzij je nieuwe notaties uitvoert. Maar dan is de moeilijkheid die notaties netjes te definiëren. We geven eerst een paar voorbeelden.

Voorbeelden

1. Bereken de som van a en b .
2. Bereken het produkt van a en b .
3. Bereken de afstand tot de oorsprong van een punt a op de getallenrechte.
4. Bereken de grootste van a en b .
5. Bereken de grootste gemeenschappelijke deler van a en b .
6. Bereken het n -de getal in de m -de regel van de driehoek van Pascal.
7. Bereken het kleinste aantal paarsprongen nodig om van vak $(0,0)$ naar vak (a,b) te komen.
8. Bereken het aantal verschillende vlaggen die men kan maken van n verschillende gekleurde horizontale banen met een keuze uit precies n kleuren.

Bekend terrein

Voorbeelden 1 en 2.

Die geef je zonder meer in algebraregels weer: $a + b$ en ab .

En we weten allemaal wat dat betekent.

Voorbeeld 3.

Een beetje moeilijker. Er is hiervoor wel een schrijfwijze, namelijk $|a|$. Maar we zullen toch precies moeten afspreken wat we onder deze 'absolute waarde' van a zullen verstaan. We moeten een *definitie* geven, geschreven in de tot nu toe bekende algebrataal. Dat kan bijvoorbeeld als volgt.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{als } a \geq 0 \\ -a & \text{als } a < 0 \end{cases}$$

Voorbeeld 4.

Zoiets eenvoudigs als de grootste van twee getallen, hoe schrijf je dat in de algebra? Het meest gebruikelijk is: $\max(a, b)$, waarin 'max' een afkorting is van 'maximum'.

Ook dit definiëren we netjes:

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{als } a \geq b \\ b & \text{als } a < b \end{cases}$$

Dit wordt ook wel uitgedrukt als:

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{als } a \geq b \\ b & \text{andersonszins} \end{cases}$$

Het is overigens ook mogelijk om voorbeeld 4 te definiëren met behulp van voorbeeld 3:

$$\max(a,b) = \frac{1}{2} |a+b| + \frac{1}{2} |a-b|$$

Hadden we eerst voorbeeld 4 gedefinieerd, dan hadden we voorbeeld 3 korter kunnen doen:

$$|a| = \max(a, -a).$$

Ga dit na met een paar getallenvoorbeelden.

°°Nieuwe wegen

Voorbeeld 5.

Hier komen de moeilijkheden. Een schrijfwijze kunnen we nog wel bedenken: $ggd(a,b)$. Maar nu een definitie die uitsluitend gebruik maakt van de bekende algebrannotaties, zoals machtsverheffen, vermenigvuldigen, delen, worteltrekken, optellen, aftrekken, uitgebreid met de inmiddels gedefinieerde 'absolute waarde' en 'max'. Dit wil niet zo gemakkelijk lukken, ook al weten we precies wat we er onder verstaan. Tenminste als $a \in \mathbb{Z}^+$ en $b \in \mathbb{Z}^+$.

Voorbeeld 6.

Je kent misschien de driehoek van Pascal.

1
 1 1 nulde regel
 1 2 1 eerste regel
 1 3 3 1 tweede regel
 1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
 1 6 15 20 15 6 1

Zowel de nummering van de regels als van de getallen in de regel laten we bij nul beginnen.

Elk getal ongelijk aan 1 ontstaat hierin door de twee er schuin boven staande getallen op te tellen. Deze driehoek wordt gebruikt om bijvoorbeeld $(a + b)^4$ uit te rekenen. Neem de vierde regel.

1 4 6 4 1

vul dalende machten van a als volgt in.

$$1a^4 \quad 4a^3 \quad 6a^2 \quad 4a \quad 1$$

en stijgende machten van b

$$1a^4 \quad 4a^3b \quad 6a^2b^2 \quad 4ab^3 \quad 1b^4$$

en nu nog plustekens en je hebt het antwoord:

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Het tweede getal uit de zesde regel is 15 (omcirkeld). Hoe geef je nu het m -de getal uit de n -de regel aan? Ook hiervoor is een schrijfwijze in gebruik: $\binom{n}{m}$ (spreek uit: n boven m). Je voelt wel aan dat je zo het aantal schrijfwijzen naar behoefte kunt uitbreiden. Maar het eind is natuurlijk zo zoek!

En wat is de definitie van $\binom{n}{m}$?

Voorbeeld 7.

Het kleinste aantal paardesprongen nodig om van vak $(0,0)$ naar vak (a,b) te komen. Je herinnert je misschien dat het artikel 'Met konings- en paardesprongen vooruit' uit het vorige nummer hiermee eindigde.



Denkertje

1. Geef een recursieve definitie van een getal uit de rij van Fibonacci:

1 1 2 3 5 8 13 21 ...

Aanwijzing: noem het n -de getal uit deze rij $\text{fib}(n)$. Bedenk dat voor bijna alle getallen geldt dat ze gelijk zijn aan de som van de twee voorgangers.

Dit kleinste aantal paardesprongen kunnen we aangeven met $kap(a,b)$, maar daarmee hebben we nog geen definitie gegeven, laat staan een methode gegeven om $kap(a,b)$ uit te rekenen.

Recursieve definities

Voorbeeld 8.

Het voorbeeld met al die vlaggen. Laten we eens de drie kleuren rood, wit en blauw in gedachte nemen. Hoeveel verschillende vlaggen kunnen we daarmee fabriceren?

rood	rood	blauw
wit	blauw	rood
blauw	wit	wit

blauw	wit	wit
wit	blauw	rood
rood	rood	blauw

Voor de bovenste baan hebben we de keus uit drie kleuren. Hebben we die keus gemaakt, dan kunnen we voor de middelste baan altijd nog kiezen uit de twee resterende kleuren. Dus hebben we 3×2 mogelijkheden. Voor de onderste baan is de enige overblijvende kleur ter beschikking. Bij elk van de 3×2 mogelijkheden één onderste baan, dus $3 \times 2 \times 1 = 6$ mogelijkheden. Het is nu wel in te denken dat een vlag van 5 banen van 5 verschillende kleuren op $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ manieren gemaakt kan worden. Men kort deze berekening af met $5!$ (Spreek uit: vijf faculteit.) Ook nu is er een schrijfwijze voor het aantal mogelijkheden voor een n -banen vlag: $n!$ Wat is hiervan de definitie?

Van het laatste voorbeeld zul je misschien zeggen dat een definitie niet zo moeilijk is.

$$n! = n \times \dots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Helemaal niet gek, maar als je goed kijkt zie je dat deze definitie niet opgaat voor $n = 2$ of $n = 1$. Die stippeltjes suggereren

trouwens iets van 'ga zo verder tot aan', wat een goed verstaander wel begrijpt. Iemand die dwars wil wezen en op de stippeltjes invult: $5\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$ kun je niet eens echt ongelijk geven. Stippeltjes zijn nu eenmaal niet zo duidelijk.

Maar hoe kan het dan wel? We gaan eens na hoe we bijvoorbeeld $5!$ uitrekenen. $5! = 5 \times$ iets. Wat is dat iets? Juist. Vier faculteit. Dus $5! = 5 \times 4!$ Hierop baseren we onze definitie:

$$n! = n \times (n - 1)!$$

Nu is het verschrikkelijk gevaarlijk om een begrip te definiëren met behulp van dat begrip zelf.

Vroeger stond er in de wegenverkeerswet een definitie van voertuig, die ongeveer als volgt luidde.

Een *voertuig* is een motorrijtuig of een bespannen of onbespannen wagen of rijwiel of tram of enig ander *voertuig*.

Is met deze definitie na te gaan of een aap op rolschaatsen een voertuig is? Wel, het is geen motorrijtuig, geen paard en wagen, geen handkar, geen fiets of tram. Maar is het dan misschien een ander voertuig? Dan moeten we bij de definitie van voertuig gaan kijken. Maar dat hebben we net gedaan en kwamen er niet uit. Zo kunnen we eindeloos doorgaan, zonder resultaat.

Terug naar onze definitie van $n!$ Kunnen we daarmee $5!$ uitrekenen? We proberen:

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \times 4! \quad \text{nu is } 4! = 4 \times 3! \text{ dus} \\ &5 \times 4 \times 3! \\ &5 \times 4 \times 3 \times 2! \\ &5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1! \\ &5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 0! \\ &5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 0 \times (-1)! \\ &\text{enzovoort.} \end{aligned}$$

Je ziet, zo gaat het mis. Wat onder $0!$ te verstaan? Of $(-1)!$ zelfs?

Nu is er wel een reden om $0!$ te gebruiken, maar niet de faculteit van een nega-

tief getal. Onder nul faculteit verstaat men, evenals onder $1!$ het getal 1. We zullen straks zien waarom.

We kunnen onze definitie nu verbeteren door een soort eindstop in te bouwen bij $0!$, als volgt.

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0 \\ n \times (n-1)! & \text{anderszins} \end{cases}$$

Onze poging van daarnet eindigt nu met

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1! =$$

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 0! =$$

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 120$$

En je ziet het is gelukt.

Een definitie als deze, waarin een begrip wordt omschreven met behulp van dit begrip zelf, heet een *recursieve definitie*.

Het leuke is dat men dit soort definities ook aan computers kan opgeven. Men zegt in het geval van een faculteit zoiets als:

$$\text{fac}(n) := \text{ALS } n = 0 \text{ DAN } 1 \text{ ANDERS } n \times \text{fac}(n-1)$$

We zullen straks een ander geval met behulp van de computer uitrekenen.

Nogmaals voorbeeld 5.

De definitie van $\text{ggd}(a,b)$. We kijken eerst naar een voorbeeld: $\text{ggd}(42,72) = 6$. Dat wil zeggen 42 is deelbaar door 6 en 72 is deelbaar door 6 en ook: 6 is het grootste gehele getal waarvoor dit geldt. Het eerste wil zeggen dat we kunnen schrijven: $42 = 6n$ ($n \in \mathbb{N}$) en $72 = 6m$ ($m \in \mathbb{N}$). Nu geldt: $30 = 72 - 42 = 6m - 6n = 6(m-n)$, dus ook weer een 6-voud. De $\text{ggd}(42,30) = 6$ evenals $\text{ggd}(42,72)$. Hieruit leiden we een definitie af:

$$\text{ggd}(a,b) = \begin{cases} \text{ggd}(a, b-a) & \text{als } b > a \\ \text{ggd}(a-b, a) & \text{als } a > b \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$a \in \mathbb{Z}^+, b \in \mathbb{Z}^+$$

In ons voorbeeld krijgen we nu

$$\begin{aligned} \text{ggd}(42,72) &= \text{ggd}(42,30) = \text{ggd}(12,30) = \\ &= \text{ggd}(12,18) = \text{ggd}(12,6) = \text{ggd}(6,6) = \\ &\text{maar wat nu?} \end{aligned}$$

We hebben het geval $a = b$ in onze definitie niet opgenomen. Maar het antwoord is duidelijk. De grootste gemeenschappelijke deler van 6 en 6 is 6, dus

$$\text{ggd}(a,b) = a \text{ als } a = b$$

(vul het rechter lid in op de stippeltjes in de definitie van ggd).

Deze berekening van de grootste gemeenschappelijke deler is niet die welke we doorgaans toepassen. Daarvoor is deze ook te langzaam.

Voor de volledigheid: we hebben in het bovenstaande wel aannemelijk gemaakt dat de nieuwe definitie de gebruikelijke ggd oplevert, maar bewezen hebben we dat niet. Erg moeilijk is dat niet. We laten het hier achterwege omdat het verhaal al aardig lang dreigt te worden.

Voorbeeld 6 nog een keer.

De definitie van $\binom{n}{m}$. Er bestaat er één die gebruik maakt van faculteiten.

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$(n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})$$

Voorbeeld:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15.$$

Dit is het omcirkelde getal in de driehoek van Pascal.

Gelukkig hebben we $0!$ ook gedefinieerd zodat een getal op de rand van de driehoek ook hiermee berekend kan worden,

bijvoorbeeld

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!5!} = \frac{5!}{5!} = 1 \text{ of } \binom{4}{4} = \frac{4!}{4!0!} = 1.$$

Dus voorbeeld 6 heeft niets met recursieve definities te maken? Toch wel. Je kunt ook een andere definitie geven, één die de opbouw van de driehoek van Pascal duidelijk maakt. Het omcirkelde getal 15 lieten we ontstaan als som van de twee er

schuin bovenstaande getallen 5 en 10. Dus $\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2}$. Dit gold niet voor de randgetallen zoals $\binom{5}{0}$ of $\binom{4}{4}$. Zo komen we tot de definitie:

$$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{m} = \begin{cases} 1 \text{ als } m = 0 \\ 1 \text{ als } m = n \\ \left(\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} \right) \text{ anderszins} \end{cases}$$

We werken $\binom{6}{2}$ nog eens uit volgens deze definitie.

$$\begin{aligned} & \binom{6}{2} = \\ & \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = \\ & \left(\binom{4}{0} + \binom{4}{1} \right) + \left(\binom{4}{1} + \binom{4}{2} \right) = \\ & 1 + \left(\binom{3}{0} + \binom{3}{1} \right) + \left(\binom{3}{0} + \binom{3}{1} \right) + \left(\binom{3}{1} + \binom{3}{2} \right) = \\ & 1 + 1 + \left(\binom{2}{0} + \binom{2}{1} \right) + 1 + \left(\binom{2}{0} + \binom{2}{1} \right) + \left(\binom{2}{0} + \binom{2}{1} \right) + \left(\binom{2}{1} + \binom{2}{2} \right) = \\ & 1 + 1 + 1 + \left(\binom{1}{0} + \binom{1}{1} \right) + 1 + 1 + \left(\binom{1}{0} + \binom{1}{1} \right) + 1 + \left(\binom{1}{0} + \binom{1}{1} \right) + \left(\binom{1}{0} + \binom{1}{1} \right) + 1 = \\ & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 15 \end{aligned}$$

Het bewijs van de gelijkwaardigheid van beide definities laten we ook hierbij achterwege.

Denkertje



2. $m(a, n) = \begin{cases} 1 \text{ als } n = 0 \\ a \times m(a, n-1) \text{ anderszins} \end{cases}$

$a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

Bereken $m(5, 3)$.

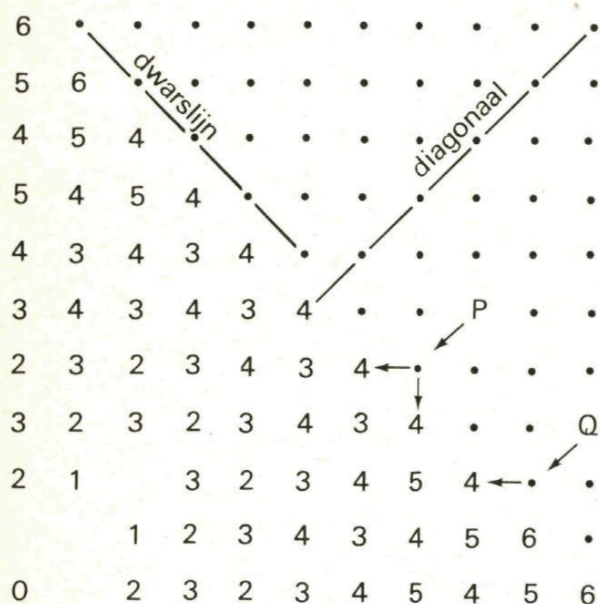
Welke bekende bewerking wordt hiermee gedefinieerd?

°Paardesprongen in de computer

Het 7e voorbeeld uit het voorgaande artikel bracht ons het artikel: 'Met koningspassen en paardesprongen vooruit' (Pythagoras 1975/76 no. 3) in herinnering.

De paardesprongen gaven de grootste moeilijkheden. We gaan het probleem nu eens van een andere kant benaderen.

We hebben een klein stukje van het oneindige schaakbord reeds ingevuld met het minimale aantal paardesprongen om deze vakken te bereiken vanuit de hoek linksonder. We kunnen ook zeggen: het kleinste aantal sprongen om vanuit zo'n vak terug te keren naar vak (0,0).



Welk getal hoort er in vak *P*? Het paard kan terugspringen naar de laatst ingevulde dwarslijn loodrecht de diagonaal. Welke van de twee mogelijkheden het paard daarbij kiest, doet er niet toe. In beide vakken waarin hij terecht komt is *kap* gelijk 4. Dus is *kap* in het vak *P* gelijk aan $4 + 1$.

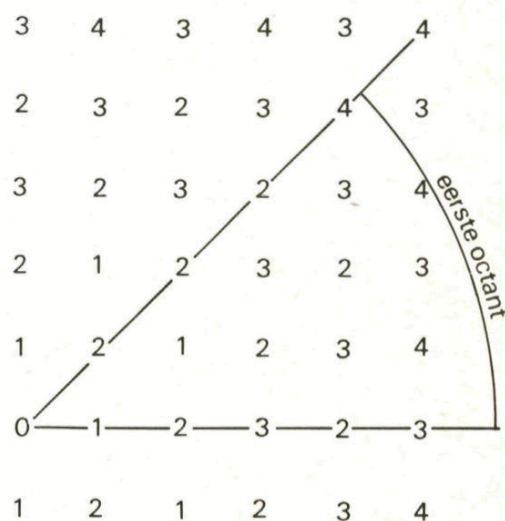
Voor vak *Q* moeten we iets voorzichtiger te werk gaan. Er is hierbij een voordeligste terugsprong, namelijk die welke het dichtst bij de diagonaal ligt.

Dit laatste berust op het feit dat op een dwarslijn allemaal gelijke getallen liggen, ofwel getallen van twee verschillende grootten (met verschil 2) waarvan de kleinste het dichtst bij de diagonaal. Uitzonderingen op deze regel zijn er helaas

wel, namelijk in de hoek. Dit zijn de vakken die nog opengelaten zijn.

Laten we deze uitzonderingen eens even wegwerken door de getallen in te vullen die we er terugspringend zouden verwachten. We hebben dan te maken met *niet echte paardesprongen* (*nep*). We onthouden: $nep(a,b) = kap(a,b)$ op vier uitzonderingspunten na.

Dit 'nep'-bord heeft de volgende gedaante.



Uit de symmetrie t.o.v. de diagonaal volgt $nep(a,b) = nep(b,a)$ (1)

Uit de symmetrie t.o.v. de horizontale rand volgt

$nep(a,b) = nep(a,-b)$ (2)

We hebben nog een klein stukje van onder deze rand getekend om deze symmetrie te laten zien.

resultaat

7													
9													
11	7	8	7	6	7	8	7	8	7	8	9	8	9 10
13	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8 9
15	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9 8
17	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8 9
19	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7 8
21	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8 7
23	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7 8
25	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6 7
27	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7 8
29	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6 7
31	3	2	3	2	3	4	3	4	5	5	5	6	7 8
33	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6 7
35	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7 8
37	2	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6 7
39													
41													
43													
45													
47													
49													
51													
53													

Verder vermoeden we dat in het eerste octant geldt: $nep(a,b) = nep(a-2, b-1) + 1$, zoals de terugsprong uit het vak Q in het vorige plaatje. Dat is wel juist, zolang we er maar voor zorgen dat niet buiten het octant gesprongen wordt.

Het over de benedenrand springen kunnen we voorkomen door de regel te wijzigen in

$$nep(a, b) = nep(a-2, |b-1|) + 1 \quad (3)$$

Dit mag vanwege regel (2) en het feit dat we de absolute waarde in het voorafgaande gedefinieerd hebben.

Het over de diagonaal springen kunnen we oogluikend toelaten, als we direct daarna regel (1) toepassen en het paard zo weer binnen het octant halen.

Het door de hoek heen springen in de richting van het derde kwadrant moeten we opvangen door een eindstop in te bouwen. Of eigenlijk meer dan één, want ons terugspringend nep-paard komt niet altijd precies in de hoek uit, maar wel in de directe omgeving daarvan.

We komen zo tot de volgende definitie.

$$nep(a, b) = \begin{cases} nep(b, a) & \text{als } b > a \\ 0 & \text{als } a = b = 0 \\ 1 & \text{als } a = 1 \text{ en } b = 0 \\ 2 & \text{als } a = b = 1 \\ nep(a-2, |b-1|) & \\ + 1 & \text{anderszins} \end{cases}$$

En voor het echte kortste aantal paardesprongen geldt

$$kap(a, b) = \begin{cases} 3 & \text{als } a + b = 1 \\ 4 & \text{als } a = b = 1 \\ & \text{of } a = b = 2 \\ nep(a, b) & \text{anderszins} \end{cases}$$

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$

We rekenen het geheel nog eens na voor het vak P : (8,5).

$$\begin{aligned} kap(8,5) &= nep(8,5) = nep(6,4) + 1 = \\ &= nep(4,3) + 1 + 1 = nep(2,2) + 1 + 1 + 1 = \\ &= nep(0,1) + 1 + 1 + 1 + 1 = nep(1,0) + 1 + \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \end{aligned}$$

We geven deze definities aan een computer en laten hem een flink tableau uitrekenen. Het resultaat ervan zie je op pag. 85.

Algoritmiek

Je zult van het laatste gedeelte wel vinden, dat het flink moeilijke theorie is, terwijl het probleem met de hand toch aardig vlot uitgerekend, of liever uitgeteld, kan worden. Je hebt gelijk. De charme van deze definities is dat men ze zondermeer aan computers kan opdragen. En dat ook in de gevallen dat het rekenen met de hand mensenlevens zou duren.

Verder is er misschien de volgende gedachte bij je opgekomen. We hebben een getal uit de driehoek van Pascal o.a. gedefinieerd met behulp van faculteiten. We hebben de faculteit (recursief) gedefinieerd met behulp van de vermenigvuldiging (en de vermindering met één). Is nu de vermenigvuldiging ook weer te definiëren met behulp van iets eenvoudigers, bijvoorbeeld uitsluitend optellen. En is de optelling weer te definiëren met iets nog primitiever? Tot hoever gaat dit?

We komen dan in het gebied dat in de wiskunde bekend staat als 'algoritmiek'. In een aantal denkertjes kun je je op dit gebied begeven. (zie blz. 80, 83, 85, 92 en 94.)

Denkertje



$$3. \quad p(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{als } b = 0 \\ a + p(a, b-1) & \text{anderszins} \end{cases}$$

$$p \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$$

Bereken $p(5, 3)$.

Welke bekende bewerking wordt hiermee gedefinieerd?

°Het vierkleurenprobleem

Op een landkaart worden landen of provincies soms verschillend gekleurd om de gebieden duidelijk van elkaar te kunnen onderscheiden. Engelse kartografen wisten reeds lang geleden, uit ervaring, dat men daarvoor nooit meer dan vier kleuren nodig had.

Rond 1850 zag een wiskundestudent (Francis Guthrie) hierin een interessant wiskundig probleem: waren er in elke mogelijke situatie niet meer dan vier kleuren nodig? In 1878 vestigde de beroemde wiskundige Cayley de aandacht op dit probleem. Tot op heden heeft men nog niet kunnen bewijzen, dat bij kaarten op een plat vlak in alle gevallen met vier kleuren kan worden volstaan om buurgebieden van elkaar te kunnen onderscheiden. Als je maar één geval kunt tekenen waarbij beslist 5 kleuren nodig zijn, dan is daarmee al aangetoond, dat het vermoeden, dat men met vier kleuren altijd uitkomt, onjuist is.

De afgelopen 100 jaar hebben vele wiskundigen geprobeerd te bewijzen dat de stelling: met vier kleuren kunnen we volstaan al dan niet juist was. Vorig jaar werd in Scientific American een landkaart gereproduceerd, waarvan beweerd werd, dat er vijf kleuren nodig waren om buurgebieden van elkaar te onderscheiden (fig. 1). Het was een aprilgrap. Er kwamen veel reacties op van mensen die de landkaart netjes volgens de spelregels ingekleurd hadden met slechts vier kleuren.

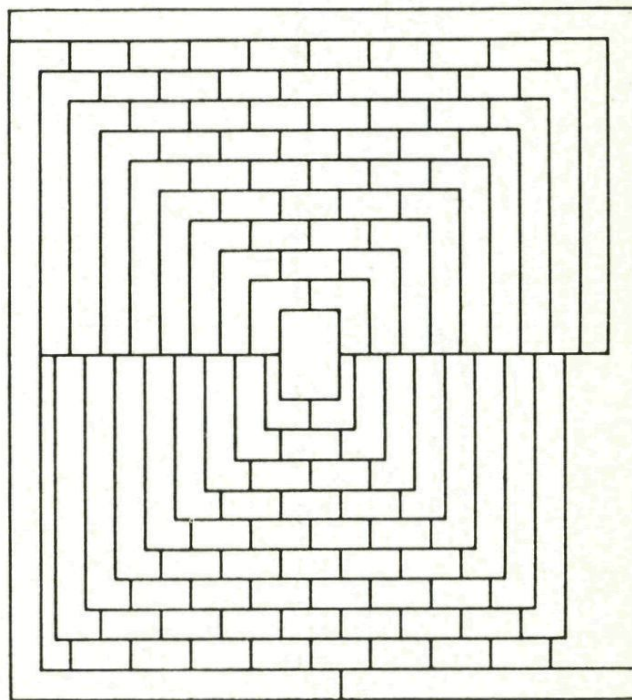


Fig. 1. De landkaart van W. McGrecor.

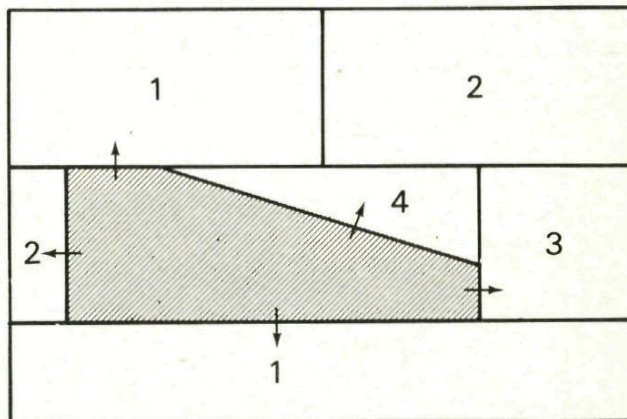


Fig. 2.

Denkertje



4. In fig. 2 is een landkaart getekend. De kleuren hebben we genummerd: 1, 2, 3 en 4. In het midden blijft een gearceerd gebied over, dat nog geen kleur heeft, maar omdat het grenst aan gebieden van elke gebruikte kleur, moeten we het wel een andere (een vijfde!) kleur geven. Of zie je kans om ook hier met vier kleuren uit te komen?

Ook voor het boloppervlak heeft nog niemand kunnen bewijzen dat er meer dan vier kleuren nodig zijn om buurgebieden van elkaar te onderscheiden. Het is heel frappant dat men wél voor ingewikkelder vlakken zoals het torusvlak (fig. 3) heeft kunnen bewijzen, dat men voor het scheiden van buurgebieden nooit meer dan 7 kleuren nodig heeft!

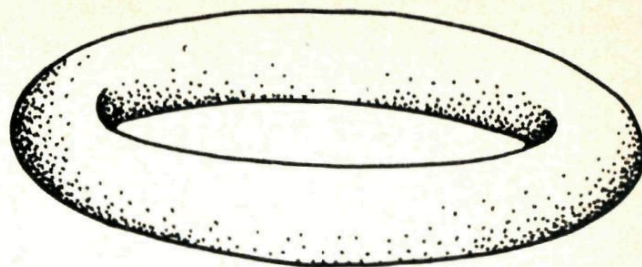


Fig. 3.

°De tijdberg

Beschrijving van een experiment na het uitvoeren van een slingerproef.

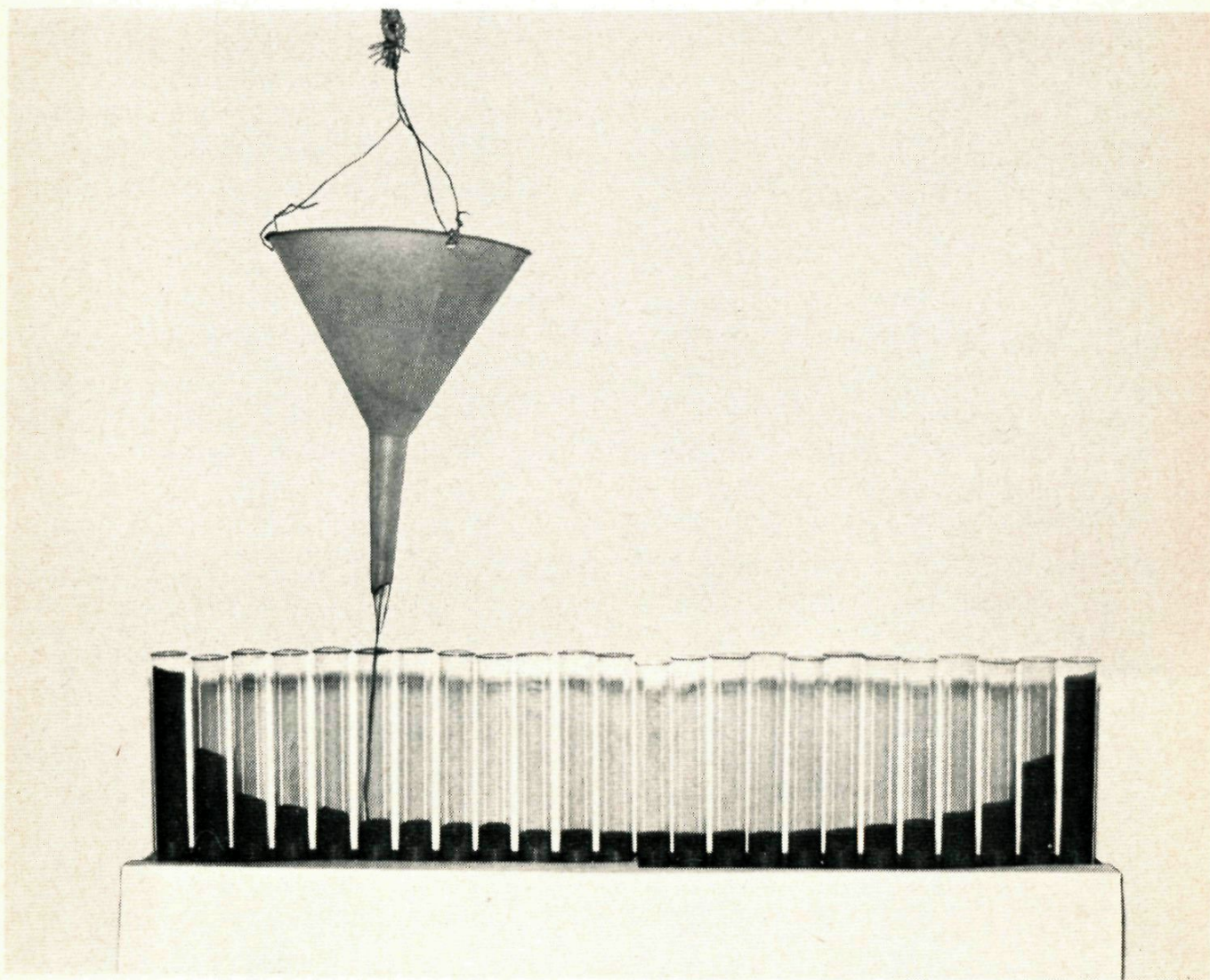


Fig. 1. Proef met 24 reageerbuisjes ter demonstratie van het tijddal.

Een zandloper is een klok. De hoogte van de zandberg is een maat voor de verlopen tijd. Je zou zoiets een tijdberg kunnen noemen.

We vullen een trechter met zand en hangen die op aan een lange draad. Als we de trechter een zet geven, gaat er een slingerbeweging beginnen. Tegelijkertijd stroomt het zand eruit. Op het onderliggende papier verschijnt geen gelijkmatige streep zand, maar een die aan de beide einden duidelijk hoger is. Je zou dit een tijdberg kunnen noemen. Wat is hiervan de oorzaak?

Wel, bij een slingering is de snelheid bij het passeren van het midden het grootst en in de uiterste standen telkens even nul. Als de strooier snel passeert, zal er betrekkelijk weinig zand achterblijven en bij geringe snelheid juist veel.

We vragen ons nu af: tot welke hoogte komt het zand van punt tot punt te liggen. Of anders geformuleerd: welk is hier de vorm van de 'tijdberg'?

Onderzoek

Allereerst moeten we een praktische moeilijkheid oplossen. Het neervallende zand is onderhevig aan de zwaartekracht en heeft zodoende de neiging zijwaarts weg te stromen. Door schotjes te zetten zouden we dat kunnen beletten. Daartoe wordt de proef uitgevoerd boven een set van 24 reageerbuisjes (fig. 1). We starten vanuit de linkerpositie en noemen dat het tijdstip $t = 0$. Door wat te blazen kunnen we de trechter in slingerende beweging houden. Zo wordt na een aantal slingeringen de gezochte kromme in eerste aanleg zichtbaar.

Natuurlijk is de kromme symmetrisch ten opzichte van de centrale lijn. Een vrij breed middengedeelte is vlak, aan de einden loopt het zand sterk op.

De tijdberg bestaat uit een breed dal met aan de einden de pieken. Welke is de relatie tussen de uitwijking (x), gerekend vanuit de middenpositie en de zandhoogte (h)? Het domein van die functie is: $-r \leq x \leq +r$, waarbij r de amplitudo is.

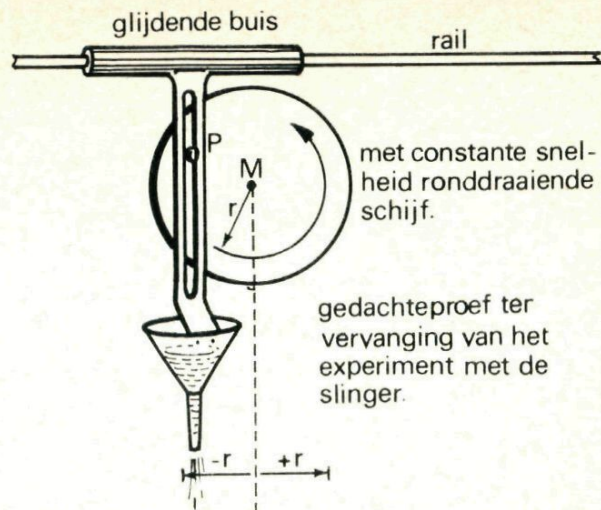


Fig. 2. De heen en weer gaande trechter wordt aangedreven door een schijf die met constante snelheid ronddraait.

Verdeling in 4 vakjes

De tijdsduur van één slingering heen en terug noemen we de slingertijd T . Bij een amplitudo die klein is ten opzichte van de slingerlengte, wordt de beweging vrijwel rechtlijnig. In dat geval zou men de slingerende beweging van de trechter kunnen vervangen door een beweging zoals bij de opstelling van fig. 2. Een eenparig ronddraaiende schijf doet een bus heen en weer glijden langs een rail, waardoor de trechter dan dezelfde op en neer gaande beweging gaat maken als bij de eerder genoemde slingering. Meer theoretisch omschreven luidt de bewering aldus: men kan de slingering opvatten als de projectie van een punt dat eenparig een cirkel doorloopt, op een horizontale middellijn

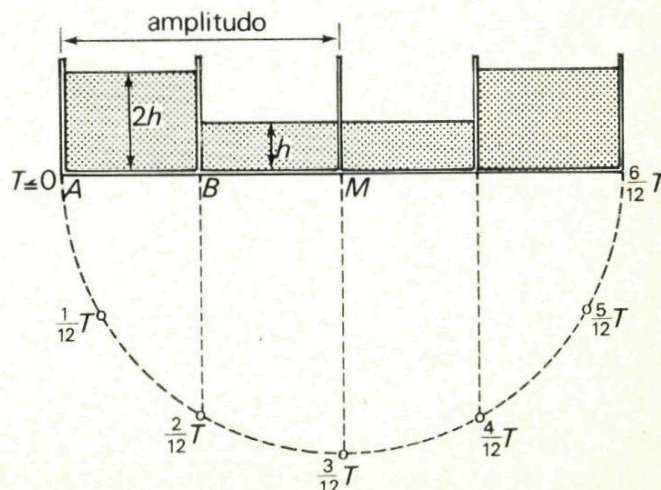


Fig. 3. Tijdberg opgebouwd uit 4 segmenten.

(fig. 3). De getekende cirkel is dus de bedoelde hulpcirkel; de slinging zelf is rechtlijnig. Van de uiterste stand A tot de middenpositie M duurt dan $\frac{3}{12} T$. Van de stand A tot het halverwege gelegen punt B duurt $\frac{2}{12} T$. Hieruit blijkt dan wel dat over het traject AB door de trechter een tweemaal zo lange tijd wordt gedaan als over het, overigens even lange traject BM . Hieruit volgt dat als we het zand over een volledige slinging zouden opvangen in 4 even brede vakjes (in plaats van in 24 zoals op de foto), en we zouden het zand in elk ervan horizontaal uitstrijken, we de situatie krijgen van fig. 3. In de buitenste bakjes staat het zand juist tweemaal zo hoog als in de beide binnenste bakjes. Dat is dan het eerste begin van het profiel van het tijdgebergte.

Verdeling in 12 vakjes

Om bij de vloeiende kromme terecht te komen, voeren we een proces uit dat in de wiskunde veel wordt toegepast. Men verdeelt dan een zeker domein in smalle even brede stukken, waarbij we de vrijheid nemen de veranderlijke grootte in zo'n smal gebiedje even constant te denken. In ons geval is deze grootte de zandhoogte. Dan laat men meestal het aantal strookjes steeds verder toenemen, terwijl tegelijk de breedte ervan tot nul gaat naderen. Zo verschijnt er op den duur een kromme. Wij gaan een dergelijk proces ook uitvoeren over het gebied ter grootte van $2 \times$ de amplitudo. We kiezen nu voor een verdeling in 12 vakjes. Zo krijgen we weer een betere indruk van de gezochte kromme (fig. 4).

Een benadering voor de zandhoogte

We kunnen stellen dat de zandhoogte steeds evenredig is met de tijdsduur van het vullen van het betreffende buisje. Deze tijdsduur is weer evenredig met de lengte van het bij dat buisje behorende cirkelboogje. Als je de zandhoogte dus gelijk

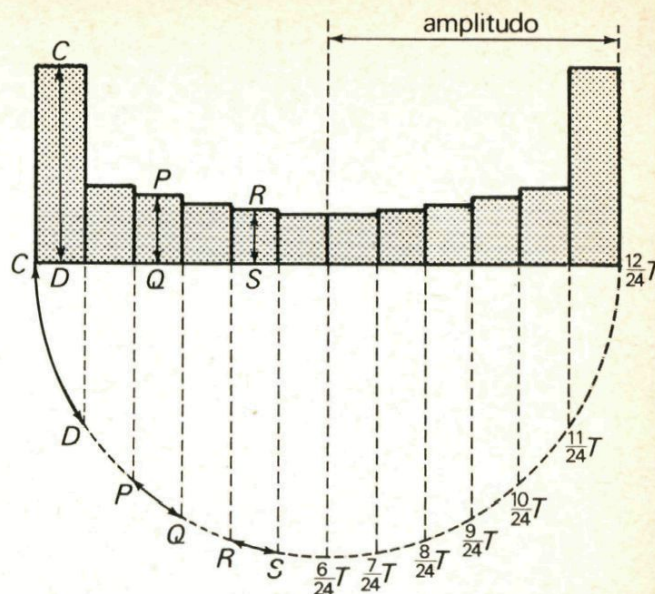


Fig. 4. Tijdberg opgebouwd uit 12 segmenten.

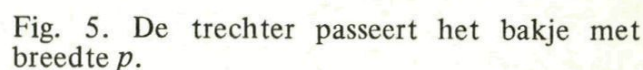
maakt aan zo'n cirkelboogje zitten we voor de vorm van de kromme al heel goed. De zandhoogte CD wordt daartoe gelijk gemaakt aan de booglengte CD ; de hoogte PQ aan de boog PQ enz. Later moeten we op deze figuur dan eigenlijk nog een lijnvermenigvuldiging ten opzichte van de x -as toepassen, met een faktor afhankelijk van de slingertijd, de stroomsterkte en het aantal keren dat de trechter voorbijgekomen is. In fig. 4 staat het resultaat.

De foto van fig. 1 was alweer een betere benadering; daar immers hadden we 24 vakjes. Dit proces van steeds fijnere verdeling zouden we nu moeten voortzetten. Je zult echter wel inzien dat we er zo, met alleen experimenteren, niet kunnen komen. We zullen een wiskundige techniek aan het werk moeten zetten. Wat wij in werkelijkheid niet kunnen uitvoeren, kan wel in fantasie!

De werkelijke kromme

Bij ons strooiapparaat loopt er per seconde $\frac{1}{2} \text{ cm}^3$ zand uit de trechter. We zeggen: de stroomsterkte I is constant. Bij onze meting was dat $\frac{1}{2} \text{ cm}^3/\text{s}$. Als de strooier nu in een tijd t over een bepaald bakje heengaat, dan komt in dat bakje een hoeveelheid zand ter grootte $I \times t$.

Samenvattend kunnen we zeggen: de zandhoogte is omgekeerd evenredig met



de tijdbergfunctie

$$h = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot h_0$$

oneindigo

eindigo

amplitudo r

h

h_0

x

0

$-r$

$+r$

$\frac{1}{2}\pi$

$\frac{1}{3}\pi$

$\frac{1}{6}\pi$

de snelheid, waarmee daar ter plaatse de zandstrooier voorbijkomt. Of anders gezegd: waar de trechter tweemaal zo snel passeert, komt het zand tot halve hoogte. Dat is toch niet zo'n vreemde conclusie. Wat doen we daar nu mee voor onze slingerproef?

De trechter passeert daar niet met constante snelheid! Geheel links is de snelheid nul, maximaal in het midden en geheel rechts weer nul.

In fig. 5 stellen we ons voor dat de strooier het bakje met breedte p passeert. Langs de omtrek legt dan het, met constante snelheid rondlopende, hulppunt het boogje AB af, hetwelk we bij een smalle strook ook wel mogen vervangen door de koorde AB . De gearceerde driehoeken zijn gelijkvormig, dus geldt:

$$\frac{AB}{p} = \frac{r}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} \quad \text{of} \quad AB = \frac{pr}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

Omdat de zandhoogte in het bakje met breedte p evenredig is met de lengte van boog AB kunnen we stellen:

$h = c \times AB$ waarbij c een constante voorstelt.

Zodoende vinden we:

$$h = \frac{cpr}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

waarmee we de relatie tussen zandhoogte

en uitwijking gevonden hebben. Wel zouden we c nog willen bepalen. Stellen we de hoogte in het midden (dus voor $x = 0$) gelijk aan h_0 , dan vinden we, door $x = 0$ te stellen: $h_0 = cp$.

Dat ingevuld geeft ons de einduitkomst voor de tijdberg:

$$h = \frac{r}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} \cdot h_0$$

We hebben in fig. 6 voor een aantal punten de rechterhelft van de kromme geconstrueerd.

Opvallend vlak is de figuur rond het midden. De kromme heeft asymptoten voor $x = -r$ en $x = +r$.

Dit betekent dat het zand aan de randen van het domein oneindig hoog komt te staan. Hoe moet dat in overeenstemming gebracht worden met ons reageerbuisjes-experiment? Zou het zand dan in de buitenste buisjes oneindig hoog komen te staan? Dat kan toch niet!

We kunnen bewijzen dat, hoewel de kromme aan de randen oneindig hoog oploopt, de oppervlakte onder de kromme toch eindig is! Zouden we dus het laatste stuk van de oneindig hoog oplopende tijdberg in het betreffende reageerbuisje laten zakken, dan zou het zand daar toch tot een eindige hoogte in gaan staan!

Denkertje



5. We willen iemand duidelijk maken wat optellen is. Deze persoon is wel in staat om van een natuurlijk getal a de opvolger te vinden: het kleinste natuurlijke getal groter dan a . We duiden dit getal aan met $opv(a)$.

Ook het omgekeerde kan hij: $vrg(b)$, de voorganger van het positieve natuurlijke getal b .

$$s(a, b) = \begin{cases} a & \text{als } b = 0 \\ opv(s(a, vrg(b))) & \text{anderszins} \end{cases}$$

$$a \in \mathbb{Z}^+, b \in \mathbb{N}$$

Bereken $s(5, 3)$.

°Een wiskundeprobleem bij een gezellig onderonsje

Je zult misschien denken: Dat is een steentje in het krentenbrood. Wie begint er nou over wiskunde bij zo'n gelegenheid. Toch heb je vrijwel altijd grote aandacht als je beweert: Ik kan bewijzen, dat een stompe hoek even groot is als een rechte hoek.

Je neemt potlood en papier en tekent, zonder passer en liniaal, fig. 1:

Lijnstuk $\overline{AB}$.

$\overline{AC} = \overline{BD}$ zó, dat de hoek bij A stomp is en de hoek bij B recht.

Verbind C en D.

Te bewijzen: $\angle A$ en $\angle B$ zijn gelijk.

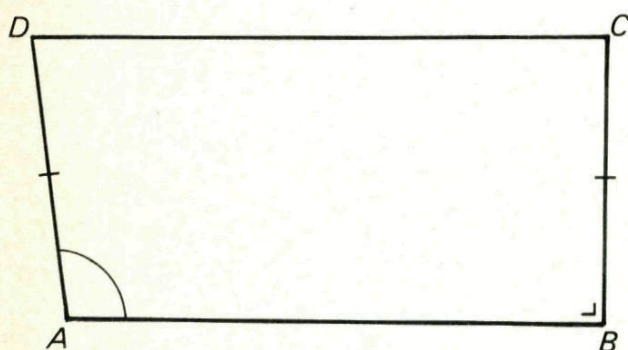


Fig. 1.

Je redeneert nu heel exact:

$\overline{AB}$ en $\overline{CD}$ zijn niet evenwijdig en de middelloodlijnen p en q dus ook niet. p en q snijden of precies op $\overline{AB}$, of boven $\overline{AB}$ of onder $\overline{AB}$. We kiezen de ligging N boven $\overline{AB}$ (zie fig. 2).

$$\left. \begin{array}{l} N \in p \Rightarrow \overline{AN} = \overline{NB} \\ N \in q \Rightarrow \overline{CN} = \overline{DN} \\ \overline{AC} = \overline{BD} \end{array} \right\} \xrightarrow{zzz} \triangle NAC \cong \triangle NBD$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \angle NAC = \angle NBD \\ \overline{AN} = \overline{NB} \Rightarrow \angle NAB = \angle NBA \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{optellen}} \angle CAB = \angle DBA$$

Zonodig bestrijd je het wantrouwen met fig. 3. Daarmee bewijs je op vrijwel de zelfde manier 'stomp is recht'. Er is geen speld tussen te krijgen. De bewijsvoering is exact.

Overtuigd?

Toch niet? Denk er eens over na voor je verder leest.

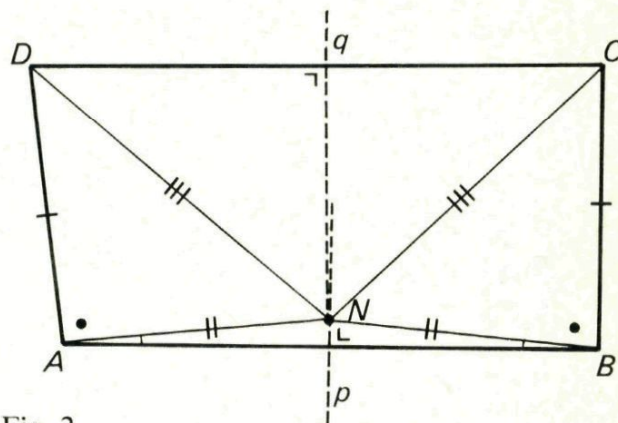


Fig. 2.

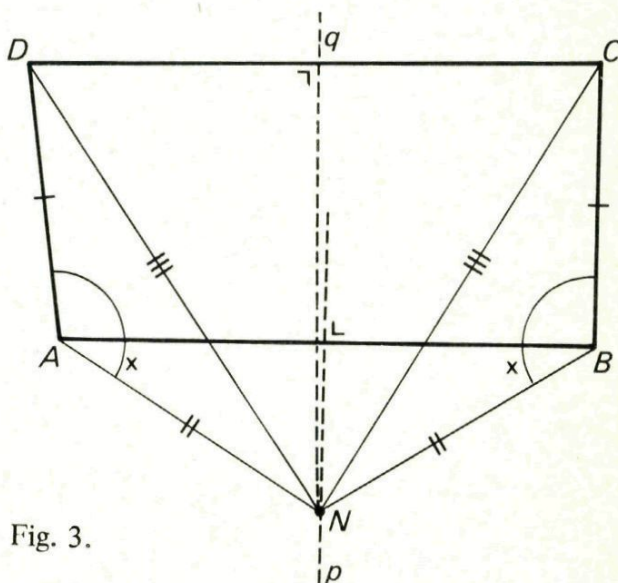


Fig. 3.

De oplossing

Ieder voelt, dat ergens de logica geweld wordt aangedaan. Waar? Wie echter de tekening als juist accepteert en daarna zoekt in de bewijsvoering, speurt tevergeefs. De angel zit in de ligging van punt N . Zie fig. 4. Daarmee is de situatie geheel veranderd en er is geen sprake meer van stomp is recht.

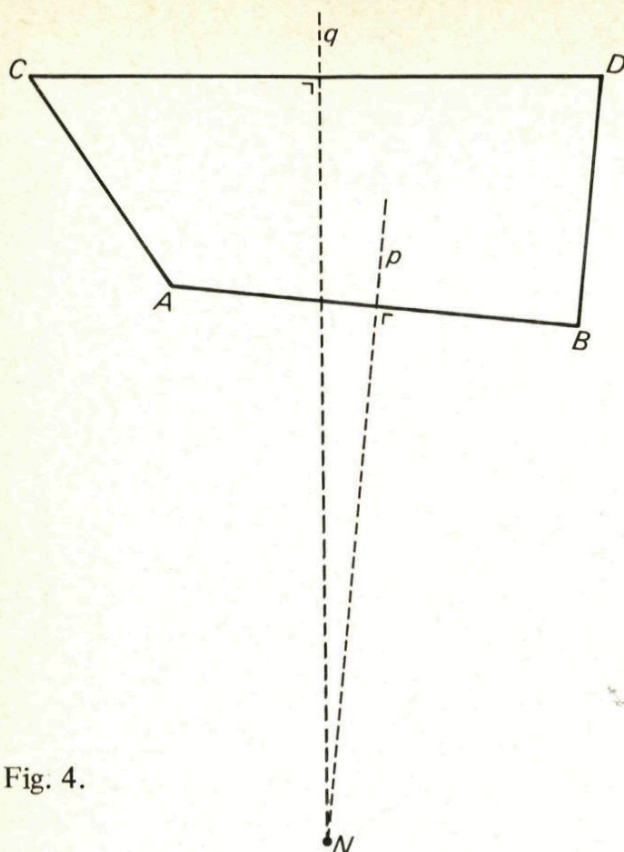


Fig. 4.

De afgepaste stompe hoek bij A en de rechte hoek bij B zijn nog wel betrokken bij een relatie.

In fig. 5 is $\overline{AE} = \overline{BD}$ en $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$

$\triangle NBD \cong \triangle NAE$ (zzz)

$\triangle NAE \cong \triangle NAC$ (zzz)

Er geldt:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle NBD \xrightarrow{\text{Sp. in } p} \triangle NAE \\ \triangle NAE \xrightarrow{\text{Sp. in } NA} \triangle NAC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle NBD \xrightarrow{R_N, \angle BNA} \triangle NAC$$

$$\begin{aligned} \angle BNA &= 2 \angle FNA = 2(\angle ANE + \angle AEN) = \\ &= 2 \angle GAE = \angle EAC = \angle CAB - \angle EAB = \\ &= \angle CAB - \angle DBA \Rightarrow \end{aligned}$$

De rotatiehoek is gelijk aan het verschil van de bij A afgepaste stompe hoek en de bij B geplaatste rechte hoek.

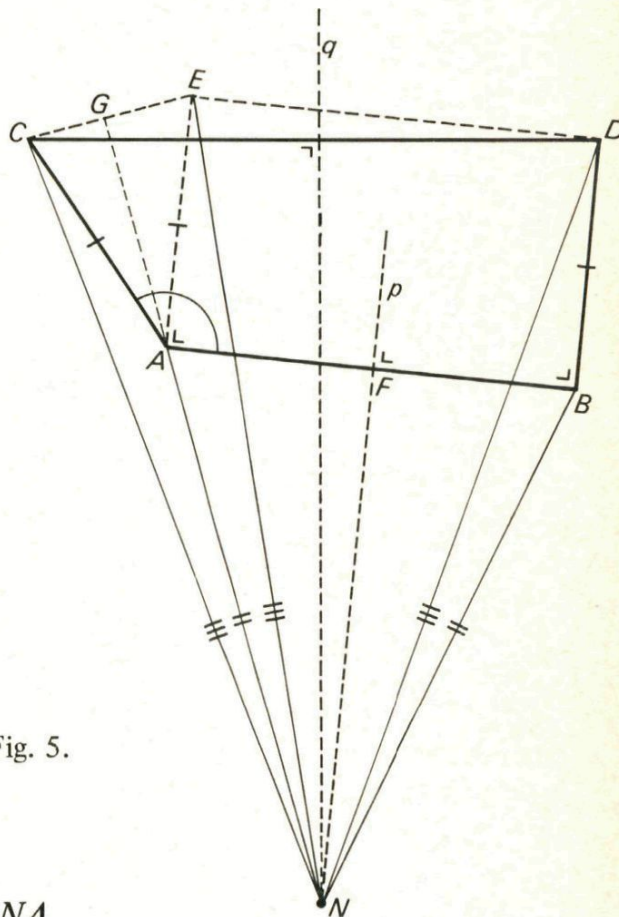


Fig. 5.

Denkertje



6. In het verhaal over recursiviteit is het worteltrekken niet aan de orde gekomen, omdat we ons liever niet buiten de verzameling van de natuurlijke getallen begaven. Toch zullen we hier recursief een methode aangeven om een benadering van wortel twee (bwt) te krijgen.

$$bwt(n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ 1 + \frac{1}{1 + bwt(n-1)} & \text{anderszins} \end{cases}$$

Hierin is n een nauwkeurighedsgraadmeter: ongeveer een $\frac{1}{2}n$ decimalen zijn correct.

Bereken $bwt(5)$.

Oplossing denkertjes

$$1. \text{fib}(n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \text{ of } n = 2 \\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) & \text{anderszins} \end{cases}$$

$$n \in \mathbb{Z}^+$$

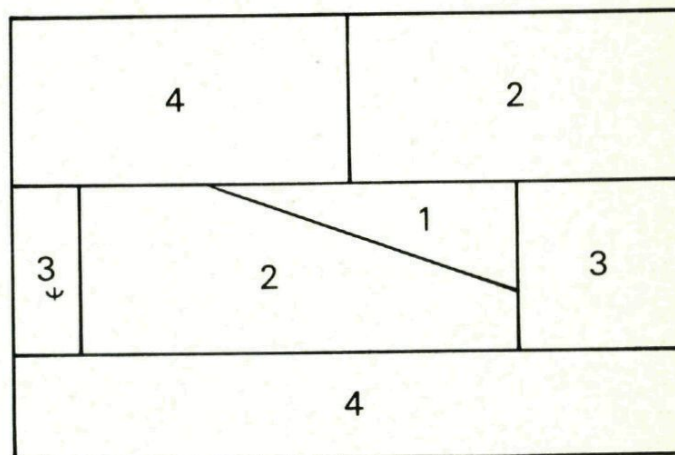
$$2. m(5,3) = 5 \times m(5,2) = 5 \times 5 \times m(5,1) = 5 \times 5 \times 5 \times m(5,0) = 5 \times 5 \times 5 \times 1 = 5^3$$

$$\text{Algemeen } m(a,n) = a^n$$

$$3. p(5,3) = 5 + p(5,2) = 5 + 5 + p(5,1) = 5 + 5 + 5 + p(5,0) = 5 + 5 + 5 + 0 = 5 \times 3$$

$$\text{Algemeen } p(a,b) = ab$$

4. Als je de kleuren wat anders rangschikt, zoals bijv. in nevenstaande figuur, blijken we hier ook maar vier kleuren nodig te hebben.



$$5. s(5,3) = \text{opv}(s(5,2)) = \text{opv}(\text{opv}(s(5,1))) = \text{opv}(\text{opv}(\text{opv}(s(5,0)))) = \text{opv}(\text{opv}(\text{opv}(5))) = \text{opv}(\text{opv}(6)) = \text{opv}(7) = 8$$

$$6. \text{bwt}(5) = 1 + \frac{1}{1 + \text{bwt}(4)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \text{bwt}(3)}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \text{bwt}(2)}}} =$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \text{bwt}(1)}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + 1}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}} =$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{12}{5}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{5}{12}} = 1 + \frac{1}{\frac{29}{12}} = 1 + \frac{12}{29} = 1\frac{12}{29}$$

°°° Wiskunde-puzzel

Wie van een pittige puzzel houdt, waarbij je nogal wat wiskundekennis uit de hoogste klassen nodig hebt, komt hier aan zijn trekken.

Het idee is ontleend aan een zusterijdschrift (join the mathematical pie) van een college in Leicester (Engeland).

Spelregels:

1. bij een normale kruiswoordpuzzel moet je woorden invullen; nu zijn het getallen
2. getallen zoals 3,14 worden in het antwoord geschreven als 314 (dus zonder komma)
3. gewone breuken moet je schrijven als decimale breuken en dan afronden volgens het vereiste aantal decimalen

De oplossing staat in het volgende nummer.

1				2	3	4
					5	
6		7		8		
		9				10
	11			12		
13						
14				15		

HORIZONTALAAL

1. y is omgekeerd evenredig met de derdemachtswortel uit x .

Als $y = 4560$ dan $x = 0,0004$.

Bepaal nu y als $x = 0,05$

2. $p + q + r$ als gegeven is

$$(a^3 \cdot b^{-2} \cdot c^{-\frac{1}{2}}) : (a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-2\frac{1}{4}}) = a^p \cdot b^q \cdot c^{-r}.$$

5. Het relatieve maximum van de functie $2x^3 - 3x^2 - 36x + 12$.

$$6. \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{4}{4 + \frac{1}{5}}}} \quad 12. \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

8. De oppervlakte begrensd door de grafieken

$$y = x^2 - 2x + 6 \quad y = 2x - 3x^2 - 2 \quad x = 0 \quad x = 3$$

9. De som van de beide langste zijden van een rechthoekige driehoek waarvan alle zijden gehele getallen zijn en de kortste zijde 13 is.
11. De waarde van de afgeleide functie van de functie $x^3 + x^2 + 9x + 4$ in het punt met coördinaten (1,15)
13. De waarde van a als $9x^4 - 6x^3 - 3x^2 + ax - 126$ deelbaar is door $(x - 2)$.
14. Het verschil van twee derde machten, als gegeven is dat het verschil van die twee getallen zelf een derde deel is van de som van de cijfers van het antwoord.
15. De 43ste term van de rekenkundige rij waarvan de 3de term 8 is en de 7de term het viervoud van de 2de term is.

VERTIKAAL

1. De grootste wortel van $x^2 - 4x = 47$.
3. De 6de term in de rij $(1 \times 2), (4 \times 3), (9 \times 4), \dots$
4. De coëfficiënt van x^5 in de vorm $(1 + x)^8$.
7. Het eerste gehele getal na 405 dat even groot blijft als men het cijfer van de eenheden en dat van de honderdtallen omwisselt.
8. Het omgekeerde van 2,02.
10. ${}^P \log (\frac{1}{4}p^2)$ als ${}^P \log 2 = 0,6786$.
11. Het kleinste van twee opvolgende oneven natuurlijke getallen, waarvan de kwadraten 480 verschillen.
13. De derdemachtswortel uit $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ als $x = 30$.

Inhoud:

Napoleon en zijn vrijetijdsbesteding	73
De globes op een schilderij van Rafaël	75
Voer voor computers; recursiviteit	79
Paardesprongen in de computer	84
Het vierkleurenprobleem	87
De tijdberg	88
Een wiskundeprobleem bij een gezellig onderonsje	93
Oplossingen denkertjes	95
Wiskundepuzzel	96

PYTHAGORAS

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. Elsenaar, Harderwijk.

W. Kleijne, Heerenveen.

Ir. H. Mulder, Breda.

G. A. Vonk, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Bruno Ernst, Mauritsstraat 117, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, f 6,— per jaargang.

Voor anderen f 10,—.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

