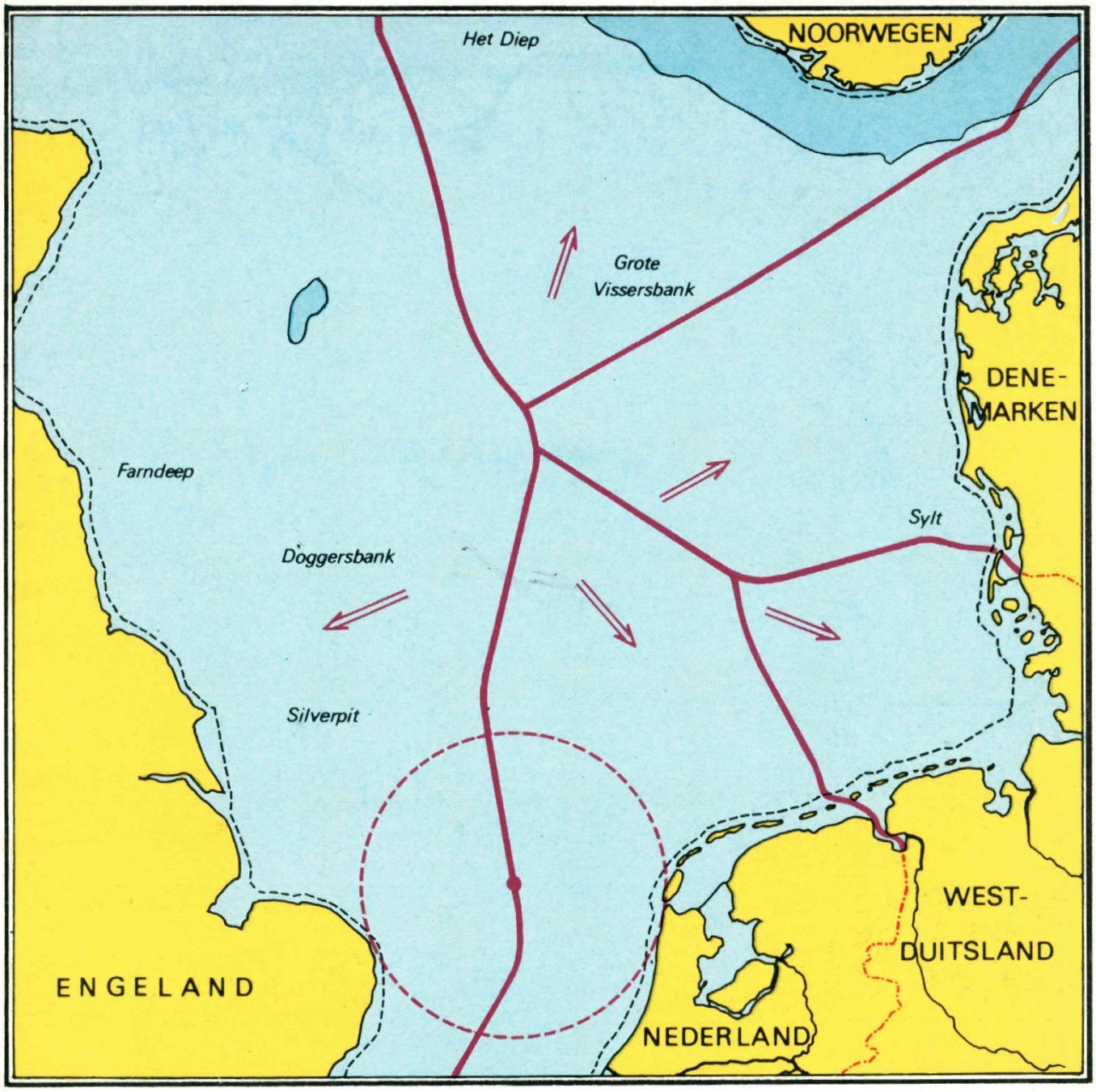


5

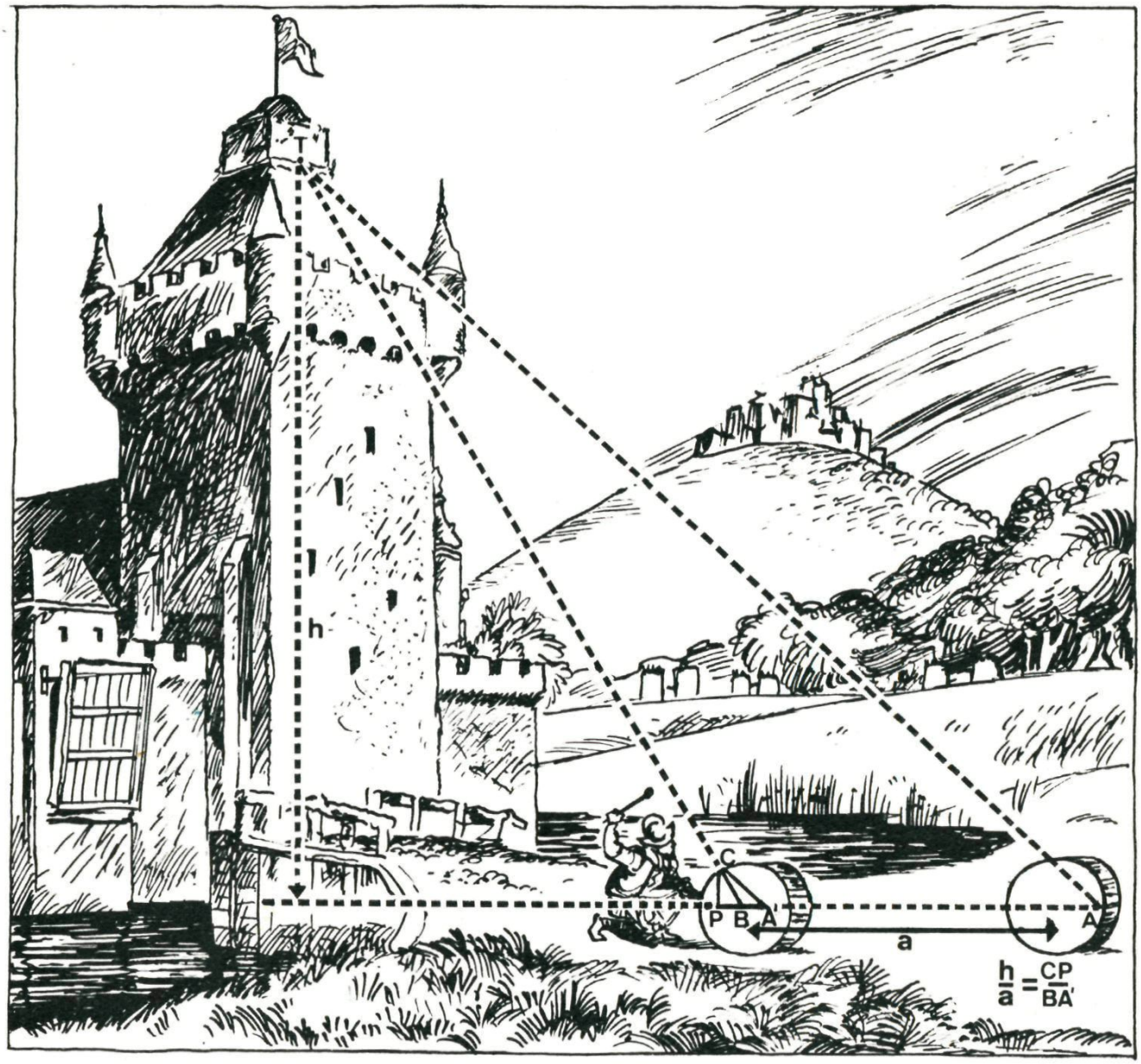
jaargang 15 / april 1976

wiskundetijdschrift voor jongeren

wolters-noordhoff

verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Bij de bestorming van een kasteel kon zelfs de trommelaar in de zestiende eeuw goede diensten bewijzen. Op dit plaatje zie je hoe met behulp van een constructie op een trommelvel de hoogte van een toren gemeten kon worden. Er staan echter slechts summiere gegevens in de tekening. Het eerste denkertje is: Beschrijf wat er precies gedaan moet worden om de hoogte van de toren te berekenen en bewijs de aangegeven betrekking.

Van wie is de Noordzee? Toen er nog geen olie en gas werden gevonden was dat niet zo'n belangrijke vraag. Als je maar overal mocht vissen. Nu is de Noordzee zorgvuldig verdeeld onder de kustlanden en dat is voornamelijk een kwestie van . . . bissectrices! Hoe? dat lees je op pag. 97 e.v. Daar zullen we het dan meteen over dat vissen hebben.

°De 200-mijlszone

Engeland en IJsland zijn met elkaar in een visserijconflict gewikkeld. Internationaal is vastgelegd dat een zone met een breedte van 50 mijl voor de kust van een land tot het territorium van dat land behoort. Enkele landen hebben eigenmachtig hun territorium vergroot tot 200 mijl om zich te verzekeren van ruimere visgronden. Een van die landen is IJsland, maar de Britten hebben die aanspraak niet erkend. Het gevolg is dat we al vele malen op het televisiescherm de grillige contouren van IJsland afgebeeld hebben gezien te zamen met de beide zones (fig. 1). Het viel ons daarbij op dat de zonegrens er opmerkelijk glad uitziet ondanks de vele inhammen en landtongen van het eiland.

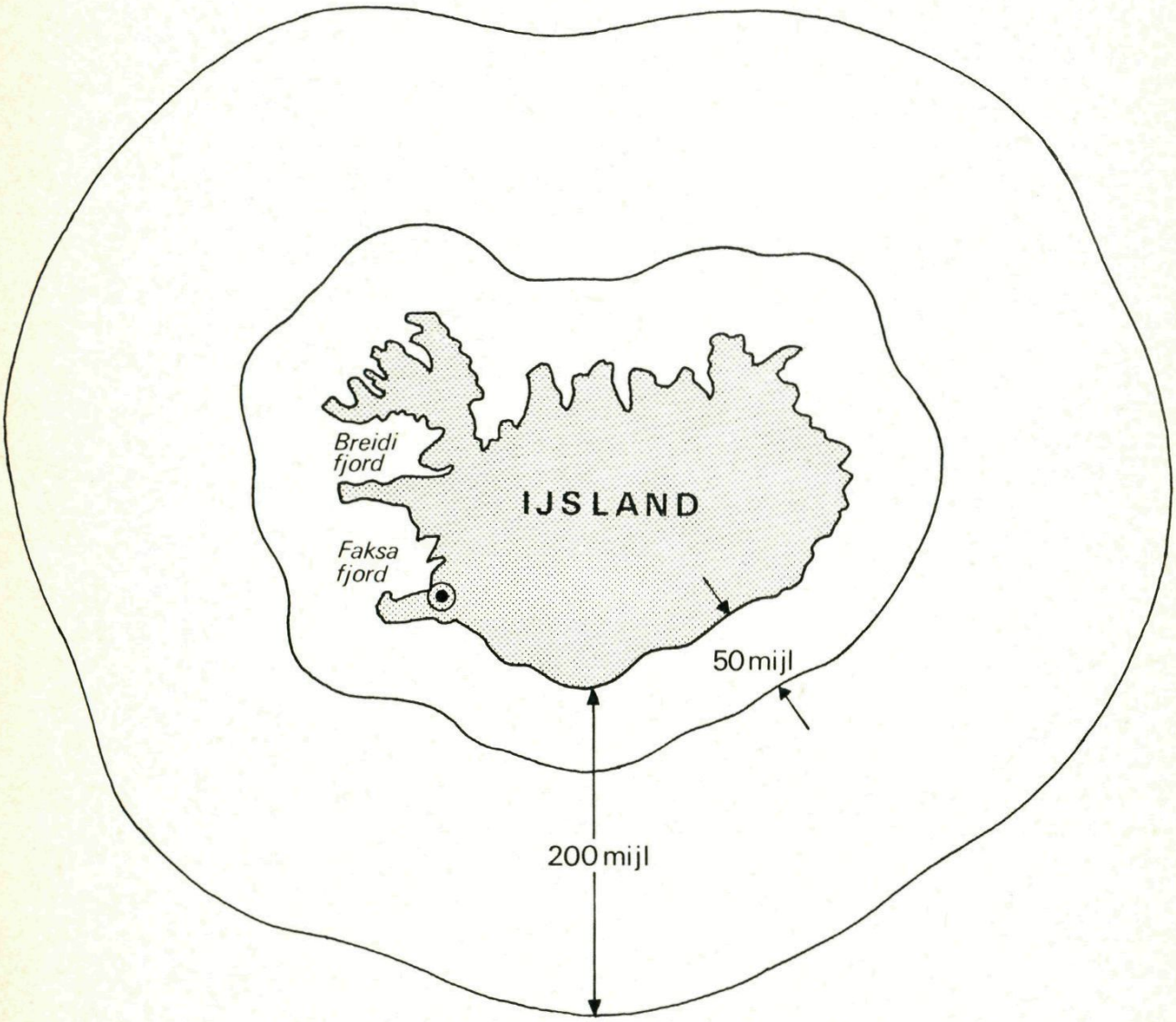


Fig. 1. De 50-mijlszone en de 200-mijlszone om IJsland.

Het lijkt daarbij dat de eigen vorm van het eiland des te meer vervaagt naarmate de zone breder wordt. Hoe kan zo'n zone op de zeekaart eigenlijk uitgemeten worden? Hoe zijn er meetkundige handelingen te verrichten aan zulke vreemde figuren?

Nog een andere vraag in datzelfde vlak. De zee tussen Engeland en Nederland is door een soort bissectrice in tweeën ge-

sneden (zie afbeelding op de omslag). Die lijn is voor beide landen erg belangrijk in verband met hun oliebelangen op het continentaal plat. Hoe is het mogelijk zo'n bissectrice uit te tekenen?

Zones bij meetkundige figuren

We gaan de zaken eerst maar eens verkennen bij onze meer vertrouwde meetkundige figuren als cirkel, driehoek en rechte lijn.

1. Teken een cirkel met straal R en nog een concentrische met straal $R + r$. Daarmee is dan de r-mijlszone om ons wiskundige eiland geconstrueerd (fig. 2).

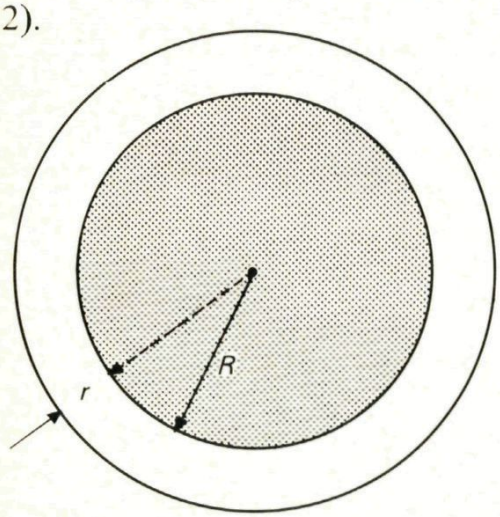


Fig. 2. r-mijlszone bij cirkelvormig eiland.

2. Als de kustlijn rechtlijnig is, wordt de zone eenvoudigweg afgebakend door een lijn evenwijdig op een afstand r.
3. In fig. 3 is een driehoekig eiland getekend met zijn r-mijlszone. De vorm van het eiland gaat hierbij duidelijk vervagen. Waar komt dat door? De hoekpunten van de driehoek zijn cirkelbogen geworden bij de zonelijn. Als de zone breder wordt gekozen, wordt het effect nog erger. Immers de drie rechte stukken blijven onveranderd van lengte maar de cirkelbogen worden steeds groter. Ga zelf na, dat, indien de zonebreedte zeer groot gekozen wordt, de vorm van de zonelijn die van een cirkel benadert.

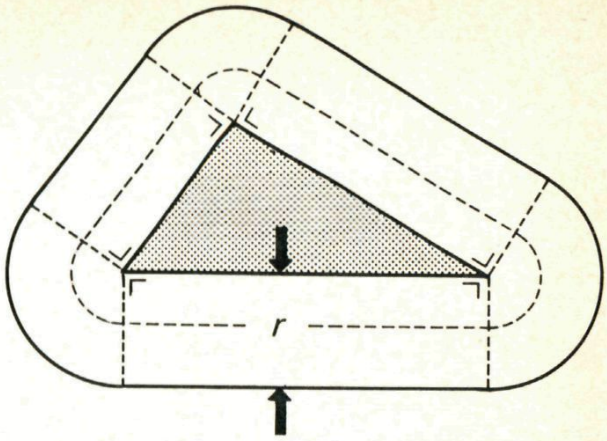


Fig. 3. r-mijlszone bij driehoekig eiland.

4. We bestuderen nu wat er gebeurt bij een rechte kustlijn met rechthoekige landtongen en inhammen. In fig. 4 is het opvallend dat de fjord vrijwel geen invloed heeft op de loop van de zonelijn, maar dat de uitstekende landtong het zeeterritorium aanzienlijk vergroot. Zo verkrijgt bijvoorbeeld Engeland met zijn Shetlandeilanden tegelijk een aanzienlijk stuk Noordzee erbij.

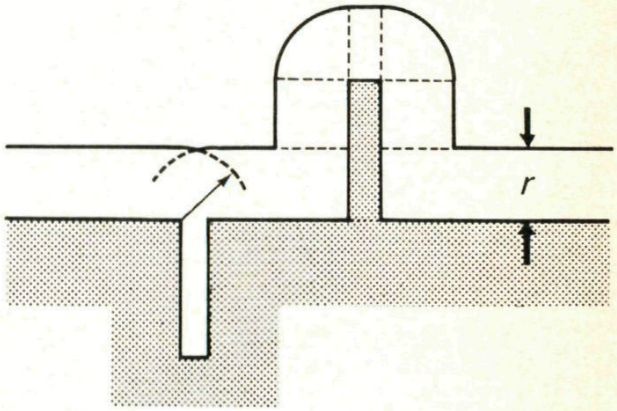


Fig. 4. Invloed van fjord en landtong op de zone.

5. Hoe functioneert een bredere inham op het verloop van de zone? In fig. 5 is een wigvormige fjord gedacht in een rechte kust. Als we de zone smal kiezen, vinden we in de zonelijn de wigvorm van de kust met de hoek α terug. Bij grotere zones verdwijnt de wig in de zonebegrenzing en daarmee de typische vorm van de kustlijn. Punt D is

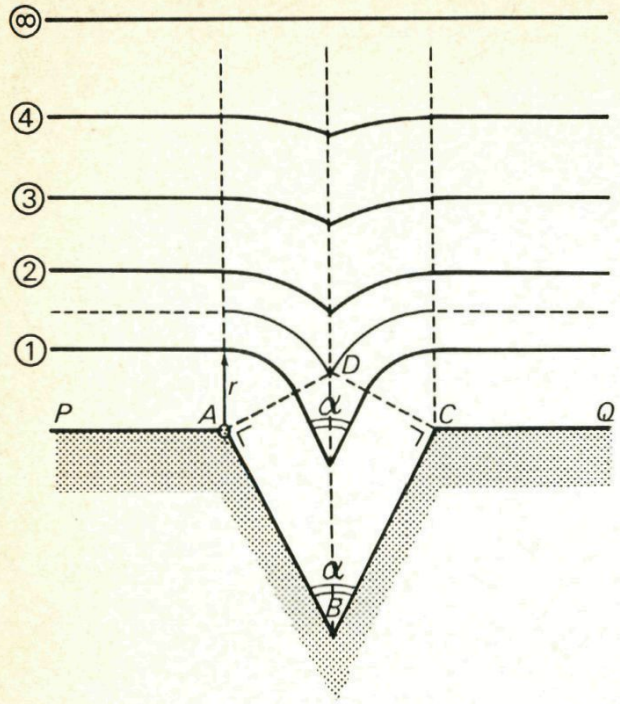


Fig. 5. Vorm van de zone bij een fjord in verband met de breedte van de zone.

het overgangsmoment. Ga na dat de hoek tussen de beide cirkelbogen daar nog α is. Bij de volgende zonelijnen gaat de hoek tussen de bogen steeds groter worden. Zo werkt er een afvlakkingsproces. Bij zeer brede zones wordt de begrenzing vrijwel recht en de vorm van de oorspronkelijke wig is dan geheel verdwenen.

Zones bij willekeurige figuren

6. We willen zones construeren bij een golvende kustlijn zoals in fig. 6. Om de zone met breedte r uit te zetten, moeten we talloze cirkels tekenen, telkens met straal r en een punt van de kustlijn als middelpunt. Op die manier ontstaat een verzameling snijdende cirkels. Deze verzameling heeft een omhullende; dit is een kromme die alle cirkels uitwendig raakt. Deze kromme is de zonelijn.
Uitgaande van dat beginsel zijn de zones om IJsland in fig. 1 ook geconstrueerd. Onderzoek dat zelf nu maar verder met de passer.

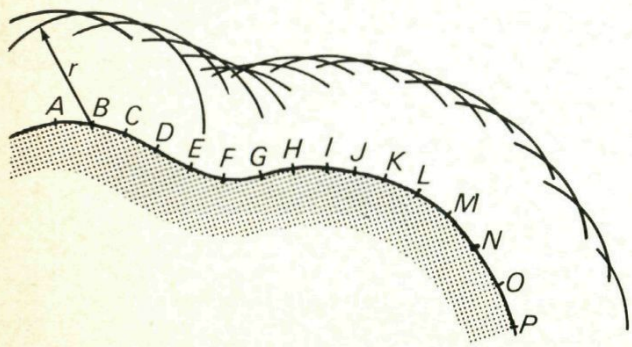


Fig. 6. Omhullende van een verzameling cirkels met gelijke straal bakent een r-mijlszone af.

7. Ten slotte nog de verdeling van het continentale plat. Hoe moet dat 'eerlijk' geschieden?
We kennen de methode om het gebied van een hoek in tweeën te verdelen (fig. 7a). Dat geschiedt met de bissectrice. De bissectrice is de verzameling van punten (waarvan P er één is), die even ver van de benen van de hoek verwijderd zijn, in dit geval op een afstand r.

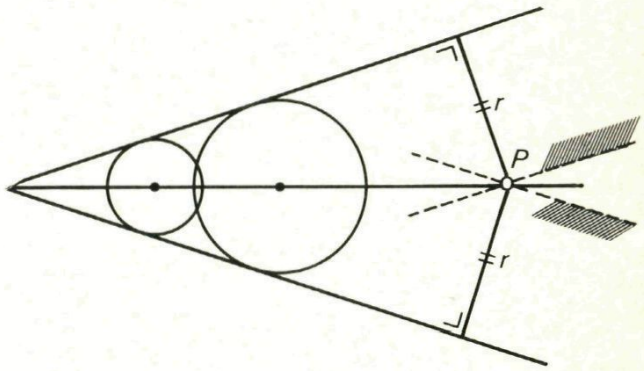


Fig. 7a. Bissectrice van een 'hoek'.

Er is nog een tweede methode om de punten van de bissectrice te vinden. Leg cirkels tussen de benen van de hoek zodanig dat ze deze raken. De verzameling van middelpunten van dergelijke cirkels is de bissectrice van de hoek.
Deze manier kunnen we ook benutten om de bissectrice van een snavelvormige hoek te bepalen, zoals in het Noordzeegebied tussen Engeland en Nederland.
Volgens de eerste methode gaat men als volgt te werk: bepaal een zone met

breedte r langs beide kusten; het snijpunt van die zones is een punt van de gezochte bissectrice. Neem vervolgens een andere zonebreedte en doe hetzelfde enz.
Anderzijds is het ook mogelijk een cirkel op de kaart in de snavel te schuiven tot raking aan beide kusten geschiedt. Het middelpunt van die cirkel is dan een punt van de bissectrice. Ga zo verder met cirkels met andere straal. Zo worden dan volgende punten gevonden.
Zijn er meer dan twee gebieden, dan kunnen we dezelfde methode volgen (fig. 8).

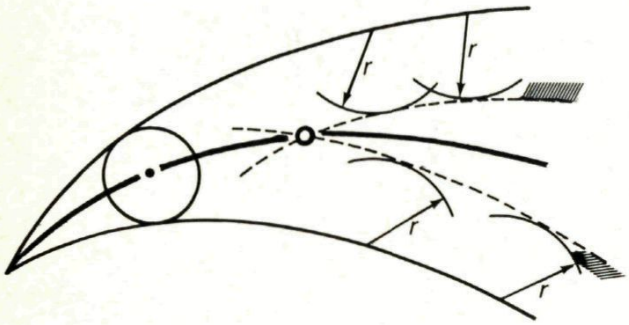


Fig. 7b. Bissectrice van een 'snavel'.

°°° **De 'Snavelbissectrice' van twee rakende cirkels**

In een bepaald geval willen we zo'n snavelbissectrice berekenen.
In fig. 9 zijn twee halve cirkels getekend met middelpunten (−1,0) en (+1,0) en stralen respectievelijk 3 en 5. Het lijkt voor de hand liggend dat de bissectrice ook een cirkel wordt met middelpunt (0,0) en straal het gemiddelde van 3 en 5, dus 4.
Is dat zo?
Om dat uit te zoeken, moet wel wat rekenwerk verricht worden.
De snavel is bepaald door de cirkels:

$C_1: (x+1)^2 + y^2 = 3^2$

$C_2: (x-1)^2 + y^2 = 5^2$

We zoeken nu punten P met coördinaten x en y, zodat P middelpunt wordt van een cirkel, die C_1 uitwendig raakt en C_2 inwendig.

Uit fig. 9 volgt:

$$r = PM_1 - 3 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - 3$$

en

$$r = 5 - PM_2 = 5 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

dus

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - 3 = 5 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

of

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 8 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

links en rechts kwadrateren (denk aan het dubbelprodukt!)

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 64 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 16\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$4x - 64 = -16\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Opnieuw kwadrateren geeft ten slotte:

$$15x^2 + 16y^2 = 240$$

Schrijf dit als:

$$x^2 + \frac{16}{15}y^2 = 16$$

Dit is een ellips en heeft als middelpunt het punt (0,0). De lange as loopt horizontaal en heeft een lengte 8; de kortere as loopt verticaal en is iets korter, namelijk $2\sqrt{15}$.
Deze ellips verschilt maar weinig van de cirkel
$x^2 + y^2 = 16$
met middelpunt (0,0) en straal 4.

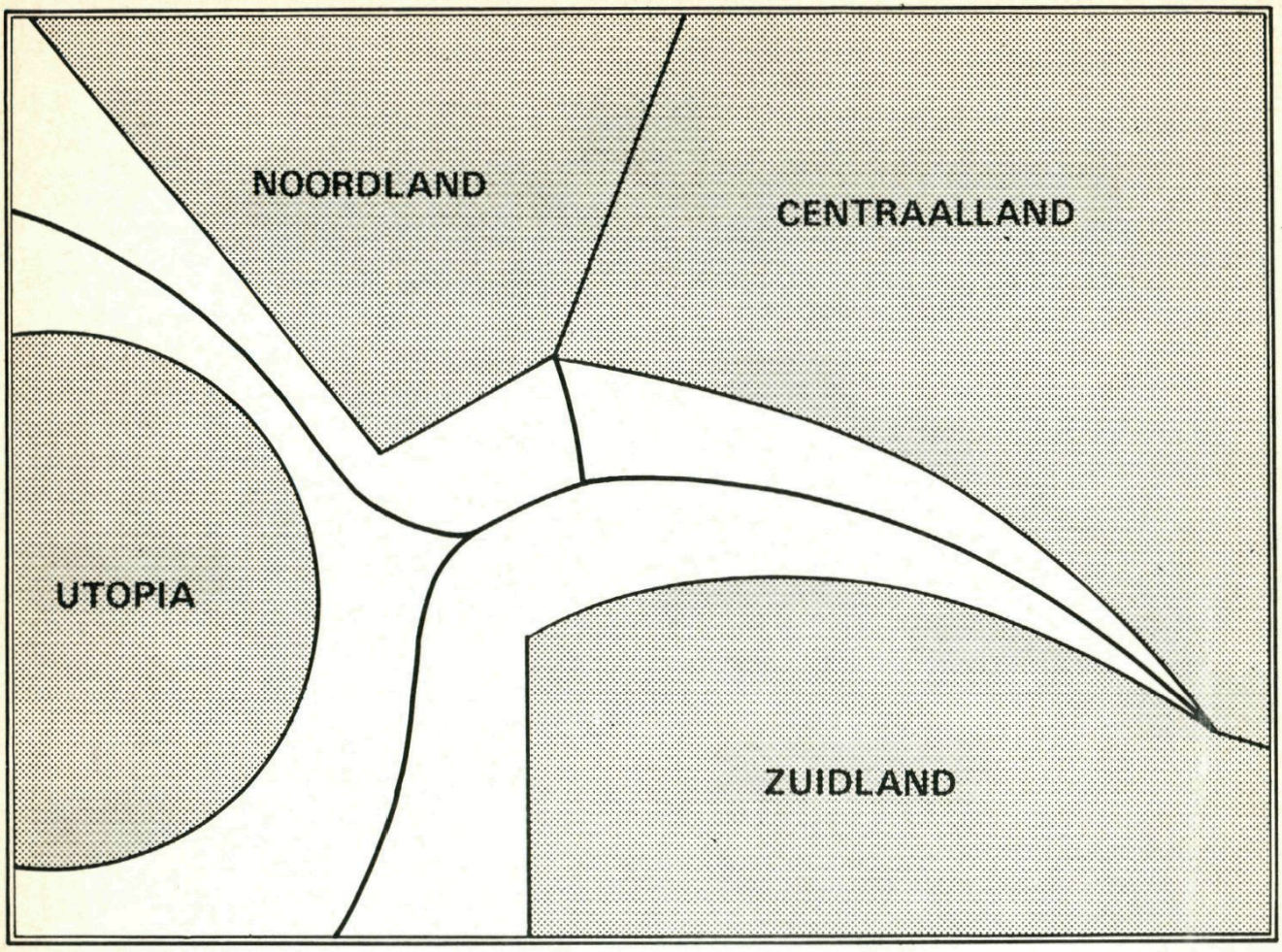


Fig. 8.

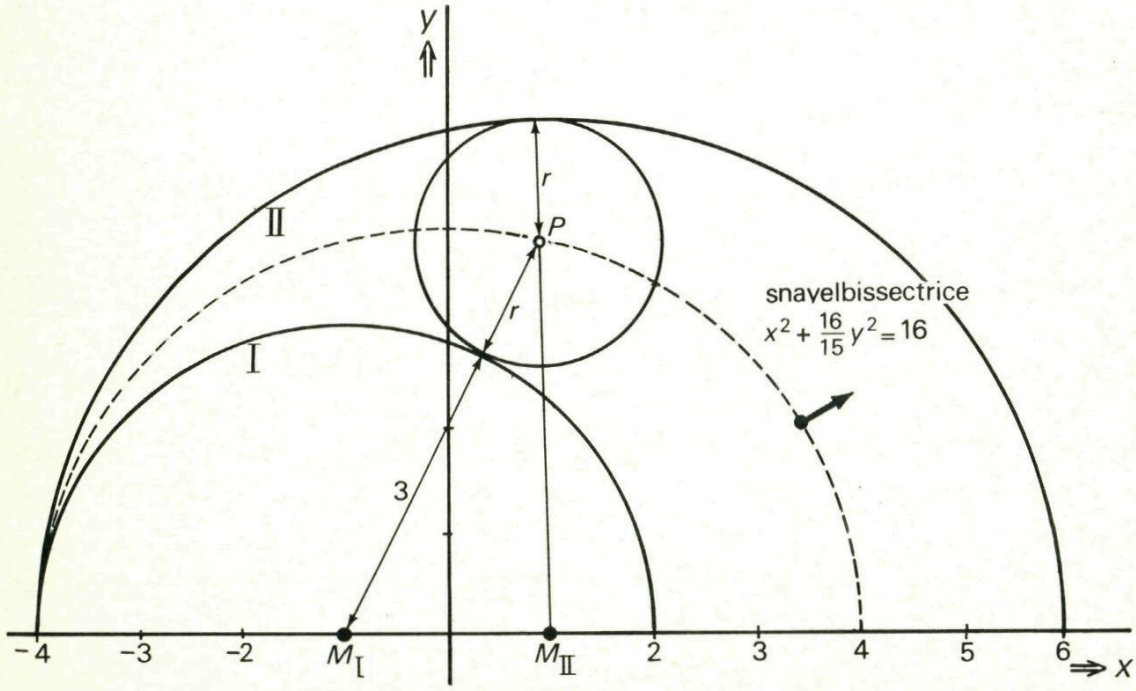


Fig. 9. Ellips als snavelbissectrice van twee cirkelbogen.

°(H)eerlijke statistiek

Statistisch verwerkte waarnemingsgetallen moeten natuurlijk betrouwbaar zijn. Dat je echter met eerlijke getallen heerlijk kunt manoeuvreren, leren we van de drie gewiekste vertegenwoordigers van de firma X. Hun verkoopresultaten van de laatste twee jaar zijn afgebeeld in het diagram fig. 1. Elk cirkelschijfje stelt de verkoop voor van 100 eenheden. Uit natellen blijkt, dat in 1975 de totale verkoop 4000 – 2500 = 1500 eenheden meer bedraagt, dan in 1974. Zo op het eerste gezicht is er dus geen vuiltje aan de lucht.

Toch gaat het niet goed met het bedrijf: stijging van lonen en bedrijfsonkosten nopen tot efficiënter bedrijfsvoering. De vertegenwoordigers staan voor de werkelijkheid: bezuiniging, mogelijk zelfs inkrimping. Zo gauw zitten ze evenwel niet in de put, want naar hun aard weten ze hun artikelen en zichzelf goed te verkopen. Dat laatste vooral bij de directie als straks gezamenlijk of in een persoonlijk gesprek ieders resultaten worden doorgelicht.

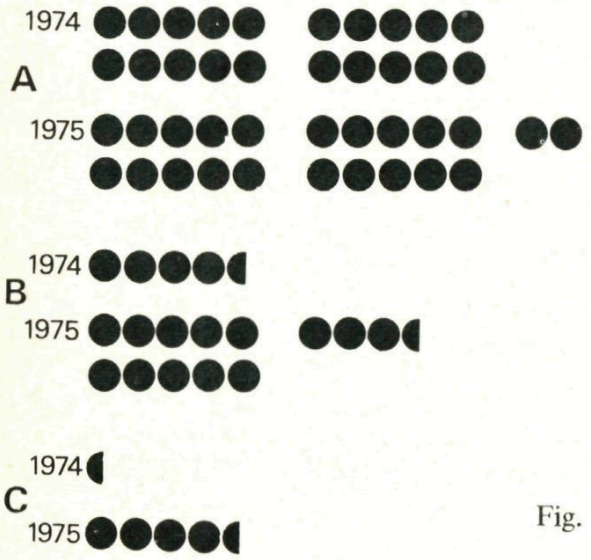


Fig. 1.

Verkoop in 1974 en 1975
1 schijfje is 100 verkoopeenheden.

Vertegenwoordiger A voelt zich safe, want hij is het langst bij de firma en heeft in zijn rayon een gevestigde afnemerskring. Hoewel fig. 1 reeds zijn dominerende positie aantoont, maakt hij ook nog het staafdiagram van fig. 2. De directie zal

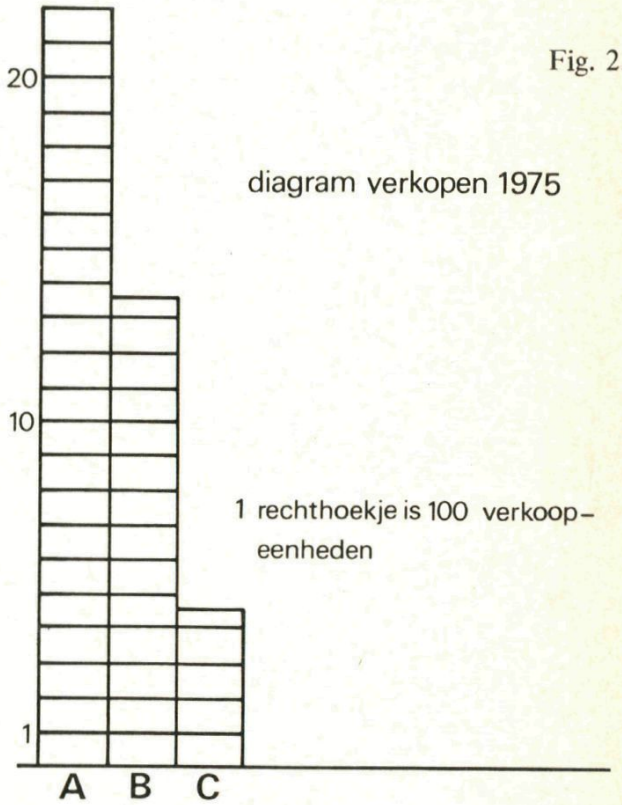


Fig. 2.

nu in één oogopslag zien, dat hij het leeuweaandeel heeft in de verkoop.
B nam twee jaar geleden een verwaarloosd rayon over en daaraan wijt hij het, dat zijn verkoopcijfers niet zo indrukwekkend zijn. Hij wil de prestaties van de anderen niet bagatelliseren, maar de waarheid mag gezegd worden. Hij hergroepeert de gegevens tot tabel 1, waar onmiddellijk uit blijkt, hoeveel de totale verkoop is gestegen en hoe opvallend groot zijn aandeel daarin is. Het cirkeldiagram fig. 3 accentueert zijn succes en het kan niet anders, de directie zal opmerken hoe veelbelovend voor de firma zijn activiteiten zijn.

Tabel 1.

Overzicht verkopen 1974 en 1975.

	1974	1975	+
A	2000	2200	200
B	450	1350	900
C	50	450	400
Totaal	2500	4000	1500

Tabel 2.

Verkoop 1975 t.o.v. 1974.

	1974	1975	omzet 1975 in %
A	2000 (= 100%)	2200	110%
B	450 (= 100%)	1350	300%
C	50 (= 100%)	450	900%

Tabel 3.

Indexcijfers 1974 = 100

	1975
A	110
B	300
C	900

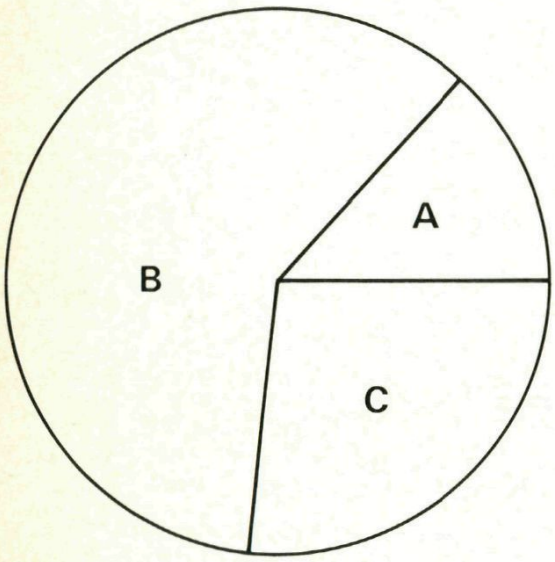


Fig. 3. Cirkeldiagram aandeel omzetvermeerdering 1975 t.o.v. 1974.

C, de junior van het drietal, begon indertijd in een geheel nieuw rayon. Hij ziet in fig. 1 zijn geringe aantal schijfjes bedenkelijk afsteken t.o.v. die van de anderen. Zouden in geval van beperkingen A en B niet zijn taak kunnen overnemen? Ook hij waardeert zijn collega's, maar denkt aan *je maintiendrai* en zoekt, tot hij ontdekt, dat een unieke kant van zijn resultaat al te zeer verborgen blijft. Hij maakt de nieuwe tabellen 2 en 3 volgens indexcijfers. Dat wil zeggen: de verkoop 1975 wordt ten opzichte van die van 1974 in procenten uitgedrukt. Verkoop 1974 is dan voor ieder op 100(%) gesteld. C heeft zijn doel bereikt: hij springt er met zijn indexcijfer 900 geweldig uit. Diagram fig. 4 toont de explosieve stijging en het kan de directie niet ontgaan, dat juist in een komende zorgelijke tijd C een onmisbare bijdrage zal leveren om de firma gezond te houden.

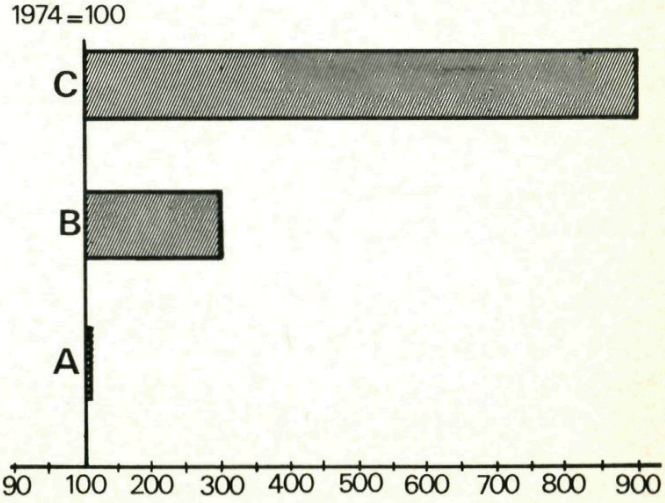


Fig. 4. Ontwikkeling verkoop 1975 t.o.v. 1974.

Zo hebben de drie vertegenwoordigers redenerend vanuit dezelfde gegevens zichzelf zo voordelig mogelijk gepresenteerd. Na al die gunstige beschouwingen gaan ze nog een stapje verder: op de vergadering met de directie zien ze de toekomst met vertrouwen tegemoet en bepleiten dan ook, dat de stijging van de kosten van levensonderhoud zal worden opgevangen door een passende verhoging van de hun toekomende uitkering per verkochte artikeleenheid . . .

Denkertje.

Verdringingspuzzel

2. Een kubus van dun blik heeft ribben 10 cm, een tweede ribben 8 cm. Beide zijn van boven open en de wanddikte wordt als verwaarloosbaar gesteld.
   De grote kubus wordt nu half vol water geschonken.
   Vervolgens drukt men de kleine rechtstandig in de grote omlaag. Hoeveel cm^3 water is er ten slotte in de kleine kubus gelopen, als deze op de bodem van de grote staat?

°°Rechthoekige driehoeken met natuurlijke getallen

Een woordje vooraf van de redactie

Misschien zijn er lezers die zeggen dat dit onderwerp eerder in ons tijdschrift heeft gestaan. Waarin bovendien haarzuiver bewezen is dat alle pythagoreïsche drietallen te vangen zijn met die en die formule. Waarom nu deze inzending geplaatst?

We zijn erg blij met deze inzending om drie redenen.
De eerste is een beetje flauw. De redactie is blij met elke inzending, waaruit blijkt dat de lezerskring meeleeft met het tijdschrift.

De tweede reden is dat Jan Overduin hier zo goed een wiskundige activiteit beschreven heeft. Misschien wel beter dan de redactie van dit tijdschrift dat kan. Dat is het ontdekken in de wiskunde, het experimenteren met getallen; niet van tevoren weten waar je uitkomt, maar toch op weg gaan. En dan de verrassing: $(2n + 1)$, $(2n^2 + 2n)$, $(2n^2 + 2n + 1)$, zou het kloppen? Gauw proberen!

De derde reden is dat Jan Overduin en zijn klasgenoten hier een wiskundige mentaliteit vertonen. Ondanks het enthousiasme van de eerste ontdekking een kritische houding tegenover je eigen werk. Zijn er nog meer mogelijkheden? Ja, daar komt 8, 15, 17. Dan nog maar eens verder proberen. Hebben we ze nu allemaal? We zijn er nog niet zo zeker van!

Pythagoras moet geen leerboek zijn vol voldongen feiten. We hopen in dit tijdschrift iets duidelijk te maken hoe je wiskunde beleeft, niet wat je aan wiskunde moet leren. En dit artikeltje heeft ons hierbij geholpen.

Het verslag van Jan Overduin

Iedereen kent wel de bekende rechthoekige driehoek met zijden 3, 4, 5. Minder bekend misschien is de combinatie 5, 12, 13. Zijn er nog meer van dat soort? Iemand in de klas bedacht: 7, 24, 25. Ook goed.

Want $25^2 = 24^2 + 7^2$, zijnde de stelling van Pythagoras. Zou er regelmaat in de getallen zitten?

Wie raadt de volgende?

Toen kreeg ik in de klas de volgende ideeën.

De kleinste zijde schijnt telkens met 2 omhoog te gaan. De tweede zijde wordt achtereenvolgens 4, 12, 24, 40 . . . dus stijgingen met 8, 12, 16 . . .

De langste zijde is dan steeds 1 meer dan de laatste. Zo lijkt het tenminste. Wat is hier goed van?

Laten we de driehoek 3, 4, 5 rangnummer 1 geven; de driehoek 5, 12, 13 rangnummer 2 en de driehoek 7, 24, 25 rangnummer 3.

Hoe ziet dan de combinatie eruit bij rangnummer n?

We maken een overzicht:

Rangnummer	Kortste	Middelste	Langste
1	3	4	5
2	3 + 2	4 + 8	5 + 8
3	3 + 2 + 2	4 + 8 + 12	5 + 8 + 12
. . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
n	$3 + 2(n - 1)$	$4 + 8 + \ldots 4n$	$4 + 8 + \ldots 4n + 1$

De kortste zijde wordt zodoende $2n + 1$.

De middelste vind je door de som te nemen van n termen van de rekenkundige rij met als eerste 4 en als laatste $4n$. Daar komt uit: $2n^2 + 2n$.

De langste zijde wordt dan $2n^2 + 2n + 1$.

De combinatie zou dus worden:

$2n + 1 \;/\; 2n^2 + 2n \;/\; 2n^2 + 2n + 1$

Bij invullen van $n = 2$ krijg je zo de combinatie 5, 12, 13.

bij $n = 3$ de combinatie 7, 24, 25. enz.

Als deze formule algemeen geldig wil zijn, moet de stelling van Pythagoras kloppen:

$(2n^2 + 2n + 1)^2 = (2n^2 + 2n)^2 + (2n + 1)^2$

Bij nader uitwerken blijkt dat inderdaad het geval te zijn.

Met deze combinatie vinden we dus telkens combinaties van drietallen natuurlijke getallen die geschikt zijn als zijden voor een rechthoekige driehoek.

Zouden hiermee alle mogelijke combinaties zijn vastgelegd? Wie zou er een combinatie kunnen verzinnen die niet uit de formule volgt? Er kwam er een met: 8, 15, 17. Dat blijkt ook een goede te zijn.

In de eerder genoemde serie was de kleinste zijde steeds een oneven getal. Zou er dan ook een formule zijn voor de kleinste zijde even? Dat zou dan een tweede serie opleveren.

Daarvoor vond ik na enig zoeken deze formule:

$2n + 2 \;/\; n^2 + 2n \;/\; n^2 + 2n + 2$

Ook hier klopt de test:

$(n^2 + 2n + 2)^2 = (n^2 + 2n)^2 + (2n + 2)^2$

Controleer ook dat maar.

Voor $n = 3$ volgt de combinatie 8, 15, 17.

Zoek zelf met de formule maar naar volgende drietallen.

We hebben nu al twee formules. Zouden deze niet tot een enkele te verenigen zijn? En wie garandeert ons dat vandaag

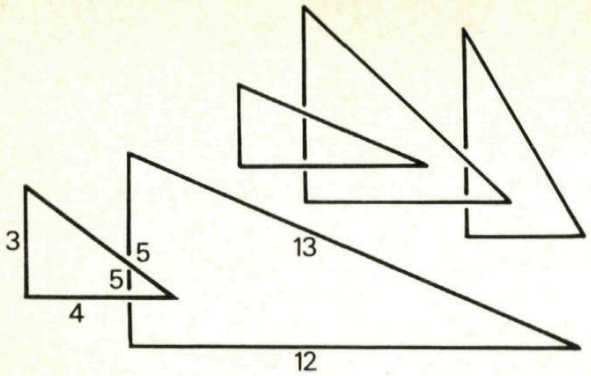


Fig. 1.

of morgen niet iemand met nog een combinatie komt, die niet in onze beide formules zit? Thuis raadpleegde ik de encyclopedie en vond daar onder het woord Pythagoras een nog algemenere formule en wel deze:
$a^2 - b^2 \;/\; 2ab \;/\; a^2 + b^2$ waarbij $a > b$.
Ook hier klopte de test: $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$. Als je hier bijvoorbeeld $a = 3$ en $b = 1$ neemt, volgt de combinatie 6, 8, 10. Door halveren volgt dan weer 3, 4, 5. In deze formule zitten twee variabelen dus die moet wel algemener zijn.
Neem $a = 5$ en $b = 3$, dan krijg je 16, 30, 34. Weer een goede. Halveren levert 8, 15, 17.
De grootste zijde is steeds $a^2 + b^2$.
Door verder experimenteren, ontdek je dat indien $2ab$ de kleinste zijde is, deze steeds oneven uitkomt en indien $a^2 - b^2$ de kleinste wordt, deze steeds even is. Bewijs dat maar.
Voor ons in de klas stond het helemaal nog niet vast dat we nu alle rechthoekige driehoeken met gehele rechthoekszijden gevangen hadden.
We hebben wel wat ontdekt maar er blijven nog vragen over.

°°Galileï en zijn valproeven

Galileï was hoogleraar in de wiskunde aan de universiteit van Pisa en deed in 1596 zijn beroemde valproef vanaf de scheve toren. Dat weet iedereen wel. Minder bekend is de moeizame weg waarlangs hij zijn theorie moest opbouwen. De grootste handicap daarbij was wel het ontbreken van een nauwkeurige tijdmeter. Hij werkte met polsslag en wateruurwerk!

Een listig idee was het de valbeweging te vertragen door proeven te doen met langs hellingen rollende knikkers.
In dit kader staat een mooi demonstratietoestel in het museum van de Utrechtse universiteit (Trans 8, vlakbij de Domtoren). Het toestel is fraai met de hand uit mahoniehout gemaakt en door de universiteit in 1753 gekocht van Watkins en Mill, Charring Cross te Londen (fig. 4).
Ruim een eeuw tevoren had Galileï in zijn boek *Discorsi e demonstrazioni matamatiche intorno a due nuove scienze* de proef beschreven.

De proef onderzoekt de volgende stelling: De valtijd van een knikker langs de verticale middellijn van een cirkel is gelijk aan de valtijd langs een willekeurige koorde die in het hoogste punt P van die cirkel begint.

Misschien lijkt het allemaal een beetje Italiaans voor je. In fig. 1 is een cirkel getekend. PA is de verticale middellijn; PB, PC en PD zijn willekeurige koorden. Als je nu bij P knikkertjes laat vertrekken, op hetzelfde moment, langs de verschillende wegen, dan bereiken ze alle op een gelijk

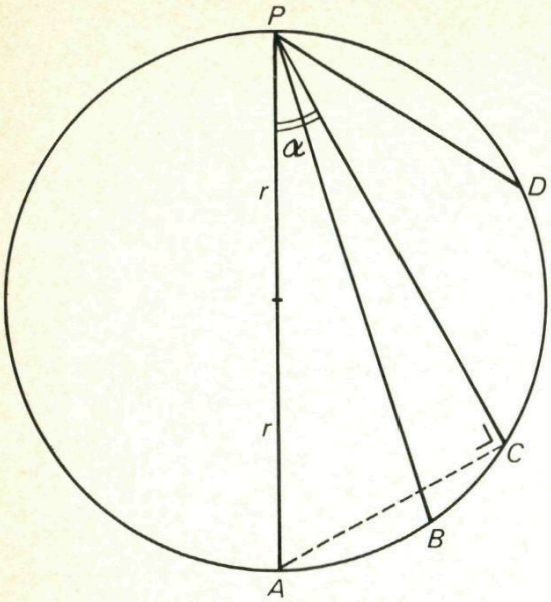


Fig. 1. Vallen langs koorden en middellijn.

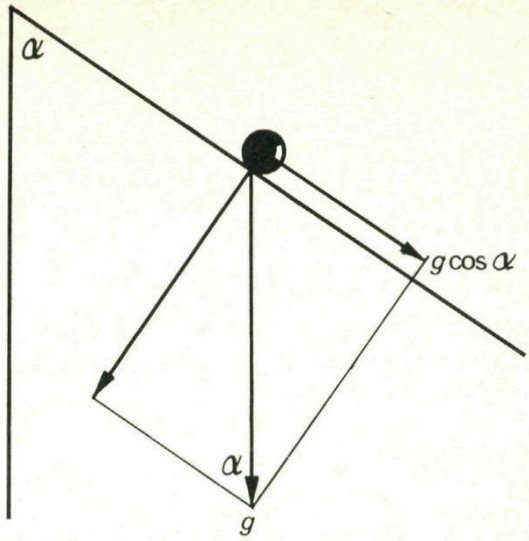


Fig. 2. Versnelling langs de helling.

moment de rand van de cirkel. De valtijden bij de vier wegen zijn dus even groot. Merk op dat bij *PB, PC* en *PD* geen 'vrije' val optreedt maar een wrijvingsloze beweging langs een hellend vlak.

In de titel van het boek van Galileï staan de woorden: *discorsi* en *demonstrazioni*, gesprekken en bewijzen. We zullen ons met dat laatste gaan bezighouden, maar wel op een manier die past bij 1976. Galilei deed het, zoals we straks zullen zien wel wat anders.
Je moet bedenken dat hij niet over de handige formule $s = \frac{1}{2}at^2$ beschikte.
Uitgaande van deze formule bewijzen we zijn stelling aldus:
voor beide wegen geldt de formule voor de versnelde beweging:

$PC = \frac{1}{2}at_1^2$ en $PA = \frac{1}{2}gt_2^2$

waarbij natuurlijk $a < g$

Hieruit volgt:

$$\frac{PC}{PA} = \frac{a \cdot t_1^2}{g \cdot t_2^2}$$

omdat $PC = PA \cdot \cos\alpha$ (fig. 1)
en $a = g \cdot \cos\alpha$ (fig. 2)

kunnen we concluderen dat $t_1 = t_2$.

Zelf proberen
Teken in het wiskundelokaal op het bord een cirkel; die staat dan meteen keurig verticaal (fig. 3). Markeer het hoogste punt *P*. Laat iemand bij *A* een plankje vasthouden. Zet de bordliniaal in de stand *PC*, zodat hierover een knikkertje kan rol-

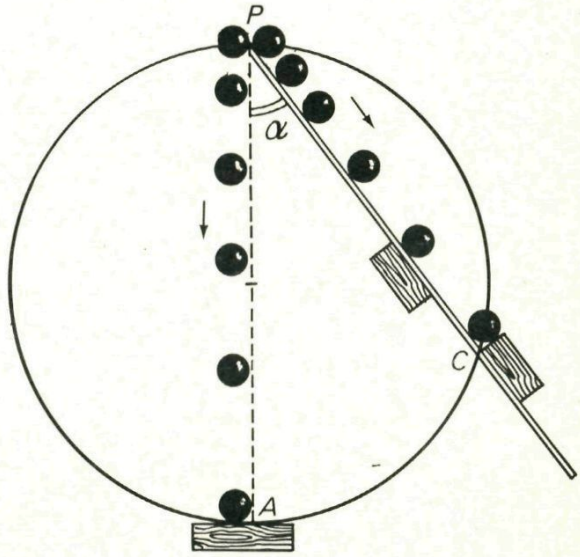
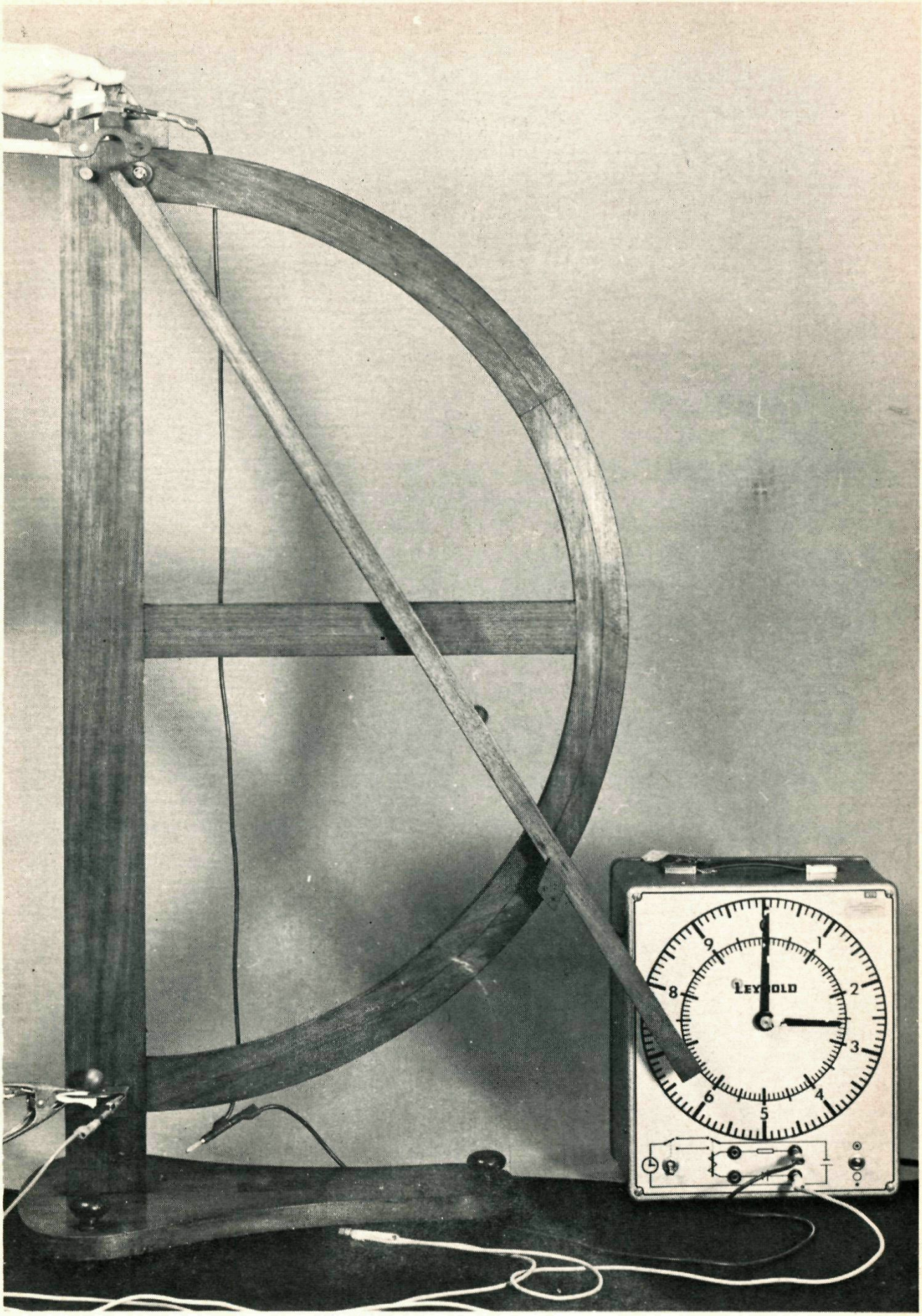


Fig. 3. Demonstratie tegen het bord met bordliniaal, twee blokjes en twee knikkers.


LEYBOLD

len. Houd op de liniaal een blokje geklemd bij *C*. Nu is er nog een derde man nodig die bij *P* twee knikkers op gelijke hoogte tegen het bord gedrukt houdt. Hij laat ze vervolgens op hetzelfde moment los, zodat de ene vrij verticaal omlaag valt en de andere langs de bordliniaal tegen het andere blokje bij *C* rolt. Je zult dan het botsen van beide knikkers als één tik ervaren. Maar zorg wel dat ze gelijk starten!

Het laatste woord aan Galileï zelf

Voor wie interesse heeft in de originele tekst reproduceren we Galileï's figuur (fig. 5) en een deel van zijn bewijs in Nederlandse vertaling.

Construeer op de horizontale lijn *GH* een verticale cirkel. Vanuit het laagste punt, het punt waar de cirkel de lijn raakt,

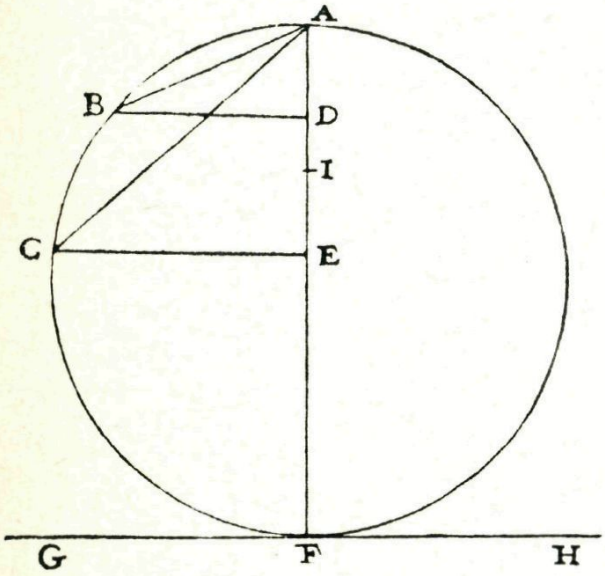


Fig. 5.

wordt de middellijn *FA* getrokken en vanuit het hoogste punt *A*, de schuine lijn *AB* en *AC*, waarbij *B* en *C* willekeurige punten op de omtrek zijn: ik zeg dus dat de tijden om langs beide wegen af te dalen gelijk zijn.

Trek *BD* en *CE* loodrecht op de middellijn. Maak *AI* middelevenredig tussen *AD* en *AE* en omdat de produkten $FA \times AE$ en $FA \times AD$ respectievelijk gelijk zijn aan de kwadraten van *AC* en *AB* en omdat het produkt $FA \times AE$ zich verhoudt tot het produkt $FA \times AD$ als $AE : AD$, volgt hieruit dat het kwadraat van *AC* zich verhoudt tot het kwadraat van *AB* als *AE* tot *AD*. Maar omdat *AE* zich verhoudt tot *AD* als het kwadraat van *AI* tot het kwadraat van *AD*, volgt hieruit dat het kwadraat van *AC* zich verhoudt tot het kwadraat van *AB* als de kwadraten van *AI* en *AD* en dienovereenkomstig verhouden zich ook de lijnstukken *AC* en *AB* als *AI* en *AD*.

Maar er is al aangetoond dat de verhouding van de afdaaltijden langs *AC* en *AB* gelijk is aan het produkt van de verhouding van *AC* en *AB* tot die van *AD* en *AI*; maar deze laatste verhouding is gelijk aan die van *AB* tot *AC*. Daarom is de verhouding van de afdaaltijden langs *AC* en langs *AB* gelijk aan het produkt van de twee verhoudingen van *AC* tot *AB* en van *AB* tot *AC*.

De verhouding van die twee tijden wordt zodoende 1. Hieruit volgt dan de stelling.

Fig. 4. Met de knop linksboven werden tegelijk twee balletjes gelost en de klok gestart. Als de bal links de contactplaat beneden raakt, ontsteekt de flitslamp voor de foto. De gemiddelde valtijd van een aantal proeven bleek 0,38 s te zijn, waaruit volgt dat het apparaat 72 cm hoog is.
Overigens is duidelijk te zien hoe door wrijving en winst aan rotatieënergie het schuin vallende balletje toch wat achterraakt. (foto universiteitsmuseum Utrecht)

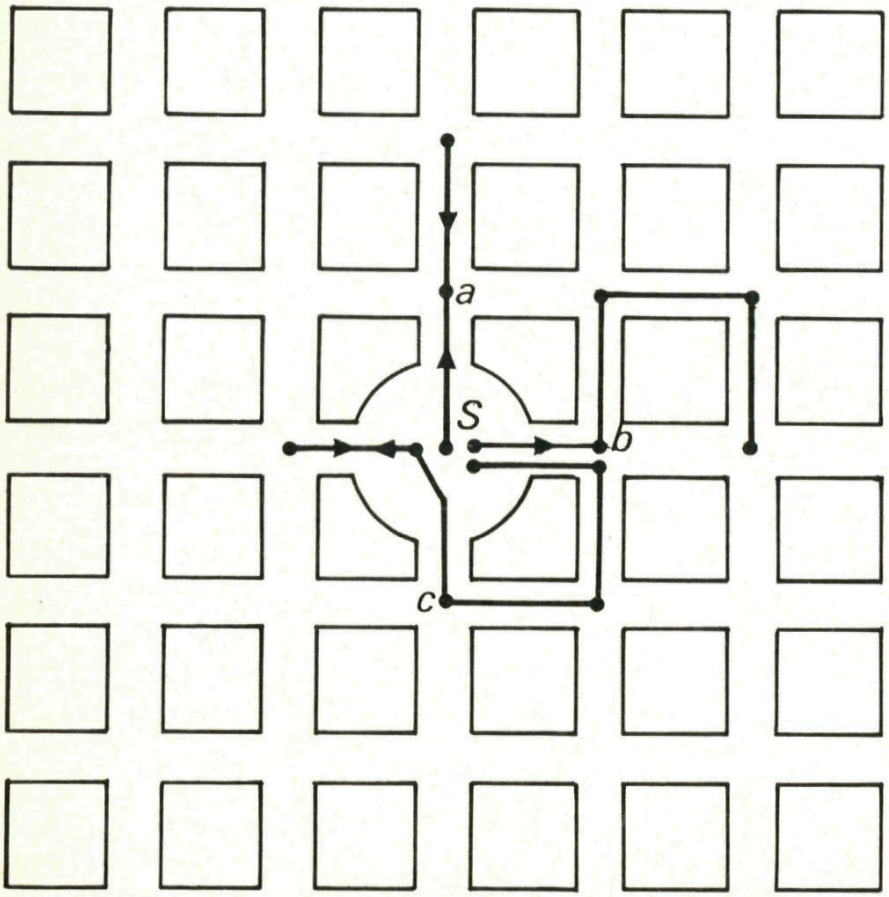
°Een kans op een prijs

Uitnodiging

De vereniging tot vorming van doortastende karakters gaat haar vijftigjarig jubileum vieren. Dat zal gecombineerd worden met een actie om het kapitaal bijeen te brengen voor een groots trainingscentrum. Voor een van de feestavonden organiseert de werkgroep 'spel' een spannend evenement, zodat de dankbare leden en oud-cursisten daar op plezierige manier hun geld kwijt kunnen. Het beroemde duo Josef en Molly Carry a Penny heeft al medewerking toegezegd en bood bovendien foto's en grammofoonplaten aan, uit te reiken als prijzen. Wij zijn nu uitgenodigd om een vergadering van de werkgroep bij te wonen en horen eerst hoe de voorlopige opzet is.

Een eenvoudig uitgangspunt

Op het feestterrein verrijst een voldoende groot model van het te stichten centrum. Fig. 1 is een vereenvoudigde plattegrond, waaruit blijkt, dat alle wegen Noord, Zuid of Oost, West loper.. Op plein S komt een speciaal Rad van Avontuur, waarop een pijl aanwijst N, Z, O of W (zie fig. 2). Josef (of Molly) fungeert op de grote avond als Raddraaier en dan begint een spannende race.



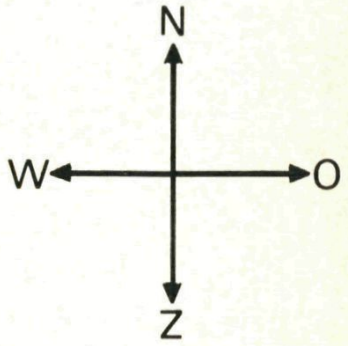


Fig. 1.

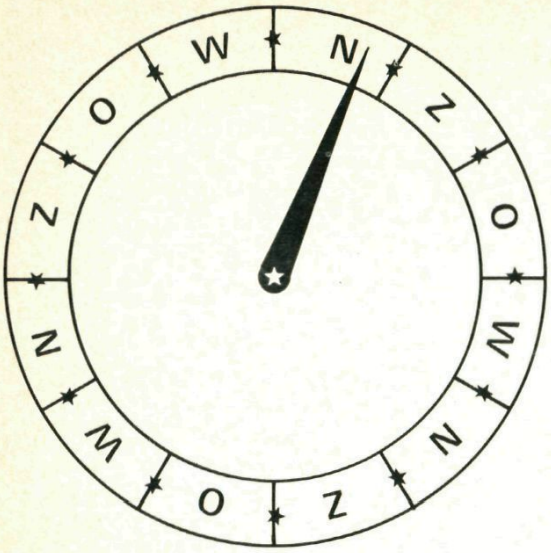


Fig. 2.

Spelverloop

Voor *f* 5,– koop je één keer draaien aan het Rad. Stel dat Piet *f* 20,– neerlegt. Hij krijgt eerst als herinnering een foto van het artiestenpaar en daarna wordt voor hem vier keer gedraaid. Stel dat de pijl op N komt. Piet vertrekt vanaf het plein en reist één wegvak Noord (zie route a in fig. 1). Weer draaien en de pijl wijst bijvoorbeeld opnieuw N. Piet reist een volgend wegvak Noord. Derde keer, de pijl komt op Z en Piet gaat één wegvak Zuid. Laatste keer nogmaals Z, waardoor Piet terugkomt op het plein. Een hoeraatje voor deze geluksvogel, want wegens dat terugkeren op het plein wint hij een prijs.

Anja ook een rondje van *f* 20,–? Draaien maar. Eerste keer O, tweede keer N, derde keer O en laatste keer Z. Helaas, Anja, je keert niet terug op het plein, je heet nu verdwaald, je ontvangt geen prijs, maar gelukkig neem je de foto mee als herinnering.

In fig. 1 zijn getekend:

Weg a: (NNZZ) een prijs.

Weg b: (ONOZ) verdwaald, geen prijs.

Weg c: (WOZONW) plein gepasseerd en daarna terug op het plein. Prijs, plus een extra prijs.

Je kunt jezelf nu vragen stellen, zoals:

a. Kun je met vier keer draaien ook een extra prijs verdienen?

b. Hoe groot is $P(\mathrm{N})$? Dit is de kans op Noord.

c. Hoe groot zijn $P(\mathrm{Z})$, $P(\mathrm{O})$ en $P(\mathrm{W})$?

d. Hoe groot zijn $P(\mathrm{NN})$, $P(\mathrm{NZ})$?

De hoofdprijs

Onder al diegenen die eindigen op het plein, zal een bijzondere prijs worden verloot: een week logeren bij Josef en Molly thuis. Nou, dat is niet gek en nu al tijdens deze werkvergadering wordt iedereen enthousiast. Enkelen van ons mogen dan ook nog een proefspelletje meedoen en een lid van de werkgroep speelt voor Josef.

Weet, wat je koopt

Wie doen er mee? Jij, Kees? Twee keer draaien? Leg je nu nog denkbeeldige tien guldens maar neer en ga naar de start op plein S, waar je allereerst de foto van het artiestenpaar ontvangt, met hun handtekeningen op de achterzijde. Erica neemt deel voor *f* 20,–, Ans voor *f* 15,– en Dirk besteedt *f* 20,– verdeeld over twee keer draaien voor *f* 10,– en daarna opnieuw twee keer draaien voor *f* 10,–.

Ieder krijgt een foto als herinnering en bovendien mogen Erica en Dirk zich verheugen in twee prachtige grammofoonplaten.

Ans, die drie keer liet draaien, kijkt sip, want ze heeft ineens door, dat haar kans op eindigen op het plein gelijk nul was. Ze legt dat uit aan de anderen en de werkgroep besluit, dat steeds een even aantal keren draaien zal worden verkocht.

Waarom had Ans geen kans op eindigen op het plein S?

Waarom had ze wel een kans op een prijs?

De uitslag is: (zie ook fig. 3)

Naam	Keren	draaien	Betalen	Matrix	Uitslag
a. Kees		2	*f* 10,–	(ZW)	verdwaald
b. Erica		4	*f* 20,–	(WOOW)	dubbele prijs
c. Ans		3	*f* 15,–	(OON)	verdwaald
d. Dirk	d_1	2	*f* 10,–	(NZ)	prijs
	d_2	2	*f* 10,–	(ZN)	prijs

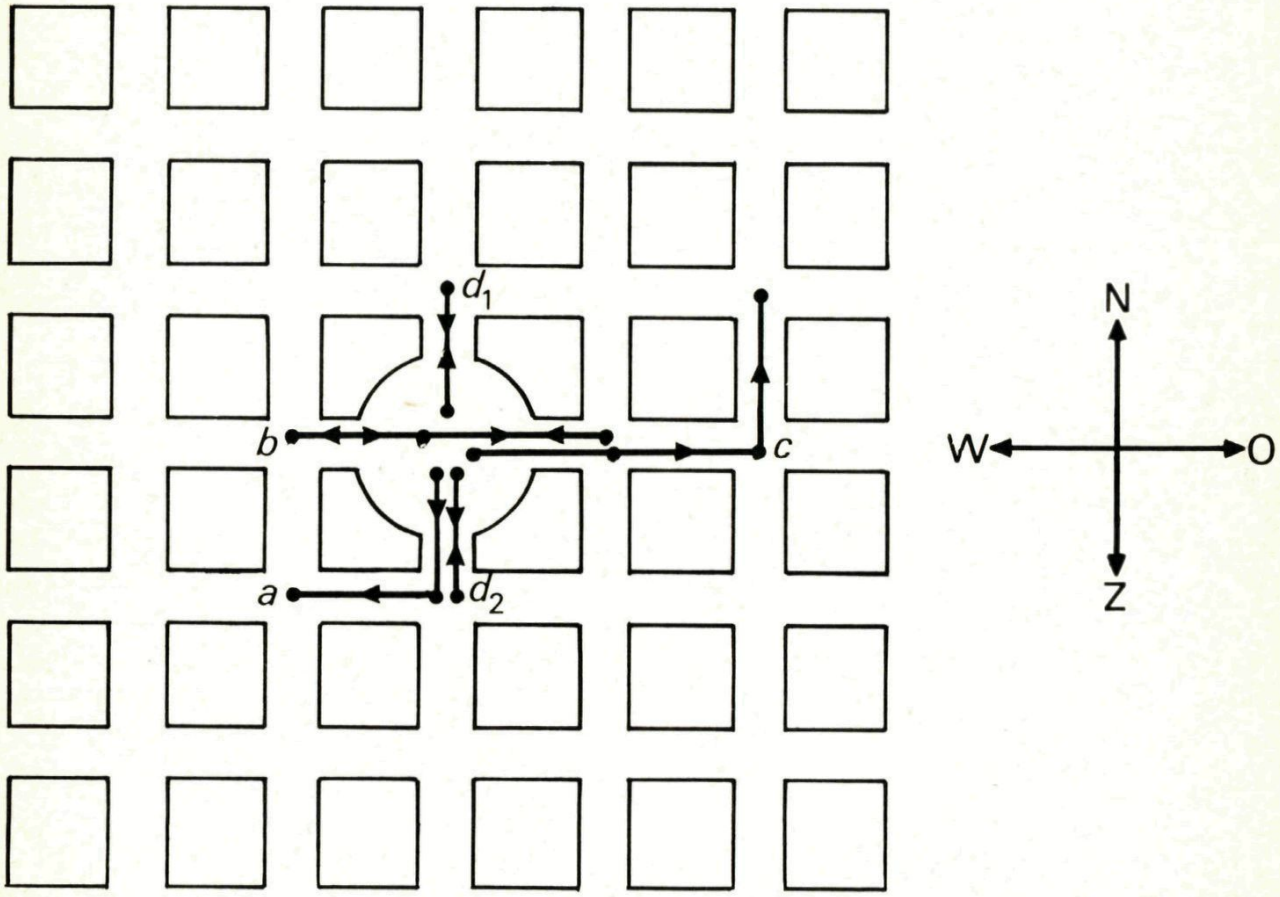


Fig. 3.

Erica contra Dirk

Dirk: Jij had je geld net zo als ik moeten besteden.

Erica: Vier keer achtereen draaien geeft de meeste kans op een prijs.

Dirk: Welnee. Voor *f* 10,– twee keer en daarna voor *f* 10,– twee keer opnieuw is voordeliger. Dan ben je altijd dichter bij het plein en zo heb je de meeste kans.

Erica: Je hebt ongelijk, want vier keer achtereen geeft je ook kans op passeren van het plein.

Kees mengt zich in de discussie met:

Hou op, ezels. 1 x 4 = 2 x 2. Dat is toch een waarheid als een koe. In beide gevallen heb je dus evenveel kans.

Wie geef je gelijk? Erica, Dirk of Kees?

1 maal 4 = 2 maal 2?

We gaan nu met kansrekening onderzoeken wat het aantrekkelijkst is, 1 maal 4 keer draaien of 2 maal 2 keer draaien.

Hoeveel wegen met lengte 4 zijn er? In fig. 4 is een boomvoorstelling getekend. Er zijn $4^4 = 256$ wegen. Hoeveel eindigen daarvan op het plein? In fig. 5 kun je ze tellen. Er zijn 36 van zulke gunstige wegen, probeer ze eerst maar te vinden.

P (eindigen bij S bij 1 maal 4) =

$P(\text{S bij } 1 \times 4) = \frac{36}{256} = \frac{9}{64}$.

Nu het andere geval, dus bij weglengte 2. Tel in fig. 6 (verwar die niet met fig. 5) even na, dat er 16 wegen zijn, waarvan 4 gunstig.

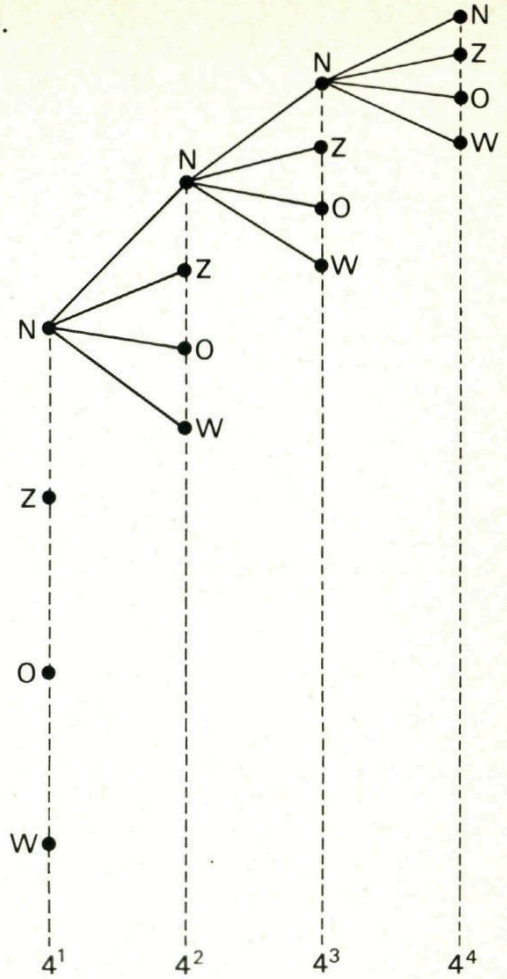
Dus: $P(\text{S bij } 1 \times 2) = \frac{1}{4}$

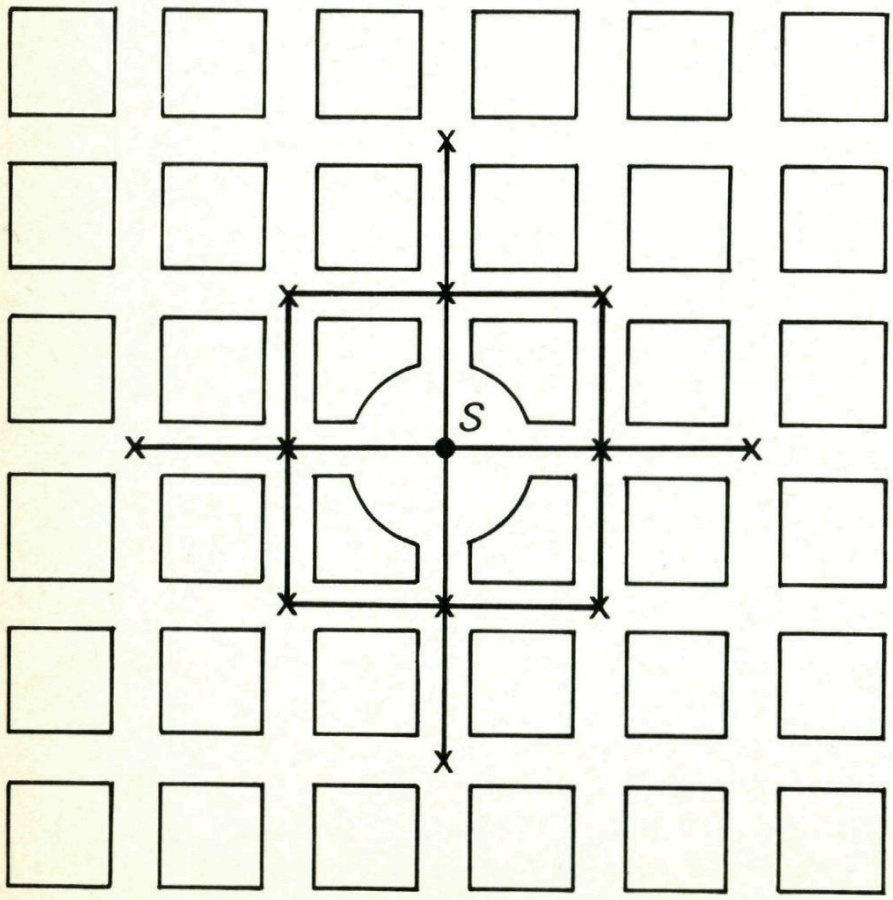
Anders: $P(\text{N}) = P(\text{Z}) = P(\text{O}) = P(\text{W}) = \frac{1}{4}$.

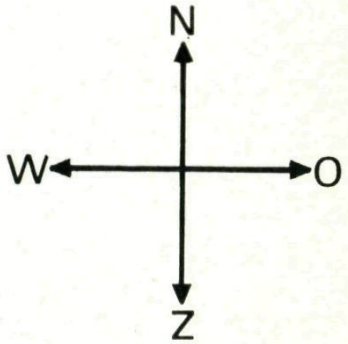
$P(\text{NZ}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(\text{S bij } 1 \times 2) = P(\text{NZ}) + P(\text{ZN}) + P(\text{OW}) +$
$+ P(\text{WO}) = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

Fig. 4.







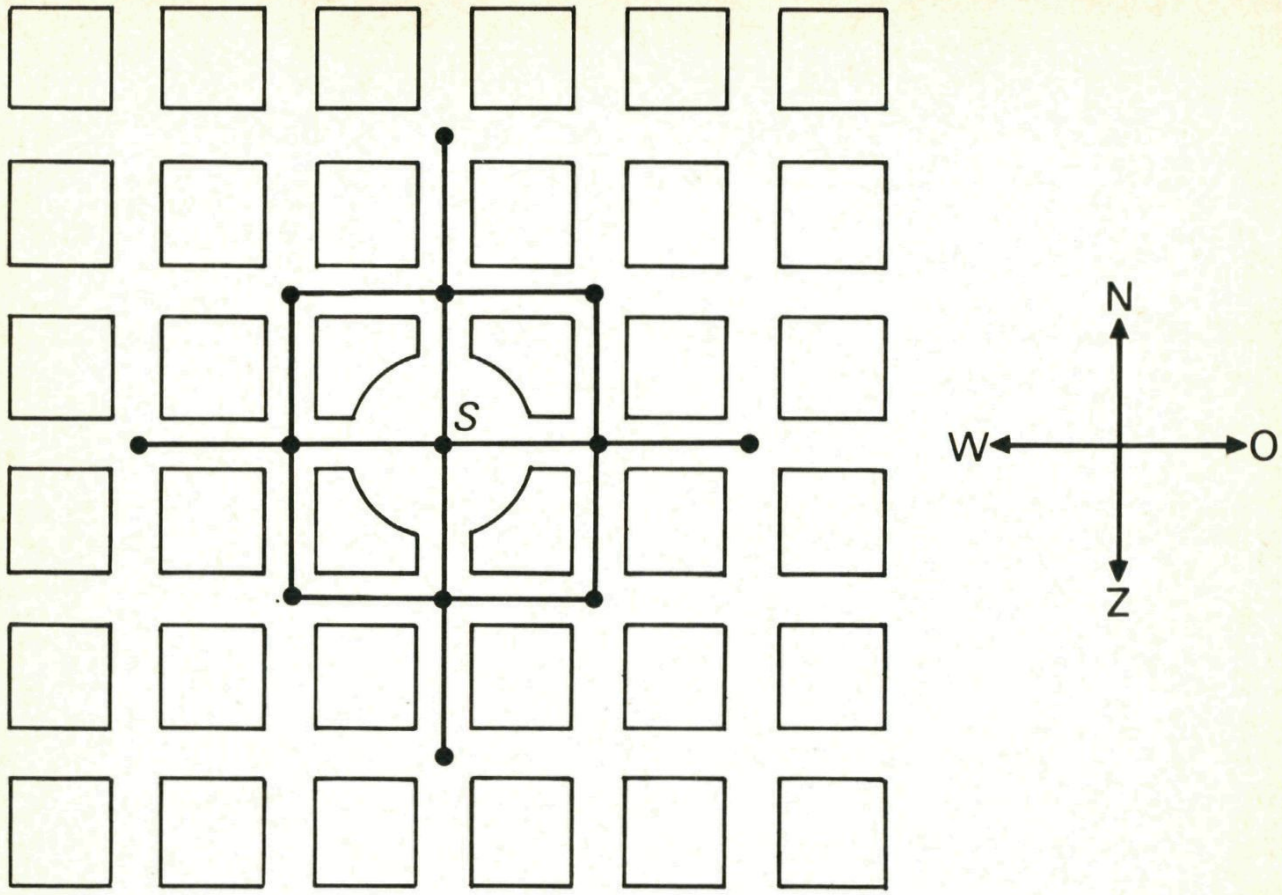


Fig. 6.

Dit speel je twee keer, dus P(S bij 2 x 2) = ...?
O, wee, heb je al spontaan $2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ gezegd? De suggestie is begrijpelijk, maar het antwoord is fout. Ga maar na:
Noem eindigen in S is 1 en verdwalen is 0. De uitkomstenverzameling bij tweemaal twee keer draaien is dan:

$U = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$

$P(1, 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ $\quad P(0, 1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

$P(1, 0) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ $\quad P(0, 0) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

Hier is uit af te leiden:

P(1 keer S bij 2 x 2) = $\frac{3}{8}$ of met de binomiaalformule $\binom{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{8}$.

Verder is nog P(minstens 1 keer S bij 2 x 2) = 1 – P (niet S) = 1 – P (0, 0) = $= 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

Wat lijkt je nu aantrekkelijker 1 x 4 of 2 x 2?

Zelf zoeken
Er duiken allerlei aardige vragen op, zoals:
Hoe groot is de kans op een grammofoonplaat bij 1 maal 2 keer draaien? Hoe groot bij 1 maal 4 keer draaien? Hoe groot is de kans op passeren van het plein bij 1 maal 4 keer draaien? (Het aantal gunstige gevallen kun je tellen in fig. 5.) Hoe kun je *f* 60,– zo kansrijk mogelijk besteden? Hoe groot is de kans op eindigen op het plein bij 1 maal 6 keer draaien?
Het is duidelijk, dat de werkgroep nog niet klaar is.

Vooral de laatste vraag is niet eenvoudig op te lossen, doordat uittellen vrijwel niet te doen is. De voorzitter van de werkgroep wil nader informeren bij een deskundige en sluit daarom de vergadering. Allen bedankt voor het meedoen en tot ziens op het feest van de doortastende lieden.

°° **Voor wiskundige doordouwers**

Wel, dan volgt nu nog de oplossing van het probleem P(S bij 1 x 6).

Stel N voor door x en de tegengestelde richting Z door x^{-1}. Stel O voor door y en dus W door y^{-1}.

Bij 6 keer achter elkaar draaien wordt bijvoorbeeld NNNNNN gelijk x^6 en alle mogelijke wegen zijn dan gevangen in $(x + y + x^{-1} + y^{-1})^6$ (1)

Om op het plein terug te keren moet in elke weg een gelijk aantal keren N en Z voorkomen, alsmede ook een gelijk aantal keren W en O. Wegens $x \times x^{-1} = 1$ en $y \times y^{-1} = 1$ moeten we uit (1) die term hebben, waarin x en y niet meer voorkomen, de bekende term dus.

Nu is:

$$(x + y + x^{-1} + y^{-1})^6 = (x + y)^6 (1 + \frac{1}{xy})^6$$

$$(x + y)^6 = \binom{6}{0} x^6 + \binom{6}{1} x^5 y + \ldots + \binom{6}{3} x^3 y^3 + \ldots + y^6$$

$$(1 \pm \frac{1}{xy})^6 = 1 + \ldots + \binom{6}{3} \frac{1}{x^3 y^3} + \ldots$$

De gezochte bekende term kan alleen ontstaan uit het produkt van de termen met $x^3 y^3$ erin. Dat produkt is dus

$$\binom{6}{3} x^3 y^3 \times \binom{6}{3} x^{-3} y^{-3} = \binom{6}{3}^2$$

Er zijn in totaal 4^6 wegen, waarvan $\binom{6}{3}^2$, die terugvoeren naar het plein.

We vinden dan ook P(S bij 1 x 6) =

$$\frac{\binom{6}{3}^2}{4^6} = \frac{\left(\frac{6!}{3!3!}\right)^2}{256{,}16} = \frac{25}{256}$$

Wie graag eens met combinatoriek wil werken, vindt hier onder nog een daarbij passende oplossing van het probleem P(S bij 1 x 6).

Om in S te eindigen, moet de weglengte een even aantal wegvakken tellen. Immers, na Noord moet één keer Zuid komen, of bijvoorbeeld bij twee keer Oost is twee keer West noodzakelijk voor terugkeer op het plein. Stel daarom de weglengte $2n$, zodat ook de matrix $2n$ lang is. Het aantal wegen met lengte $2n$ is 4^{2n}. Een deelverzameling daarvan geeft een gesloten wegcircuit en eindigt dus op het plein. Stel dat aantal $A(2n)$.

Noem $A_i\,(2n)$ de matrix, waarin i keren N (= Noord) voorkomt. Z komt dan ook i maal voor. De lengte is $2n$, dus N kan hoogstens n maal voorkomen en Z ook. Dus $i = 0, 1, \ldots n$.

Dus $A(2n) = A_0(2n) + A_1(2n) + A_2(2n) + \ldots A_i(2n)$

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i(2n)$$

Als i maal N voorkomt en i maal Z, dan komt er $(n - i)$ maal W voor en ook $(n - i)$ maal O.

$A_i\,(2n)$ bestaat uit alle permutaties met $2n$ elementen, waaronder twee groepen met i gelijke elementen en twee groepen met $(n - i)$ gelijke elementen.

$$A_i\,(2n) = \frac{(2n)!}{(i!)^2\,[(n-i)!]^2}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} \times \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \times \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

$$= \binom{2n}{n} \cdot \binom{n}{i}^2$$

$$A(2n) = \sum_{i=0}^{n} A_i(2n) = \binom{2n}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 +$$

$$+ \binom{n}{3}^2 + \ldots \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2$$

Deze ingewikkelde som wordt als volgt berekend:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot x + \binom{n}{2} \cdot x^2 +$$

$$+ \binom{n}{3} \cdot x^3 + \ldots \binom{n}{n-1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot x^n$$

$$(x+1)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} +$$

$$+ \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} + \ldots \binom{n}{n-1} \cdot$$

$$\cdot x + \binom{n}{n} \cdot 1$$

$(x+1)^{2n}$ = de vermenigvuldiging van alle termen uit de beide rechterleden.

Daaronder komt een term met x^n voor. Die term is:

$$\left\{ \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 \right\} \cdot x^n \quad (2)$$

In $(x+1)^{2n}$ is de term met x^n gelijk aan

$$\binom{2n}{n} \cdot x^n \quad (3)$$

Uit (2) en (3) volgt $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$

(1) wordt $A(2n) = \binom{2n}{n} \cdot \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}^2$

De kans $P(2n)$ op terugkeer op plein S is

$$P(2n) = \frac{A(2n)}{4^{2n}} = \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}}$$

Bij weg- en matrixlengte 2, dus $2n = 2$ en $n = 1$ komt er

$$P(\text{S bij } 1 \times 2) = \frac{\binom{2}{1}^2}{4^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Bij lengte 4, dus $2n = 4$ en $n = 2$ volgt:

$$P(\text{S bij } 1 \times 4) = \frac{\binom{4}{2}^2}{4^4} = \frac{\left(\frac{4!}{2!2!}\right)^2}{256} = \frac{9}{64}$$

Beide antwoorden zijn met tellen al eerder gevonden.

Bij lengte 6, dus $n = 3$ wordt de kans:

$$P(\text{S bij } 1 \times 6) = \frac{\binom{6}{3}^2}{4^6} = \frac{\left(\frac{6!}{3!3!}\right)^2}{256.16} = \frac{25}{256}$$

En hiermee heeft de werkgroep 'spel' de gevraagde oplossing verkregen.

°°Een schoonmaakformule

Een groot schoonmaakbedrijf in Nederland heeft een kostenmeter uitgevonden. Met een wiskundige formule kun je voortaan uitrekenen wat het schoonhouden van een gebouw per jaar kost.
De kosten worden afhankelijk gesteld van de totale vloeroppervlakte van het betreffende kantoor, de school of fabriek (fig. 1).
Bij het bepalen van de vierkante meters gaat men soms grafisch te werk. Ze nemen de plattegrond op bepaalde schaal, leggen een doorzichtig nomogram met hyperbolen op de plattegrond van een kamer zodat een hoek bij (0, 0) komt. De tegenoverliggende hoek ligt dan op of tussen hyperbolen die een bepaalde oppervlakte aangeven. (Figuur 2).

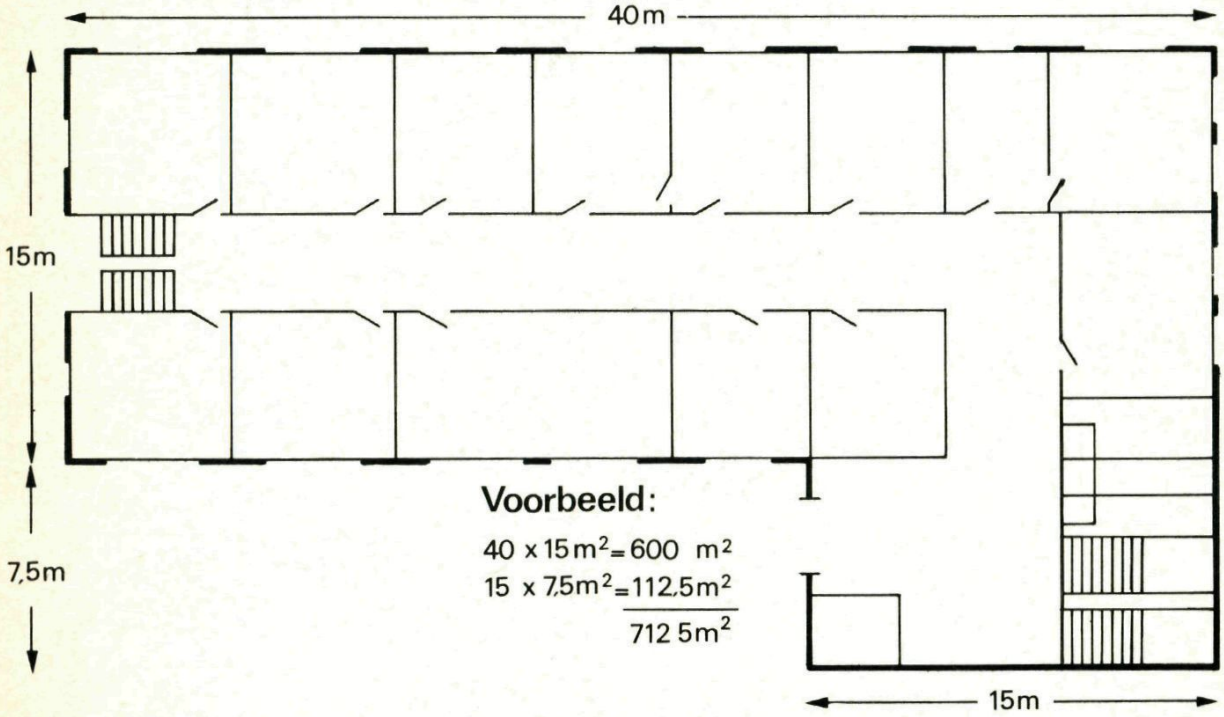


Fig. 1. Meet de schoon te houden vloeroppervlakte van uw gebouw.

De kostengrafiek
In fig. 3 staat de grafiek die het verband aangeeft tussen enerzijds de vloeroppervlakte in m^2 x 1000 (zijnde voor ons x) en anderzijds de kosten per m^2 per jaar (zijnde voor ons y).
Als je de grafiek goed bekijkt, vallen een aantal zaken direct op. De kromme daalt bij grotere vloeroppervlakte. Dat betekent: hoe grotere ruimten, des te lager de

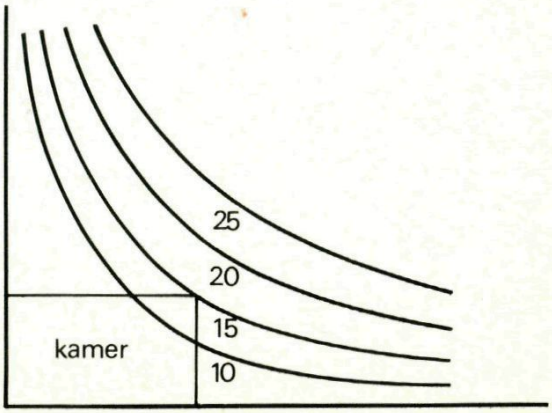


Fig. 2.

kosten per m^2. Voor zeer grote waarden van x nadert de functie naar de waarde 12. Dat wil dus zeggen: het schoonmaken van erg grote gebouwen kost ongeveer 12 gulden per m^2 per jaar.
We noemen $y = 12$ de horizontale asymptoot van de grafiek. Wat gebeurt bij kleine waarden van x?
Een kleine ruimte laten schoonmaken is relatief duur. Voor zeer kleine waarden van de oppervlakte stijgen de kosten onrustbarend.
We noemen $x = 0$ de verticale asymptoot van de grafiek. Hieruit volgt dus dat je je eigen studeervertrek beter maar zelf kunt schoonhouden.

De functie zelf

Zouden we uit de gegeven kromme de schoonmaakfunctie kunnen bepalen?
Welke functie zou deze kromme redelijkerwijze kunnen dekken? Als het een rechte lijn was, zou het niet zo moeilijk zijn. We zouden dan 2 punten ervan uitkiezen en daar de lijn doorheen leggen. Het type zou dan $y = Ax + B$ zijn.
Van welke basisvorm dienen we nu uit te gaan?
We nemen $y = A + \frac{B}{x}$ als uitgangsstelling.
In hoeverre klopt dat? Wel, als x tot 0 nadert dan y tot oneindig, dus dat zit al goed. Als x tot oneindig nadert dan moet y naar 12 gaan. We moeten A dus 12 kiezen. Nu kunnen we B nog kiezen. Er zijn oneindig veel krommen die $x = 0$ en $y = 12$ tot asymptoten hebben. We nemen nu een punt van de kromme, bijv. (3, 16).
Vul deze coördinaten in de vergelijking in. $16 = 12 + B/3$ dus $B = 12$.
De schoonmaakfunctie luidt dan:

$$\boxed{y = 12 + \frac{12}{x}}$$

Zou dit inderdaad de gezochte functie zijn?
Dan moeten andere gegeven punten erop liggen.
Neem bijvoorbeeld het punt (15, 14).

$$f(15) = 12 + \frac{12}{15} = 12 + \frac{4}{5} = 12{,}8$$

In werkelijkheid moet $f(15) = 14$ zijn. Dat klopt dus maar matig. De functie is kennelijk toch nog ingewikkelder. We kunnen een beter resultaat krijgen door meer onbekenden te stellen en die op te lossen door meer coördinaten van punten in te vullen.
We zouden bijvoorbeeld uit kunnen gaan van:

$$y = A + \frac{1 + Bx}{Cx}$$

Natuurlijk moet wegens de asymptoot, A weer 12 zijn.
We vullen nu de coördinaten van 2 punten in en wel (3, 16) en (15, 14). Dan heeft de grafiek al op 4 plaatsen dekking met de werkelijke schoonmaakkromme. Kun je aangeven welke punten bedoeld zijn?
Er geldt dan allereerst: $16 = 12 + \frac{1 + 3B}{3C}$
en vervolgens: $14 = 12 + \frac{1 + 15B}{15C}$
Als je deze twee vergelijkingen met twee onbekenden oplost, vind je: $B = \frac{1}{5}$ en $C = \frac{2}{15}$.

Zodoende wordt $\boxed{y = 12 + \frac{15 + 3x}{2x}}$

de volgende benadering.
We gaan ons resultaat weer kritisch bekijken en vragen: ligt nu bijvoorbeeld (1, 21) erop?
Vul maar in: $f(1) = 12 + \frac{15 + 3}{2} = 21$ en dat klopt wonder boven wonder precies. Het betekent niet meer dan dat we geluk hebben gehad. De kromme vertoont nu al dekking met de in fig. 2 omcirkelde punten. Wij beschouwen deze uitkomst als voldoende.

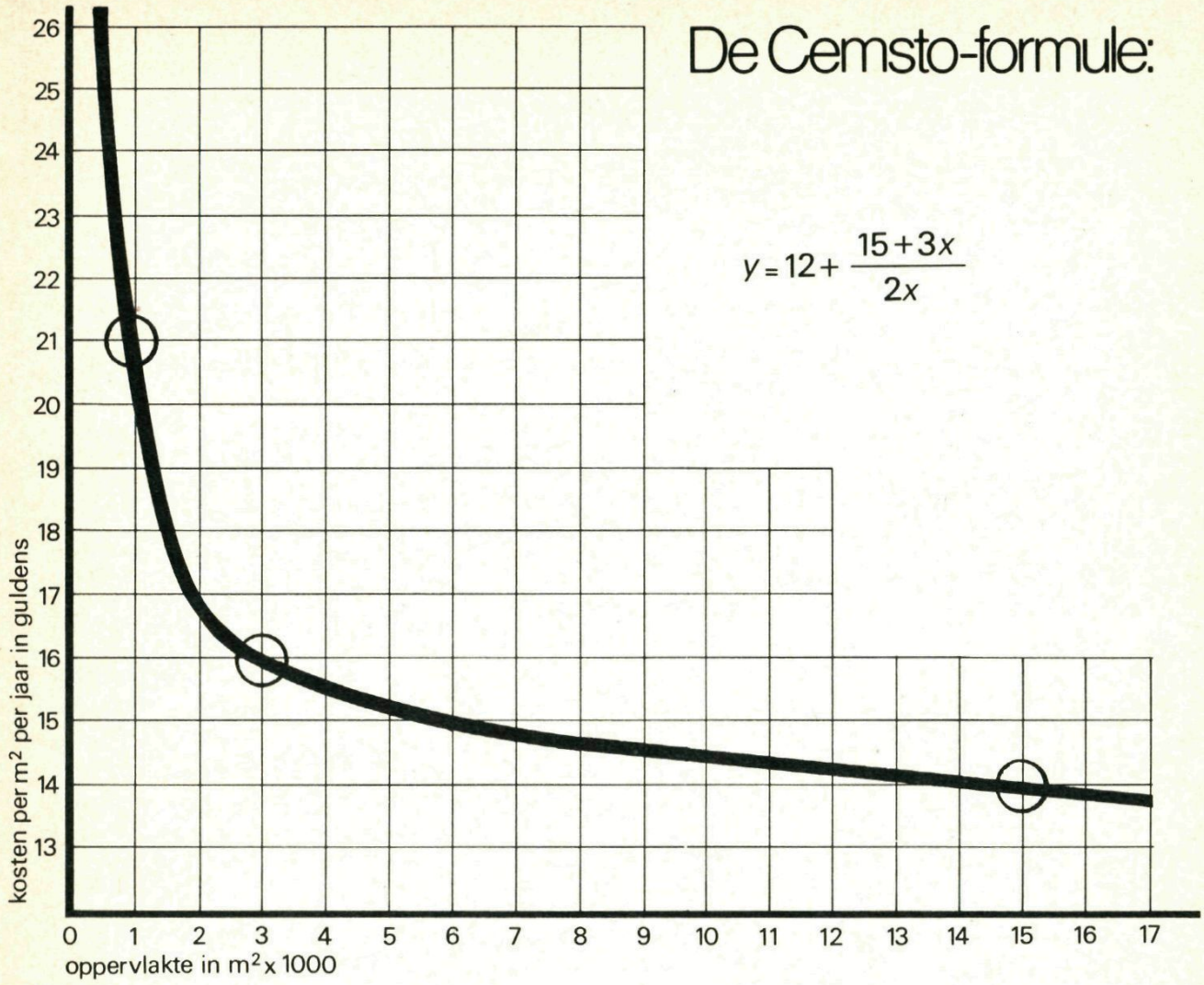


Fig. 3. De Cemsto-formule: $y = 12 + \frac{15 + 3x}{2x}$

Schoonmaakkosten voor je studeervertrek
Wat zou het nu volgens deze formule kosten om je kamer één jaar door de firma te laten schoonhouden? Stel de afmetingen op $2\frac{1}{2}$ x 4 m of 10 m^2 oppervlakte. Voor x moet je in de vergelijking vanwege de factor 1000 nu het getal 0,01 invullen. Voor y vind je dan bijna *f* 800. Dat zijn dan de kosten per jaar per m^2. De totale kosten per jaar worden dan 10 x zoveel en wel *f* 8000. Als je dat ziet zul je wel besluiten om dat karwei zelf te doen. De invloed van de verticale asymptoot doet zich hier wel sterk gevoelen.

Oplossing van de puzzel uit het vorige nummer

HORIZONTAAL

1. $y = \frac{c}{\sqrt[3]{x}}$ $4560 = \frac{c}{\sqrt[3]{0{,}0004}}$ dus $c = 4560\sqrt[3]{0{,}0004}$.

   $y = \frac{4560\sqrt[3]{0{,}0004}}{\sqrt[3]{0{,}05}} = \frac{4560}{5} = 912.$

2. $p = 3 + \frac{1}{2}$ $q = -2 + 2\frac{1}{4}$ $r = \frac{1}{2}$ dus $p + q + r = 4\frac{1}{4} = 4{,}25$

5. Extreme waarden voor $x_1 = 3$ minimum -69
   en $x_2 = -2$ maximum $+56$

6. Breuk is $\frac{166}{374} = 0{,}443850\ldots$ afgerond 0,444

8. Oppervlakte $\int_0^3 (x^2 - 2x + 6 - 2x + 3x^2 + 2)\,dx = \int_0^3 (4x^2 - 4x + 8)\,dx = 42.$

9. De zijden zijn 13, 84, 85; 84 + 85 = 169.

11. $f'(x) = 3x^2 + 2x + 9$ $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 9 = 14.$

12. $1/\sqrt{\pi} = 1/1{,}772 = 0{,}56433408\ldots$ afgerond 0,564.

13. $f(2) = 0$ dus $9 \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2a - 126 = 0$ dus $a = 21$.

14. $10^3 - 1^3 = 999$ $10 - 1 = \frac{1}{3}(9 + 9 + 9)$.

15. $a + 2v = 8$ dus $a = 2$ en $v = 3$ $a + 42v = 128$.
    $a + 6v = 4(a + v)$

VERTICAAL

1. $x^2 - 4x - 47 = 0$ $x = \frac{1}{2}(4 + \sqrt{16 + 188}) = 2 + 7{,}141 = 9{,}141.$

3. $(1 \times 2), (4 \times 3), (9 \times 4), (16 \times 5), (25 \times 6), (36 \times 7) = 252.$

4. $(1 + x)^8 = 1 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + \ldots$

7. 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414.

8. $1/2{,}02 = 0{,}495049\ldots$ afgerond 0,495.

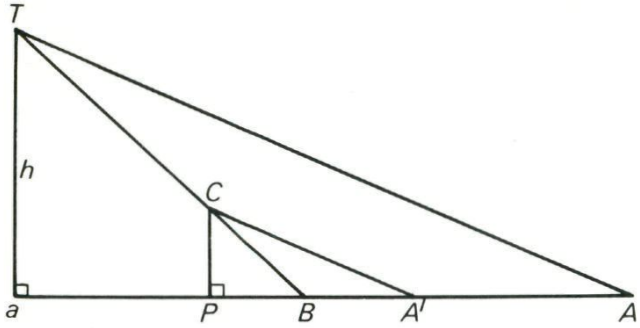
10. $-2 \cdot {}^p\log 2 + 2 \cdot {}^p\log p =$
    $-2(0{,}6786) + 2 = 0{,}6428.$

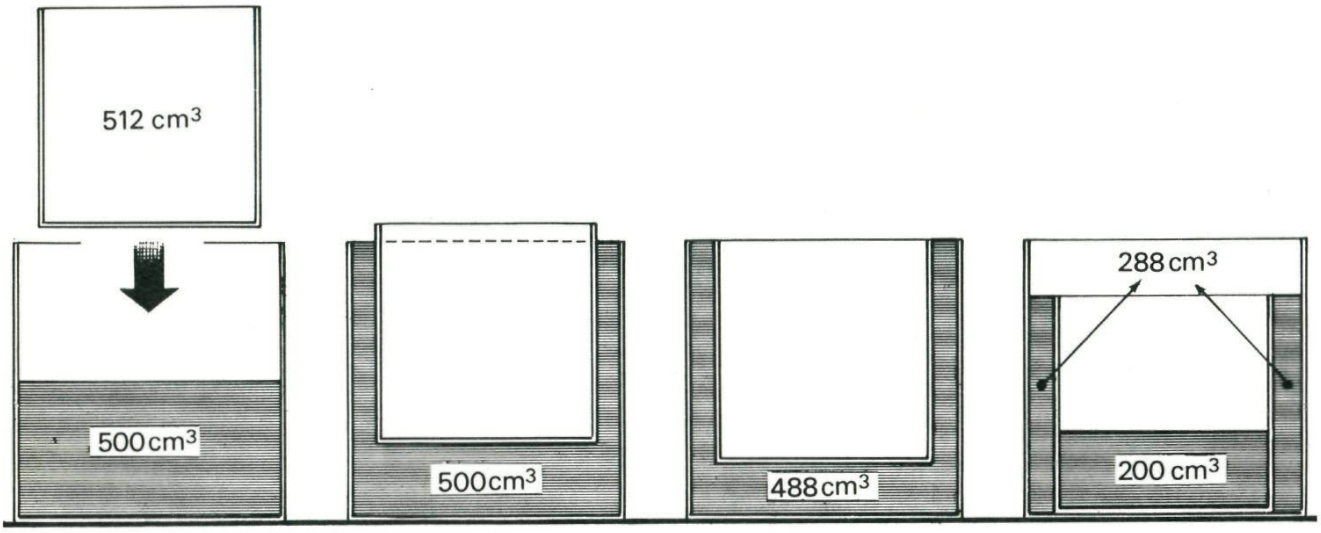
11. 119 (en 121) $121^2 - 119^2 =$
    $= 14641 - 14161 = 480.$

13. $\sqrt[3]{(30^3 - 3 \cdot 30^2 + 3 \cdot 30 - 1)} = \sqrt[3]{24\,389} = 29.$

1 9	1	2		2 4	3 2	4 5
1					5	5 6
6 4	4	7 4		8 4	2	
1		9 1	6	9		10 6
	11 1	4		12 5	6	4
13 2	1					2
14 9	9	9		15 1	2	8

Oplossingen van de denkertjes





1. Als de trommel het verst van de toren staat wordt een lijn getrokken van A naar de toren, en een horizontale lijn. Daarna wordt de trommel a meter naar de toren toegerold. Bij de omtrek kiezen we een punt C en trekken BC in de richting van de toren. Tevens de loodlijn CP.
Uit de gelijkvormigheid van de kleine figuur op de trommel met de grote figuur volgt $\frac{h}{a} = \frac{CP}{BA}$.

2. De grote kubus heeft een inhoud van 1000 cm³.
De kleine 512 cm³.
Bij neerdrukken loopt er 12 cm³ water uit het vat. Er blijft dan nog 488 cm³ water over.
Als het kleine vat op de bodem van het grote staat is er tussen de wanden nog ruimte voor 800 – 512 of 288 cm³ water; de rest 200 cm³ gaat in het kleine vat.

Inhoud

De 200-mijlszone 97
(H)eerlijke statistiek 102
Rechthoekige driehoeken met natuurlijke getallen 104
Galileï en zijn valproeven 106
Een kans op een prijs 110
Een schoonmaakformule 117
Oplossing van de puzzel uit het vorige nummer 120
Oplossingen van de denkertjes 121

PYTHAGORAS

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

REDACTIE

A. J. Elsenaar, Harderwijk.
W. Kleijne, Heerenveen.
Ir. H. Mulder, Breda.
G. A. Vonk, Naarden.

REDACTIESECRETARIAAT

Bruno Ernst, Mauritsstraat 117, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

ABONNEMENTEN

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, kollektief besteld via één der docenten, *f* 6,– per jaargang.
Voor anderen *f* 10,–.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.
Bij elke 20 abonnementen of gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.