

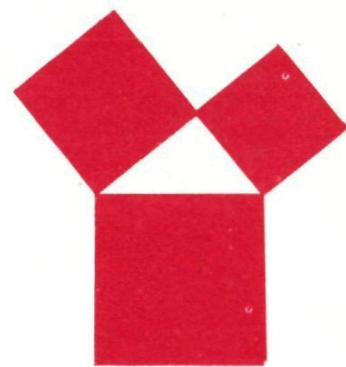


2

jaargang 16 / november 1976

**wiskundetijschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Kal succes

Wim Klein

Karikatuur van Wim Klein, onbetwist kampioen hoofdrekenaar.
Meer over zijn prestaties vind je in het eerste artikel van dit nummer.

BIJ DE FOTO OP DE OMSLAG:

Rhyton (vaas om vloeistof uit te gieten bij offerplechtigheden) in de vorm van een stierekop. Dit juweel van steen en goud is gevonden in het kleine paleis van Knossos (Kreta) en dateert uit de 16^e eeuw v. Chr. Het motief van de stier en vooral van de horens van de stier komt op Kreta veel voor. De fraaie vorm die vele horens van dieren hebben, wordt op pag. 42 e.v. wiskundig geanalyseerd.

°Wim Klein - kampioen rekenaar

Nederland heeft zijn Ard Schenk en Sjoukje Dijkstra, zijn Ada Kok en Max Euwe. In deze lijst van nationale kampioenen hoort ook Willy Wortel, alias Willem Klein, ons nationale rekenfenomeen. Hij zwierf door Europa met zijn cijfervaardigheid en demonstreerde die op bruiloften en partijen, op de hoek van een Parijse boulevard of bij de uitgang van de metro, op een school in Belgrado of voor een congres van mathematici en computerdeskundigen in Genève.

Toen hij Danny Kaye voor het eerst ontmoette, vroeg hij hem naar zijn geboortedatum. Toen Danny Kaye zei: 18 januari 1913, zei onze Willem pats daarop: zaterdag.

Terwijl wij voor de kleinste optelling al naar een kladpapiertje grijpen, de rekenliniaal of de zakcomputer pakken om 13×7 uit te rekenen, beoefent Willem Klein nog het ouderwetse ambacht van hoofdrekenen en wel op een briljante manier.

Hij werd op 4 december 1912 (woensdag) om 10.45 uur in Amsterdam geboren. Zijn vader had toen als telefoonnummer 51314 en als autonummer 59143. Vanaf de eerste schooldag was hij een getallenfan. Als kind amuseerde hij zich ermee de nummers van twee na elkaar passerende auto's uit het hoofd met elkaar te vermenigvuldigen. Als 10-jarige kon hij al getallen van vier cijfers in factoren ontbinden.

Zijn talent is een combinatie van aanleg, geheugen en oefening. Een van zijn laatste stunts: vorig jaar trok hij voor een gezelschap professoren de 37-machtswortel uit een getal van 216 cijfers in de tijd van één minuut en 8 seconden. Tevoren had men een getal in een computer gestopt die dat getal dan eerst tot de 37-ste macht had verheven.

Hoe het begon

Speciaal voor ons tijdschrift hebben we Willem Klein, die momenteel bij het CERN in Genève werkt, geschreven met de vraag: vertel eens hoe het allemaal gegaan is en leer ons iets van uw rekentrucs. Hij schrijft: het begon eigenlijk pas goed in de vierde klas van de basisschool. We moesten de tafels van vermenigvuldigen leren van 1 tot 10, maar ik kende na enige

tijd alle produkten van getallen van 2 cijfers uit het hoofd. Later kwamen de kwadraten. De meester wist nog het kwadraat van 16, maar ik enkele weken later dat van alle getallen onder de 1000! We leerden dat kwadraten altijd eindigen op 0, 1, 4, 5, 6 of 9. Ik viste uit (en leerde dat gelijk weer van buiten), dat de laatste 2 cijfers alleen de nu volgende combinaties kunnen zijn: 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96 (totaal 22 mogelijkheden). Toen leerden we getallen te ontbinden in factoren. $15 = 5 \times 3$ enz. We moesten dit klaarkrijgen voor getallen tot 300. Ik ging gelijk maar door tot 15000!

Ontbinding in factoren blijkt een machtig hulpmiddel te zijn om vermenigvuldigingen uit te voeren.

$$\begin{aligned} 123 \times 683 &= (123 : 3) \times (683 \times 3) = 41 \\ &\times 2049 = 41 \times 2000 + 41 \times 49 = \\ &84009 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3658 \times 153 &= (62 \times 59) \times (9 \times 17) = \\ &(62 \times 9) \times (59 \times 17) = 558 \times 1003 = \\ &559674 \end{aligned}$$

Kenmerken van deelbaarheid

We kennen een aantal maniertjes om te weten of een getal deelbaar is door 2 of 3 of 5 of zelfs 8. Sommigen onder ons weten ook nog weg met 7 en 9, maar Willem

Klein draait zijn hand, pardon zijn hoofd, niet om voor factoren als 17, 53, 97 enz. Hier een van die moeilijker trucs.

Hij ziet meteen dat een zeker groot getal noch door 7, noch door 11, noch door 13 deelbaar is. Nu is het produkt $7 \times 11 \times 13 = 1001$ (en dat weet hij weer van buiten). Neem nu eens het getal 114043. Hij gaat daar nu een veelvoud van 1001 van aftrekken en wel (om een uitgekiende reden) 43 keer. Nu is $43 \times 1001 = 43043$ (erg eenvoudig). Afgetrokken 114043 – 43043 = 71000. Hierin zit duidelijk noch 7, noch 11, noch 13! Moet je eens kijken wat er van heel dit spektakel overblijft, als je het verkort opschrijft. Voor Willy Wortel is het niet meer dan:

114043; $114 - 43 = 71$ dus geen 7, of 11, of 13.

Een ander voorbeeld volgens deze manier aangepakt:

114101; $114 - 101 = 13$ dus deelbaar door 13!

Zo kent hij nog tientallen van dergelijke rekentechnische kenmerken.

De kruismethode

Iedereen kent de normale vermenigvuldigingsmanier waarbij we getallen onder elkaar schrijven en daarbij op een merkwaardige manier omspringen met vermenigvuldigen en optellen.

43	Probeer het eens achter elkaar
56 x	uit te schrijven, wat je normaal
258	hier onder elkaar doet. Het
215	komt er dan aldus uit te zien.
2408	Het lijkt ingewikkelder, maar
	het is in feite precies hetzelfde.

$$43 \times 56 = (40 + 3)(50 + 6)$$

1. $3 \times 6 = 18$

1 onthouden, 8 opschrijven
deze 8 is dan tevens het laatste cijfer van de uitkomst van het produkt.

2. dan $4 \times 6 + 5 \times 3 + 1 = 24 + 15 + 1 = 40$

4 onthouden en 0 opschrijven als voorlaatste cijfer.

3. $4 \times 5 + 4 = 24$.

Dit is het cijfer van de honderdtallen.

Antwoord dus: $43 \times 56 = 2408$.

We doen hetzelfde nog eens voor 234×567

$$234 \times 567 = (200 + 30 + 4)(500 + 60 + 7)$$

1. $4 \times 7 = 28$

2 onthouden en 8 noteren

2. $3 \times 7 + 6 \times 4 + 2 = 47$

4 onthouden en 7 noteren

3. $2 \times 7 + 5 \times 4 + 6 \times 3 + 4 = 56$

5 onthouden en 6 noteren

4. $2 \times 6 + 5 \times 3 + 5 = 32$

3 onthouden en 2 noteren

5. $2 \times 5 + 3 = 13$

Antwoord dus: $234 \times 567 = 132678$.

Het zal je wel duidelijk zijn dat niet veel mensen heden ten dage bereid zijn zich in dergelijke hoofdbrekende avonturen te storten. Het lijkt op vliegeren in een tijd van ruimtevaart.

En nu naar de middelbare school!

Hij maakte daar al vrij vroeg kennis met merkwaardige produkten en quotiënten. Een ervan is:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Met deze beroemde formule kun je ook de nodige zaken aanpakken.

$$283 \times 657 = (470 + 187)(470 - 187) = 220900 - 34969 = 135931$$

Hierbij is het getal 470 het gemiddelde van 283 en 657.

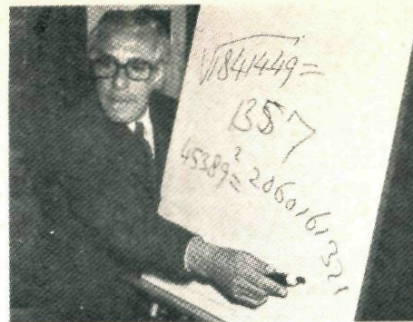
Wat te doen als de som dezer getallen niet even is, zodat het gemiddelde een gebroken getal wordt? Werk dan aldus:



Worteltrekking gelukt!



Kwadrateren.



Zo iedereen akkoord?

$$283 \times 658 = 283 \times 329 \times 2 = (306 + 23) \\ (306 - 23) \times 2 = (93636 - 529) \times 2 = \\ 93107 \times 2 = 186214.$$

En al dat werk moet dan nog uit het hoofd gebeuren!

Een nieuwe uitvinding: de logaritme

Al in de eerste klas hoorde hij zijn wiskundeleraar het woord logaritme gebruiken. Nieuwsgierig vroeg hij na afloop van de les wat dat voor iets was. Hij hoorde toen hoe met een log-tafel vermenigvuldigingen veranderen in optellingen, delingen in aftrekkingen enz. Een nieuwe wereld ging voor hem open. Toen hij maandagmorgen weer op school verscheen had hij de logaritmen van de getallen van 1 tot 200 in 5 cijfers inmiddels uit het hoofd geleerd! Nu kon hij pas met recht aan de slag.

Hij gaat nu de derdemachtswortel uit 3721 trekken. Maar daarvoor zou je weer log 3721 moeten kennen. Geen nood! $\log 3721 = 2 \log 61 = 2 \times 1,78533 = 3,57066$. Dat moet dan weer door 3 gedeeld worden. Dat geeft dan 1,19022. Nu moet er teruggezocht worden. We moeten de vergelijking $\log x = 1,19022$ zien op te lossen en wel... uit het hoofd. Willem Klein weet dat de oplossing nu tussen 15 en 16 ligt. Hij probeert 15,5. Hij berekent $\log 15,5 = \log 155 : 10 = 2,19033 - 1 = 1,19033$. Dat komt dan weer iets te hoog uit. Hij stelt dan weer een betere benadering enz., cijfert verder, met als enig kladpapier... de binnenzijde van zijn schedel. We zullen dit proces nu niet verder volgen.

Alternatief worteltrekken

Gevraagd $\sqrt{38} = ?$. De eerste benadering is 6. Deel nu 6 op 38, dat geeft 6,3333. Neem nu het gemiddelde van 6 en 6,3333; dat is 6,1666. Dit is de nieuwe benadering. Immers $6,1666^2 = 38,028$. Zo kun je nog een tijdje doorgaan.

Werken in andere talstelsels

Soms zet hij getallen uit ons tientallig stelsel om in een tweetallig stelsel en rekt dan als een menselijke computer. Soms komt een achttallig stelsel hem beter uit. Een voorbeeld van decimaal naar octaal (achttallig):

$$341 : 8 = 42 \text{ rest } 5 \text{ noteer } 5$$

$$42 : 8 = 5 \text{ rest } 2 \text{ noteer } 2, \text{ noteer } 5$$

zodoende wordt: 341 (decimaal) = 525 (octaal) want

$$341 = 5 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 5 \times 8^0$$

Evenzo 341 binair (tweetallig) geschreven:

341 (decimaal) = 101010101 (binair). Ga dat zelf maar na!

Het aantal trucs dat Willem Klein achter de hand heeft is legio. Zo kan hij getallen vrij gemakkelijk splitsen in een som van kwadraten. Zo geeft hij 14 oplossingen voor de opgave: splits 358 in een som van 4 kwadraten. Hier zijn ze.

$$18^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2$$

$$16^2 + 10^2 + 1^2 + 1^2$$

$$14^2 + 12^2 + 3^2 + 3^2$$

$$13^2 + 13^2 + 4^2 + 2^2$$

$$13^2 + 10^2 + 8^2 + 5^2$$

$$17^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2$$

$$16^2 + 7^2 + 7^2 + 2^2$$

$$14^2 + 11^2 + 5^2 + 4^2$$

$$13^2 + 12^2 + 6^2 + 3^2$$

$$11^2 + 11^2 + 10^2 + 4^2$$

$$17^2 + 7^2 + 4^2 + 2^2$$

$$15^2 + 9^2 + 6^2 + 4^2$$

$$14^2 + 8^2 + 7^2 + 7^2$$

$$13^2 + 11^2 + 8^2 + 2^2$$

Willem Klein trekt door Europa met een rekenshow.

Zijn programma vermeldt:

1. vermenigvuldigen met factoren tot 6 cijfers
2. delen zoals $8354687 / 113$
3. mondeling optellen van 10 getallen van 5 cijfers
4. aftrekken 2 getallen van 15 cijfers
5. machtsverheffen 5327^4 enz.
6. worteltrekken
 $\sqrt{3497894449}$ of $\sqrt[3]{84604519}$
of $\sqrt[4]{229345007}$
7. hoeveel wordt $f 45260$ à 4% na 36 jaar?
8. sinus, cosinus, tangens, e , π

9. geheugenproef: het publiek geeft een getal van 24 cijfers op en hij leert het uit het hoofd

10. ontbinden, zoals:

$$7768839243628512 =$$

$$2^5 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37^2 \cdot 43 \cdot 113 \cdot 127$$

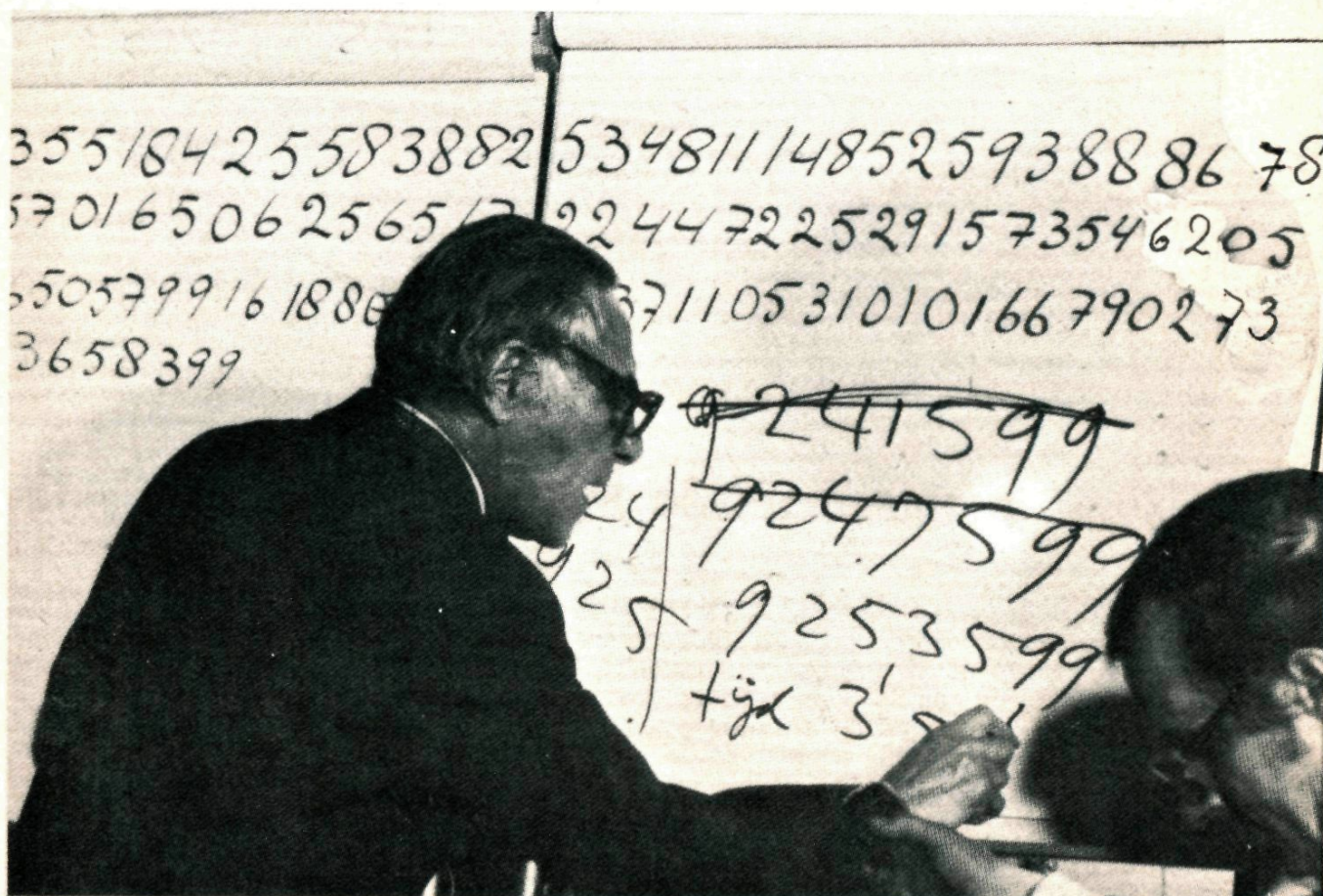
11. de weekdag bepalen van een gegeven datum

12. berekening van Pasen enz. enz.

Ondanks al zijn stunts zal Willem Klein toch vooral bekend blijven als Willy Wortel ofwel de kampioen worteltrekken.

Zoals onze schaatsters of autocoueurs hun lijst met wedstrijdprestaties bijhouden, zo doet Willem Klein dat ook. De lijst die hij mij toestuurde, ziet er als volgt uit:

Datum	Plaats	Opgave	Tijdsduur
5 maart 1975	Lyon	$\sqrt[3]{200}$ cijfers	10 min. 32 sec.
27 aug. 1975	Genève	$\sqrt[3]{63}$ cijfers	8 min. 27 sec.
19 sept. 1975	Amsterdam	$\sqrt[3]{100}$ cijfers	5 min. 22 sec.



Op de foto zie je hem net een krachttoer beëindigen op 15 november 1973 in 3 minuten en 59 seconden.

Toen hij er de punt achter zette, was hij zelf 60 jaar, of zoals hij het zegt:

22.245 dagen
533.880 uren
32.032.800 minuten
1.921.968.000 seconden.

Misschien schudt nu een erg intelligente lezer zijn of haar hoofd. De vraag komt op: wat is het nut van al dit moeizaam

gestuntel? Leven we niet in een tijd van mechanisatie? Waarom zou men zijn moede hoofd dan zo aftobben? Wel het eenvoudigste antwoord luidt: het heeft geen nut. Of net zoveel nut als fietsen, schaken, voetballen. Klein is een duivels-kunstenaar met getallen, zoals Johan Cruyff met de bal. We noemen dat sport of spel. En in de klasse van het rekenen is Willy Wortel onze ongeslagen kampioen, vooral dank zij het feit dat we ons allemaal zo weinig trainen in dat wat hij zo overvloedig doet.

°Getalpatronen

In dit artikeltje wil ik een aantal getalpatronen tonen en wel zonder wiskundige verklaringen. Misschien is dit dan een aansporing voor de lezers om zelf op zoek te gaan naar het hoe, het waarom en eventueel het waartoe van de merkwaardigheden.

Allereerst

$$\begin{aligned}0 \times 9 + 1 &= 1 \\1 \times 9 + 2 &= 11 \\12 \times 9 + 3 &= 111 \\123 \times 9 + 4 &= 1111 \\1234 \times 9 + 5 &= 11111 \\12345 \times 9 + 6 &= 111111 \\123456 \times 9 + 7 &= 1111111 \\1234567 \times 9 + 8 &= 11111111 \\12345678 \times 9 + 9 &= 111111111\end{aligned}$$

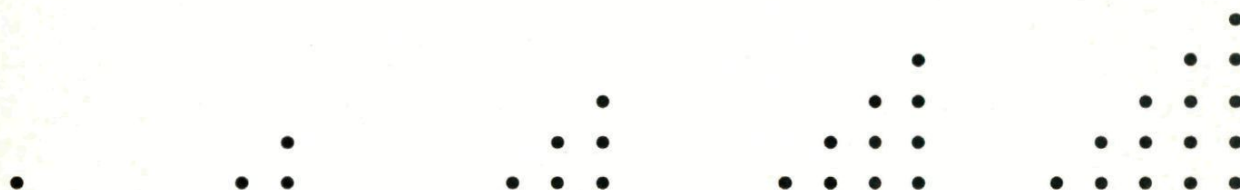
$$\begin{aligned}9 \times 9 + 7 &= 88 \\9 \times 98 + 6 &= 888 \\9 \times 987 + 5 &= 8888 \\9 \times 9876 + 4 &= 88888 \\9 \times 98765 + 3 &= 888888 \\9 \times 987654 + 2 &= 8888888 \\9 \times 9876543 + 1 &= 88888888 \\9 \times 98765432 + 0 &= 888888888 \\9 \times 987654321 - 1 &= 8888888888\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \times 8 + 1 &= 9 \\12 \times 8 + 2 &= 98 \\123 \times 8 + 3 &= 987 \\1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\12345 \times 8 + 5 &= 98765 \\123456 \times 8 + 6 &= 987654 \\1234567 \times 8 + 7 &= 9876543 \\12345678 \times 8 + 8 &= 98765432 \\123456789 \times 8 + 9 &= 987654321\end{aligned}$$

Zou je zelf ook eens een dergelijk schema kunnen bedenken?

Nu iets anders, nl. het d.m.v. stippen voorstellen van getallen. Het is mogelijk deze stippen in regelmatige figuren te rangschikken.

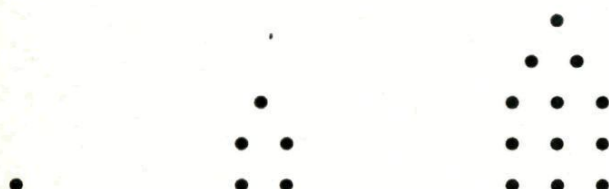
– *Driehoeksgetallen*: 1–3–6–10–...



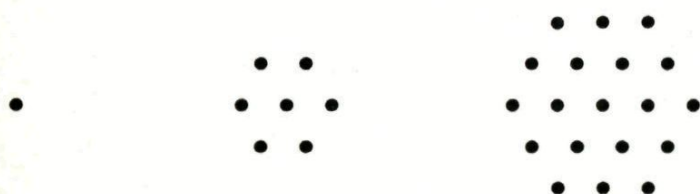
– *Vierkantgetallen*: 1–4–9–16–...



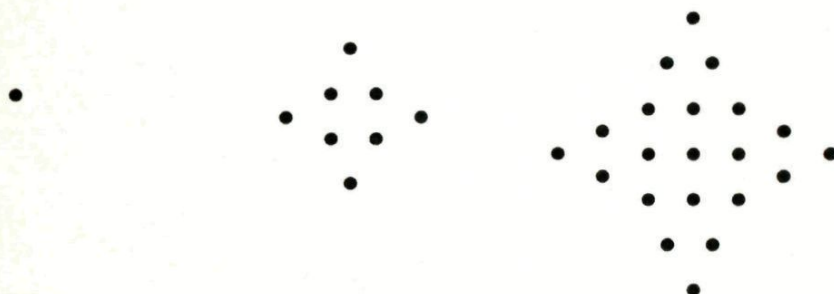
– *Vijfhoeksggetallen*: 1–5–12–22–...



– *Zeshoeksgetallen*: 1–7–19–...



– *Stergetallen*: 1–8–21–...



Probeer nu eens in elk geval te berekenen wat de volgende getallen in de rij zijn. Wat is de algemene regel om de rij te vervolgen? Kun je zelf ook zulke figuren bedenken?

De redactie zal graag eigen vondsten publiceren.

°Uit de geschiedenis van de wiskunde

ABU 'ABDALLAH MUHAMMAD IBN MUSA AL-CHWARIZMI'

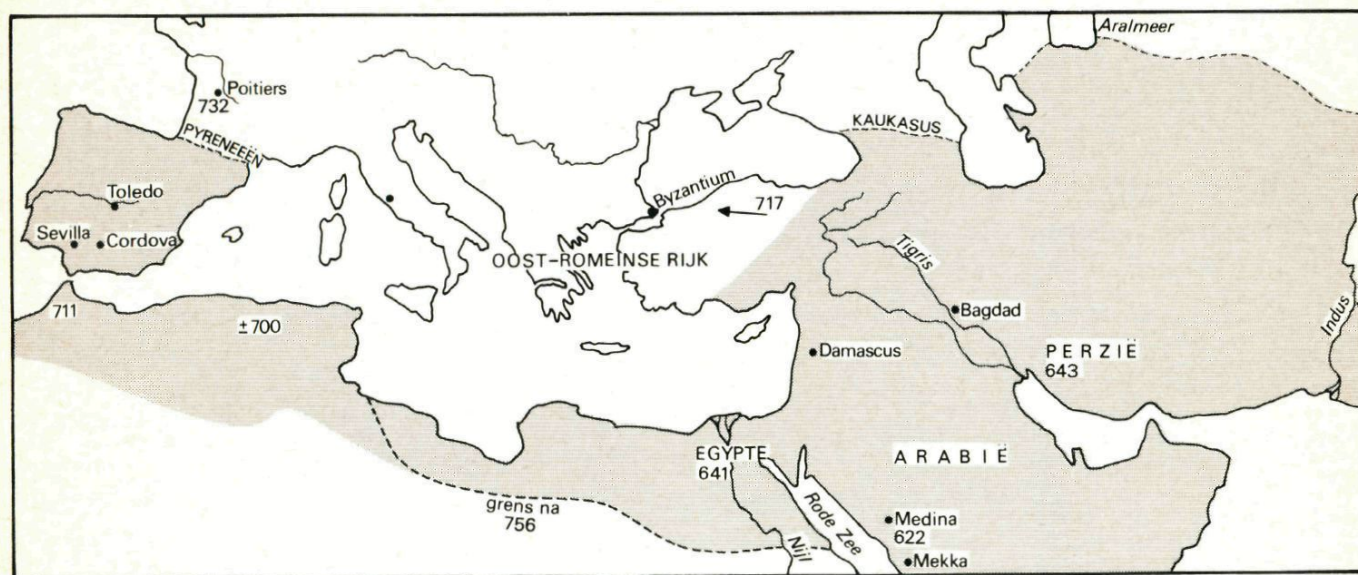


Fig. 1. De veroveringen van de Arabieren. Van 750–1250 is Bagdad de residentie van de Abassieden. Na 756 is er een Oosters en een Westers kalifaat.

Vanaf het jaar 763 bouwen de kaliefen uit het geslacht van de Abassieden aan het legendarisch geworden Bagdad. Een stad bedoeld als centrum van het islamitisch rijk, dat zich na een periode van ruim 100 jaar verrassende veroveringen uitstrekt van de Indus tot in Spanje. Een verregaande tolerantie geeft ruim plaats aan de cultuur van de onderworpen volken; geleerden en kunstenaars worden aangetrokken. Het resultaat is overweldigend en weldra kan Bagdad als economisch en wetenschappelijk knooppunt wedijveren met oudere hoofdsteden, zoals bijvoorbeeld Byzantium van het steeds verder afbrokkelend Oost-Romeinse rijk. De kennis van de Hellenen, Babyloniërs, Perzen en Indiërs wordt gretig bestudeerd en dat niet alleen, de Arabische geleerden bouwen verder, ja, vinden de aanzet tot nieuwe ontwikkelingen.

Kalief Al-Mamum (813–833) sticht een academie, een sterrenwacht en een bibliotheek. Een der bibliothecarissen is de man wiens naam als titel van dit artikel dient. Vertaald luidt die: Mohammed, de vader van Jafar en de zoon van Moesa, de Chwarizmiaan. Dat laatste betekent: uit de (Perzische) provincie Chorasmië. Deze Al-Chwarizmi, zoals hij meestal wordt genoemd, vertaalt veel oude boeken in het Arabisch, maar is vooral op zoek naar praktisch bruikbare wiskunde. Een kenmerk van de klassieke Griekse wiskunde is de vasthoudendheid aan uitsluitend meet-

kundige bewijsvoeringen en het niet kunnen werken met irrationale getallen zoals bijvoorbeeld $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ enz. Al-Chwarizmi beperkt zich niet tot de meetkunde, maar bouwt aan een algebra, die in de loop van de tijd steeds meer de meetkundige grondslag verlaat en dan opgebouwd is uit getalbegrippen. Zo schrijft hij een boek, *hisab aldjabr w'almoeqabala*, waarin voorkomen opgaven uit het dagelijks leven, zoals verdelingen van erfenissen. Van de daarbij gebruikte kwadratische vergelijkingen stelt hij een systematische behandeling op, waarbij hij (p en q steeds posi-

tief nemend) drie typen onderscheidt:

$$\begin{aligned} x^2 + px &= q & \textcircled{1} \\ x^2 + q &= px & \textcircled{2} \\ x^2 &= px + q & \textcircled{3} \end{aligned}$$

Hij toont aan, dat ① en ③ precies één oplossing hebben en ② geen, één of twee voor elke positieve p en q .

Weliswaar wordt nog uitsluitend met positieve getallen gerekend, maar de onderscheiding doet ons al modern aan. Eeuwenlang is deze aanpak in ere gebleven. Pas als de wiskundige Stifel (1486–1567) ook de negatieve getallen toelaat, ontstaat de onderscheiding $D > 0$, $D = 0$ en $D < 0$.

1	2	3	4	5
α	β	γ	δ	ϵ
10	20	30	40	50
ι	χ	λ	μ	ν
100	200	300	400	500
ρ	σ	τ	υ	ϕ
1000	2000			
α	β			
10000	20000			
M	β			
	M			

Fig. 2.

I = 1	X = 10	D = 500
II = 2	L = 50	M = 1000
III = 3	XL = 40	CCICD = 10000
IV = 4	LX = 60	
V = 5	C = 100	

Fig. 3.

Als Al-Chwarizmi op zoek is naar eenvoudiger rekenmethoden, kunnen de in gebruik zijnde Griekse en Romeinse getalstelsels hem niet helpen. De Grieken verbinden aan elke letter uit het alfabet een cijfer, zie fig. 2. Zelfs eenvoudig rekenen is met die notatie ongemakkelijk. Datzelfde geldt voor de Romeinse symbolen van fig. 3, waarmee in werkelijkheid ook niet gerekend wordt. Ze dienen alleen om de uitkomsten, verkregen via een rekenbord, de abacus, vast te leggen (fig. 4).

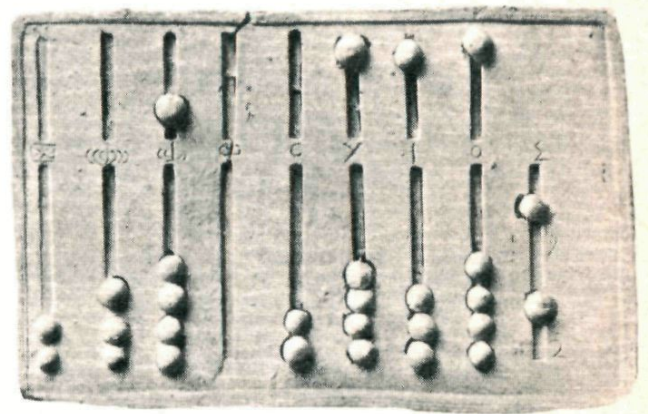


Fig. 4. Een Romeinse hand-abacus op vrijwel ware grootte.

Al-Chwarizmi schuift beide getalnotaties opzij en grijpt naar een totaal andere, afkomstig van de Indiërs (omstreeks 600). Hij schrijft een boek over de Indische cijfers, die in zijn tijd de gedaante hebben verkregen zoals weergegeven in fig. 5.

Westarabische of Gobar-cijfers:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Oostarabische:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Fig. 5.

Voor de 0 is belangrijk. Let maar eens op de 5 getallen α , ι , ρ , α en M (fig. 2) en I , X , C , M en $CCICD$ (fig. 3), die in Indi-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
vóór 1500	?	†	ℓ	9		Λ			o	ø

Fig. 8.

gingstafel is van 1×1 tot 9×9 . Zie ook fig. 8.

In de Hessische Landesbibliothek wordt bewaard een manuscript *Carmen de Algorismo*, Lied van de Algoritme, waaruit blijkt, dat de naam Algoritme nu is verbonden aan de rekenwijze zelf. Zie fig. 9.

Het begin van dat lied luidt:

Hinc incipit algorismus.

Haec algorismus ars praesens dicitur in qua
talibus indorum fruimur bis quinque figuris

0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Hier begint de Algoritme.

Deze nieuwe kunst heet Algoritme,
waarin wij de vruchten plukken
van de volgende twee maal vijf symbolen
van de Indiërs 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

De Franse auteur, de monnik Alexander de Villa Dei, heeft het werk geschreven in versvorm, een wijze van presentatie die niet ongebruikelijk was in de tijd vóór de uitvinding van de boekdrukkunst; zo'n gedicht-geschrift uit het hoofd geleerd is onmiddellijk ter beschikking.

Als omstreeks 1500 allerlei wiskundige werken uit de oudheid weer bekend zijn, de nieuwe rekenwijze na aanvankelijk verzet ten slotte aanvaard is, begint een vruchtbare tijd. Descartes, Desargues, Pascal, Leibniz en vele anderen knopen aan bij wat o.a. Archimedes en Apollonius tot stand hebben gebracht. Projectieve meetkunde en integraalrekening krijgen gestalte. De westerse maatschappij ontwikkelt zich weer verder, mede dank zij de energieke creatieve arbeid van Al-Chwarizmi en andere Arabische geleerden.

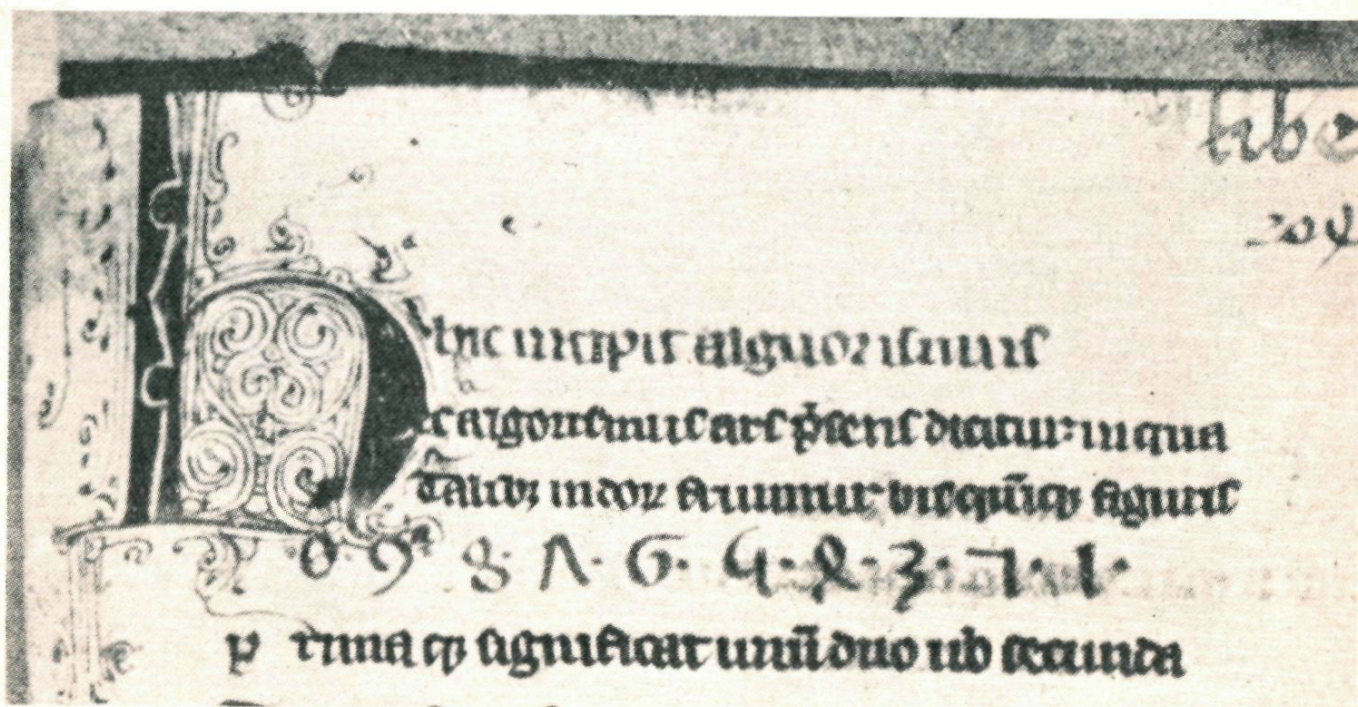


Fig. 9.

°°Kunstjes met getallen

Neem een willekeurig getal van drie cijfers. Draai dit om en trek het kleinste van het grootste af.

$$\begin{array}{r} \text{Bijv. } 864 \\ 468 - \\ \hline 396 \end{array}$$

Kies nu eens enige andere getallen en voer hiermee dezelfde bewerkingen uit. Wat merk je op?

Je kunt dit als een trucje gebruiken: laat een ander een willekeurig getal opschrijven, omdraaien en het verschil bepalen. Vraag dan naar het eerste (of het laatste) cijfer van de uitkomst. De gehele uitkomst is dan voor je bekend.

Laten we nu eens proberen de gevonden regel te bewijzen:

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ \overline{cba} - \\ \hline (a - 1 - c) 9 (c + 10 - a) \end{array} \quad (1)$$

Dus

– het middelste cijfer is 9

– de som van het eerste en het laatste cijfer is $(a - 1 - c) + (c + 10 - a) = 9$

Zoals je waarschijnlijk weet betekent de notatie $\overline{abc}$: het getal bestaande uit de cijfers a, b, c in deze volgorde.

De uitkomst is nog verrassender als je be-

gint met een getal waarvan de cijfers opeenvolgend zijn.

$$\begin{array}{r} \text{Bijv. } 321 \\ 123 - \\ \hline 198 \end{array}$$

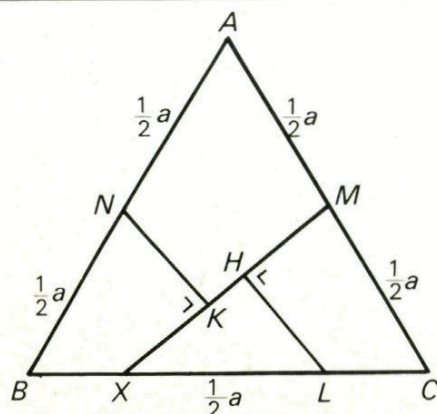
Voer dit weer uit met verschillende getallen. Je vindt iets zeer opvallends aan de uitkomst. Probeer dit nu eens op de manier van hierboven te bewijzen.

Begin weer eens volgens de eerste manier en tel bij de uitkomst de omgedraaide uitkomst op:

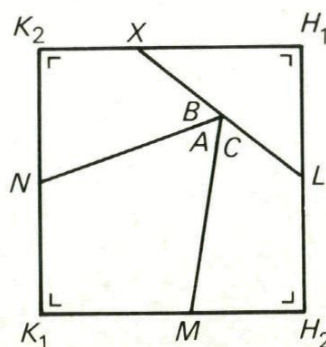
$$\begin{array}{r} 864 \\ 468 - \\ \hline 396 \\ 693 + \\ \hline 1089 \end{array}$$

Om een algemeen patroon te ontdekken, moet je weer een aantal gevallen berekenen. Uitgaande van de ‘algemene’ uitkomst (1) van het eerste geval kun je dit resultaat gemakkelijk bewijzen:

$$\frac{\overline{(a - 1 - c) 9 (c + 10 - a)}}{\overline{(c + 10 - a) 9 (a - 1 - c)}} + \frac{(9)}{(18)} \frac{(9)}{(9)} = 1089$$



=



°°Bissectrice, lijn van eerlijk delen

Men heeft geprobeerd het gebied van de Noordzee eerlijk te verdelen tussen de naburige landen Engeland, België, Nederland, Duitsland en Denemarken. Dit is gelukt door een aantal deellijnen of bissectricen te trekken, die gevonden worden door de verzameling van middelpunten van cirkels te bepalen, die raken aan de betreffende kustlijnen. In dit artikel willen we bezien hoe dergelijke deellijnen lopen in het geval van eenvoudige kustvormen, zoals lijn en cirkel. In het geval van twee rechte lijnen is de uitkomst wel bekend. De bissectrice wordt daar een rechte (fig. 1). We gaan nu een aantal situaties na, waar de bissectrice een ellips, een hyperbool of parabool gaat worden.

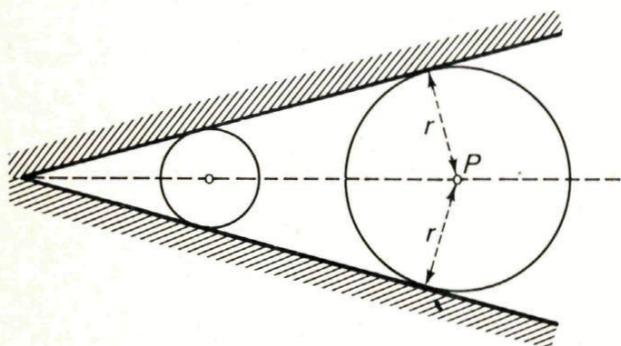


Fig. 1. Bissectrice als deellijn van een gebied begrensd door twee rechten.

Ellips als snavelbissectrice

In fig. 2 is de bissectrice getekend van een gebied binnen een cirkel en buiten een andere. De snavelbissectrice krijgt hier de vorm van een ellips. Dit volgt uit de definitie ervan. Stel F_1 het middelpunt van de eerste cirkel, F_2 dat van de tweede en P het middelpunt van een cirkel die aan beide raakt. Als de stralen dan respectievelijk R_1 , R_2 en r zijn, geldt zoals in de figuur is af te lezen:

$$\left. \begin{array}{l} F_1P = R_1 + r \\ \text{en } F_2P = R_2 - r \end{array} \right\} \text{ dus } F_1P + F_2P = R_1 + R_2$$

Dus voor elk van de middelpunten P van de dergelijke rakende cirkel geldt: $F_1P + F_2P = \text{constant}$.

Dan is de verzameling van middelpunten een ellips, waarvan F_1 en F_2 de brandpunten zijn.

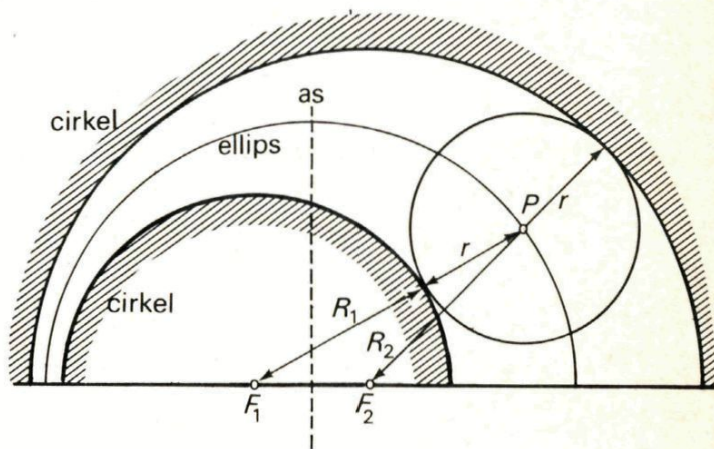


Fig. 2. Ellips als snavelbissectrice.

Definitie van ellips, hyperbool en parabool

Een ellips is gedefinieerd als een verzameling van punten P , waarbij de som van de beide afstanden van zo'n punt tot twee vaste punten (de zogenaamde brandpunten) constant is (fig. 3a).

Zo is de hyperbool gedefinieerd als de verzameling van dergelijke punten, waarbij het verschil van die beide afstanden constant is (fig. 3b).

Ten slotte is de parabool de verzameling punten waarbij de afstand van een dergelijk punt tot een vaste lijn (de richtlijn) steeds gelijk is aan de afstand tot een vast punt (het brandpunt). Dat staat getekend in fig. 3c. Niet alleen de ellips komt als bissectrice voor, maar ook de hyperbool en de parabool.

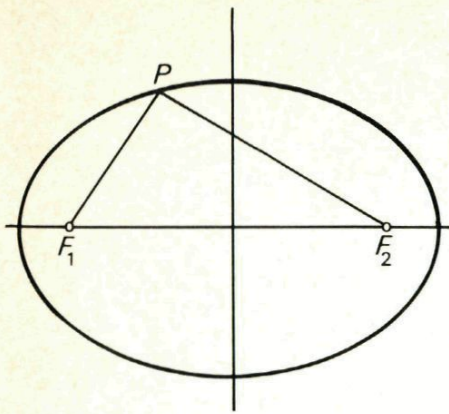


Fig. 3a. Ellips.
 $PF_1 + PF_2$ is constant.

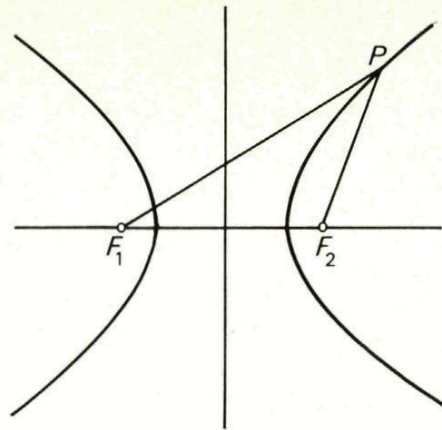


Fig. 3b. Hyperbool.
 $PF_1 - PF_2$ is constant.

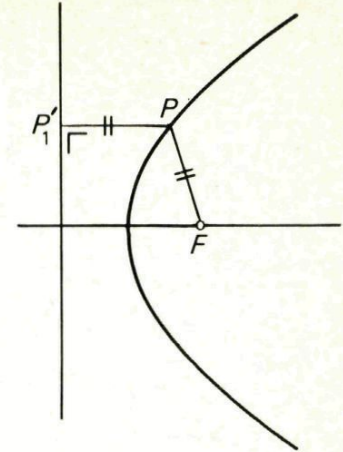


Fig. 3c. Parabool.
 $PF = PP'$.

Hyperbool als bissectrice

In fig. 4 is getekend hoe het gebied buiten twee cirkels 'eerlijk' verdeeld kan worden. Stel dat P weer het middelpunt is van een cirkel die aan beide bovengenoemde cirkels raakt, dan geldt:

$$\left. \begin{array}{l} F_1P = R_1 + r \\ \text{en } F_2P = R_2 + r \end{array} \right\} \text{ dus } F_1P - F_2P = R_1 - R_2$$

Aldus geldt voor elk van de middelpunten P van zo'n rakende cirkel: $F_1P - F_2P = R_1 - R_2$ ofwel constant.

Dan is deze verzameling middelpunten één tak van een hyperbool, waarbij F_1 en F_2 de brandpunten zijn.

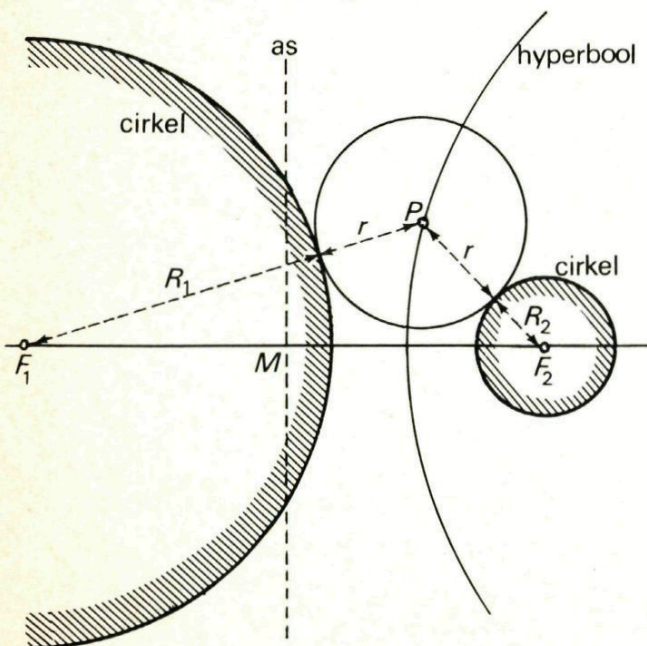


Fig. 4. Hyperbool als bissectrice.

Parabool als bissectrice

In fig. 5a is het gebied tussen een lijn n en een cirkel (met middelpunt F en straal R) eerlijk verdeeld. De verzameling middelpunten van rakende cirkels wordt hier een parabool. Het bewijs loopt als volgt.

Trek een lijn door F loodrecht op n en een lijn m , evenwijdig aan n op een afstand R . In de figuur is nu af te lezen dat de afstand van P tot de lijn m gelijk is aan de afstand van P tot het punt F en wel $R + r$. Dus wordt de verzameling een parabool met F als brandpunt en m als richtlijn.

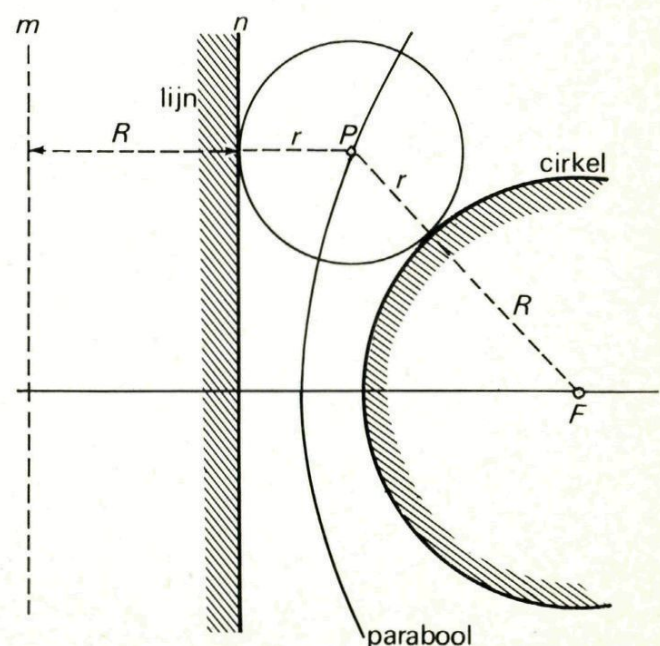
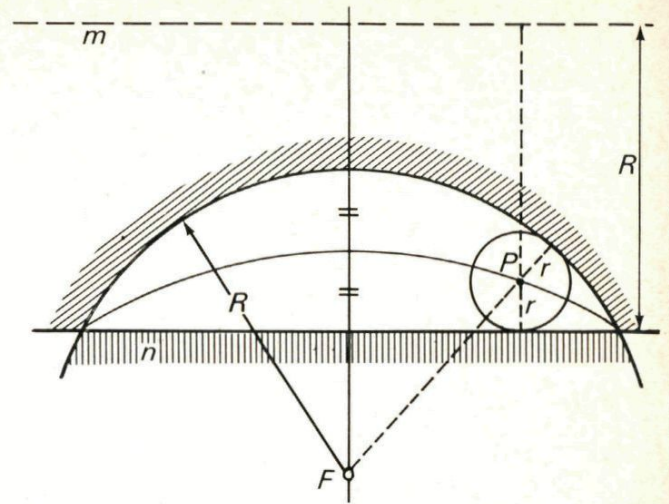


Fig. 5a. Parabool als bissectrice.

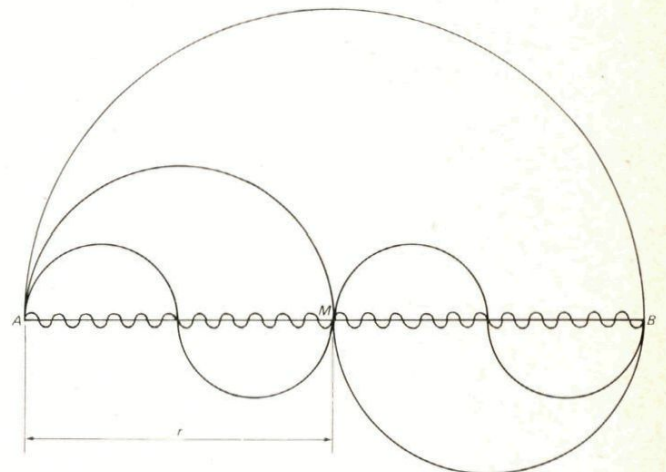
Fig. 5b. Parabool als bissectrice.

Ook als we, zoals in fig. 5b getekend is, een binnengebied, begrensd door een cirkel en een lijn, willen halveren, wordt de bissectrice een parabool. Trek, om dat te bewijzen, weer een lijn m evenwijdig aan n op een afstand R . In de figuur is dan weer af te lezen dat de afstand van P tot m even groot is als de afstand van P tot F en wel $R - r$.



Denkertje

Een vreemde limiet, met uitkomst $\pi = 2$



We nemen een cirkel met middelpunt M en middellijn $AB (= 2r)$. Op deze middellijn zetten we een halve cirkel. Op een wat originele manier gaan we nu de omtrek van deze halve cirkel bepalen. De ons bekende uitkomst luidt: de halve omtrek is πr . Maar hoeveel is π dan wel?

We zetten op de middellijn AB nu 2 halve cirkels met straal $\frac{1}{2}r$. De omtrekken van deze cirkelbogen zijn samen evenveel als van de eerste halve cirkel. Daarna trekken we 4 halve cirkels met stralen die wederom van de vorige de helft zijn. De totale booglengte van die 4 halve cirkels is weer gelijk aan de eerste booglengte. Zo kunnen we tot in het oneindige doorgaan. Zoiets heet een limiet. Op de duur ontstaat een slingerlijntje om de middellijn AB . De golven krijgen steeds minder hoogte en ten slotte, als het aantal halve cirkels onbegrensd groot is geworden, valt, in limietstand, de golflijn samen met de middellijn AB .

Conclusie: omdat de middellijn $2r$ lang is en de eerste boog πr , moet π gelijk zijn aan 2! Akkoord???

°Meten aan de overkant

Al in de oudste tijden hebben mensen meetinstrumenten ontworpen om posities vast te leggen, landoppervlakten te meten en afstanden te bepalen.

Het lijkt daarbij een al te vermetele opgave om metingen te moeten verrichten aan objecten waar men eigenlijk niet bij kan komen. En zoiets is toch mogelijk.

Zo hadden we allang gemeten hoever de maan van de aarde staat en welke de afmetingen van onze satelliet zijn, nog vóór een mens er een voet gezet had.

Maar, zoals altijd, iemand die wat wil bereiken moet klein beginnen.

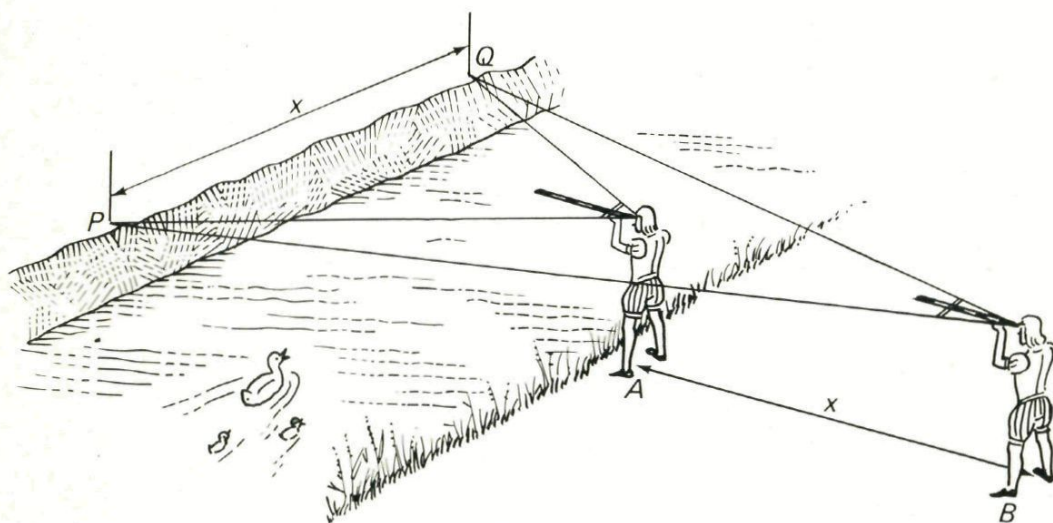


Fig. 1. Het opmeten van de breedte van een wal zonder dat deze bereikbaar is.

Hoe is het mogelijk de hoogte van een toren te bepalen zonder deze te beklimmen? Hoe kun je de breedte van een rivier meten zonder deze over te zwemmen?

Hier volgt de beschrijving van een eenvoudig, maar toch vernuftig meetinstrument dat de troepen van Prins Maurits gebruikten bij hun veldoperaties. Het is een soort hoekmeter en bestaat uit een in eenheden verdeelde meetstok, met loodrecht daarop een dwarslatje dat over de meetstok schuifbaar is. Het instrument staat bekend als de jakobsstaf. In ons geval is de meetstok verdeeld in 5 gelijke secties en het dwarslatje heeft een lengte gelijk aan 2 daarvan. Je zou het apparaat het best een hoekmeter kunnen noemen; het is vooral geschikt om de tangens van een hoek te bepalen.

Opmeten van de breedte van een ontoegankelijke wal

Bij de belegering van een vesting willen de aanvallende troepen de breedte bepalen van een stuk wal, dat gelegen is aan de overkant van de rivier (fig. 1).

Een landmeter stelt zich daartoe op aan deze zijde in punt A, richt daarbij het meetinstrument op de wal en schuift het dwarslatje zover op dat hij, vanuit A langs de eindpunten van het latje kijkend, uitkomt bij de eindpunten P en Q van de wal.

Vervolgens gaat hij een stuk achteruit (of laat deze meting gelijktijdig door een ander verrichten) en schuift het dwarslatje daarbij zoveel verder vooruit, dat de wal PQ er weer door bedekt wordt.

Als nu aan een bepaalde voorwaarde voldaan wordt, geldt dat $PQ = AB$, zodat dan de breedte van de wal aan de overkant van de rivier even groot is als de afstand van de waarnemingsposten A en B .

De voorwaarde waaraan voldaan moet worden, is vrij eenvoudig, namelijk: $b = a + h$ (zie fig. 2).

Dat wil dus zeggen dat, als men punt B zover kiest dat daar het dwarslatje 2 eenheden verder moet worden geschoven dan in A , dan geldt: $AB = PQ = x$.

Waarom is dat juist?

In PAQ kan men aflezen (vanwege de gelijkvormigheid)

$$x : (MA) = h : a \quad (1)$$

In PBQ evenzo

$$x : (MB) = h : b \quad (2)$$

Uit (1) volgt: $x : (MA + x) = h : (h + a)$

en (2) luidt: $x : (MA + x) = h : b$

Deze regels combinerend vinden we de relatie: $b = a + h$.

Samenvattend zou dit dus een praktische werkwijze kunnen zijn: zet het dwarslatje bijvoorbeeld op streep 2 en lokaliseer punt A ; schuif dan het dwarshout 2 streepjes verder en lokaliseer punt B ; de gezochte waarde x is nu gelijk aan de afstand van A tot B .

Bij deze werkwijze wordt wel verondersteld dat lijn AB middelloodlijn van het gezochte stuk PQ is. Je moet dus wel recht voor het object gaan staan. Men kan twisten over de nauwkeurigheid van deze meetmethode, zoveel staat vast: het is een reuze vondst om op deze manier verwijderde objecten te meten. En zonder dergelijke primitieve instrumenten waren we nooit aan de precisieapparatuur van onze tijd toegekomen en wisten we ook nu nog niet hoe groot de maan is.

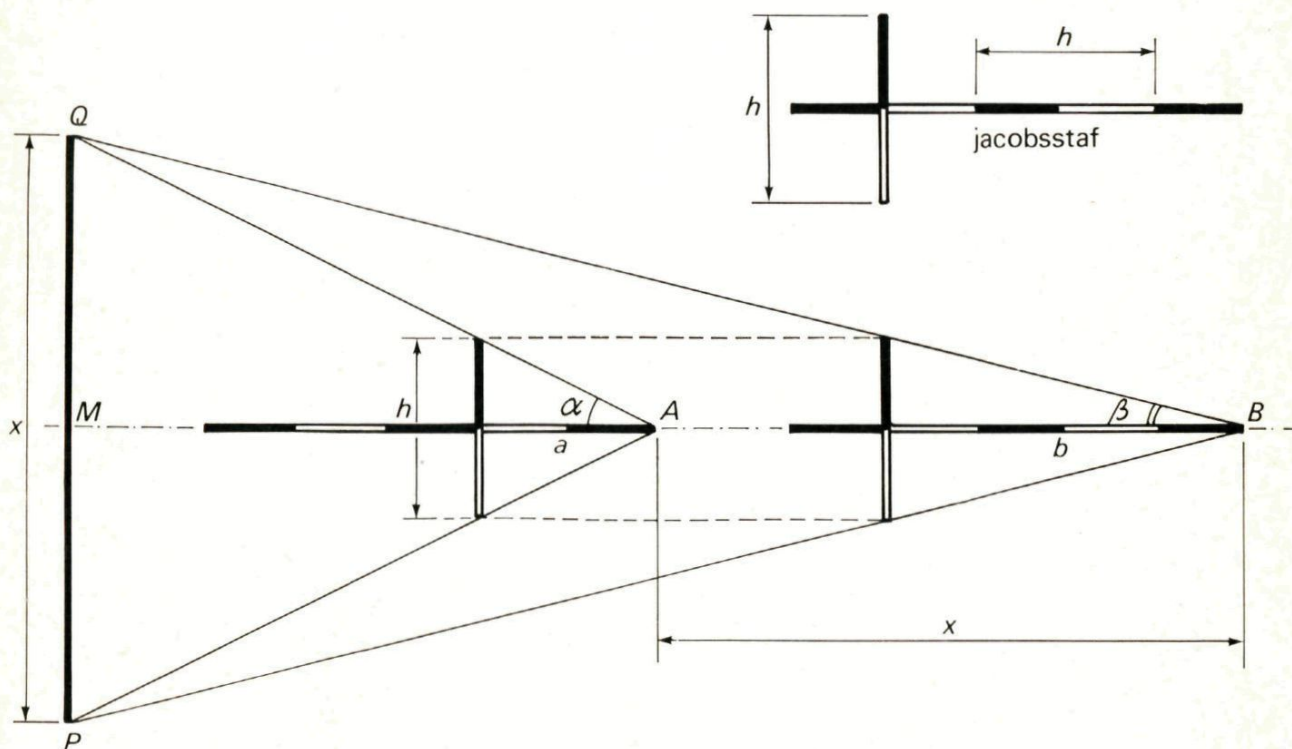


Fig. 2. Er geldt: $AB = PQ$ als $b = a + h$.

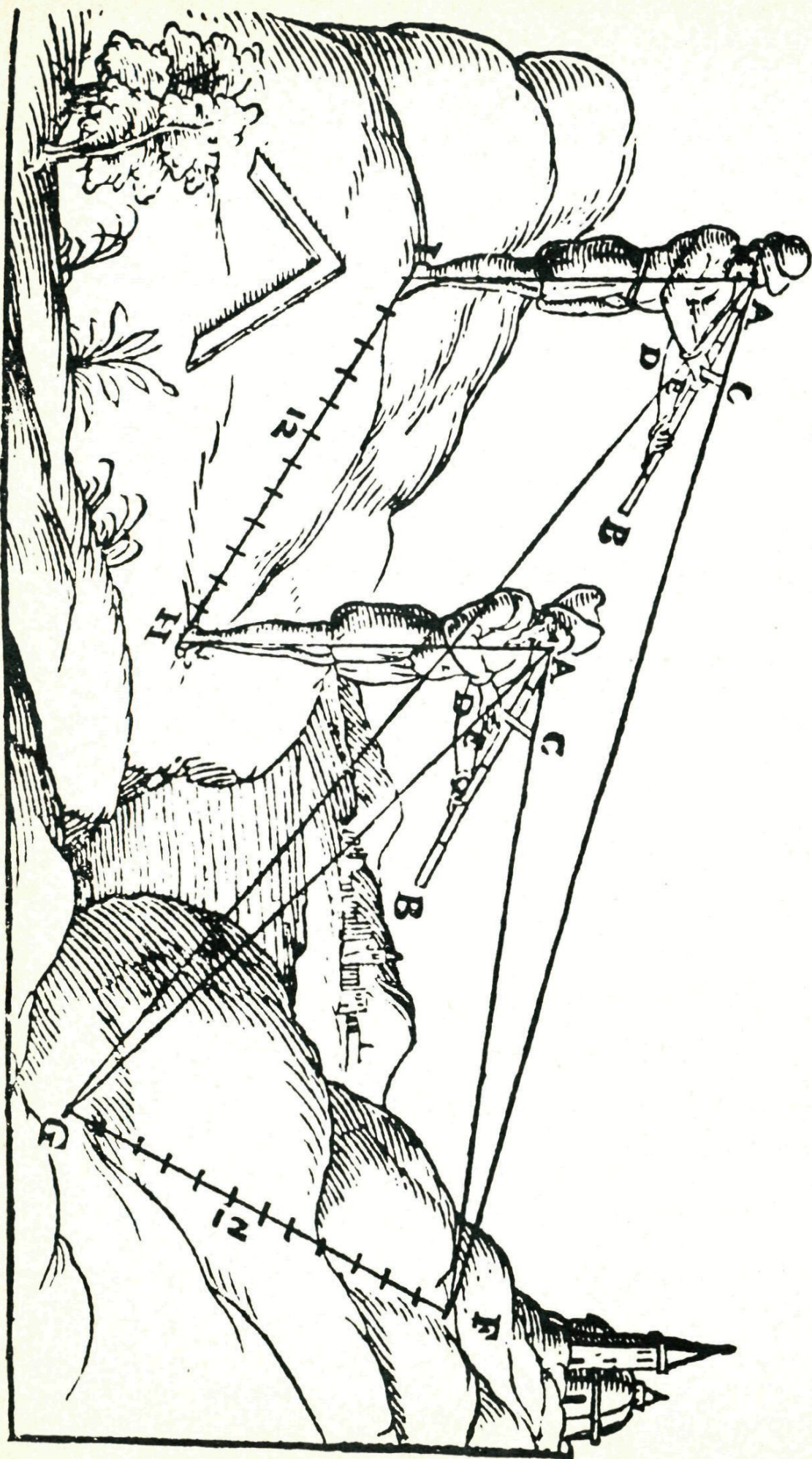


Fig. 3. Illustratie bij het gebruik van de Jakobsstaf uit het boek: *De Re et Praxi Geometrica* van Oronce Finé, uitgegeven in Parijs in 1556.

°°°Horenvergelijkingen

Het tekenen van grafieken die behoren bij bepaalde vergelijkingen is een veel voorkomende wiskundige bezigheid. Bovendien gaat het daar dan om vlakke figuren, verzamelingen van punten met twee coördinaten x en y .

In dit artikel gaan we in twee opzichten een andere weg:

1. we draaien het spel om: we kiezen een structuur en zoeken de bijbehorende vergelijking;
2. we doen daarbij een onderzoek aan ruimtelijke oppervlakken met x -, y - en z -coördinaten.

We werden daarbij geïnspireerd door een tentoonstelling in de afdeling wiskunde van het Sciencemuseum in Londen, waar op het ogenblik een expositie aan een dergelijk onderwerp gewijd is (fig. 1).

Het betreft in dit geval vergelijkingen van 'horenoppervlakken'. Het maakt dan natuurlijk wel verschil of het gaat om de horens van een koe, een schaap of een antilope. We beginnen met een eigen ontwerp, vervolgens geven we een Londens voorbeeld.

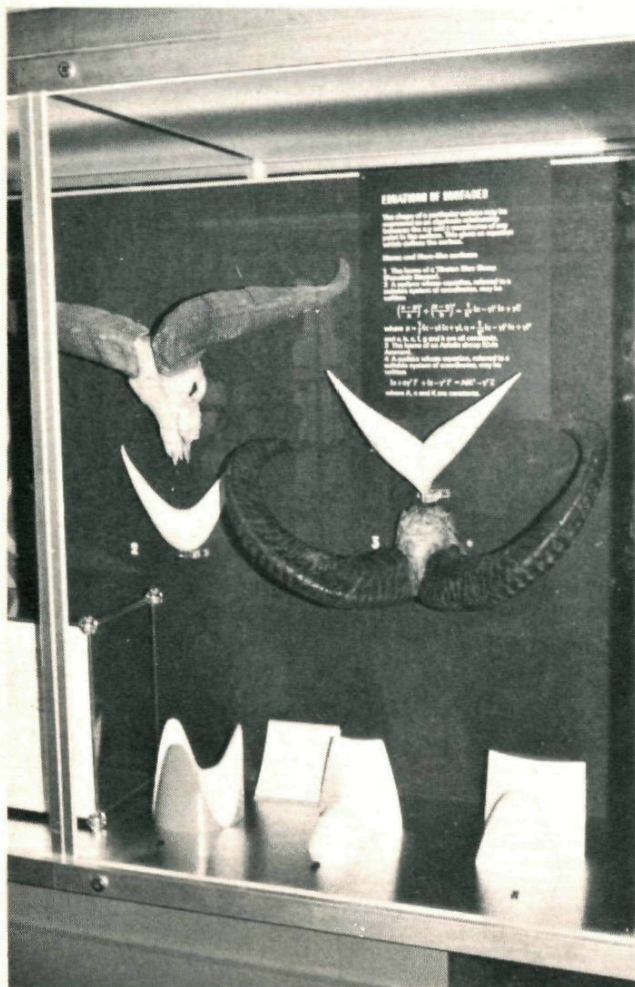


Fig. 1. Vitrine in het Sciencemuseum in Londen.

Vergelijkingen in de ruimte

We gaan uit van een stelsel met drie coördinaten x , y en z . De z -as wijst daarbij omhoog, de x -as naar rechts en de y -as naar voren. Dit zijn dan tevens hun positieve richtingen.

In fig. 2 staat een horenoppervlak geschetst, dat we ons als volgt gedacht hadden. De as van de horens is een parabool in het XOZ -vlak. Zo wordt het XOZ -vlak het symmetrievlak. Verder kiezen we als doorsnijdingsfiguren evenwijdig aan het YOZ -vlak, cirkels.

We zullen er verder voor moeten zorgen dat deze cirkels verdergaande vanaf de oorsprong, steeds kleiner worden en tenslotte een straal nul krijgen. Tevens mogen er dan voor absolute waarden van x die groter zijn dan die behorend bij dat punt, geen waarden voor y en z meer bestaan, waardoor de vergelijking een eindig oppervlak kan verbeelden. Hoe is dat allemaal te verwezenlijken?



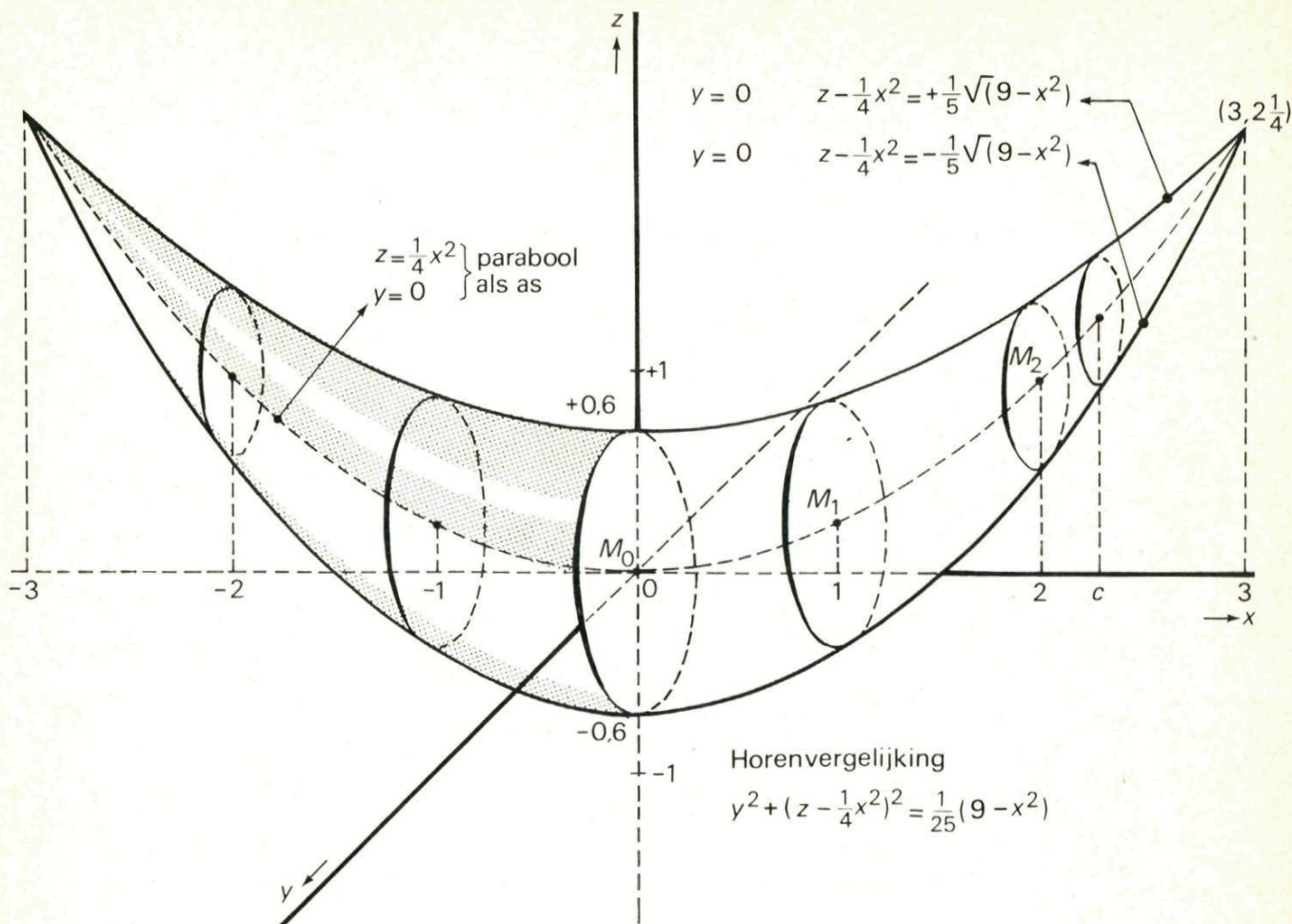


Fig. 2. Vergelijking van een horenoppervlak.

Realisatie

Als verzameling middelpunten M van cirkels, kiezen we bij wijze van voorbeeld de parabool $z = \frac{1}{4}x^2$. Daar moeten we in de ruimte tevens de voorwaarde aan toevoegen $y = 0$. De combinatie van beide vergelijkingen stelt dan de parabool in het XOZ -vlak voor. (Wat zou de betekenis van de eerste vergelijking zijn, als we de tweede weglieten?)

De vergelijking die we na heel wat puzzelen voor het horenoppervlak bedacht hebben, ziet er aldus uit:

$$y^2 + (z - \frac{1}{4}x^2)^2 = \frac{1}{25} (9 - x^2)$$

We gaan deze vergelijking analyseren. Voor een zekere waarde van x (neem

$x = c$) gaat de gestelde vergelijking over in die van een cirkel:

$$y^2 + (z - \frac{1}{4}c^2)^2 = \frac{1}{25} (9 - c^2)$$

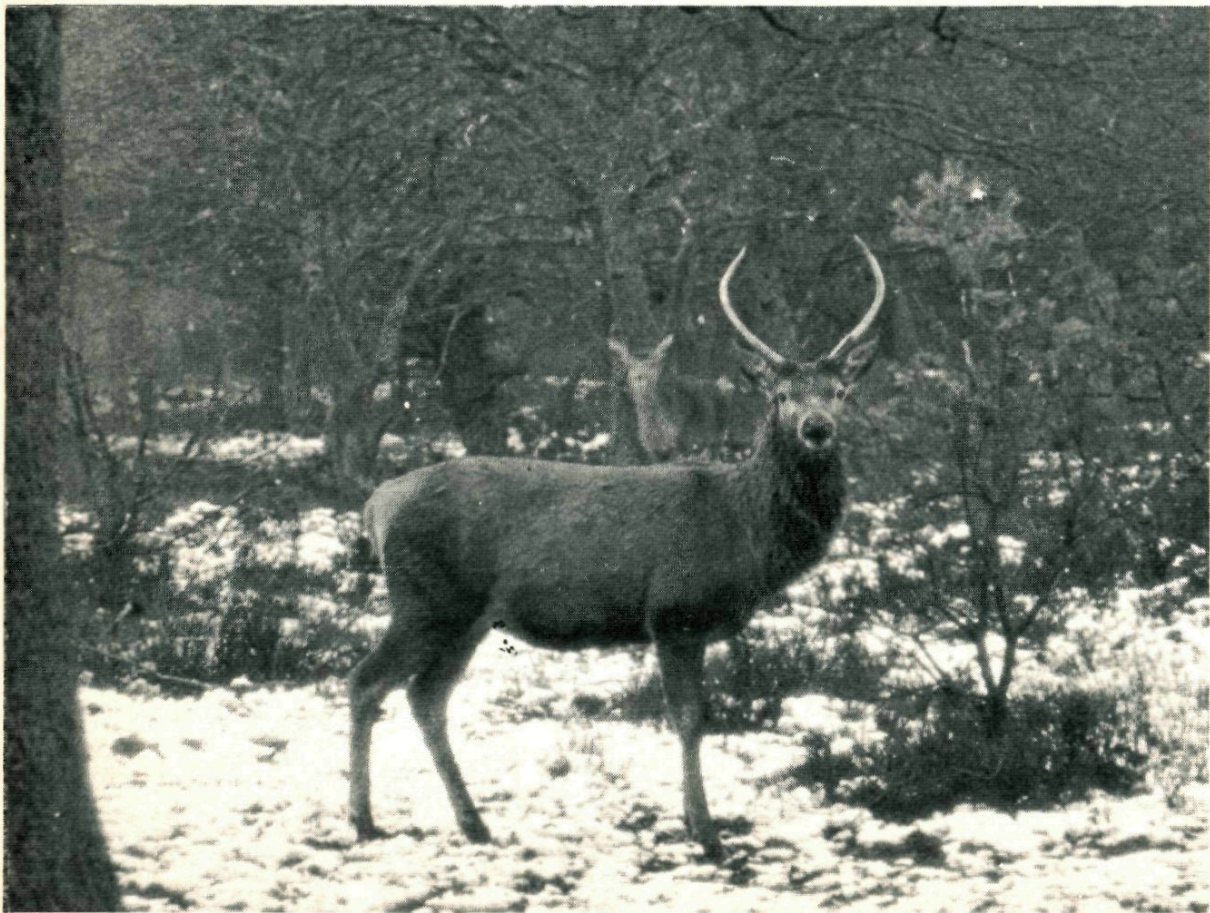
In het algemeen heeft een cirkel gelegen in een vlak $x = c$, met straal r en middelpunt met coördinaten (p, q) de vergelijking:

$$\begin{aligned} x &= c \\ (y - p)^2 + (z - q)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Het middelpunt van de doorsnijdingscirkel bij $x = c$ heeft dus coördinaten:

$$\begin{aligned} x &= c \\ y &= 0 \\ z &= \frac{1}{4}c^2 \end{aligned}$$

Verder volgt dan voor de straal de waarde $r = \frac{1}{5} \sqrt{9 - c^2}$



De middelpunten liggen dus op de eerder genoemde parabool. De straal heeft de hoogste waarde $\frac{3}{5}$ voor $c = 0$ dus bij de cirkel met middelpunt in de oorsprong. De straal krijgt de waarde 0 voor $c = 3$. We zouden hier over een puntcirkel kunnen spreken. We treffen dat bij de eindpunten van de beide horens.

Interessant lijkt het nog om te vragen: hoe doorsnijdt dit horenoppervlak het XOZ -vlak? Daartoe moeten we $y = 0$ stellen. Daarbij behoren dan twee vergelijkingen:

$$z - \frac{1}{4}x^2 = +\frac{1}{5}\sqrt{(9-x^2)}$$

$$\text{en } z - \frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{5}\sqrt{(9-x^2)} \quad \text{Zie fig. 2.}$$

Ten slotte: voor $x > 3$ zijn er geen bestaanbare waarden voor y en z te bedenken, dus dan is de vergelijking uitgedoofd.

Algemene uitkomst

Men zou op dit horenprofiel allerlei variaties kunnen aanbrengen. Misschien willen we het sterker gekromd, misschien moet het verder uitlopen, misschien willen we de structuur in het midden dikker.

De voorgestelde vergelijking zou er algemener zo uit kunnen zien:

$$y^2 + (z - ax^2)^2 = b^2(k^2 - x^2)$$

Welke invloed hebben de constanten a , b en k ?

De waarde a bepaalt de breedte van de parabool; willen we een vlakkere horenstructuur dan moeten we a kleiner nemen. De waarde k bepaalt hoever de punten van het centrum aflaggen, dus hoe lang de horens moeten worden. Ten slotte bepaalt b in combinatie met k hoe dik de horens in het centrum worden; hoe groter b , hoe dikker het gewei wordt.

Variaties

Een ingrijpende verandering in de horenstructuur ontstaat door de centrale para-

bool door een andere kromme te vervangen.

In fig. 3 staan twee voorstellen. Ga maar eens na of ze kloppen. De tweede heeft een horizontale asymptoot, de eerste niet. Opmerkelijk is het verschil in gedrag in de oorsprong. De eerste heeft daar een snelvorm met een verticale raaklijn; de tweede heeft in O juist een horizontale raaklijn, met als gevolg dat er ook nog twee buigpunten verschijnen. De symmetrie ten opzichte van het YOZ -vlak vereist dat x steeds in het kwadraat aanwezig is. Het is natuurlijk niet noodzakelijk bij vlakke krommen te blijven. Schapen hebben vaak gespiraliseerde horens. Daar horen ook ruimtelijke centrale krommen bij. De wiskunde kan in dit opzicht van alles leveren!

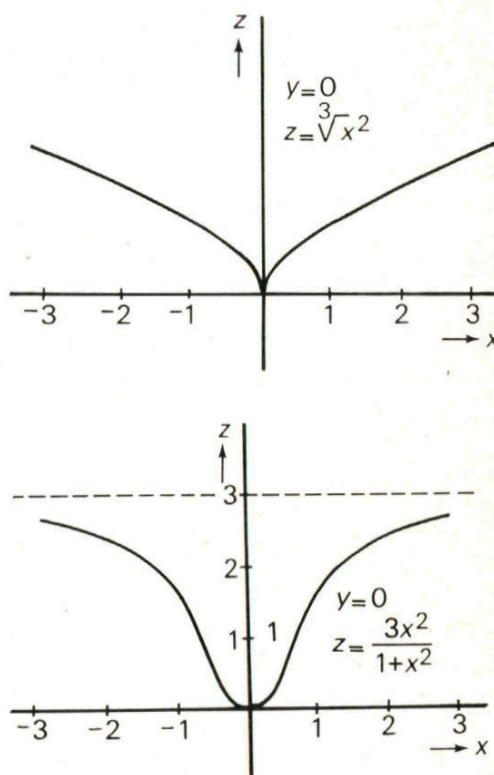


Fig. 3. Andere centrale krommen voor horenoppervlakken.

Terug naar Londen

In de vitrine van het museum (fig. 1) stonden nog veel ingewikkelder vergelij-

kingen en de daarbij horende oppervlakte-structuren, uitgewerkt in gipsmodellen.

Hier volgt er één:

$$(y - ax^2)^2 + (z - \sqrt[3]{x^2})^2 = b^2 (k^2 - x^2)^3$$

Hoe ziet dat eruit?

Omdat x alleen in het kwadraat voorkomt, is het YOZ -vlak weer symmetrievlak.

Bij een bepaalde waarde van x ($x = c$) ontstaat als doorsnijding weer een cirkel. De grootste straal heeft de cirkel met middelpunt O en wel $r = b \cdot k^3$.

Bij $x = k$ ontstaat weer de puntcirkel, ter-

wijl voor $x > k$ geen waarden voor y en z meer voldoen.

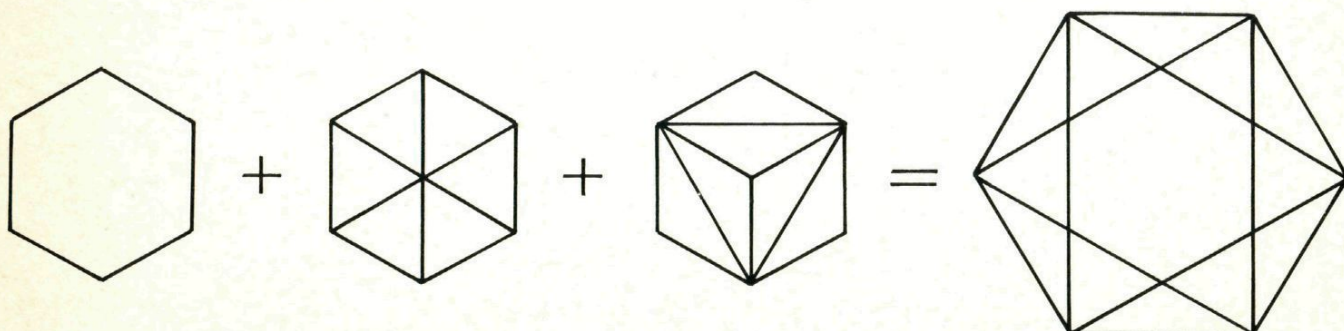
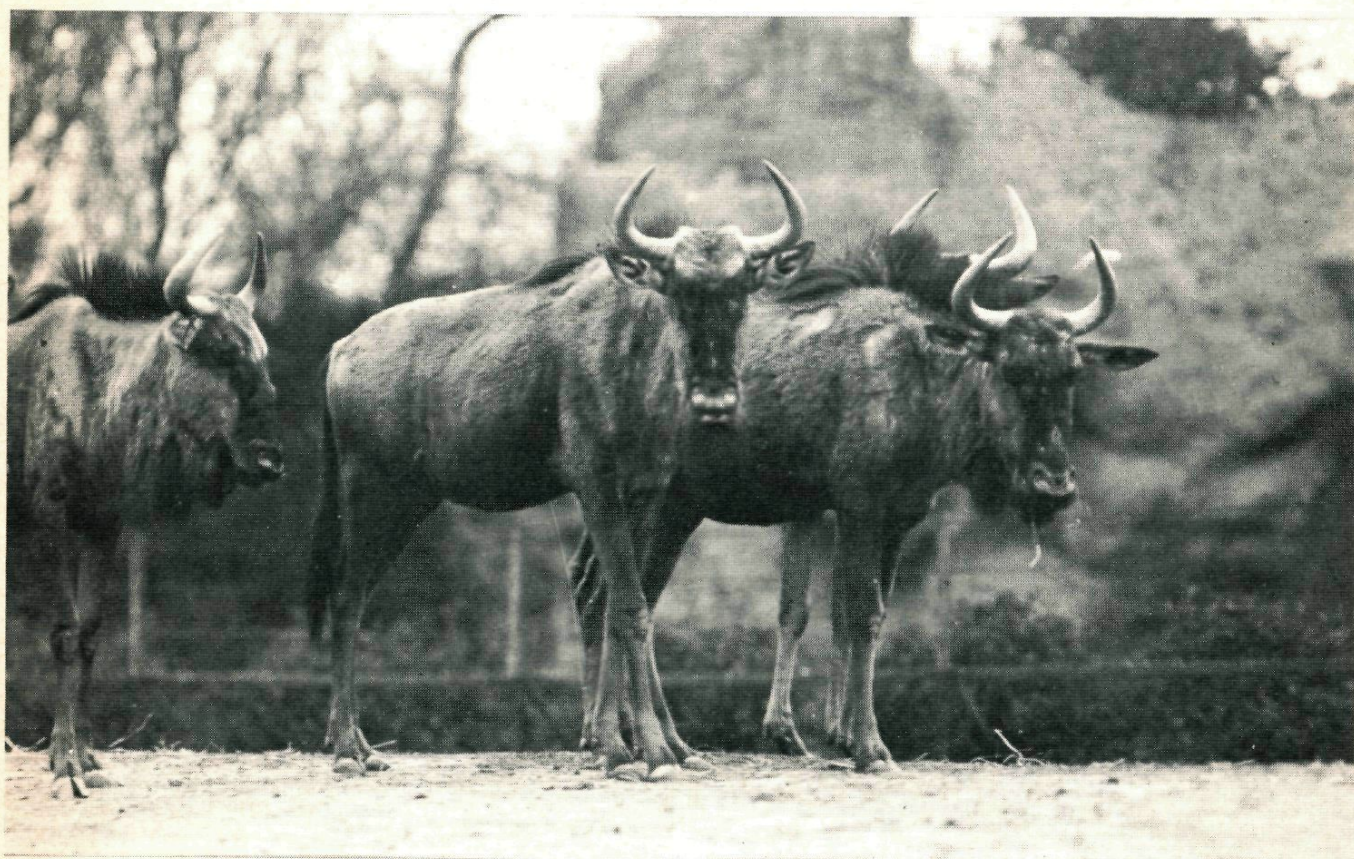
De vorm van de horens wordt in hoge mate bepaald door de loop van de centrale lijn.

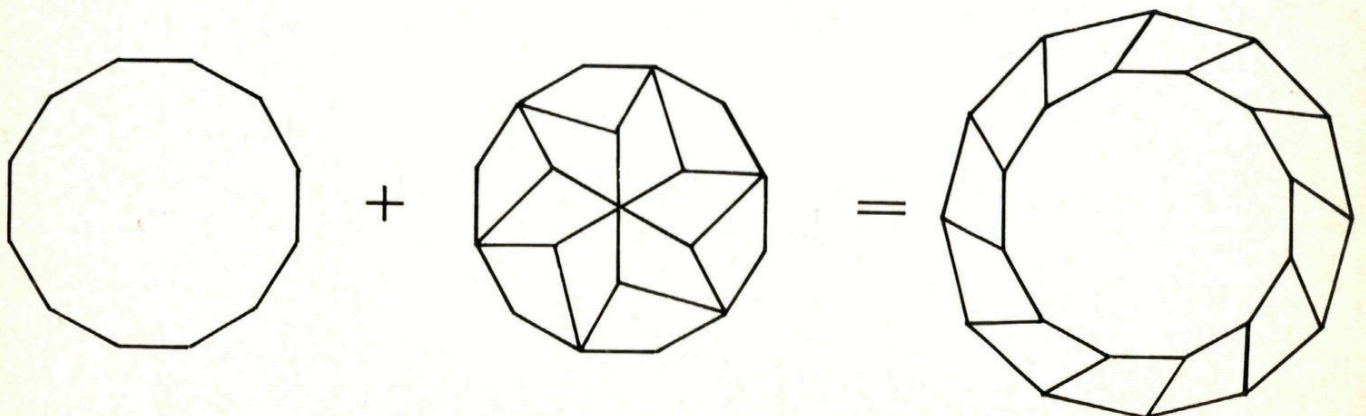
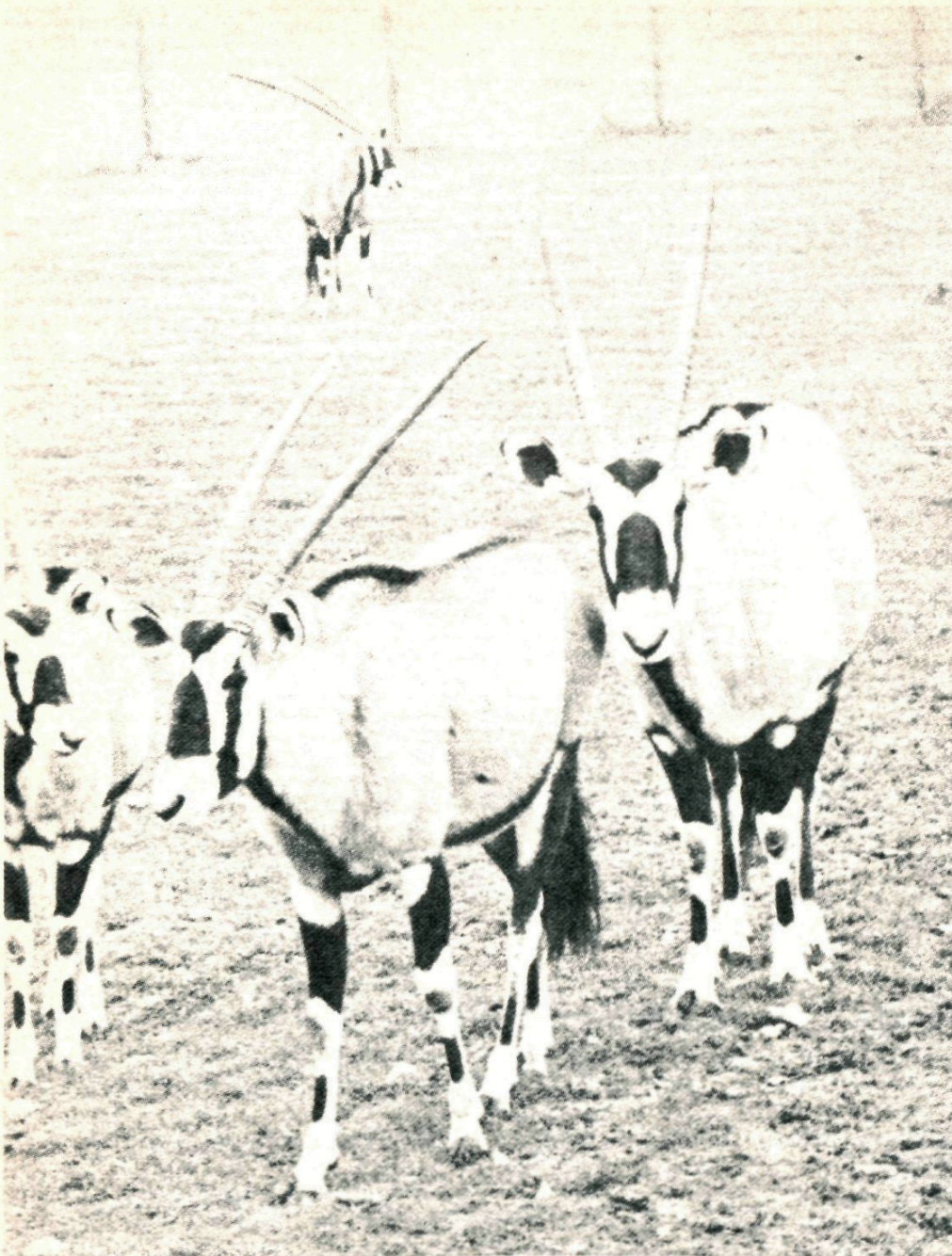
De verzameling van middelpunten van cirkels wordt hier:

$$y = a \cdot x^2$$

$$\text{en } z = \sqrt[3]{x^2}$$

Dit wordt een ruimtelijke kromme die gevonden wordt als doorsnijding van de twee oppervlakken. Probeer je dat zelf eens voor te stellen. Het tweede oppervlak staat al aangegeven in fig. 3a.

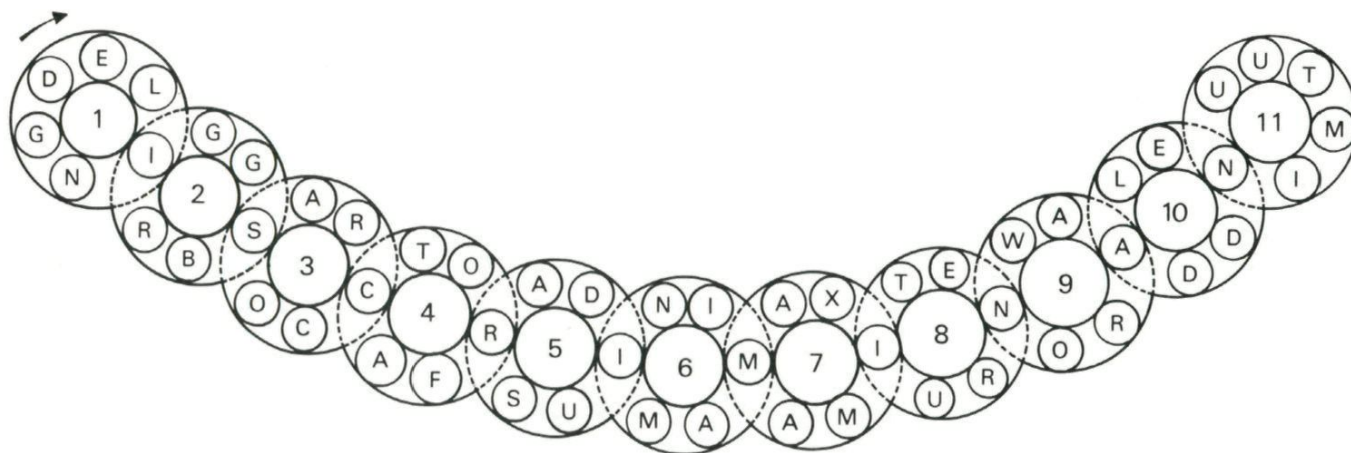




Oplossing van het raadsel uit no.1

De ingevulde woorden zijn:

- | | | | |
|---|--------|--------------------------------------|--------|
| 1 | deling | 7 | maxima |
| 2 | Briggs | 8 | ruiten |
| 3 | arccos | 9 | onwaar |
| 4 | factor | 10 | dalend |
| 5 | radius | 11 | minuut |
| 6 | minima | Op de getallenrij komt: discriminant | |



Oplossing van denkertje

1. " $\pi = 2''$?? Antwoord: niet accoord

Hoe lang we ook doorgaan met verdere onderverdeling, steeds is de verhouding van de totale booglengte tot de middellijn gelijk aan $\pi r : 2r = \pi : 2$. De verhouding wordt dus nooit 1 : 1.

Inhoud:

1. Wim Klein - kampioen rekenaar 25
2. Getalpatronen 29
3. Uit de geschiedenis van de wiskunde 31
4. Kunstjes met getallen 35
5. Bissectrice, lijn van eerlijk delen 36
6. Denkertje: Vreemde limiet 38
7. Meten aan de overkant 39
8. Horenvergelijkingen 42
9. Oplossing van het raadsel uit no. 1
10. Oplossing van denkertje

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

A.J. Elsenaar, Harderwijk.

W. Kleijne, Heerenveen.

Ir. H. Mulder, Breda.

G. A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Mauritsstraat 117, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 6,50 per jaargang. Voor anderen f 10,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.