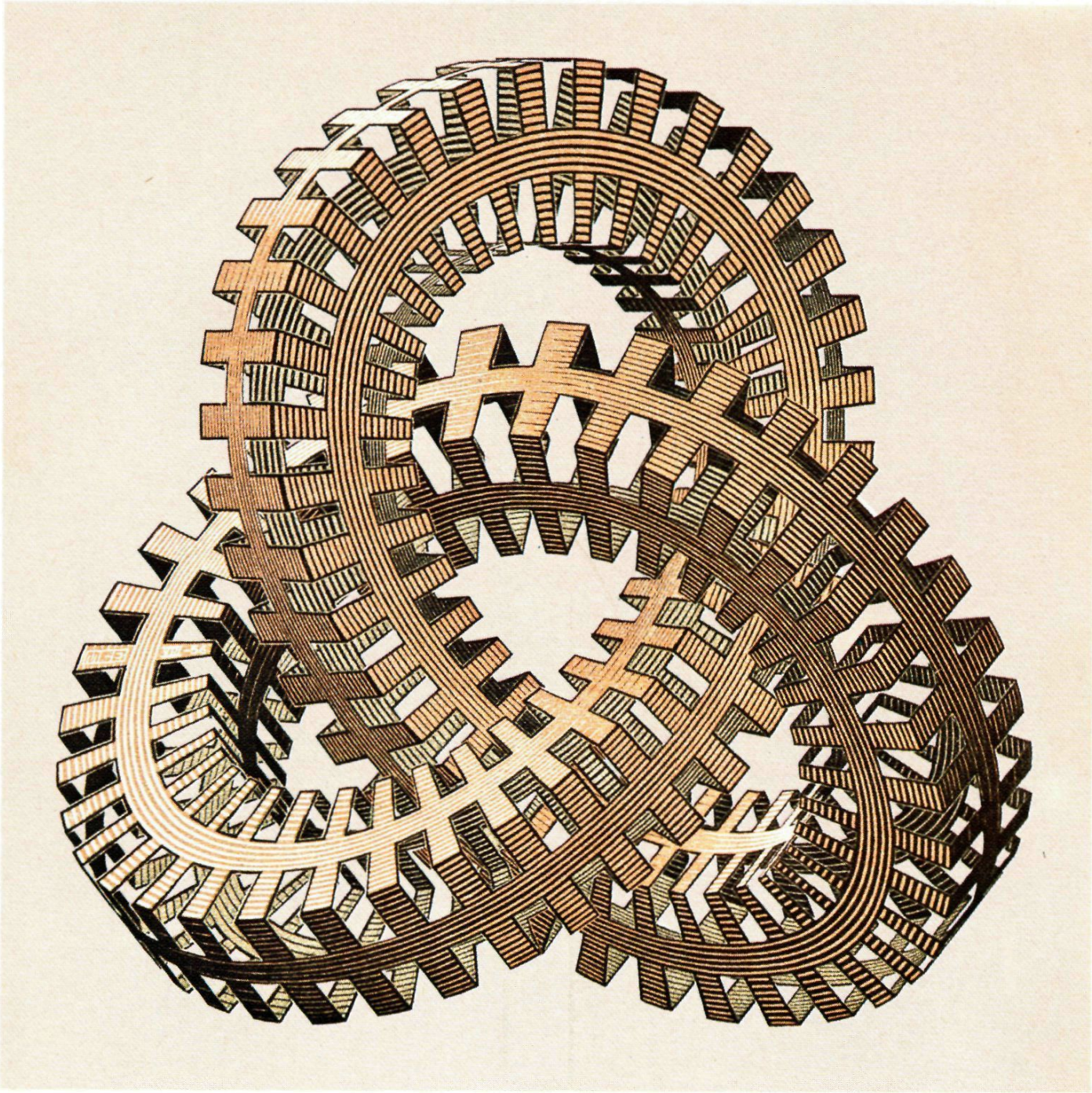


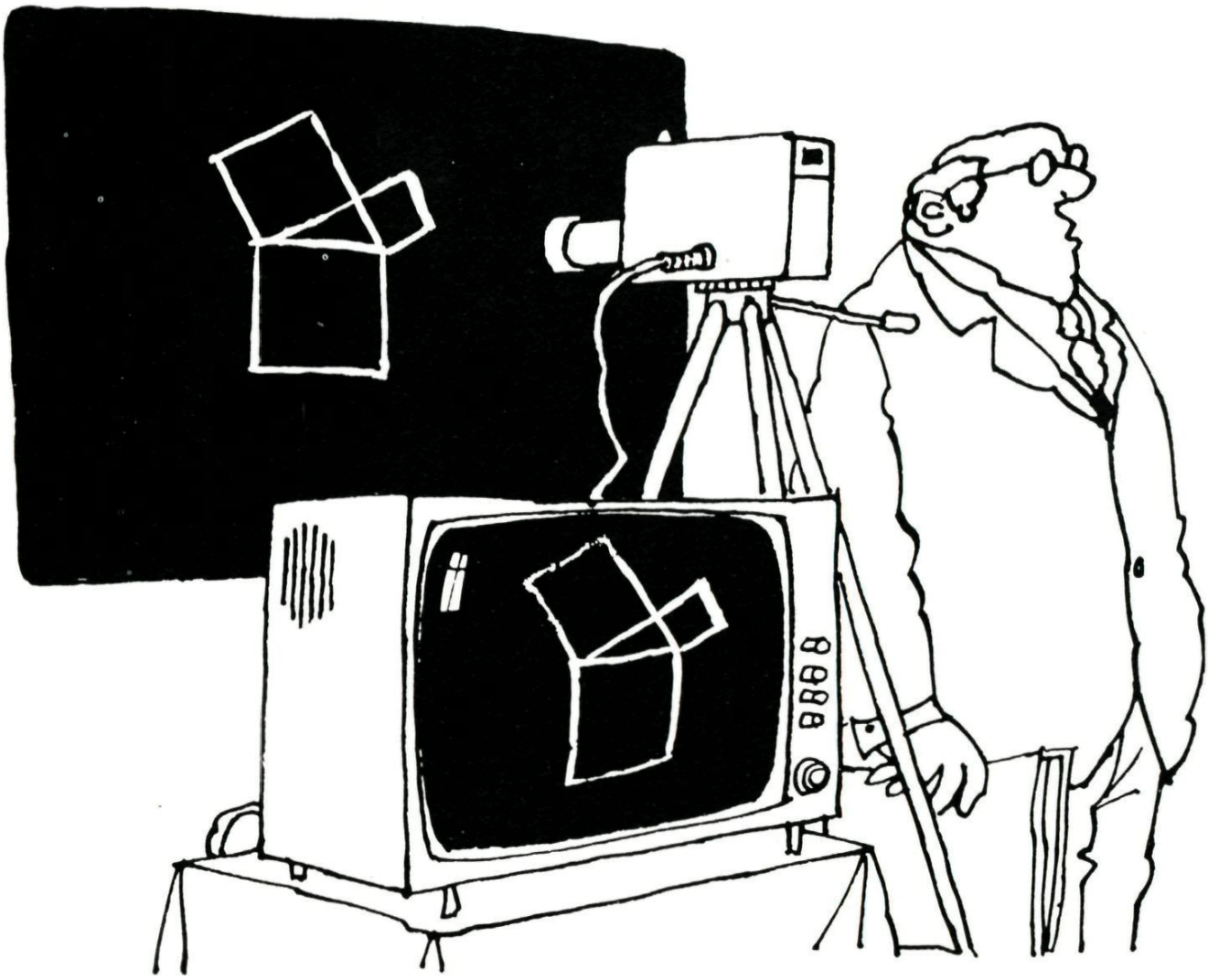
3
jaargang 16 / januari 1977

wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff

verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Iemand nog iets te vragen?

BIJ DE PRENT OP DE OMSLAG:
In 1965 maakte Escher de driekleurenhoutsnede: KNOPEN, waarvan je op de omslag het grootste deel gereproduceerd ziet. Hij heeft iets te maken met de band van Möbius, waarover je in het eerste nummer van deze jaargang meer hebt kunnen lezen. Maar de prent is ook een interessant uitgangspunt, om wat dieper in te gaan op knopen (zie het artikel: 'Wiskunde in de knoop' op pag. 69). Maar eerst gaan we gewoon wat aardige figuren maken door knopen te leggen in een strook papier (zie: 'Veelhoeken en schoenveters').

°Veelhoeken en schoenveters

Dagelijks leggen we knopen in onze schoenveters. Wie zou daarbij denken aan een zeshoek?
Je moet wel een goede knoop leggen en wel de platte knoop (fig. 1).

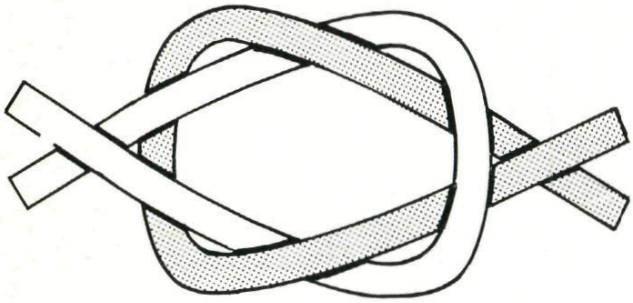


Fig. 1. Platte knoop.

Probeer het eens in twee papierstroken in plaats van in twee touweindjes. Als je het een beetje netjes wilt doen, moet je de stroken wat vouwen zoals in fig. 2 getekend is. De vouwhoeken worden 120°.

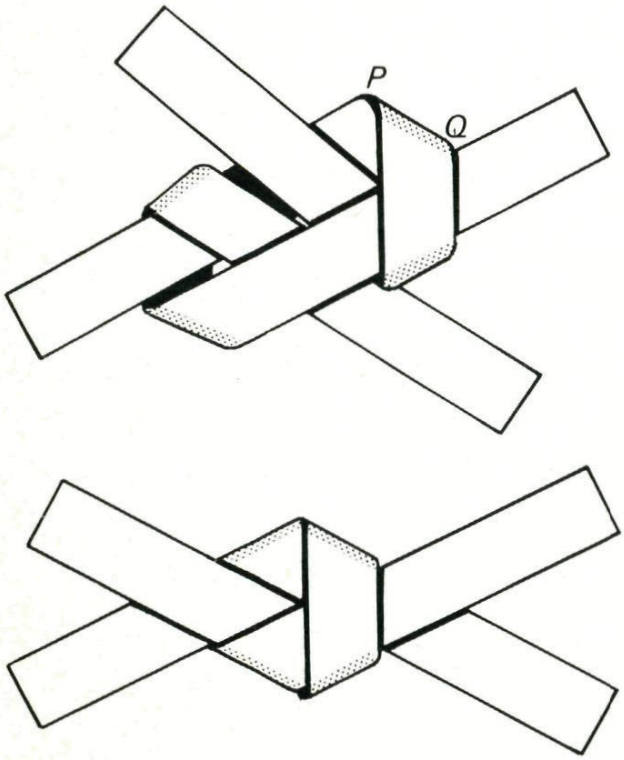


Fig. 2. Een platte knoop in papierstroken.

De lengte van het omgevouwen stuk *PQ* wordt natuurlijk iets groter dan de strookbreedte. Bij bijv. een strookbreedte van 13 mm, wordt *PQ* 15 mm, reken dat zelf maar na.
Als je de stroken ieder tweemaal zoals op de aangegeven wijze hebt omgevouwen, kun je in elkaar schuiven tot een regelmatige zeshoek. Beter is het, zoals bij een platte knoop gebeurt, om beide einden door dezelfde opening van de lus van het andere deel te steken. Zo ontstaat een stevig geheel, fraai van vorm.
Als je gewoon in twee papierstroken probeert een platte knoop te leggen en je trekt de einden voorzichtig aan, ontstaat deze zeshoek 'vanzelf'. Je moet natuurlijk wel wat 'helpen' om de vouwen op de juiste plaats te krijgen.

Andere veelhoeken
In fig. 3 is getekend hoe er een regelmatige vijfhoek ontstaat, door in een enkelvoudige strook een gewone knoop te leggen. Het is hoogst merkwaardig dat op die manier de moeilijk construeerbare figuur met hoeken van 108° te voorschijn komt.

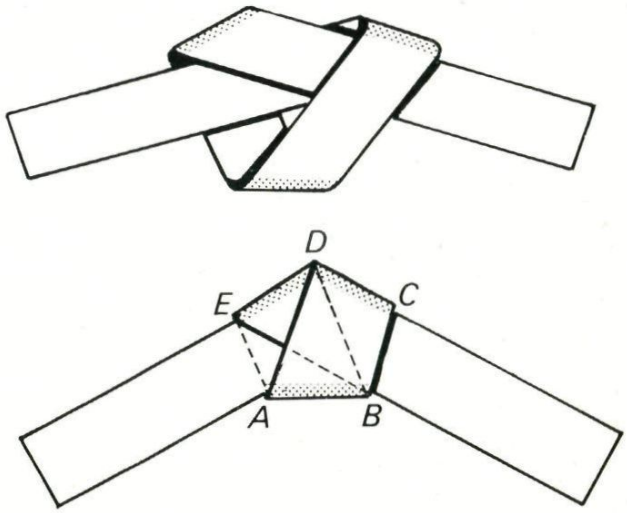


Fig. 3. Al knopend ontstaat een regelmatige vijfhoek.

In fig. 4 staat het knoopschema voor een regelmatige zevenhoek. Zo ontstaan steeds ingewikkelder figuren. Op de duur wordt de zaak zo gecompliceerd dat je alles eerst moet uitkienen en op de juiste wijze moet omvouwen, zodat van spontaan knopen niet veel meer over blijft. Dan is het genoegen er natuurlijk wel af.

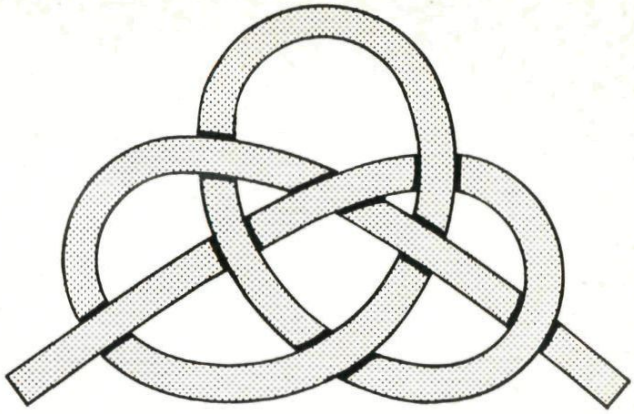


Fig. 4. Knoopschema voor een regelmatige zevenhoek.

De achthoekige rozet van fig. 5 is zeker nog de moeite waard om door vouwen te construeren. De hoeken zijn daar 67,5°.

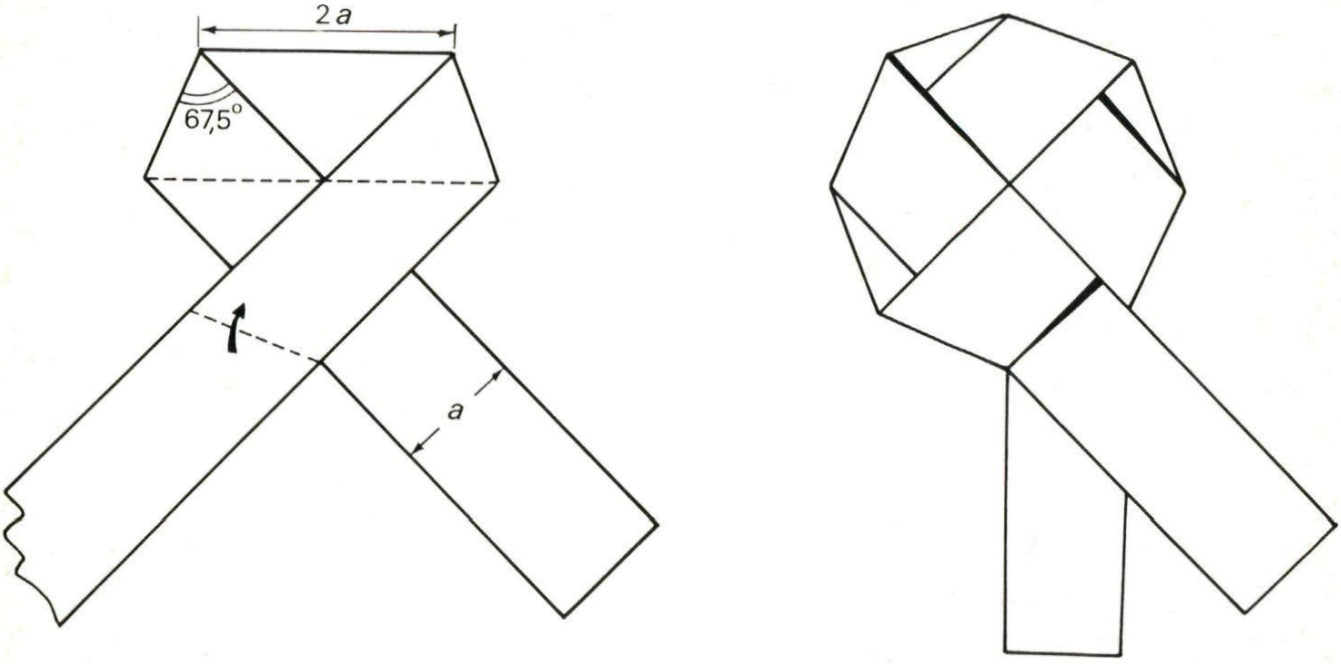


Fig. 5. Een rozet in de vorm van een regelmatige achthoek.

In fig. 6 ten slotte staat een verzameling van onze knoop- en vouwtechniek gefotografeerd.
Knip stroken en ga ook aan het werk, het is een bezigheid met verrassingen.

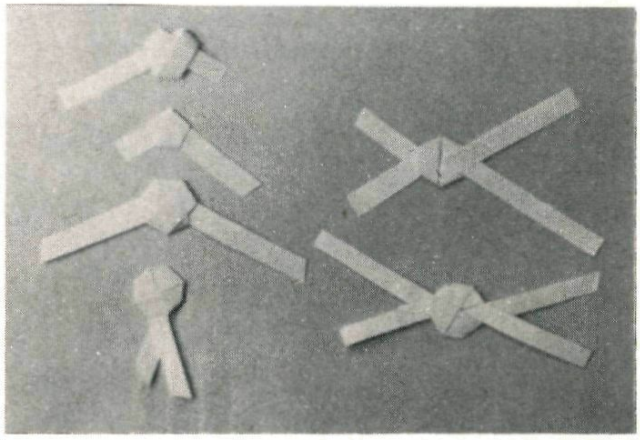


Fig. 6. Knoop- en vouwtechniek.

°Wist je dat?

Schrijf je nu: vierhonderdzevenenveertig of
vierhonderd zevenenveertig of
vier honderd zevenenveertig of
vier honderd zeven-en-veertig of . . .

Misschien vind je dat volkomen onbelangrijk. Toch heeft men hiervoor regels opgesteld om de eenheid in de schrijfwijze te bevorderen. Ook de benaming van grote getallen (hoewel de noodzaak om ze te gebruiken zelden zal voorkomen) heeft men genormaliseerd. Hier volgen de regels.

Regels voor de schrijfwijze van telwoorden:

1. Getallen kleiner dan honderd schrijft men aan elkaar. Voorbeeld: achttien, vierenvijftig.
2. Veelvouden van honderd, duizend en honderdduizend schrijft men aan elkaar. Voorbeeld: zevenhonderd, veertienduizend, tweehonderdduizend.
3. De andere telwoorden schrijft men in delen, die elk voldoen aan de regels 1 en 2. Voorbeeld: honderd dertien, vijfhonderd zevenenveertig, achtentwintigduizend negenhonderd achtenzestig.
4. De rangtelwoorden worden gevormd uit de hoofdtelwoorden door middel van de achtervoeging van *-de* of *-ste*. Voorbeeld: eerste, vierde, twintigste, honderdste.

Voor het geval, dat voortwoekerende inflatie eigen inkomen en de bedragen van de landsbegroting tot astronomische hoogte opdrijft, volgt hier een lijstje, dat aanwijzingen geeft voor de uitspraak van die getallen.

1.000.000 = 10^6 miljoen
10^9 miljard
10^{12} biljoen
$10^{15} = 10^3 \cdot 10^{12}$ duizend biljoen
$10^{18} = (10^6)^3$ triljoen
$10^{21} = 10^3 \cdot 10^{18}$ duizend triljoen
$10^{24} = (10^6)^4$ quadriljoen
$10^{27} = 10^3 \cdot 10^{24}$ duizend quadriljoen
$10^{30} = (10^6)^5$ quintiljoen
$10^{33} = 10^3 \cdot 10^{30}$ duizend quintiljoen
$10^{36} = (10^6)^6$ sextiljoen
$10^{39} = 10^3 \cdot 10^{36}$ duizend sextiljoen

Zo verder eerst machten van 10^6 schrijven en daarna 10^3 keer.

$10^{42} = (10^6)^7$ septiljoen
$10^{45} = 10^3 \cdot 10^{42}$ duizend septiljoen
$10^{48} = (10^6)^8$ octiljoen
$10^{51} = 10^3 \cdot 10^{48}$ duizend octiljoen
$10^{54} = (10^6)^9$ noniljoen
$10^{57} = 10^3 \cdot 10^{54}$ duizend noniljoen
$10^{60} = (10^6)^{10}$ deciljoen
$10^{63} = 10^3 \cdot 10^{60}$ duizend deciljoen

Spreek eens uit:
1.000.000.000.000.000.000.

En ten slotte: noem volgende getallen maar gewoon: groot.

°°Nomogrammen

Vaak heeft men relaties tussen drie grootheden, zoals:
$c^2 = a^2 + b^2$ (stelling van Pythagoras)
$y = \frac{1}{2}(x + z)$ (bepaling van een gemiddelde)
$V = \pi r^2 h$ (inhoud van een cilinder)
$U = I \times R$ (wet van Ohm)
Als het gaat om twee variabelen, kan men grafisch grootheden bepalen met behulp van een coördinatenstelsel; in het geval van drie grootheden zou men met een x–y–z-stelsel in de ruimte kunnen werken, maar dat is slecht in het platte vlak uit te beelden. Nomogrammen geven hier een oplossing.

Vaak wil men weten hoe groot één van de drie variabelen wordt als beide andere gegeven zijn, zoals: welke straal heeft een cilinder bij gegeven inhoud en hoogte?
Zo'n vraag kan opgelost worden met een nomogram. Zoiets bestaat uit drie evenwijdige lijnen op juist gekozen afstanden, ieder met een geschikte verdeling. Door eenvoudigweg je geodriehoek daarlangs te leggen, kun je de gevraagde waarde aflezen.

Het gemiddelde
Maak de afstanden tussen de schaaldragers gelijk, voorzie ze van een evenredige getallenverdeling, zodat gelijke getallen op gelijke hoogte komen (fig. 1).

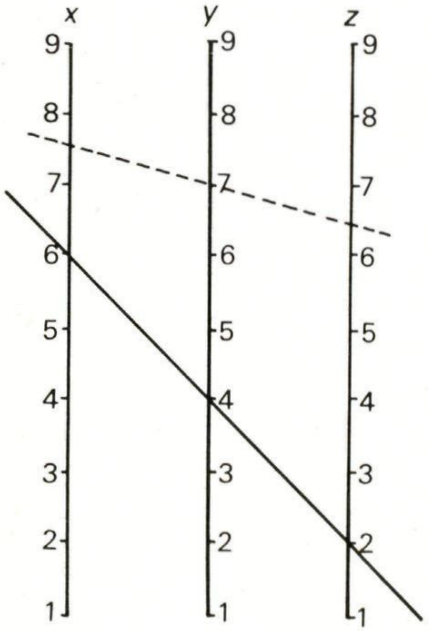


Fig. 1. Bepaling van een gemiddelde.

Omdat in een trapezium de middenparallel gelijk is aan de halve som van de evenwijdige zijden, zal hier gelden:
$y = \frac{1}{2}(x + z)$.
De 'vluchtlijn' geeft in de figuur aan: $4 = \frac{1}{2}(2 + 6)$ en $7 = \frac{1}{2}(6\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2})$. Dat klinkt allemaal nogal eenvoudig. Het berekenen van gemiddelden is nooit erg moeilijk.

Variaties
We handhaven dezelfde verdelingen, maar we maken de afstand tussen y en z tweemaal zo groot als die tussen x en y (fig. 2). Ga zelf maar na dat we hiermee de relatie $y = \frac{1}{3}(2x + z)$ hebben uitgebeeld.

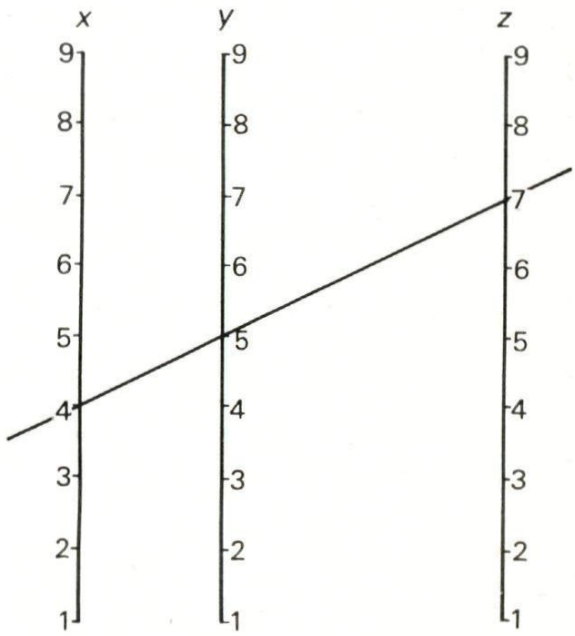


Fig. 2. Nomogram voor $y = \frac{1}{3}(2x + z)$.

Hierbij is y ook een soort gemiddelde. Het is als bij de bepaling van een eindcijfer afgeleid uit de resultaten van twee proefwerken, waarbij het eerste cijfer dubbel telt.
Had je dus voor het eerste werk een 4 en voor het tweede een 7, dan wordt je eindresultaat een 5. Lees zelf af wat je op je rapport gekregen had als het eerste cijfer een 7 en het tweede een 4 was geweest.
Bedenk verder zelf hoe je nomogram eruit komt te zien als je $y = \frac{1}{4}(3x + z)$ moet uitbeelden en hoe bij $y = \frac{1}{5}(2x + 3z)$?

Vermenigvuldigen en delen

Door de eenheden op de y-schaal 2x zo klein te kiezen, kunnen we de relatie $y = x + z$ uitbeelden (fig. 3). Daardoor kun je aflezen: $7 + 5 = 12$. Dat lijkt nog minder interessant, maar met een kleine wijziging van het systeem kunnen we overschakelen van optellen naar vermenigvuldigen. Immers, als we logaritmische schalen aanbrengen in plaats van lineaire, dan gaat $y = x + z$ over in: $\ln y = \ln x + \ln z$ ofwel $y = x \cdot z$.

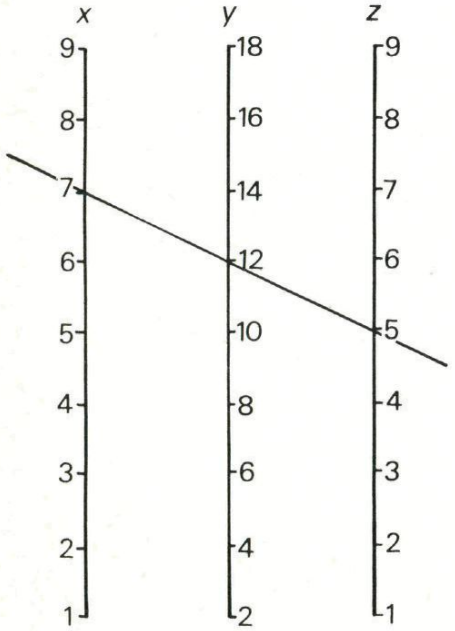


Fig. 3. $y = x + z$.

Dat is gerealiseerd in fig. 4. Daar kun je nu aflezen: $9 \times 3 = 27$ en $2 \times 0{,}3 = 0{,}6$.
Omgekeerd kun je natuurlijk met zo'n nomogram ook delen. Stel dat x de stroomsterkte verbeeldt, y de spanning en z de weerstand van een stroomgeleider. Volgens de wet van Ohm is spanning gelijk aan stroom maal weerstand.
Lees nu eens af hoe groot de stroomsterkte wordt als men een spanning van 9 V zet op een weerstand van 4 Ω.
Bij delingen moet de teller dus ingesteld worden op de middelste schaaldrager.

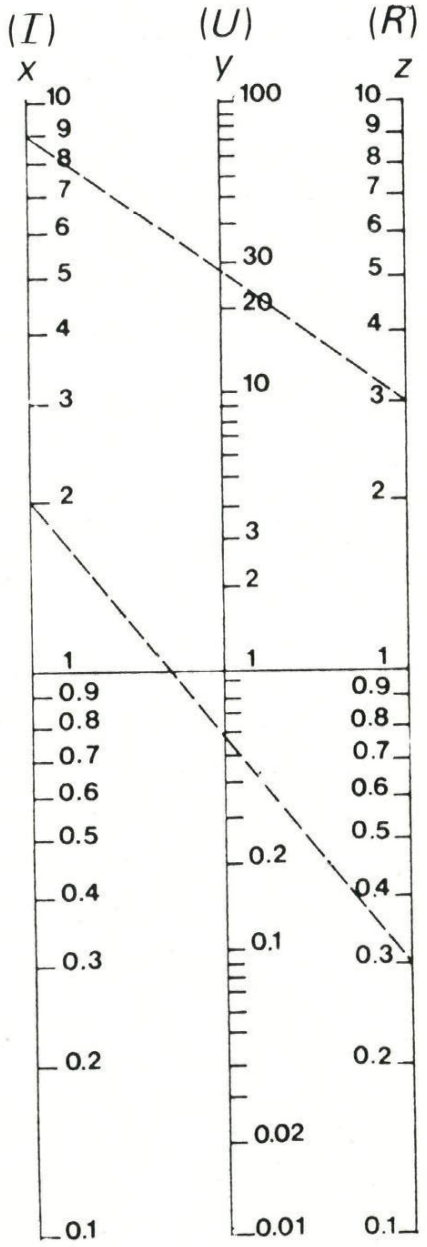


Fig. 4. Nomogram voor $y = x \cdot z$.

Nog ingewikkelder

Tot dusver had je beslist alles nog wel uit het hoofd klaar gekregen, maar men kan ook nomogrammen ontwerpen voor erg onoverzichtelijke gevallen.

Neem bijvoorbeeld de relatie: $y = x^2 z$. In dit geval werken we weer met logaritmische schalen, maar we maken de afstand $y-z$ tweemaal zo groot als de afstand $x-y$.

Lees in fig. 5 af: $2^2 \cdot 5 = 20$ en $(0{,}5)^2 \cdot 4 = 1$ en verder $(0{,}6)^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}07$.

In het laatste geval zou op die manier dus de inhoud berekend kunnen worden van een balk met vierkante doorsnede met zijde 0,6 en hoogte 0,2. Maar we zouden de zaak even zo goed kunnen omdraaien en de inhoud en hoogte geven en de ribbe van het grondvierkant laten berekenen.

Je zult nu wel begrijpen dat het een sport is om voor steeds ingewikkelder gevallen van relaties tussen drie grootheden de geschikte nomogrammen te ontwerpen.

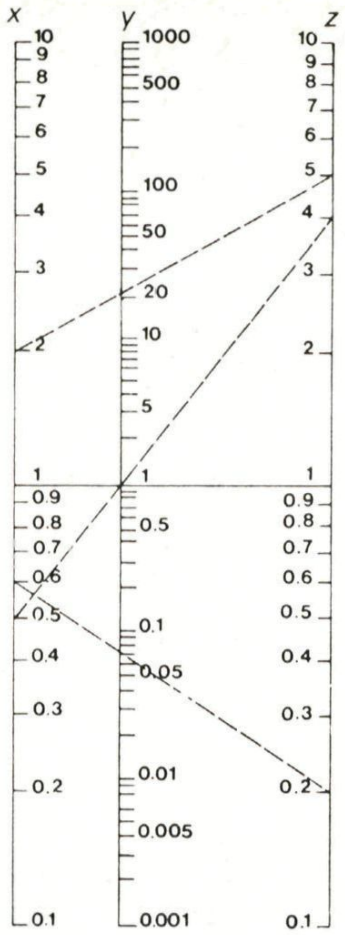


Fig. 5. Nomogram voor $y = x^2 \cdot z$.

°°14 = 15?!

Laat het vraagteken maar weg, want hier volgt een exact bewijs, dat alleen het uitroepteken juist is. In fig. 1 is een willekeurige zevenhoek getekend. De som van de hoeken is vijf gestrekte hoeken, omdat de zevenhoek in vijf driehoeken verdeeld kan worden. Het rekenkundig gemiddelde van de hoeken is $\frac{5 \cdot 180^\circ}{7}$ ①.

We overdekken het gehele platte vlak met zevenhoeken, zó, dat in ieder hoekpunt drie hoeken samenkomen. Een deel van die overdekking is in fig. 2 getekend. Voor elke zevenhoek geldt, dat het hoekgemiddelde is gelijk aan ① . Het hoekgemiddelde van de hoeken van de gehele overdekking is dus ook gelijk ① .

Nu letten we op elk hoekpunt afzonderlijk. Bijvoorbeeld in punt A is het hoekgemiddelde van de drie samenkomende hoeken gelijk aan $\frac{360^\circ}{3} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{3}$ ② . Dit geldt voor ieder hoekpunt van de gehele overdekking. Het hoekgemiddelde van alle hoeken is dus gelijk aan ② .

Uit bovenstaande volgt $\frac{5 \cdot 180^\circ}{7} = \frac{2 \cdot 180^\circ}{3}$. Waaruit 14 = 15.

Misschien zet iemand toch liever een vraagteken. Nou, dat is natuurlijk terecht, maar waar zit dan de fout in de redenering?

Wie na serieus zoeken wakker blijft liggen, kan weer nachtrust genieten na het lezen van de oplossing op pagina 72.

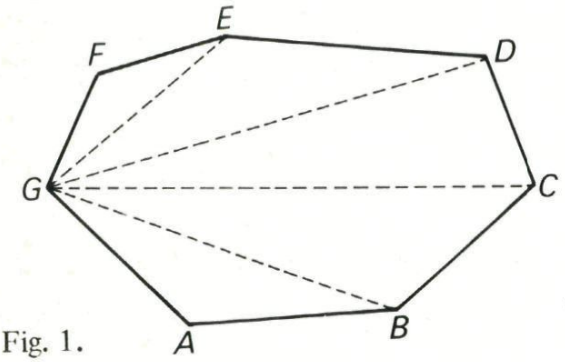


Fig. 1.

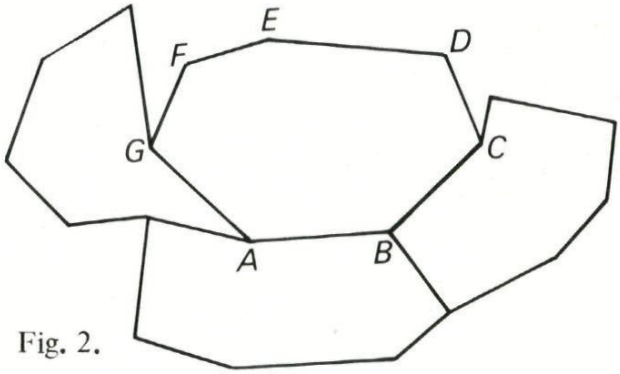


Fig. 2.

Denkertjes

1. Onderzoek de aard van de bissectrice van een gebied, begrensd door twee cirkelbogen (fig. 1), waarbij de elementaire cirkels beide cirkelbogen inwendig raken. (Zie het artikel bissectrice, lijn van eerlijk delen p. 36, no. 2.)

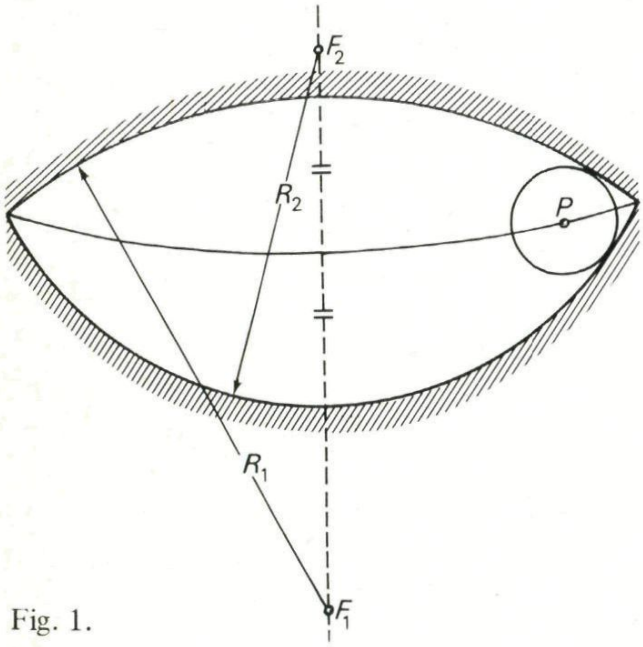


Fig. 1.

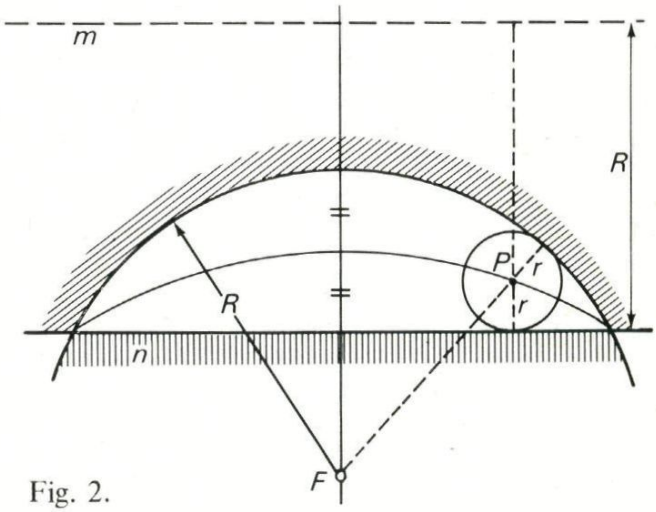


Fig. 2.

2. Heeft het deel van de parabool, dat in fig. 5b buiten het aangegeven gebied ligt, ook nog betekenis?
3. Kun je een overzicht maken betreffende de aard van de bissectrice in de diverse gevallen, waarin een gebied wordt begrensd door lijnen of cirkelbogen?

°°Sterren tekenen

J. W. Nienhuys

Fig. 1.

Je kleine zusje en broertje vinden het erg leuk als je een ster met vijf punten in één trek voor ze tekent (fig. 1). Zoiets heet een pentagram. 'Zelf doen' is vaak wat moeilijker, je moet ze precies uitleggen hoe de figuur in elkaar zit.
Ook volwassenen vinden pentagrammen mooi of mysterieus. Misschien geloofde men vroeger zelfs dat ze als toversymbolen gebruikt konden worden!

Nadat je hebt uitgelegd hoe je zo'n ster met vijf punten tekent, komt de vraag (of bevel): 'Nou een met meer punten! Kun je dat ook?' Met zes punten gaat niet in één trek (d.w.z. de pen niet van het papier nemen, en alleen bij de punten de hoek omslaan). Met zeven punten weer wel, maar met acht?
In het algemeen, als n een natuurlijk getal voorstelt, hoe teken je dan een n-gram?
Eerst preciseren we wat we onder een n-gram verstaan: een figuur met n-hoekpunten die op de hoekpunten van een regelmatige n-hoek liggen en die in één trek getekend kan worden door telkens een hoekpunt met een ander hoekpunt te verbinden door een lijnstuk van één gegeven lengte. Door deze laatste conditie sluiten we figuren zoals fig. 2 uit. In één trek moet je zo interpreteren dat beginpunt en eindpunt samenvallen. Merk op dat de regelmatige n-hoek zelf onder de definitie valt. Dat noemen we dan het triviale n-gram of n-gon (fig. 3).

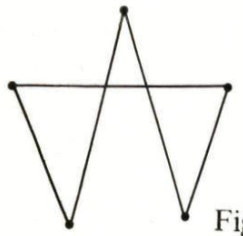


Fig. 2.

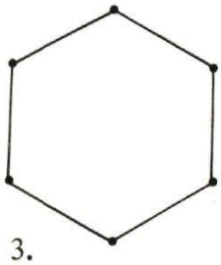


Fig. 3.

Uit de definitie volgt dat alle draaiingen over een veelvoud van $2\pi/n$ het regelmatig n-gram in zichzelf overvoeren.

°°°*n* sprongen van *k* stapjes

Een n-gram kun je je dus voorstellen als gevormd door bij een gegeven hoekpunt van het n-gon te beginnen en dan recht over te steken naar een hoekpunt dat k stapjes verderop (kloksgewijs gerekend) ligt. En dan weer k stapjes (zijden van het n-gon) overslaan, etc.
Nu kunnen we onze vraag wat preciezer formuleren: Bij gegeven n, hoe moet je k kiezen zodat je pas na n sprongen (en niet eerder) weer terug bent bij je uitgangspunt?
Om dit probleem op te lossen, keren we het om: veronderstel n en k gegeven. Na hoeveel sprongen ben je voor het eerst weer bij je uitgangspunt terug? Laten we dit onbekende aantal even N noemen. Wat is het verband tussen n, k en N?
Wel, na N sprongen (elk van k stapjes) heb je Nk stapjes in totaal afgelegd. Dat is een geheel aantal malen rond, dus een n-voud aan stapjes.
Nu is N zodanig dat Nk het *kleinste* positieve n-voud is. Met andere woorden Nk = k.g.v. van n en k, dat is $\frac{nk}{g}$, met g = g.g.d. van n en k.

Dus $N = n/g$, met g = g.g.d. van n en k.
Nu is de vraag: 'wanneer is $N = n$?' gemakkelijk te beantwoorden: als n en k geen delers (behalve 1) gemeenschappelijk hebben.
Conclusie: Als je voor gegeven n een k kiest die geen delers met n gemeenschap-

pelijk heeft en je gaat van hoekpunt naar hoekpunt in een n-gon door telkens k zijden over te slaan, dan verschijnt een n-gram.
We passen dit toe op $n = 5$.
Geen delers met 5 gemeenschappelijk hebben: 1, 2, 3, 4. $k = 1$ is juist het pentagon, $k = 2$ is ons bekende pentagram. $k = 3$ levert hetzelfde, maar dan in omgekeerde richting doorlopen. Drie stapjes vooruit is hetzelfde als twee stapjes achteruit (tenminste in een vijfhoek). Net zo kunnen we $k = 4$ als hetzelfde geval als $k = -1$ opvatten: dat is weer het pentagon maar dan tegen de klok in doorlopen.
Merk op dat we door het overbodige gegeven van de looprichting in te voeren de oplossing iets vereenvoudigd hebben, maar dat we dan ook elk n-gram tweemaal vinden, namelijk met tegenovergestelde looprichtingen.
Voor $n = 6$ vinden we alleen $k = \pm 1$, d.w.z. het hexagon.
Voor $n = 8$ vinden we behalve $k = \pm 1$ ook nog $k = \pm 3$ (fig. 4) en voor $n = 12$ ook nog $k = \pm 5$.

Fig. 4.

°°°**Alleen de zeshoek niet!**
Bestaat er nu voor elke n een k ($1 < k < n - 1$) die er geen delers mee gemeenschappelijk heeft. Het antwoord is nee, niet voor $n = 6$.
Echter voor $n > 6$ bestaat er altijd wél een k.
Bewijs I. Veronderstel n is een 4-voud. Definieer dan $k := \frac{1}{2}n - 1$. Een gemeenschappelijke deler van n en k is ook deler van $2 (= n - 2k)$. Maar k is oneven, dus de g.g.d. van n en k is 1.
Veronderstel nu n oneven. Definieer dan $k := \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$. Een gemeenschappelijke deler van n en k is ook deler van $1 (= n - 2k)$. Dus ook hier is g.g.d. van n en k gelijk aan 1.
Ten slotte veronderstellen we n even en $\frac{1}{2}n$ oneven. Dan definiëren we $k := \frac{1}{2}n - 2$. Omdat k oneven is en $n - 2k = 4$ volgt weer dat n en k geen gemeenschappelijke delers (behalve 1) hebben. Voor $n > 6$ is $1 < \frac{1}{2}n - 2 < \frac{1}{2}n < n - 1$. Einde bewijs.

°°°**Hoe groot is de hoek die een punt van de ster vormt?**
Als je zo'n ster tekent volgens het bovenstaande recept, moet je eerst de posities van de punten tekenen. Dat valt niet mee uit de losse hand. Als je een octagram tekent ($n = 8$) moet je maar eens kijken of er binnenin een regelmatige achthoek verschijnt.
In feite hoef je niet over globale kennis van de figuur (posities van alle hoekpunten) te beschikken om hem te tekenen. Locale kennis is voldoende, dat wil zeggen bij elk hoekpunt hoef je alleen maar te weten hoe groot de hoek is en hoeveel verder je moet gaan. Dat laatste is betrekkelijk eenvoudig: telkens even ver. Die hoek gaan we nu berekenen, voor een k-staps n-gram.
Kijk maar eens naar fig. 5, waarin twee opeenvolgende 'zijden' van het k-staps n-gram getekend zijn en het middelpunt van de cirkel (de omgeschreven cirkel van het n-gram) en wat hulplijnen.
Je ziet twee gelijkbenige driehoeken zitten en ook een paar buitenhoeken.

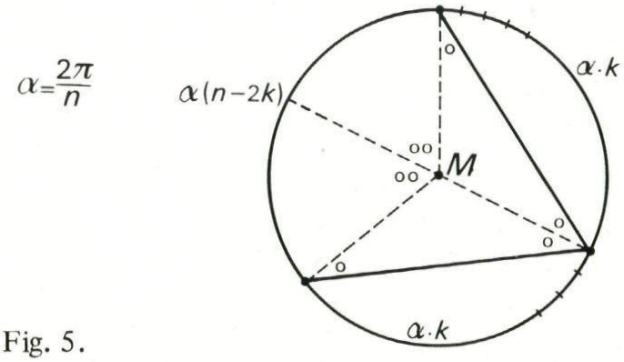


Fig. 5.

Vier kruisjes is samen $\frac{2\pi}{n}(n-2k)$, dus de bewuste hoek is $\pi/n\ (n-2k)$.

We merken op dat de k die we construeerden in bewijs I juist de scherpst mogelijke hoek voor een n-gram geeft.
In tabelvorm: $(n > 2)$

rest van n na deling door 4	scherpste hoek die een n-gram produceert
0	$2 \cdot \pi/n$
1	$1 \cdot \pi/n$
2	$4 \cdot \pi/n$
3	$1 \cdot \pi/n$

°Druppelkrommen

De redactie van *Pythagoras* ontvangt elk jaar honderden brieven van lezers. Zeker een kwart daarvan bevatten verzoeken om een zelfgemaakte puzzel of een door de lezer zelf uitgewerkt stukje wiskunde als artikel op te nemen. Het meeste daarvan kunnen we echter onmogelijk plaatsen, omdat het voor de gemiddelde lezer niet interessant genoeg is. Laat je daardoor vooral niet ontmoedigen. Alles wat je door eigen nadenken en met inspiratie en transpiratie gevonden hebt, is natuurlijk ontzettend belangrijk voor je zelf en je zult er ongetwijfeld heel wat ontdekkingsvreugde aan beleven, maar dat is nog geen garantie ervoor, dat het ook maar 1‰ van de ca. 25 000 lezers van *Pythagoras* zal kunnen boeien.
Paul van de Veen uit Woudenberg ontdekte dat je met meccanostrippen (het kan natuurlijk ook met gewone latjes) krommen met fraaie druppelvormen kan tekenen:

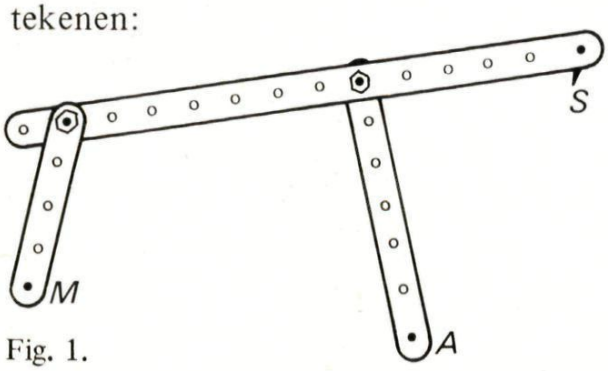


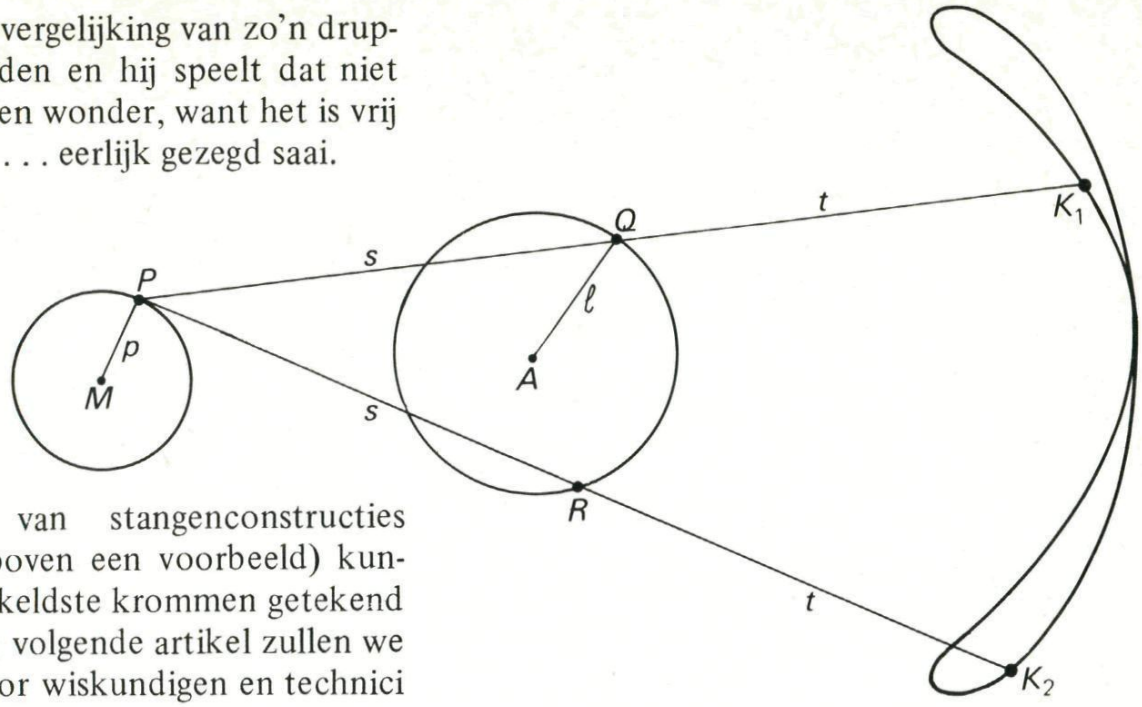
Fig. 1.

'Punten A en M (fig. 1) zijn draaibaar op een grondplaat bevestigd. Als het grote staafje eenmaal om M draait, beschrijft S krommen die (afhankelijk van de onderlinge verhoudingen der andere lengten van de staafjes) variëren tussen de in fig. 2 afgebeelde.

Fig. 2.

Je kunt zo'n kromme ook punt voor punt construeren (fig. 3).
Teken een cirkel met de straal p en een cirkel met de straal l. Neem een lengte s tussen de passer en zet de passerpunt in een willekeurig punt P van de eerstgenoemde cirkel. Construeer nu de punten Q en R op de tweede cirkel zodat $PQ = PR = s$.
Verleng nu PQ en PR met gelijke stukken t. Zo vinden we twee punten K_1 en K_2 van de druppelkromme.'
Tot zover Paul van de Veen. Je ziet dat zijn constructiemethode nauwkeurig de beweging van het punt S van de meccanostrippen imiteert.

Nu wil Paul de vergelijking van zo'n druppelkromme vinden en hij speelt dat niet klaar. Dat is geen wonder, want het is vrij ingewikkeld en . . . eerlijk gezegd saai.



Met behulp van stangenconstructies (waarvan hierboven een voorbeeld) kunnen de ingewikkeldste krommen getekend worden. In het volgende artikel zullen we zien, dat er door wiskundigen en technici juist gezocht is naar een stangenconstructie die de eenvoudigste kromme zou opleveren: de rechte lijn!

Fig. 3.

°De rechte lijn is moeilijker dan je denkt

Sinds James Watt in de vorige eeuw in Engeland zijn stoommachine operationeel maakte, raakten de mensen in de ban van de mechanisatie. Daarbij moesten veelsoortige problemen worden opgelost: brandstofkeuze, snelheidsregulatie, smering, lagering, overbrenging . . .
Zo vond George Stephenson zijn beroemde 'schaar' uit om een locomotief van zijn 'vooruit' in zijn 'achteruit' te zetten. Vaak werd men bij dergelijke zaken geconfronteerd met wiskundige problemen.

Welke kromme beschrijft bij een beweging een of ander punt?
Zo'n machine bestond uit talloze draaiende onderdelen. Daarbij trad toch de wens naar voren dat bepaalde punten weer rechte verplaatsingen dienden te maken. Je zou de probleemstelling als volgt kunnen maken: hoe leiden we uit een rotatie een translatie af??

Als men eenmaal een constructie bedacht heeft, is het vaak moeilijk te bewijzen dat de beweging inderdaad rechtlijnig is.
In dit artikel willen we je iets laten ervaren van deze problematiek uit de vorige eeuw, niet op een theoretische maar een praktische manier.
Probeer zelf een aantal van dergelijke ontwerpen te maken en te testen op hun lineariteit.

Het idee van Watt

Watt werd bij de realisatie van zijn stoommachine geconfronteerd met het probleem van de lineaire transmissie. Zijn oplossing, waarop hij zelf erg trots was, staat getekend in fig. 1.

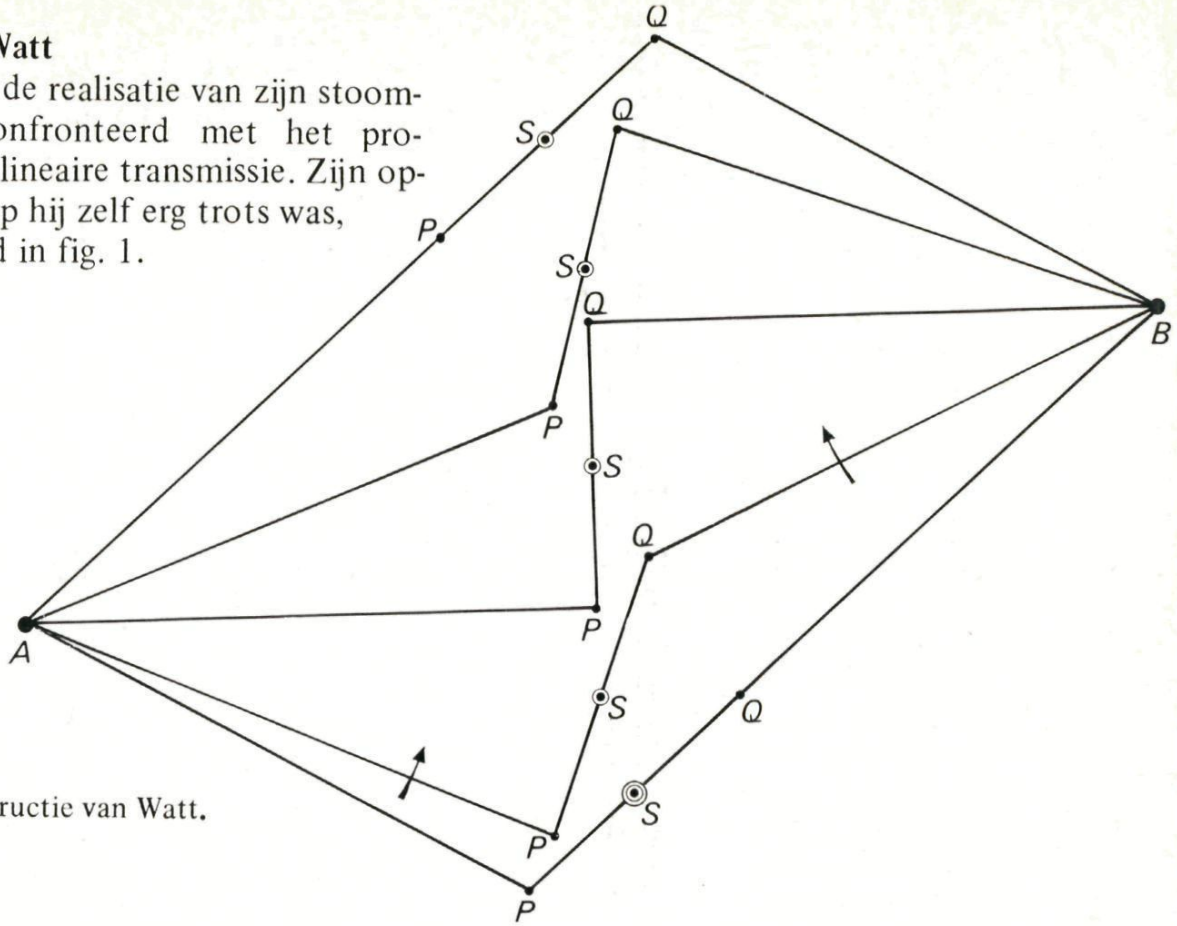


Fig. 1. De constructie van Watt.

A en B zijn twee vaste draaipunten. De constructie bestaat uit drie stangen, waarbij $AP = BQ$. P en Q zijn ook draaipunten. In de middenpositie zijn de hoeken bij P en Q recht. Bij draaiing beschrijft het midden van PQ, het punt S, een vrijwel recht lijnstuk.

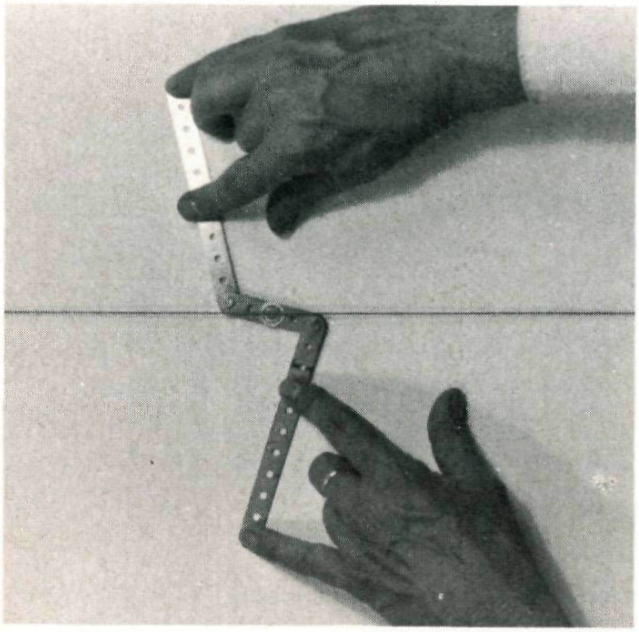


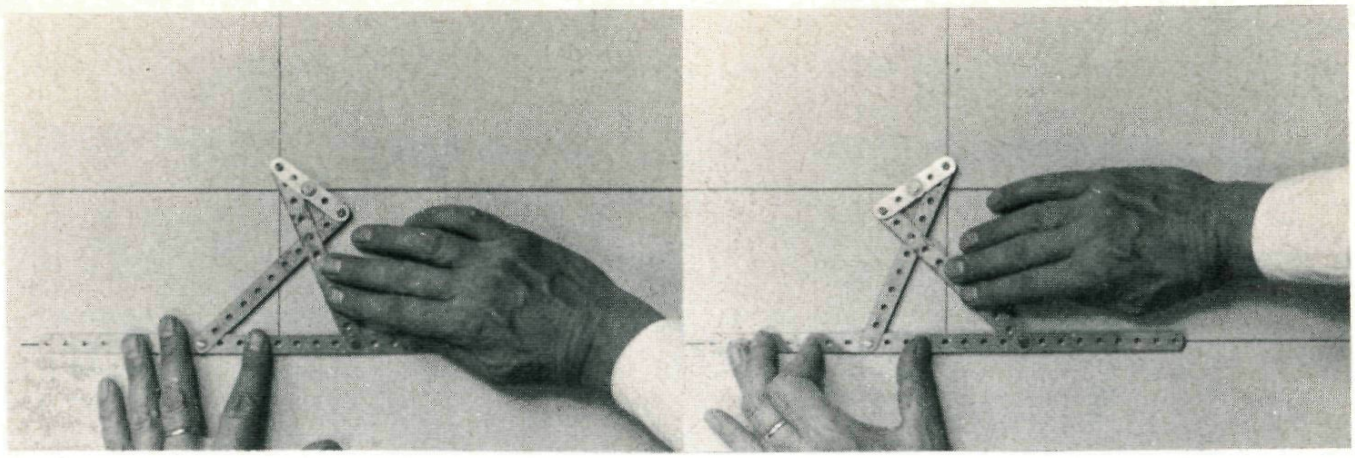
Fig. 2. Het idee van Watt.

In fig. 2 kun je zien hoe je dergelijke constructies zelf kunt nabouwen met meccanomateriaal. Je zou ook stroken karton kunnen knippen en die bij de draaipunten met ombuigpennetjes aan elkaar kunnen zetten. Nog mooier is het om stroken van passende lengte uit blik te knippen, gaatjes te boren en verbindingen te maken met holnietjes.

Als je het zelf gaat onderzoeken, zul je wel zien dat het 'recht' zijn nogal tegenvalt; S beschrijft eigenlijk een platte, achtvormige lus. Naarmate AP en BQ langer zijn, is aan de lineariteit beter voldaan.

Andere benaderingen

Een soortgelijke oplossing met gekruiste stangen staat in fig. 3. Ook hier maakt punt S bij benadering over een zekere afstand een rechte verplaatsing. Dit idee gaf in 1850 de Russische wiskundige Tsjebysjev. Kies $PQ = 2a$, $AB = 4a$ en $AP = BQ = 5a$. Dan komt punt S op een hoogte $4a$ boven AB in de standen waarbij PQ horizontaal komt en in die waarbij PQ verticaal komt.



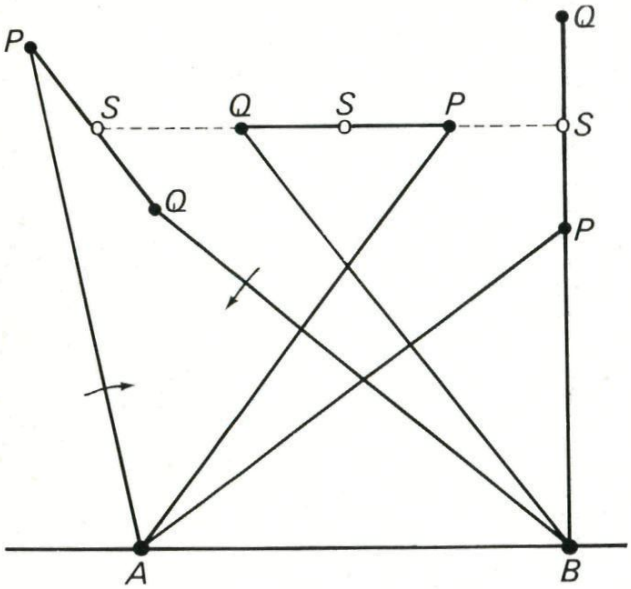


Fig. 3. Oplossing met gekruiste stangen.

In 1860 publiceerde Robert een nog betere benadering voor de rechte overbrenging (fig. 4). Hierbij geldt: $PQ = \frac{1}{2}AB$ en $AP = SP = SQ = BQ$. In de tekening zijn vijf standen uitgebeeld.
S dekt weer exact de punten A en B zelf en hun midden.
Zelfs een stukje buiten het interval AB is de lineariteit nog redelijk bevredigend. Verderop draait punt S omhoog.
Men moet er wel voor zorgen dat AP een aantal malen groter is dan PQ.

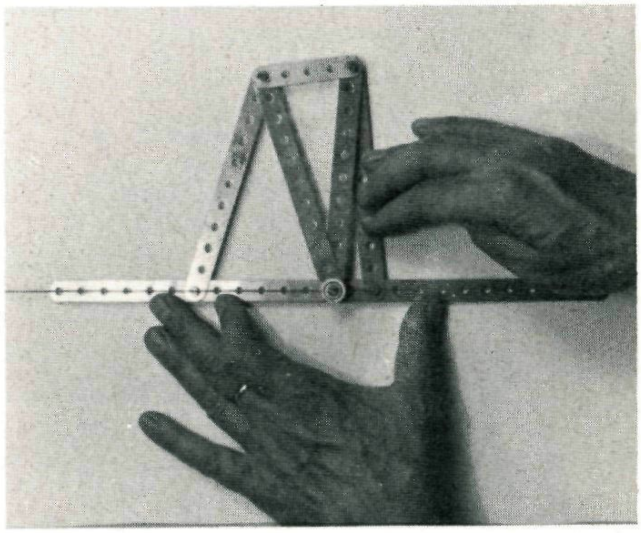
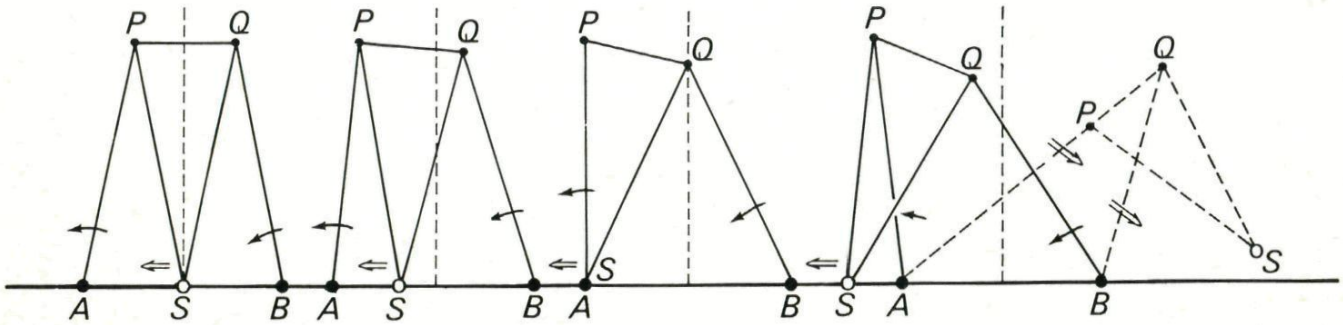


Fig. 4a. Oplossing van Robert.

Fig. 4. Benaderingsmethode van Robert.



Exacte oplossingen

In 1877 publiceerde de Londense advocaat Kempe een boek met de wonderlijke titel: *Hoe een rechte lijn te trekken.* Hierin verzamelde hij een aantal oplossingen die volkomen exact blijken te zijn. Hier volgen een paar van die oplossingen.

In fig. 5 staat een ontwerp met vijf stangen. *AP* en *BQ* zijn even lang, evenzo *PS* en *QS*. De verbinding *EF* is even lang als *PS* en *QS*. Punt *S* gaat bij draaiing van de staven *AP* en *BQ* exact een rechte beschrijven als voldaan is aan de volgende voorwaarde: $PE \times PA = PS^2$. Het bewijs hiervoor laten we weg.

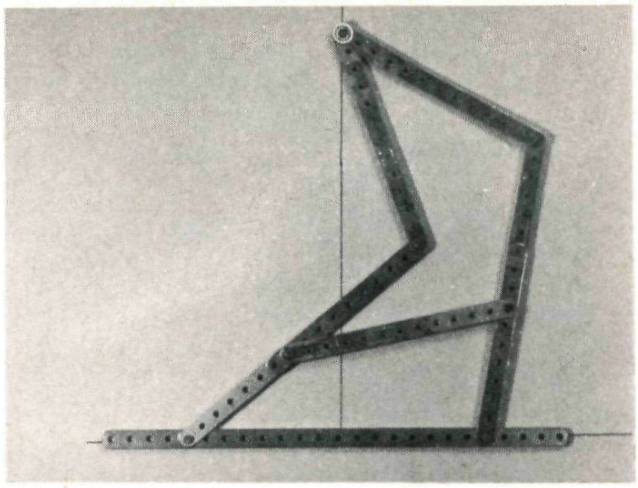


Fig. 5a. Vijf-stangenontwerp (exact rechtlijnig).

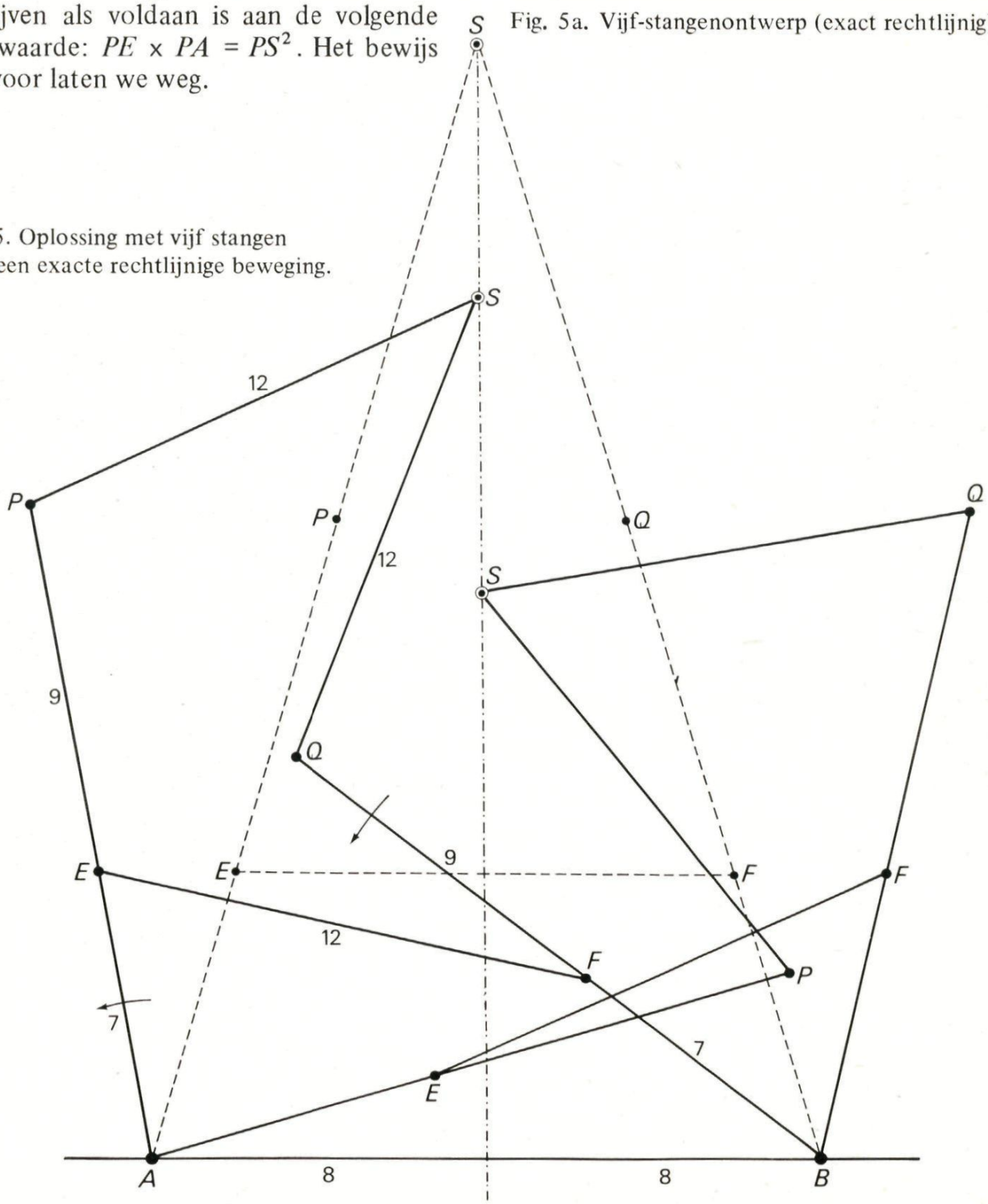


Fig. 5. Oplossing met vijf stangen voor een exacte rechtlijnige beweging.

Hier volgen enige adviesmaten voor je meccano-ontwerp, waarbij aan die voorwaarde voldaan is.
Neem $AE = CF = 7$, $EP = FQ = 9$, $PS = QS = EF = 12$ en $AC = 16$. In fig. 5 zie je drie standen waarbij S precies de middelloodlijn van AB afloopt. De verplaatsing omhoog is daarbij ongeveer 27.
Een 'zeven-stangenoplossing', van Kempe zelf afkomstig, is uitgewerkt in fig. 6. Er gelden soortgelijke voorwaarden als in het vorige geval. In de tekening zijn de adviesmaten aangegeven.

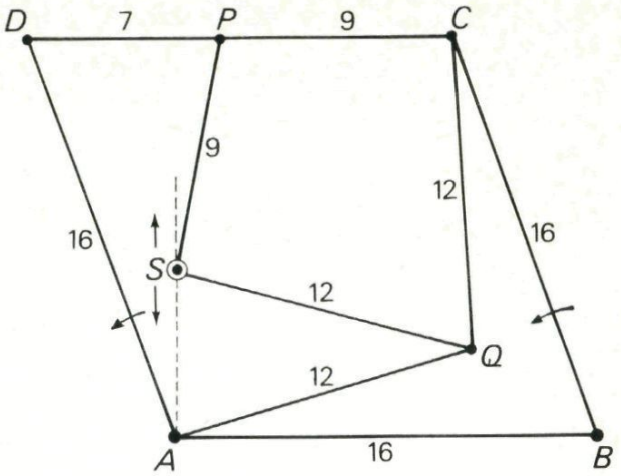


Fig. 6. Andere oplossing voor een precieze rechtlijnige transmissie.

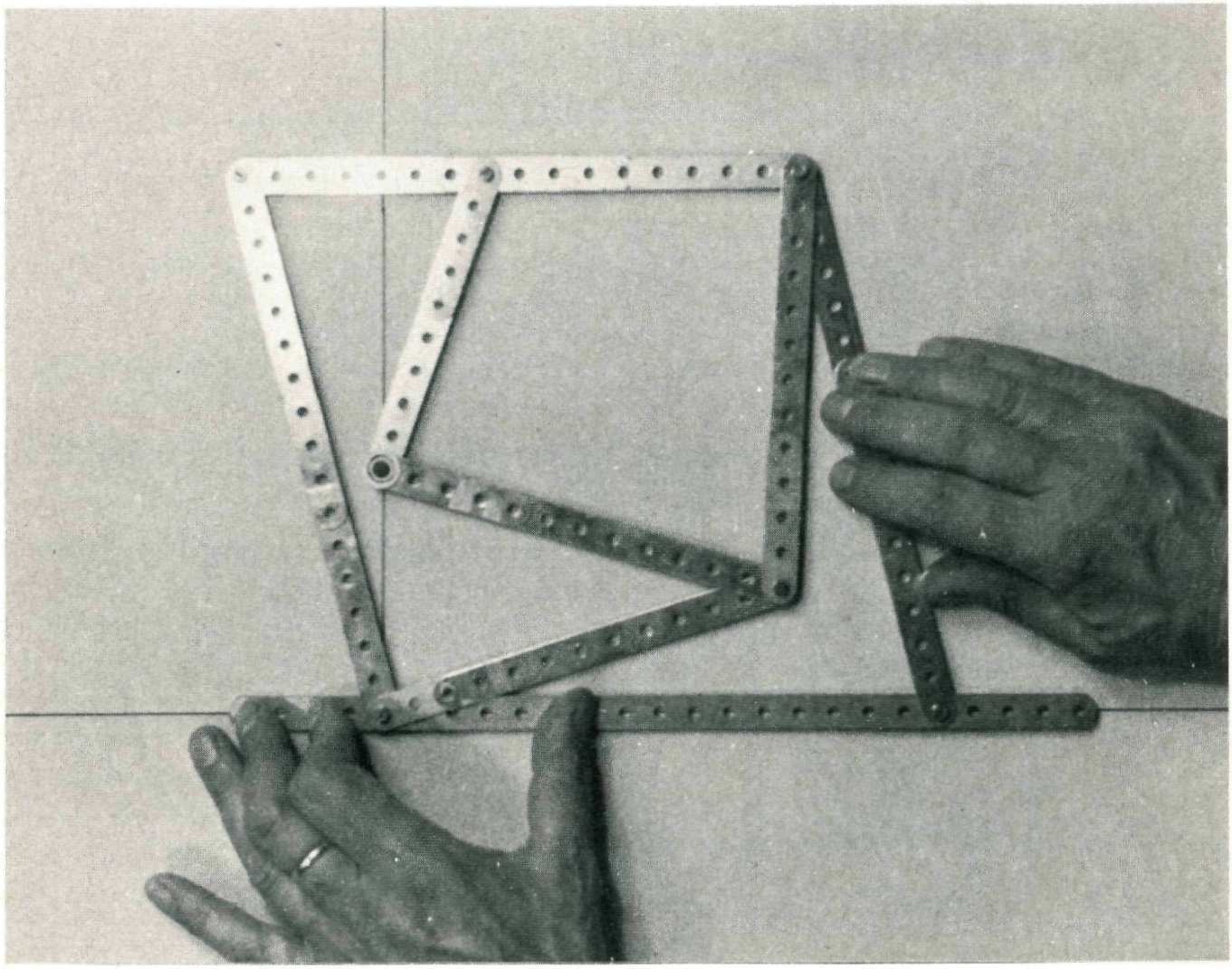


Fig. 6a. Zeven-stangenontwerp (exact rechtlijnig).

Zelf doen
Wil men het wonderlijke van deze ideeën ervaren, dan is het noodzakelijk de constructies zelf na te bouwen. Het is beslist de moeite waard. Naast verwondering zal er ook bewondering zijn voor de mensen die dergelijke ontwerpen hebben verzonnen.

°°°Een optelrekenliniaal

Op een rekenliniaal kun je vermenigvuldigen, delen en nog veel meer.
Zelf zou je al heel gemakkelijk, eenvoudigweg door twee linialen langs elkaar te schuiven (fig. 1), een rekenliniaal voor optellen kunnen maken. Op die manier kun je daar aflezen: $2 + 3 = 5$.
Maar dat klinkt nogal onnozel omdat we optellingen vrij gemakkelijk uit het hoofd of op een kladje weten uit te voeren.

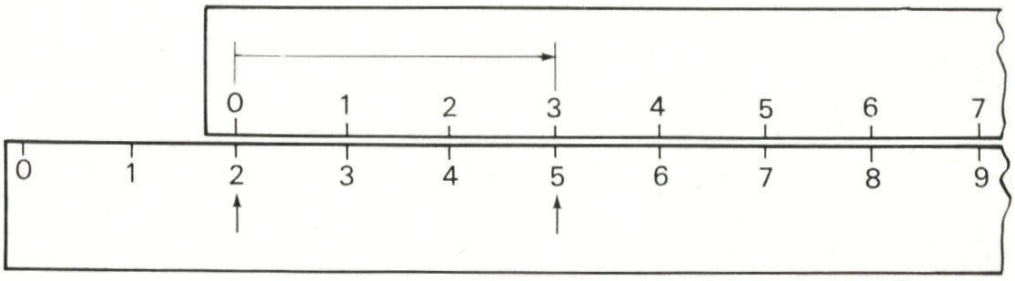


Fig. 1. Rekenliniaal voor optellen.

Anders wordt het wanneer we willen optellen in een ander talstelsel dan het gebruikelijke tientallige.
Zo is 12 + 11 = 100 tenminste in het drietallige stelsel en 10 + 11 = 21 in het viertallige stelsel.
Hoe werkt zulk geheimschrift en hoe kunnen we voor dergelijk optelwerk een machientje ontwerpen?
Hieronder schrijven we de verzameling natuurlijke getallen in een aantal opvolgende talstelsels. We beginnen gewoon, dat wil zeggen: tientallig.

10-tallig: 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 –
2-tallig: 0 – 1 – 10 – 11 – 100 – 101 – 110 – 111 – 1000 –
3-tallig: 0 – 1 – 2 – 10 – 11 – 12 – 20 – 21 – 22 –
4-tallig: 0 – 1 – 2 – 3 – 10 – 11 – 12 – 13 – 20 –

Hoe komen we aan deze cijfervormen?
Wat stelt 1235 eigenlijk voor in ons tientallig stelsel?
Wel, het betekent: $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5$.

Zo zou in een zestallig stelsel datzelfde 1235 betekenen:
$1 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^1 + 5$
hetgeen neerkomt op 299 in ons conventionele tientallige stelsel.
Zo'n bewering kunnen we als volgt schrijven:
$(1235)_6 = (299)_{10}$
Omgekeerd is het ook mogelijk een 'normaal' getal uit ons decimale systeem om te zetten in een cijfervorm van een ander talstelsel.
Hoe doe je dat?
Stel, je wilt 73 schrijven in een drietallig stelsel. Kijk dan eerst welke de hoogste macht van 3 is die in 73 voorkomt. Dat is in dit geval 3^3 en wel $2 \cdot 3^3$.
Doe datzelfde met de rest en ga zo door.
Zo vind je dan:
$73 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1$
dus $(73)_{10} = (2201)_3$
Door nu stroken te tekenen met daarop de opeenvolgende getallen van een zeker talstelsel, kan men automatisch in dat talstelsel optellen, zoals uitgebeeld in fig. 2 en fig. 3.

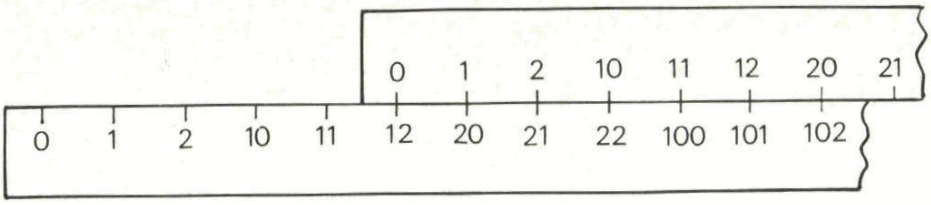


Fig. 2. Drietallig optellen $(12)_3 + (11)_3 = (100)_3$.

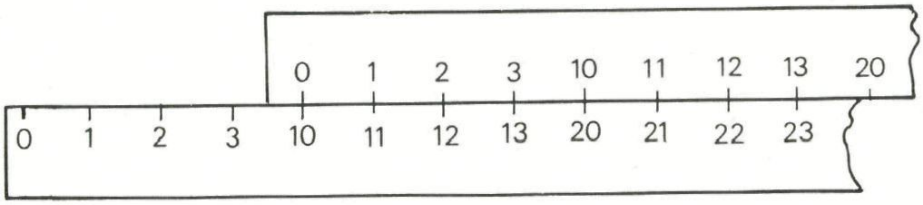
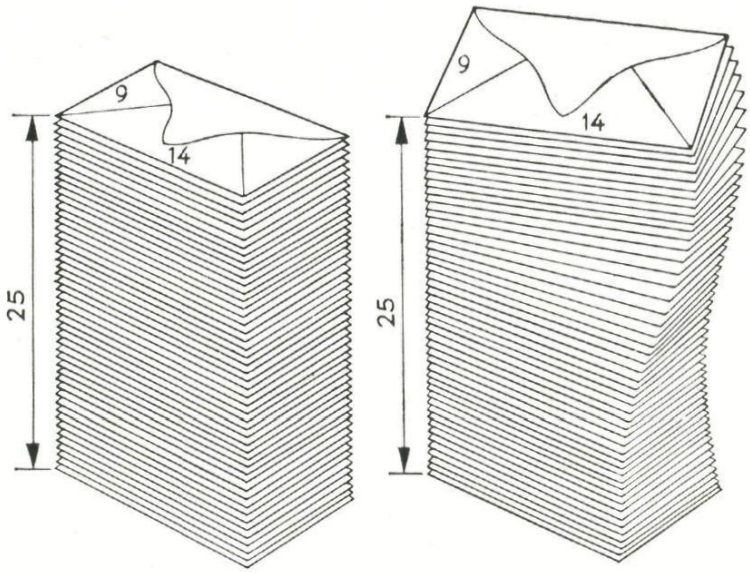


Fig. 3. Viertallig optellen $(10)_4 + (11)_4 = (21)_4$.

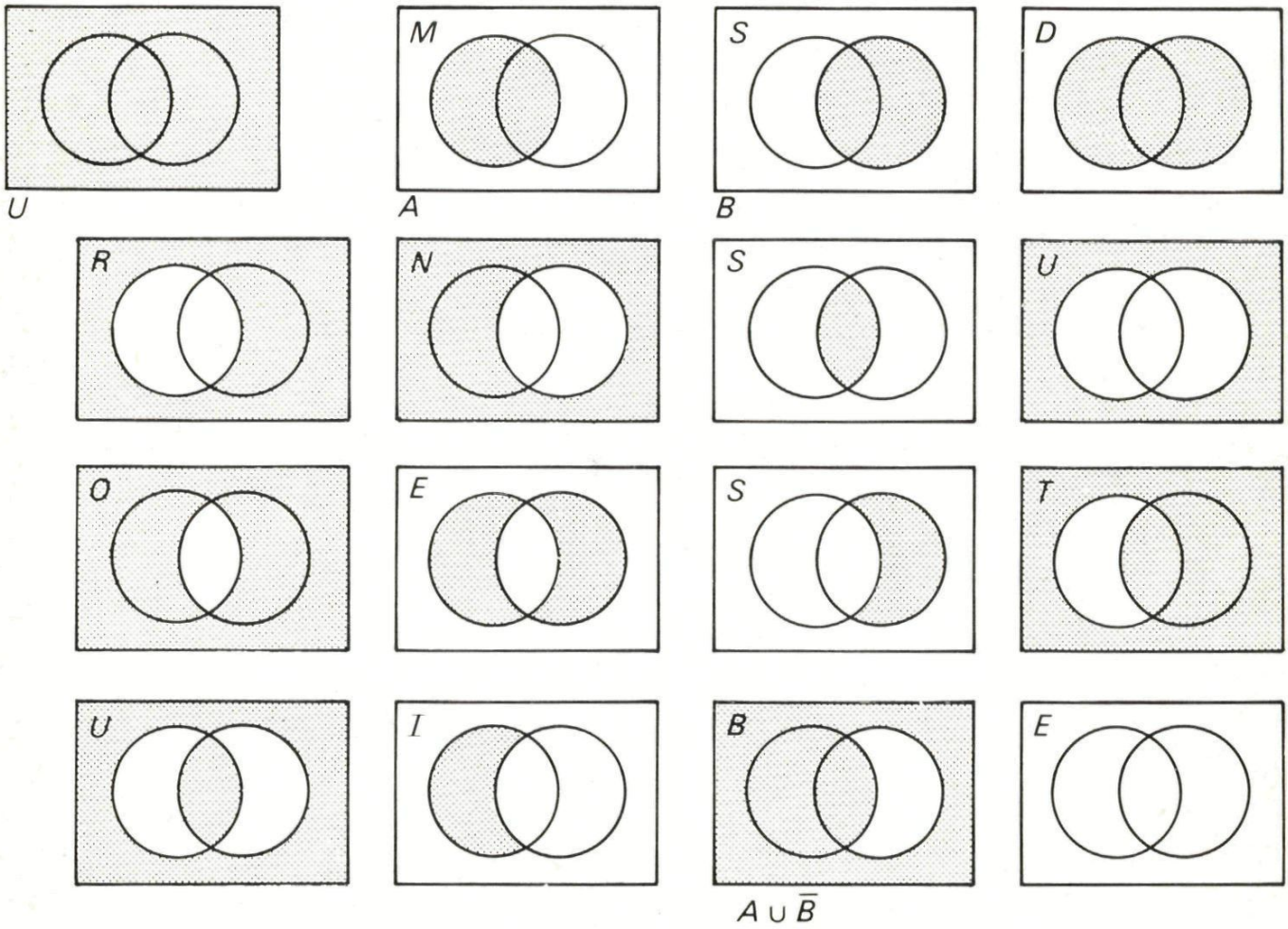
We adviseren je dat niet te ondernemen voor het tweetallige systeem, omdat hier kleine getallen al direct met veel cijfers moeten worden geschreven en daar is op de rekenstroken dan geen plaats voor. Succes met je alternatieve rekenliniaal!



Twee lichamen met grondvlak G en hoogte h hebben gelijke inhoud, als alle doorsneden evenwijdig met G gelijk zijn.

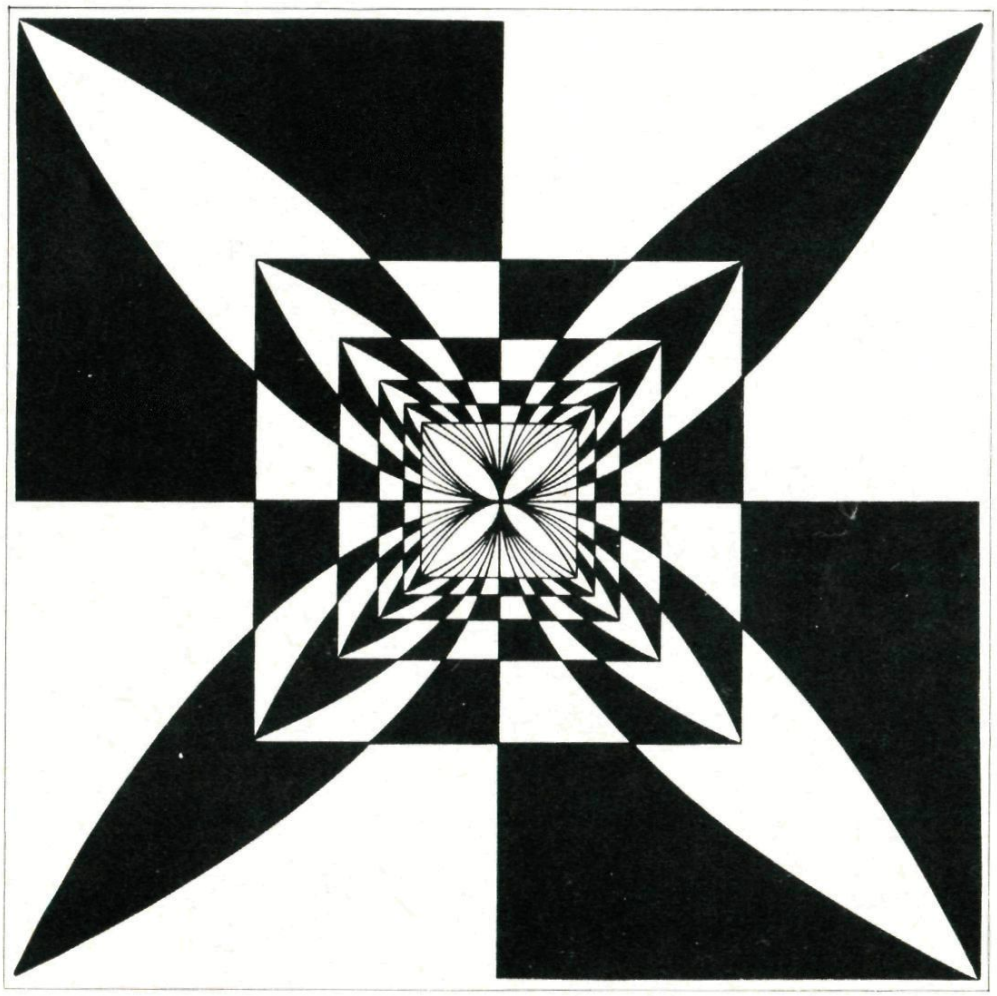
°Puzzel: verzamelingen

In de tekening staat een verzameling U.
A en B zijn deelverzamelingen van U.
In de volgende tekeningen is A door de linker cirkelschijf weergegeven en B door de rechter. De letter in het hokje duidt de gearceerde deelverzameling aan.



In elk van de 15 rechthoeken staat links boven een letter. Als je de letters in de juiste volgorde plaatst, krijg je een Latijnse spreuk, die karakteristiek is voor de wiskunde. De spreuk bestaat uit vier woorden. Het gaat er natuurlijk om die letters juist te rangschikken. Om je te helpen, staat hieronder het schema. Je hoeft de letters alleen nog maar in te vullen. Maar hoe?
Wel, in elk hokje staat aangegeven met behulp van de symbolen van de verzamelingsleer waar de bedoelde letter te vinden is. Zo hoort in het middelste hokje beneden de letter B, want die staat in het vakje waar uitgebeeld is: (A) verenigd met (niet B).
Probeer de tekst nu maar op te sporen.
De oplossing staat achter in dit nummer.

$\varnothing$	B	$\bar{A} \cup B$		
A	$\bar{A} \cup \bar{B}$	$A \cup B$	$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$	$\bar{A} \cap B$
$A \cap \bar{B}$	$\bar{B}$			
$\bar{A}$	$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$	$A \cup \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$A \cap B$



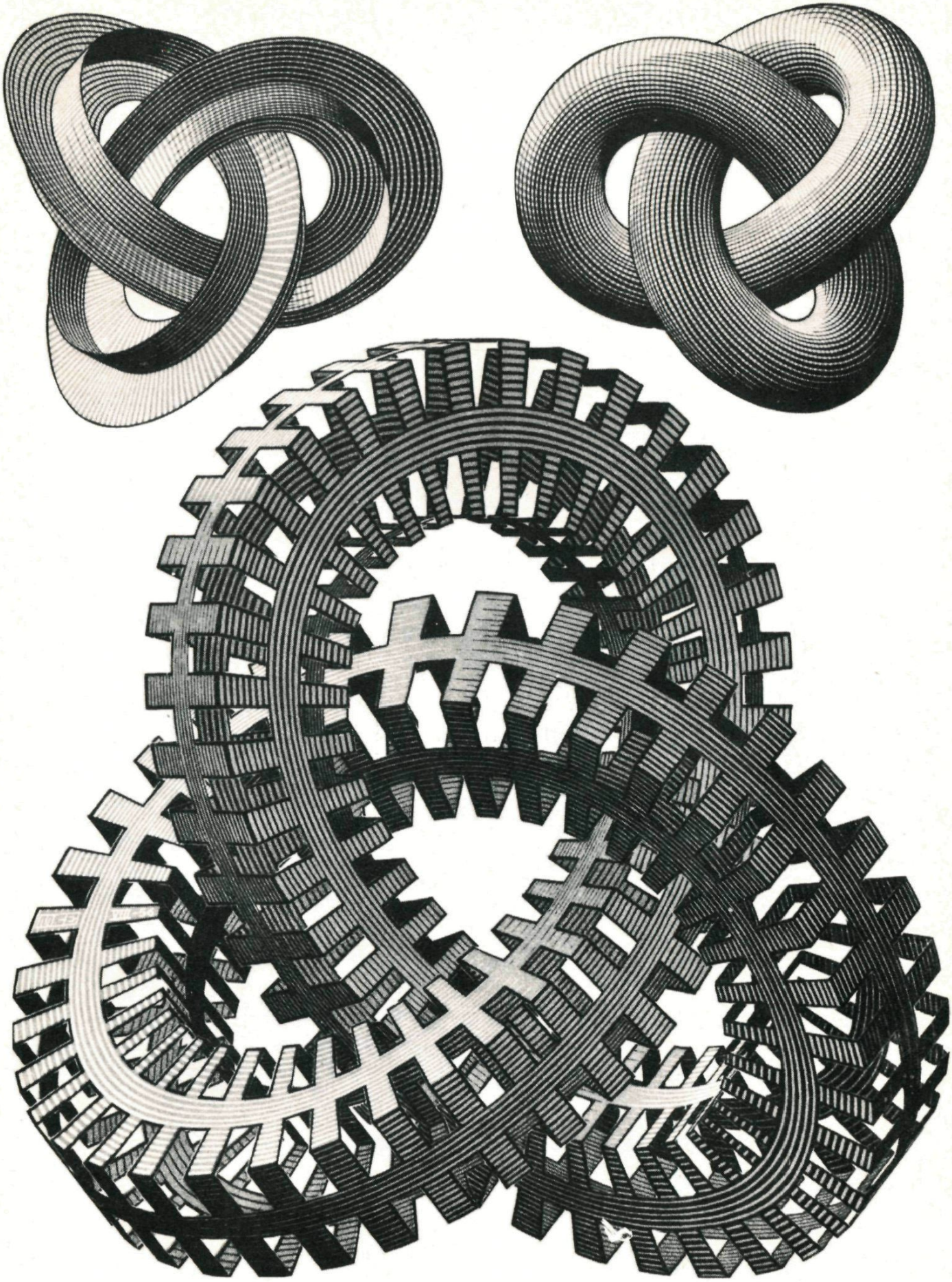


Fig. 1.

°Wiskunde in de knoop

Hiernaast (fig. 1) zie je weer een houtsnede van M. C. Escher. Ook in het eerste nummer van deze jaargang gaf Escher ons aanleiding tot een wiskundig verhaal: de band van Möbius (fig. 2). De beide prenten hebben meer met elkaar te maken dan op het eerste gezicht lijkt. We herhalen daarom nog even de kern van het vorige betoog.

Möbius

Neem een strook papier (fig. 3) en plak de uiteinden *AB* en *CD* aan elkaar, maar zó, dat *A* en *D* samenvallen en dat *B* en *C* samenvallen. Het resultaat is een band van Möbius met de eigenschap dat er maar één rand en maar één kant is. Dat wil in fig. 4 zeggen dat je van *E* naar *F* kunt komen zonder van de rand af te gaan en dat je van *G* naar *H* kunt komen zonder over de rand heen te stappen.

Deze eigenschappen blijven bestaan, ongeacht de afmetingen van de band of vervormingen die we de band laten ondergaan. Tot zover de herhaling.

Eenzelfde soort effect kun je krijgen door de uiteinden van de papierstrook met kruisprofiel van fig. 5 aan elkaar te bevestigen, maar dan een kwartslag gedraaid. Loop je op het horizontale vlak van fig. 6 in de richting van de pijl, dan kom je na één rondgang terug aan de binnenkant van het verticale vlak, na weer een rondgang aan de onderkant van het horizontale vlak, enzovoort. Na vier rondgangen ben je op je uitgangspunt terug. Ook hier is maar één kant en één rand.

Probeer hetzelfde maar eens in gedachten met het kruisprofiel uit Eschers prent (fig. 7). Het eist wel wat van je voorstellingsvermogen, omdat het ding zo raar in de knoop zit.

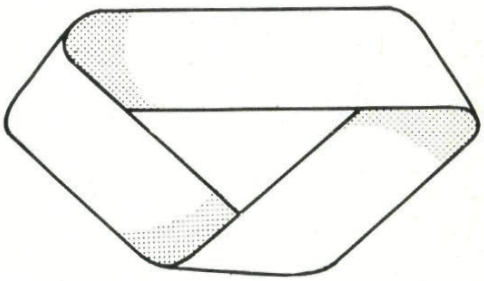


Fig. 2.

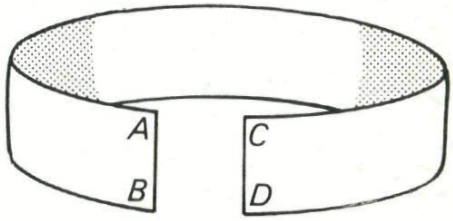


Fig. 3.

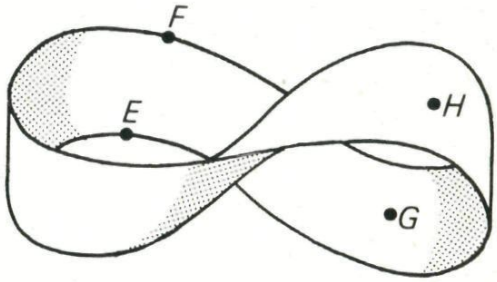


Fig. 4.

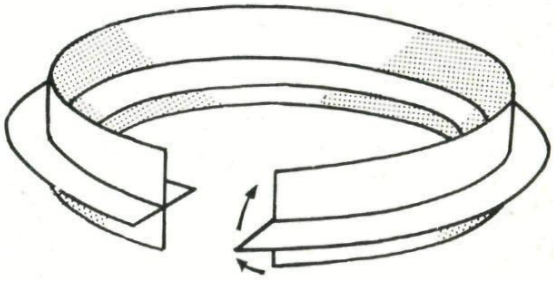


Fig. 5.

De kokerknoop

Ook in de grote knoop uit de prent zie je zoiets. Een goed passende dobbelsteen die in de knoop rondreist komt bij elke doortocht een kwartslag gedraaid terug. Is dit

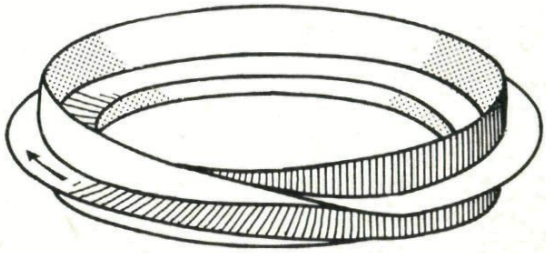


Fig. 6.

een grapje van de kunstenaar of hield hij zo van Möbiusbanden? We geloven geen van beide. Het is eerder zijn gevoel voor schoonheid geweest. De knoop wordt minder mooi als we zouden eisen dat de dobbelsteen ongekanteld terug komt.
Kijk maar eens naar één lus van de kokerknoop (fig. 8). De dobbelsteen die daar doorheen wordt gehaald, ondergaat een driekwart draai om de as die in fig. 9 staat aangegeven. We mogen dit vervangen denken door een kwartslag in de andere richting (fig. 10). De volgende lus veroorzaakt weer een kwartslag, maar nu om een andere as. Ten slotte de derde lus één om de derde as (fig. 11). Na dit oneven aantal kwartslagen kan de dobbelsteen niet in de oorspronkelijke stand zijn. De kokerknoop zou nog tenminste een vierde lus of een kwartslag in de koker moeten bevatten om dat wél voor elkaar te krijgen. En dat zou er minder fraai hebben uitgezien.

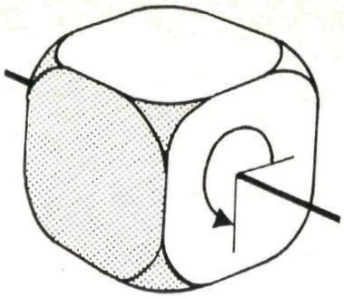


Fig. 9.

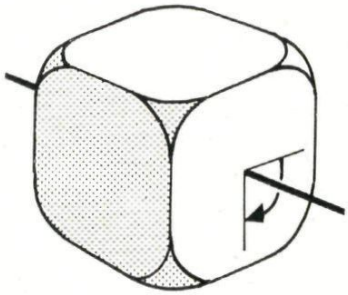


Fig. 10.

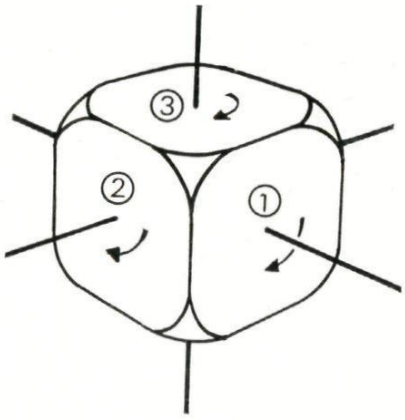


Fig. 11.

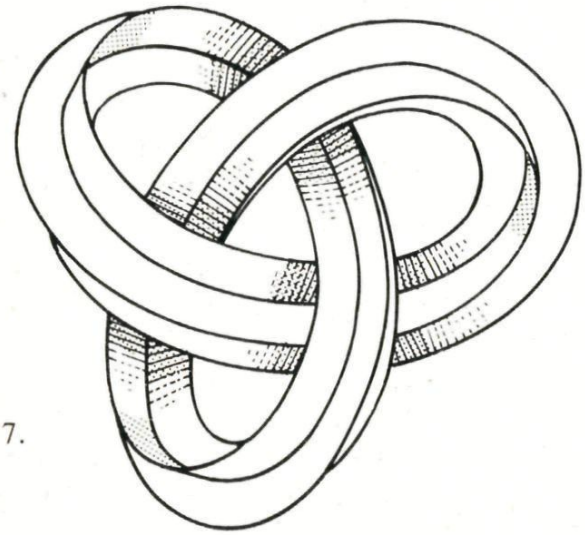


Fig. 7.

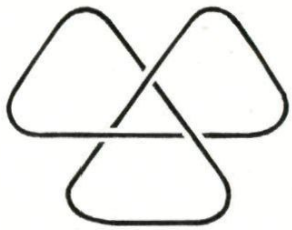


Fig. 12.

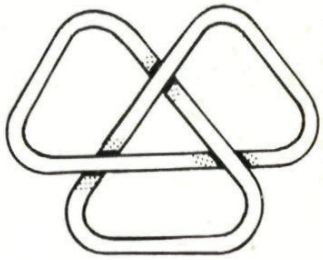


Fig. 13.

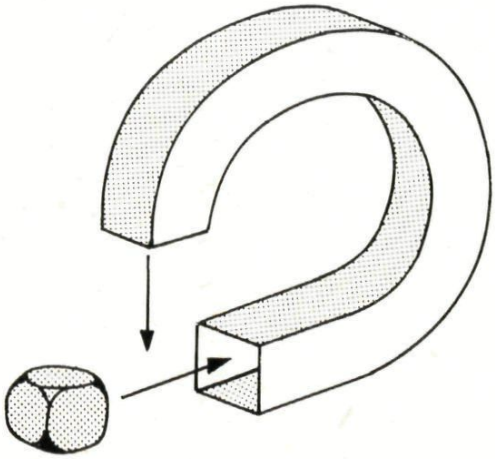


Fig. 8.

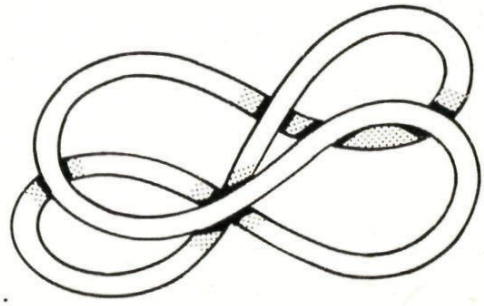


Fig. 14.

Klavertjedrie
We keren nog even terug naar de Möbiusband van fig. 2. Zoals gezegd, heeft die slechts één rand, die we in fig. 12 getekend hebben door het tussenliggende lint weg te denken. We pompen deze rand nog wat op en wat zien we? Dezelfde knoop met drie lussen als die we in het voorgaande bespraken. De knoop wordt klavertjedrie ofwel trifolio genoemd.
Proberen we hetzelfde met de Möbiusband van fig. 4, dan is het resultaat wat pover. Er lijkt een ingewikkelde knoop te ontstaan (fig. 14), maar het is alleen maar een ingewikkelde manier om een elastiekje neer te leggen. Hij kan uitgetrokken worden tot een ring.
Dat brengt ons dan op de discussie: wanneer noemen we iets een knoop, wanneer zijn twee knopen gelijk of van hetzelfde type? Zullen we bijvoorbeeld de beide trifolia boven in de prent van Escher gelijk noemen of zit er een wezenlijk verschil tussen beide?
In het laatste nummer gaan we hierop in; de wiskunde dus nog verder in de knoop!

°°°Versnelde kunst

De foto van fig. 1 laat een schoorsteen zien op het terrein van de Hoovercraft Corporation in Calais (Frankrijk).
De opvallende beschildering bestaat uit een aantal gekleurde schroeflijnen, variërend in kleur en breedte.
Het meest opmerkelijke is ongetwijfeld dat ze niet eenparig omhoog spiraliseren, maar meer versneld.

Bij de bekende schroeflijn is de spoed constant. Dat wil zeggen: na elke omwenteling komen we evenveel hoger.
Hoe luidt de vergelijking van een dergelijke schroeflijn?
We moeten daartoe eerst een driedimensionaal assenstelsel aanbrengen, waarbij de z-as samenvalt met de as van de schoorsteen en de x- en y-as daar loodrecht opstaan.
De vergelijking voor de schoorsteen zelf wordt dan: $x^2 + y^2 = r^2$, als r de straal van de schoorsteen is.
Bij de normale schroeflijn is de z-coördinaat evenredig met de draaiingshoek α. Dat betekent dus: als je een n x grotere hoek draait, kom je op de schoorsteenmantel ook n x hoger uit.

In formule: $z = c \cdot \alpha$

In ons geval lijkt het er eerder op dat het stijgeffect eenparig versneld is.

Fig. 1. Schoorsteen in Calais.

Analoog aan onze ervaringen in de natuurkunde met de eenparig versnelde beweging zouden we hier dan kunnen stellen:

$z = c \cdot \alpha^2$

Dus dat betekent dat bij een 2 x grotere draaiingshoek, we 4 x zo hoog uitkomen enz.

De vergelijking van deze artistieke schroef zou dan kunnen worden: $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = c \cdot \alpha^2 \end{cases}$

Nu is de draaiingshoek α nog samenhangend met x en y, aldus:

$\tan \alpha = \frac{y}{x}$ of omgekeerd: $\alpha = \text{arc} \cdot \tan \frac{y}{x}$

De schroeflijn in Calais geven we dan deze vergelijking: $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z = c \cdot (\text{arc} \cdot \tan \frac{y}{x})^2 \end{cases}$

Oplossing van 14 = 15 ? !

Het rekenkundig gemiddelde wordt gevonden uit de som van de getallen, gedeeld door het aantal Het gemiddelde van de repetitiecijfers 4, 9, 9, 7, 6 is $\frac{4+9+9+7+6}{5} = 7$.

Elke andere volgorde van dezelfde cijfers geeft de uitkomst 7. Deze manier van berekening van het gemiddelde geldt echter uitsluitend bij een eindig aantal getallen. Bij een oneindig aantal kan men zo groeperen, dat de uitkomsten verschillend zijn, en dat is bij de overdekking van het hele platte vlak met zevenhoeken inderdaad het geval. Hier volgt een voorbeeld met wat minder en eenvoudiger getallen, dan in de gestelde opgave, waar de hoeken in grootte variëren tussen 0 en 2π.

Neem de oneindige rij:

1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, . . .

Eerst per tweetal genomen, ontstaat het gemiddelde

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$

Het gemiddelde van alle getallen is duidelijk $\frac{1}{2}$.

De rij is oneindig, dus dezelfde getallen kunnen gerangschikt worden als:

1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, . . .

Per drietal is het gemiddelde $\frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3}$, waaruit de rij:

$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$

Nu vinden we als gemiddelde $\frac{1}{3}$.

Opnieuw blijkt uit dit voorbeeld: pas op met het begrip oneindig!

Oplossingen van de denkertjes

1. De bissectrice is een hyperbool omdat:
   $F_1P - F_2P = (R_1 - r) - (R_2 - r) = R_1 - R_2 = \text{constant}$.
2. De beide verlengden van de parabool zijn bissectricen van buitengebieden begrensd door lijn en cirkel.
3. *Overzicht van de bissectricen*
   a. De bissectrice is een rechte bij een gebied begrensd door twee lijnen (fig. 1).
   b. Bij begrenzing door een lijn en een cirkel wordt het een parabool (fig. 2a en 2b).
   c. Als bij twee cirkels beide grenzen hol zijn (denkertje 1) of beide bol (fig. 3), wordt de bissectrice een hyperbool.
   Als bij twee cirkels de ene grens hol is en de andere bol (fig. 4), wordt de bissectrice een ellips.

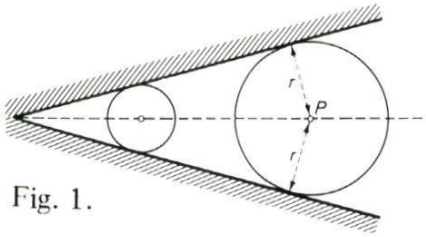


Fig. 1.

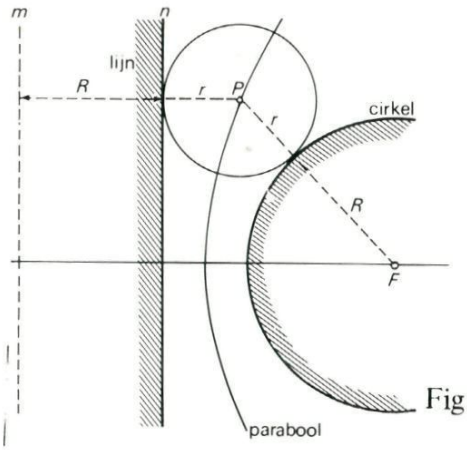


Fig. 2a.

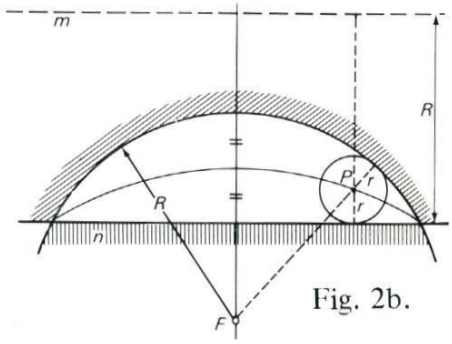


Fig. 2b.

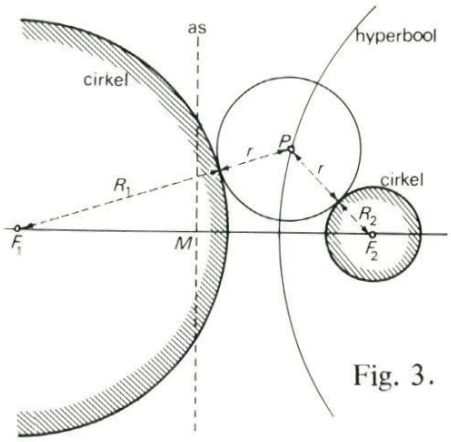


Fig. 3.

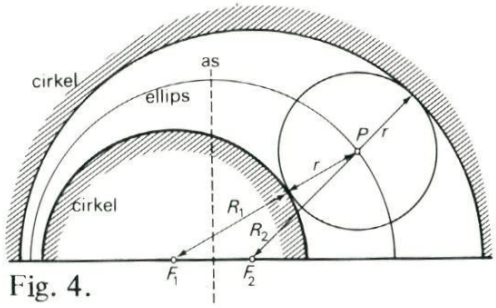
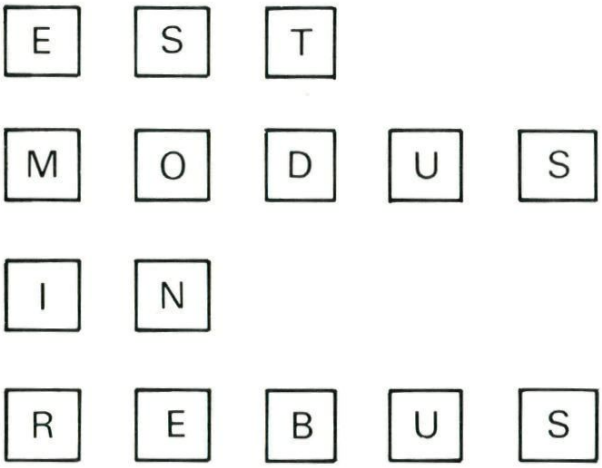


Fig. 4.

Oplossing puzzel verzamelingen



De tekst luidt als volgt:
EST MODUS IN REBUS
Dat betekent: *Er is maat in de dingen.*
Een minder serieuze vertaling zou kunnen luiden:
De rebussen zijn in de mode.

Inhoud

1. Veelhoeken en schoenveters 49
2. Wist je dat? 51
3. Nomogrammen 52
4. 14 = 15?! 54
5. Denkertjes 55
6. Sterren tekenen 56
7. Druppelkrommen 58
8. De rechte lijn is moeilijker dan je denkt 59
9. Een optelrekenliniaal 64
10. Puzzel verzamelingen 66
11. Wiskunde in de knoop 69
12. Versnelde kunst 71
13. Oplossing van 14 = 15 72
14. Oplossing denkertjes 72
15. Oplossing puzzel verzamelingen

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

A.J. Elsenaar, Harderwijk.
W. Kleijne, Heerenveen.
Ir. H. Mulder, Breda.
G. A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Mauritsstraat 117, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 6,50 per jaargang. Voor anderen f 10,50.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.
Bij elke 20 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

4138-244/46