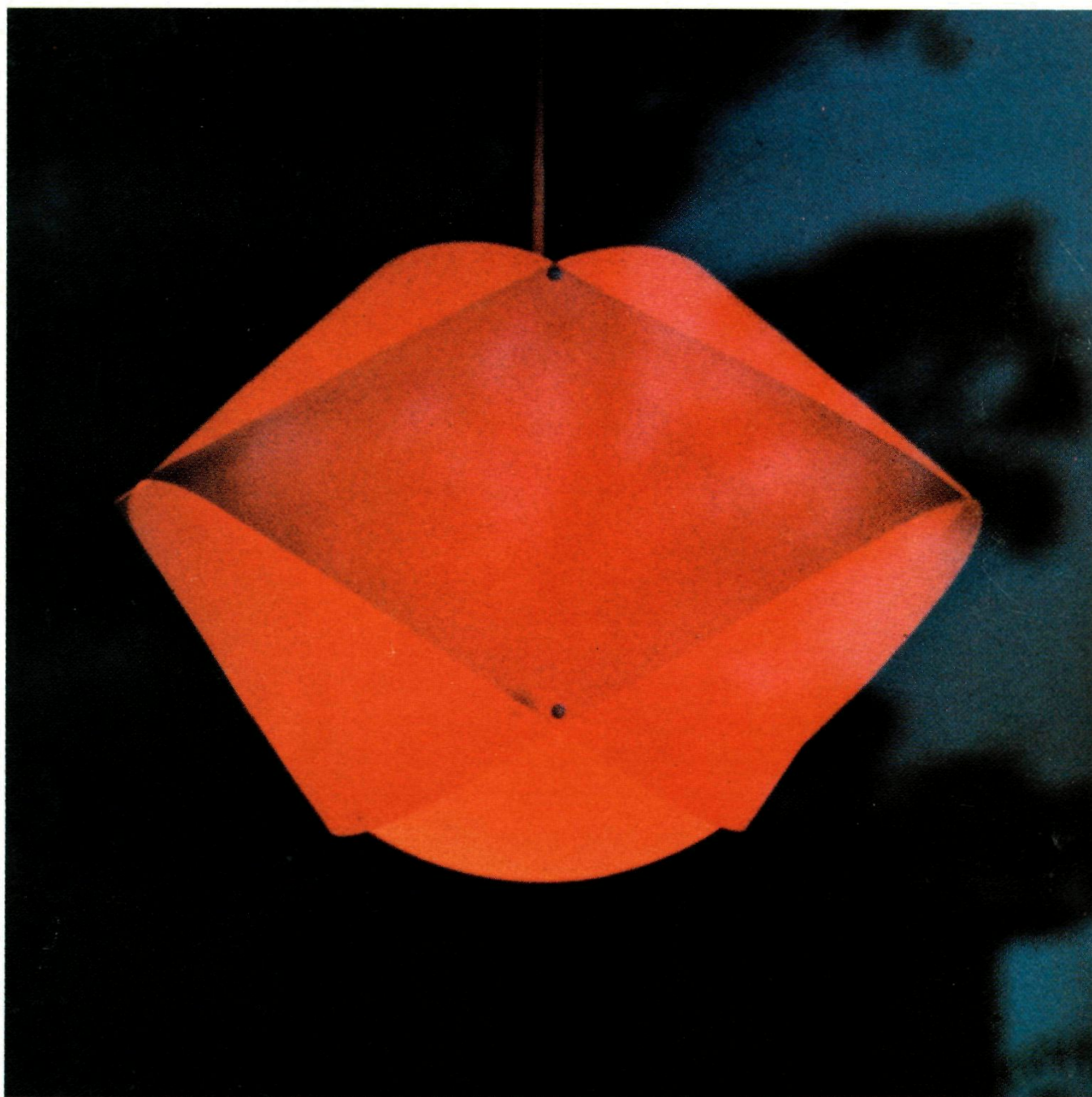
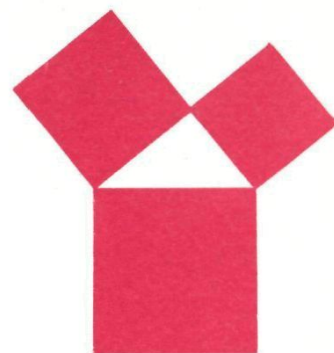




5
jaargang 16 / april 1977

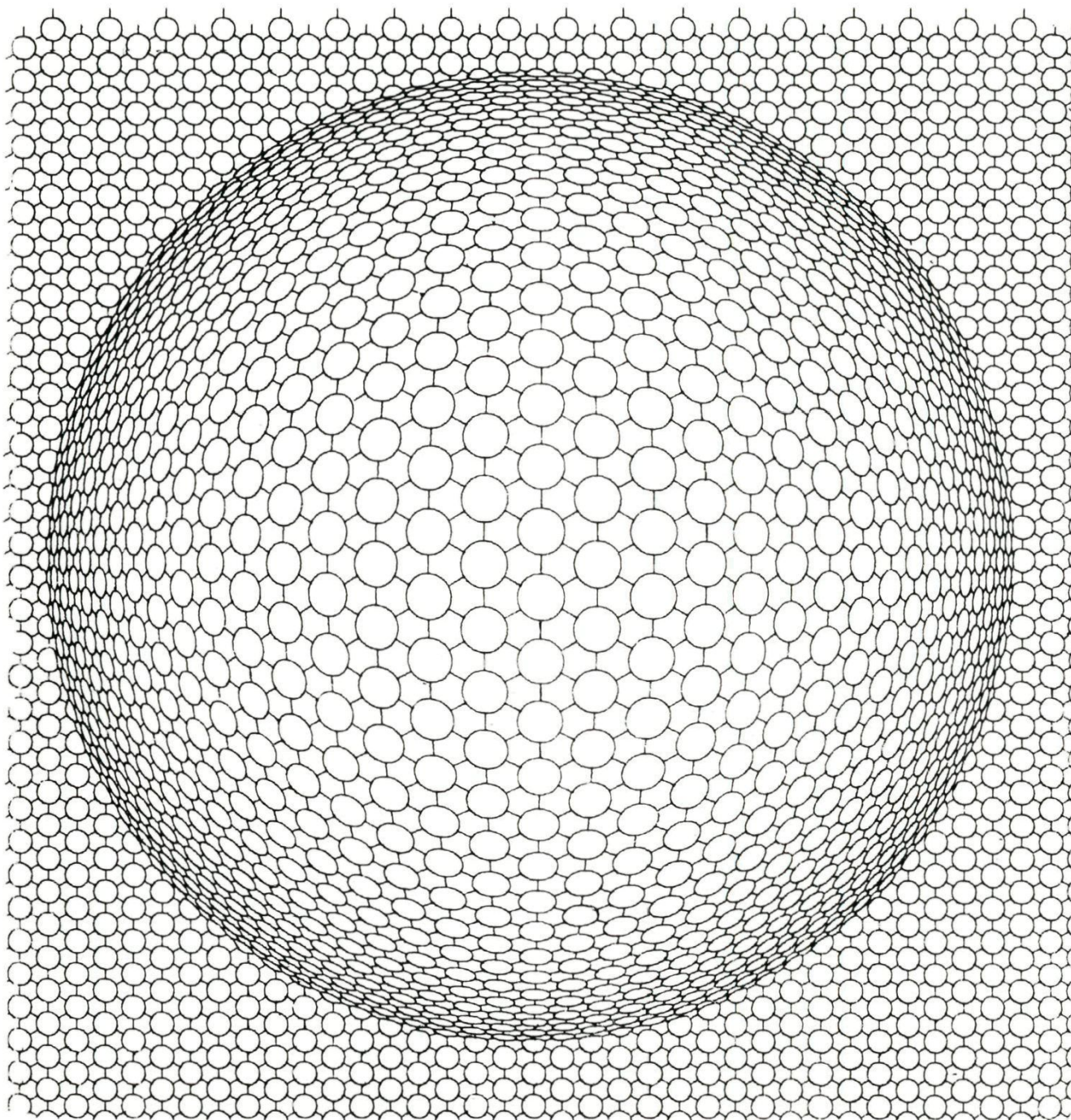
**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Centrale uitdijing. In het centrum zijn de figuurtjes tweemaal zo groot als aan de rand. Deze centrale uitdijing moet natuurlijk ergens een samendrukking veroorzaken: aan de rand van de cirkel. Het netwerk van de prent BALKON van M. C. Escher is op dezelfde manier gebouwd; daar is de vergroting in het centrum viermaal.

BIJ DE FOTO OP DE OMSLAG:

In een klein restaurant aan de Mandrakihaven in Rhodos hingen een aantal grote oranje lampen met een heel prettig aandoende vorm. Bij nader inzien bleek deze vorm de allereenvoudigste knoop te zijn! (zie verder de artikelen op pag. 107 en pag. 110).

°°Boodschap aan het heelal

De grootste radiotelescoop ter wereld, die van het Arecibo-observatorium te Porto Rico, heeft in 1974 een bericht de ruimte ingezonden. Met dit bericht hoopt de mensheid contact te leggen met intelligente wezens buiten deze aarde. De telescoop heeft een diameter van 300 meter en was, op het tijdstip dat het bericht werd verzonden, gericht op de sterrenhoop Messier 13 in het sterrenbeeld Hercules. Nu is de afstand die overbrugd moet worden 24.000 lichtjaren, dus voorlopig behoeven we nog geen antwoord te verwachten.

Hoe breng je nu je gedachten over op wezens die onze taal niet verstaan, onze gewoontes niet kennen en mogelijk een totaal andere levensvorm genieten dan de onze? Men heeft getracht om de communicatie door beelden tot stand te brengen. De boodschap die werd uitgezonden bestond uit 1679 signalen van een binaire structuur, dat wil zeggen: elk signaal bestond uit één van twee soorten. Zoiets als aan/uit, of wel een piep/geen piep, of (zoals ze in fig. 1 zijn voorgesteld) 0/1.

Men hoopt nu dat intelligente wezens er toe zullen komen om de lange rits van signalen in regels neer te zetten van een

rechthoek van 23 bij 73. Stellen we nu de binaire signalen voor door witte en zwarte blokjes, dan ontstaat het plaatje van fig. 2.

Duidelijk herkennen we hierin een menselijke gedaante op een derde van onderen. Een groot gedeelte van de boodschap geeft een beschrijving van de elementen waarop de biologie op aarde is gefundeerd, namelijk een numerieke beschrijving van het DNA-molecule en een schets van de wenteltrapstructuur van het DNA. Het DNA wordt als de sleutel van het leven op aarde beschouwd.

We willen nu niet verder ingaan op alle biochemische gegevens in dit bericht maar ons wel twee vragen stellen die op het wiskundige vlak liggen.

1. Waarom heeft men het aantal signalen nu juist bepaald op 1679? Aan het plaatje te zien is er zoveel 'wit' dat men wel wat zuiniger had kunnen zijn, of niet?
2. Boven in het plaatje zijn de getallen 1 tot 10 op een of andere wijze aangegeven.

Hoe zit deze code in elkaar?

Oplossing elders in dit tijdschrift.



Fig. 1.

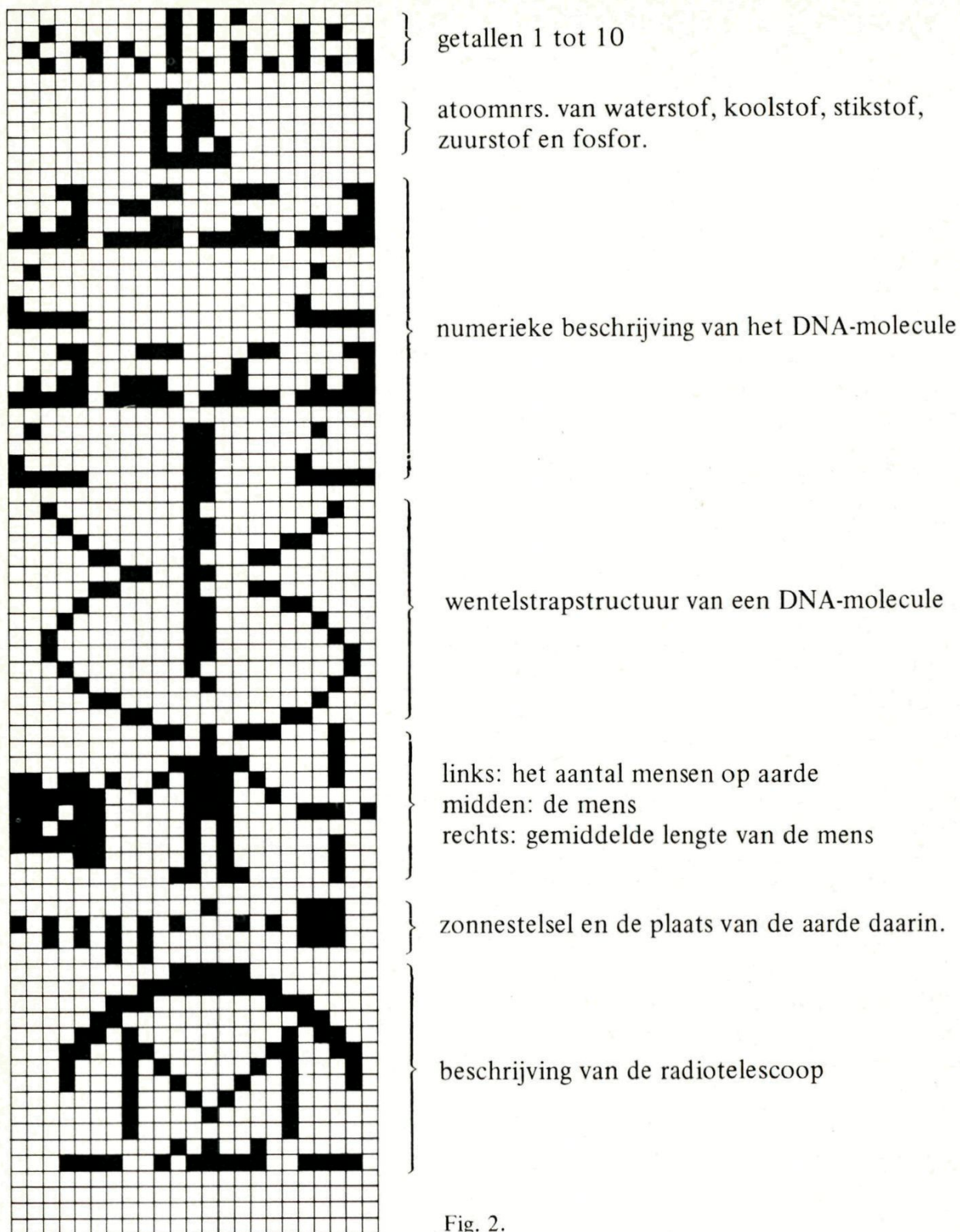


Fig. 2.

°Spanningsbollen

Veelvlakken, zoals een kubus, zijn gemakkelijk uit karton te plakken.

Dit keer gaan we een andere weg: we bouwen ze uit staafjes en elastiekjes. Daarbij treedt een merkwaardig evenwicht van krachten op en wel alleen inwendige in de vorm van trek en druk.

Wat is het verschil daartussen?

Een touwtje kan alleen op trek belast worden, daar biedt het weerstand tegen; als je het probeert in te drukken, valt het slap.

Een stapel damstenen heeft juist de omgekeerde eigenschap: zoiets kun je alleen op druk belasten; als je eraan zou trekken, komen de stenen gewoon los van elkaar en de stapel biedt geen weerstand.

Nu is het bij bouwwerken vaak zo dat bijvoorbeeld balken tegelijkertijd aan druk en aan trek onderhevig zijn, zoals bij buiging.

We willen nu veelvlakken maken op deze basis: de afzonderlijke elementen worden óf uitsluitend op trek óf op druk belast. Zulke noemen we: spanningsbollen.

Er zijn ook moderne constructies die op dit principe zijn uitgevoerd, zoals de in de vorige jaargang besproken toren van Snelson. Daar werden stalen buizen op druk en staalkabels op trek belast.

Het blijkt niet moeilijk veelvlakken op dit beginsel te maken; het blijkt zelfs een 'spannende' bezigheid te zijn.

Het trek-drukachtvlak

In fig. 1a is het regelmatig achthoekig vlak getekend; alle ribben zijn even lang. We gaan dit lichaam opbouwen op basis van de drie lichaamsdiagonalen (AC , BD en PQ) en de twaalf ribben.

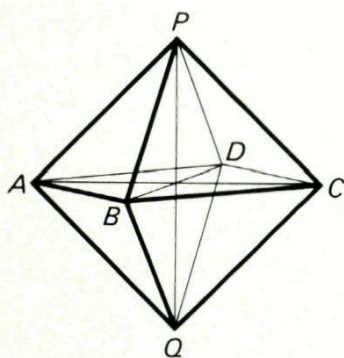


Fig. 1a. Achthoekig vlak.

Voor de diagonalen nemen we voldoende stugge ijzerdraden, die op druk belast gaan worden en daarbij niet mogen knikken.

Voor de ribben kiezen we doorlopende elastiekjes.

Een moeilijkheid daarbij is hoe we in de hoekpunten de elastiekjes aan de ijzerdraden moeten bevestigen.

We maken daartoe 'eindstukjes' van korte stokjes, in dit geval zes stuks.

Neem daarvoor een houten stokje en snij het rond tot bijv. 6 mm diameter. Zaag daarvan stukjes van 15 mm lengte.

Boor aan een kant met een klein boortje, op de maat van het ijzerdraad, tot halverwege een gaatje.

Aan de andere kant zaag je twee gleufjes van een paar mm diep, loodrecht op elkaar. Daar gaan straks de elastiekjes doorlopen.

Samenstelling van het achthoekig vlak

Knip of zaag nu twee stukken ijzerdraad van bijv. 20 cm lengte en zet daarop telkens twee eindstukjes (fig. 1b).

Leg de staafjes vervolgens zo dat ze elkaars middelloodlijnen worden.

Span dan om de vier einden een elastiekje.

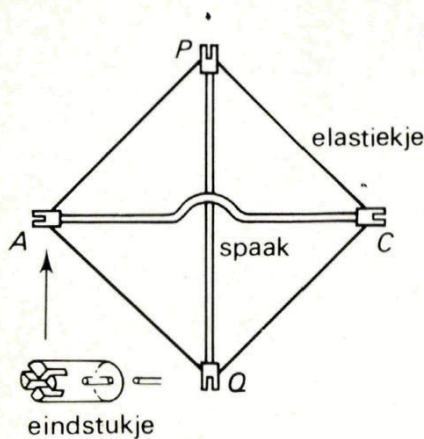


Fig. 1b. Vierhoek.

Het zal dan wel gemakkelijk lukken om met behulp van de derde diagonaal en nog twee eindblokjes en twee elastiekjes het complete achthoek af te bouwen.

De ribben worden nu op trek en de diagonalen op druk belast.

Merk op dat het voor de hechtheid van de constructie van geen belang is dat de drie diagonalen in het centrum met elkaar verbonden zijn. Het zou daarom fraai zijn als we daar in het midden elk vermoeden van verbinding zouden wegnemen.

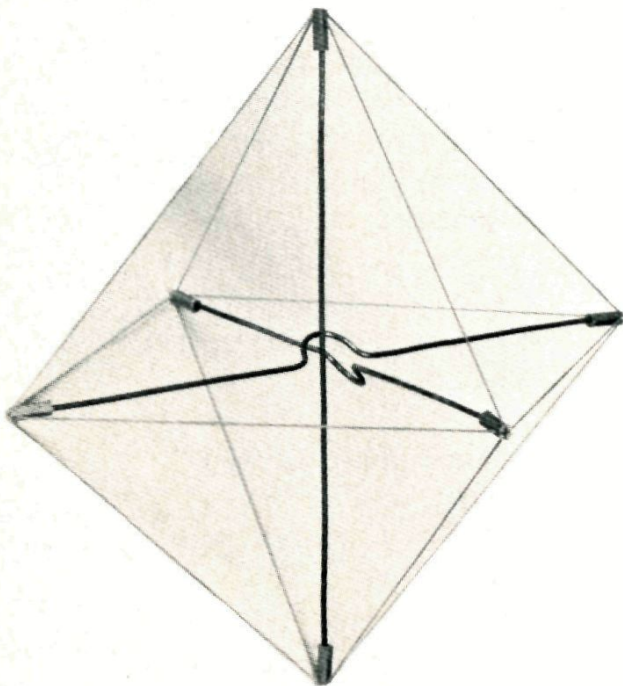


Fig. 1c.

Daartoe zetten we twee van de drie diagonalen halverwege met een halve cirkel om, zodat ze elkaar daar met een boogje omzeilen. Dat is een erg aardig gezicht. De zaak hangt in het midden dan duidelijk los. Het resultaat staat in fig. 1c.

Er is een fraai evenwicht van krachten. Alle staven zijn gelijk in druk belast en in alle elastiekdelen is de trek gelijk.

Nieuwe ontwerpen

Na deze eerste oefening gaan we nu iets moeilijkers maken.

Het vorige veelvlak bestond uit drie staafjes, zes eindblokjes en drie elastiekjes.

We bouwen nu iets met zes staafjes, twaalf eindblokjes en vier elastiekjes. Het wordt een veertienvlak, bestaande uit zes vierkanten en acht driehoeken (fig. 2a). Alle ribben worden weer even lang. Het veelvlak heet halfregelmatig.

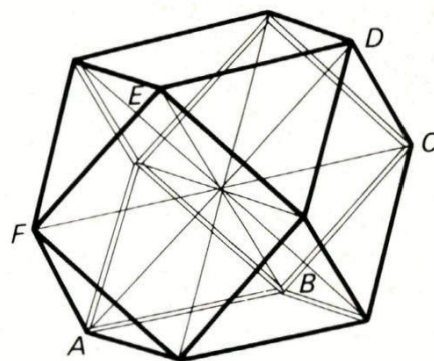


Fig. 2a. Veertienvlak.

We starten hier met een regelmatige zeshoek, te maken van drie staafjes als diagonalen en één elastiekje (fig. 2b).

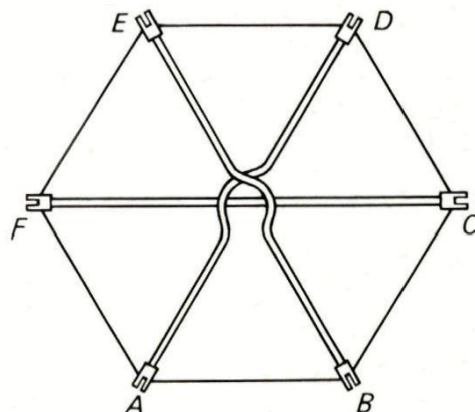


Fig. 2b. Zeshoek.

Maak daarbij één diagonaal doorlopend en voorzie de beide andere van een pas-seerboog.

Span dan een elastiekje om de drie staafjes.

Door twee diagonalen toe te voegen, kan daarna een volgende zeshoek geformeerd worden over een van de vorige diagonalen heen. De beide zeshoeksvlakken komen daarbij ten slotte onder 60° te staan.

Door de laatste diagonaal toe te voegen en nog twee elastiekjes bij te spannen, wordt het veelvlak voltooid (fig. 2c).

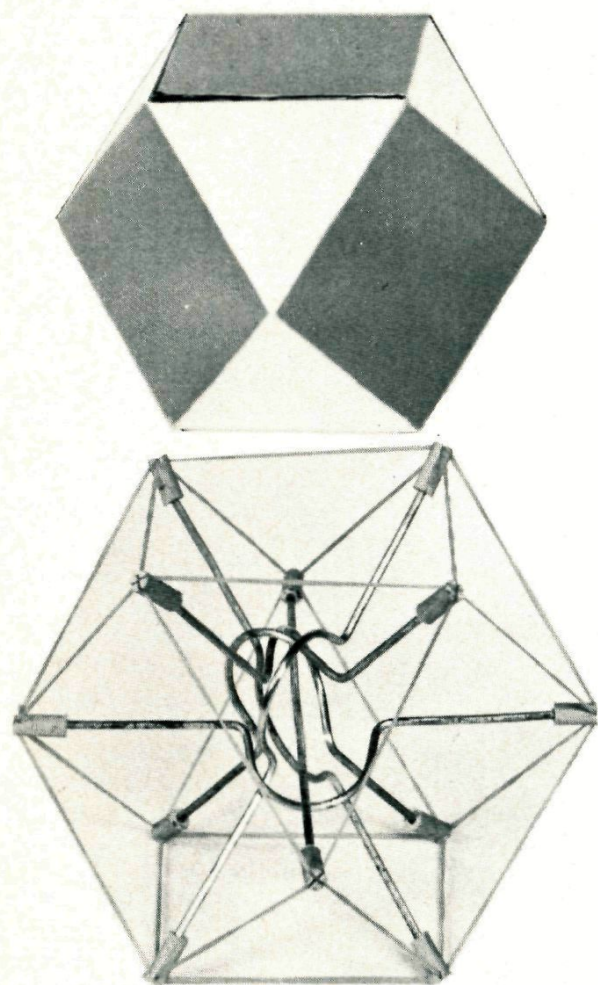


Fig. 2c.

Vijfhoeken en driehoeken

Door uit te gaan van vijf staafjes kan op soortgelijke wijze een regelmatige tienhoek gespannen worden (fig. 3b). Door dat dan weer verder uit te breiden, ontstaat het lichaam van fig. 3a, bestaande uit vijfhoeken en driehoeken.

Voor de realisatie zijn hier vijftien staafjes, dertig eindstukjes en zes elastiekjes nodig. Kijk maar of je dat nog klaar krijgt (fig. 3c).

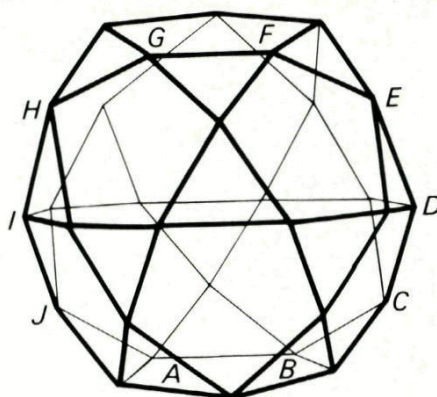


Fig. 3a. Tweeëndertigvlak.

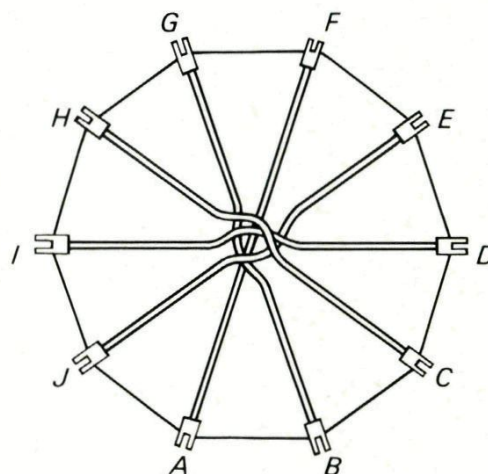


Fig. 3b. Tienhoek.

Eigenschappen van trek-drukveelvlakken

Je zou je kunnen afvragen of elk regelmatig of halfregelmatig veelvlak (met alle ribben even lang) op deze manier te maken is.

Nu, bij een kubus lukt het bijvoorbeeld al niet. Waarom eigenlijk niet? Welke eisen en voorwaarden moeten er dan aan zo'n structuur gesteld worden? We kunnen het best teruggaan naar de opgedane ervaringen.

Bij elk hoekpunt moeten vier ribben bijeen komen; in ieder geval moet het aantal hoekpunten even zijn; telkens twee hoekpunten moeten eindpunten zijn van een

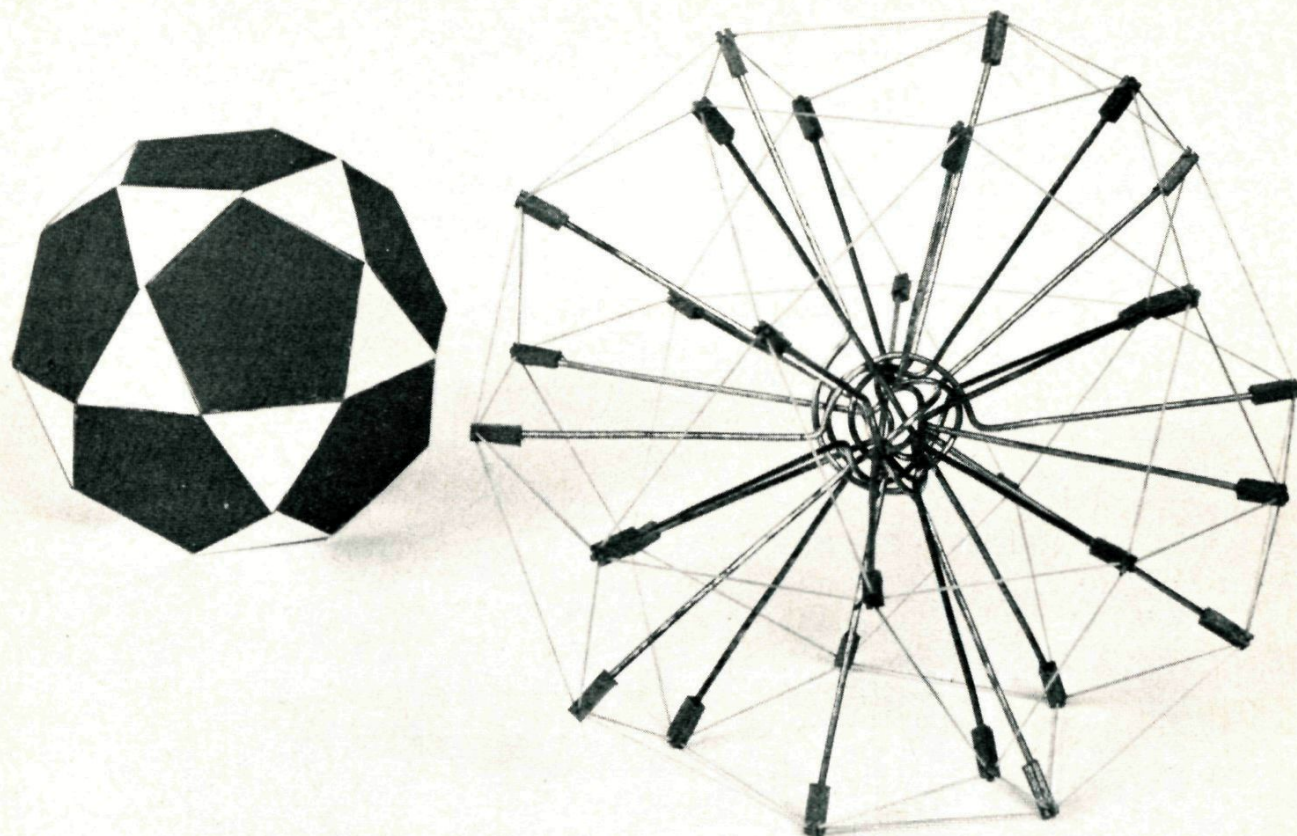


Fig. 3c.

lichaamsdiagonaal door het middelpunt. Verder moeten de hoekpunten te rangschikken zijn in groepen die telkens een regelmatige veelhoek kunnen vormen en waarvan het vlak dan weer door het middelpunt gaat.

En dan nog een mechanische eis: het veelvlak is uitsluitend in evenwicht onder invloed van trek- en drukkrachten.

En aan zoveel verlangens voldoet de kubus niet en het regelmatig viervlak ook niet.

Na enig speuren kwamen we erachter dat alleen de reeds genoemde te realiseren zijn.

Een laatste variatie

We willen toch nog een poging ondernemen om een veelvlak op te bouwen met diagonalen die niet door het middelpunt gaan.

We kiezen hiervoor het vierentwintigvlak uit fig. 4a, bestaande uit acht driehoeken en achttien vierkanten. Daarvoor blijken nodig: zes elastiekjes, twaalf diagonalen en vierentwintig eindstukjes.

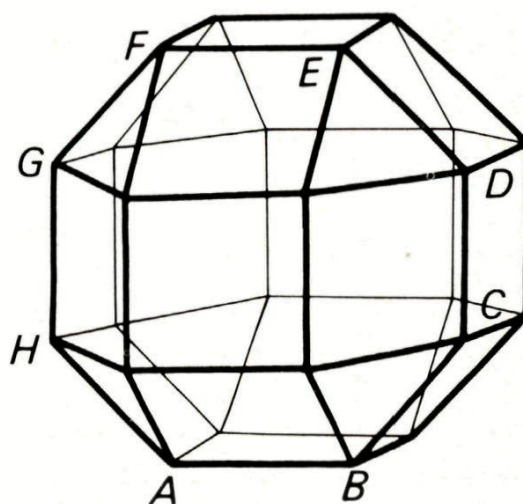


Fig. 4a. Zesentwintigvlak.

De opbouw begint met de regelmatige achthoek (fig. 4b) op basis van vier diagonalen.

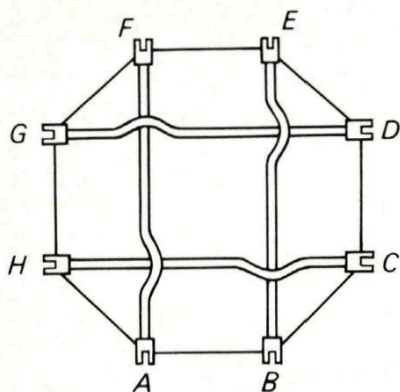


Fig. 4b. Achthoek.

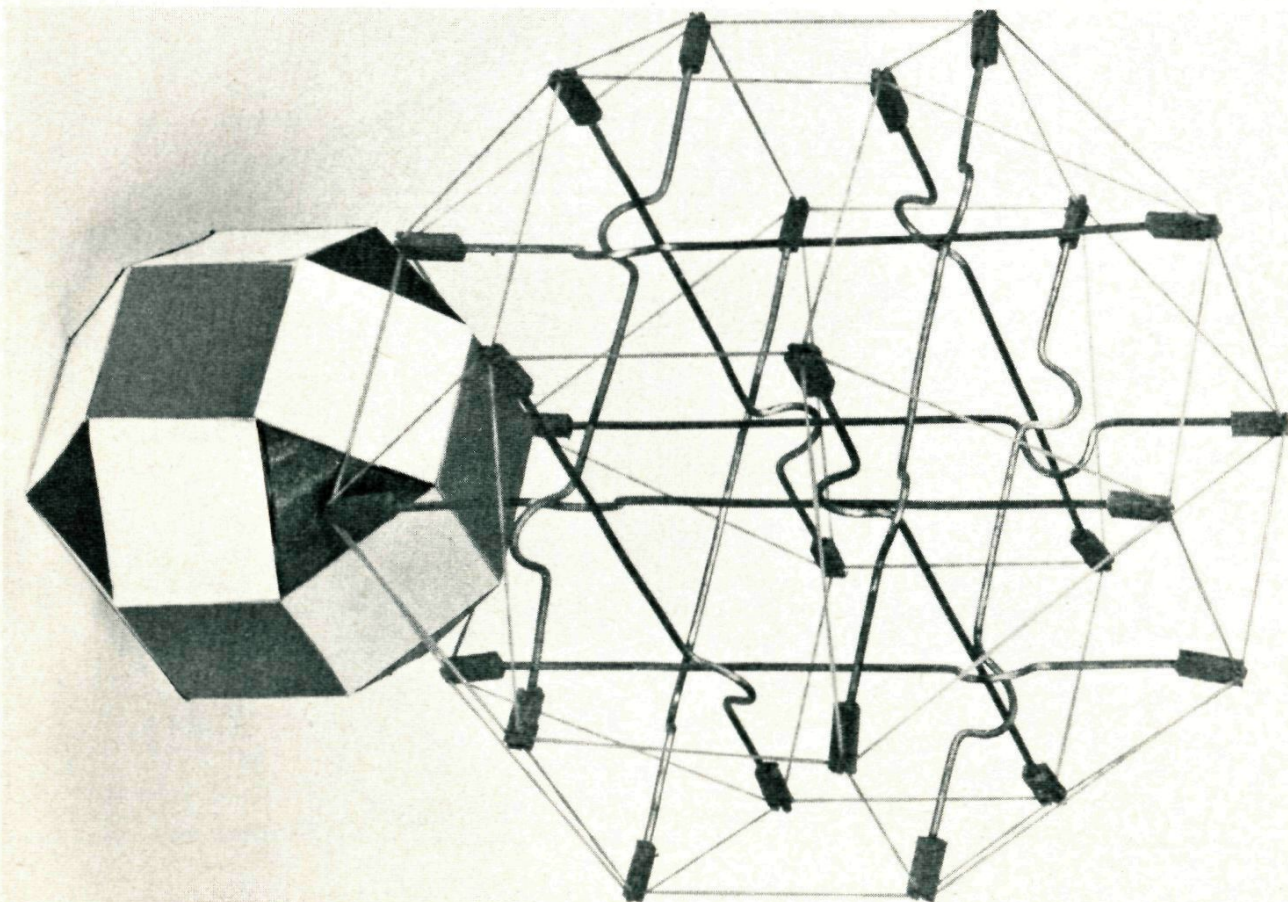
Wie wil kan met behulp van fig. 4c gemakkelijk verder bouwen.

Maar het wordt geen echt trek-drukveelvlak! Waarom niet?

Wie wat verstand heeft van evenwichten van krachten zal begrijpen dat bij de hoekpunten niet uitsluitend door middel van trek- en drukkrachten evenwicht kan optreden. Daar zijn bovendien nog wrijvingskrachten voor nodig. Bovendien worden daardoor de spankrachten in de acht delen van zo'n elastiekje niet meer gelijk, waardoor de staafjes ook gemakkelijk de neiging hebben in de hoekpunten te gaan schuiven.

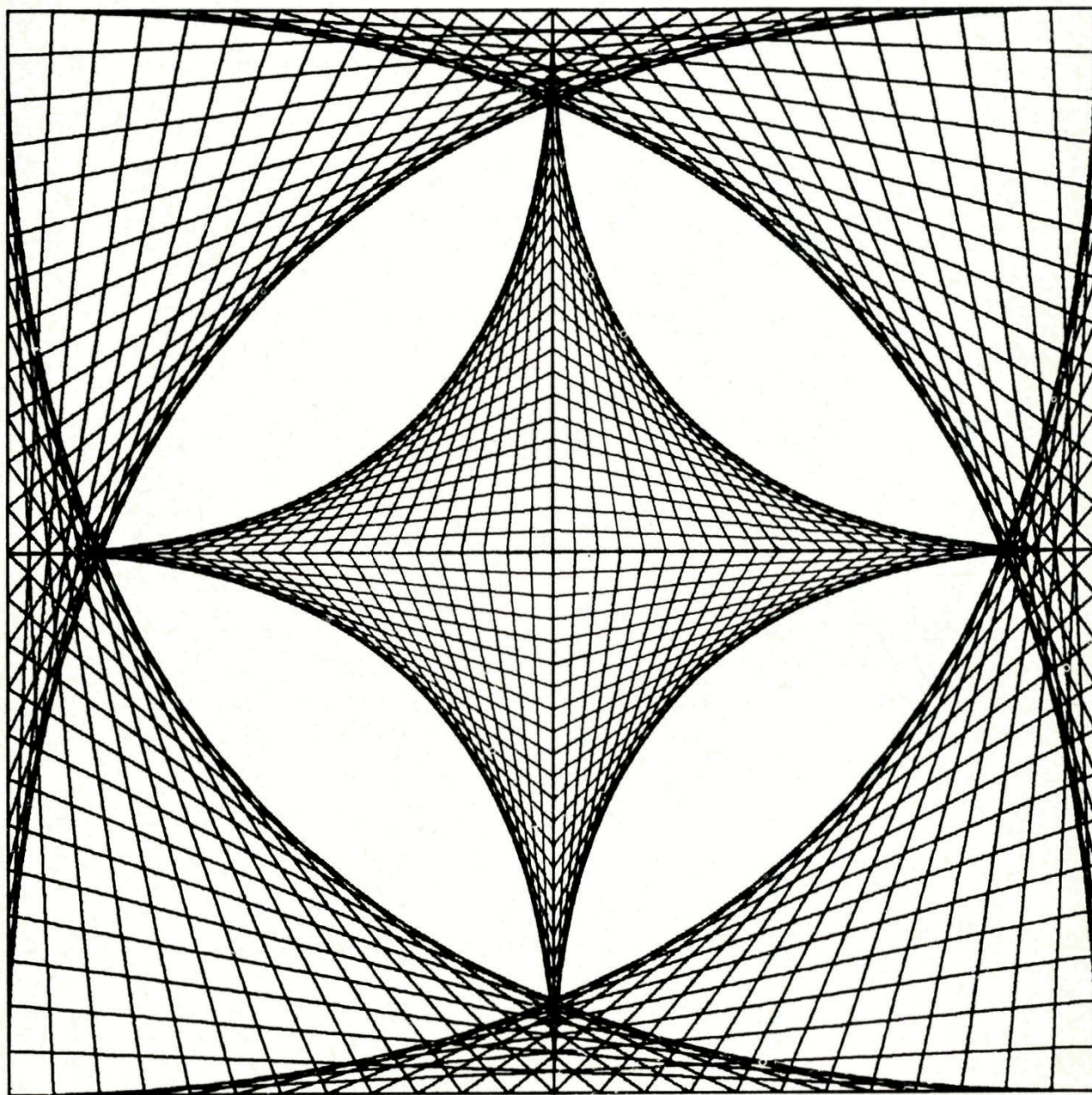
Bij de vorige drie ontwerpen maakten de diagonalen bij een hoekpunt steeds gelijke hoeken met de beide ribben aldaar. Daarom waren daar ook geen extra wrijvingskrachten nodig om het evenwicht te garanderen.

Fig. 4c.



°°° Nederlandse Wiskunde Olympiade 1977

Op vrijdag 1 april wordt de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1977 gehouden. Deze ronde wordt op de scholen georganiseerd, en deelname staat open voor alle leerlingen van de klassen 4 en 5 VWO met belangstelling voor wiskunde. Tussen 14.00 uur en 17.00 uur kunnen zij proberen de oplossing te vinden van een flink aantal opgaven, variërend van vrij gemakkelijk tot tamelijk moeilijk. Op elke opgave is slechts één kort antwoord mogelijk. Aan de hand van een correctiemodel bepaalt de leraar na afloop de behaalde puntenaantallen.

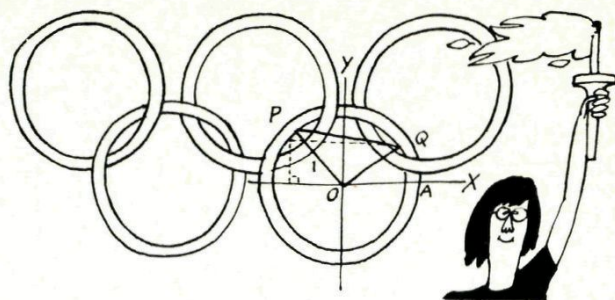


Computertekening. Vormen de omhullende krommen cirkelbogen?

Hij stuurt een lijstje hiervan op naar de organisatoren. Deze selecteren de leerlingen met de hoogste puntenaantallen, vragen hun werk ter controle op, en nodigen hen uit voor deelname aan de *tweede ronde*, tevens finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, te houden op 2 september in Utrecht. Afhankelijk van het aantal deelnemers aan de eerste ronde, en de beschikbare financiële middelen zullen hiervoor zestig of meer leerlingen uitgenodigd worden. De opgaven voor de tweede ronde zullen moeilijker zijn dan die voor de eerste ronde. Bovendien wordt dan niet alleen het antwoord, maar ook een correcte afleiding van het resultaat gevraagd. De beste tien van de tweede ronde ontvangen een prijs.

De Internationale Wiskunde Olympiade

Uit de beste tien à vijftien deelnemers aan de tweede ronde worden acht leerlingen geselecteerd om uitgezonden te worden naar de Internationale Wiskunde Olympiade die elk jaar in de zomervakantie georganiseerd wordt. Deze Olympiade neemt ongeveer tien dagen in beslag: twee ochtenden (zeer moeilijke) opgaven maken, en daarna excursies, ontvangsten, etc. Intussen wordt het werk gecorrigeerd door een internationale jury. Ten slotte is er een plechtige prijsuitreiking.



De selectie van de acht leden van de Nederlandse ploeg geschiedt op grond van de resultaten behaald in de eerste en tweede ronde van de Nederlandse Olympiade, en ook aan de hand van de reacties op de 'lesbrieven', die de beste tien à vijftien finalisten als 'training' voor de Internationale Olympiade worden toegezonden.

De organisatie van de Nederlandse Wiskunde Olympiade en uitzending naar de Internationale Wiskunde Olympiade is voor 1977 mogelijk dank zij subsidies van het Prins Bernhard Fonds, het Wiskundig Genootschap, de Ned. Vereniging van Wiskundeleraren, de uitgeverijen Wolters-Noordhoff en Educaboek en van Philips, Shell en IBM.

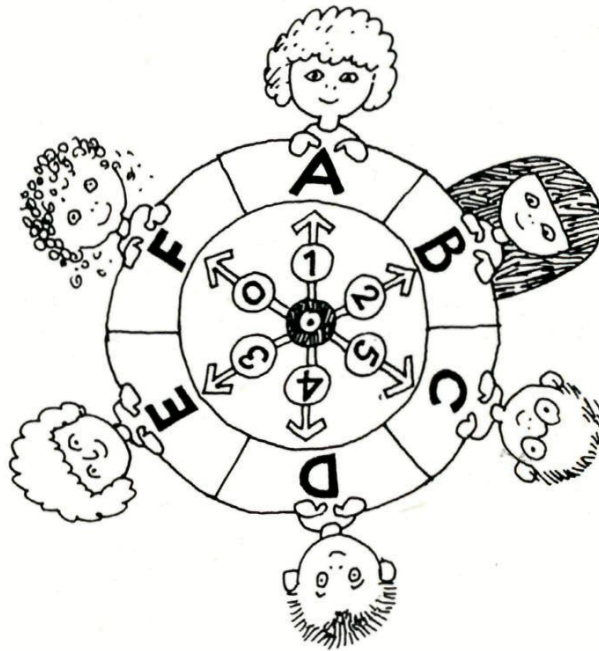
Ten slotte als voorproefje een paar opgaven van vroegere Olympiades als denker-tjes 1 t/m 5.



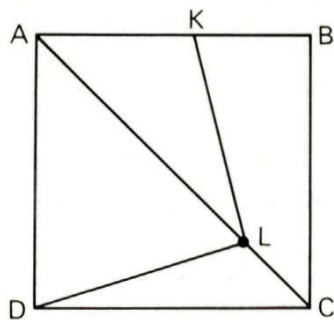
Denkertjes

1. (1e ronde Ned. W.O. 1975) A en B ontmoeten elkaar in de trein op 1 januari 1975. Het gesprek kwam op hun beider leeftijd.
A zei: 'De som van de cijfers van mijn geboortjaar is gelijk aan mijn leeftijd.' Na enig nadenken stond B toen op en feliciteerde A met zijn verjaardag. Hij kon hem bovendien zijn geboortjaar noemen. Jij ook?
2. (1e ronde Ned. W.O. 1976) Bepaal alle natuurlijke getallen van twee cijfers die gelijk zijn aan de som van het kwadraat van het eerste cijfer en de derde macht van het tweede cijfer.
3. (2e ronde Ned. W.O. 1976) Bewijs dat geen van de getallen van de vorm $8n + 7$ ($n \in \mathbb{N}$) geschreven kan worden als de som van 3 kwadraten van gehele getallen.

4. (2e ronde Ned. W.O. 1976) Op hoeveel manieren kan de koning in het schaakspel vanuit zijn oorspronkelijke veld op de eerste rij in zeven zetten de achtste rij bereiken?
5. (Intern. W.O. 1976) Bepaal (met een bewijs) de grootste waarde van het produkt van positieve gehele getallen waarvan de som gelijk is aan 1976.
6. De zes deelnemers A, B, C, D, E, F zitten rond een roulette, die vijf keer gedraaid wordt. Ieder krijgt zoveel punten als het nummer 0, 1, 2, 3, 4, 5 aangeeft dat bij zijn sector terechtkomt (stoppen de pijlen bij de deelstrepen, dan wordt de draai herhaald). De grootste som wint. Van de eerste draai is het resultaat afgebeeld. Hier heeft toevallig C het nummer 5. Bij de tweede draai krijgt D het nummer 5. Op het eind, na de vijfde draai, blijkt A winnaar te zijn. Hoeveel punten heeft elk dan behaald?



7. $ABCD$ is een vierkant, K het middelpunt van zijde AB , L verdeelt de diagonaal AC in de verhouding $AL : LC = 3 : 1$.
Bewijs dat DLK een rechte hoek is.



°°Wiskunde in de knoop 2

We hebben ons in nummer 3 de vraag gesteld wat we onder een knoop zullen verstaan. Natuurlijk gebruiken we allemaal het begrip knoop: de eindjes aan elkaar knopen (fig. 1) of een knoop in je zakdoek (fig. 2) of een achtje in de fokkeschoot (fig. 3).

Verder vroegen we ons af wanneer we knopen gelijk zullen noemen en wanneer niet. Is de zakdoekknoop van fig. 2 gelijk aan het achtje van fig. 3? We zouden daar

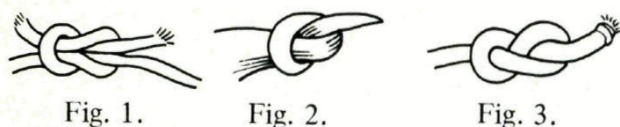


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

‘ja’ op zeggen, als we de ene knoop konden omvormen tot de andere zonder hem los te maken. Om nu het losmaken te voorkomen, zullen we losse eindjes niet toestaan en alleen knopen bestuderen in een gesloten koord. Dat wil zeggen: de platte knoop, de zakdoekknoop en het achtje alleen zoals in de figuren 4, 5 en 6.



Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

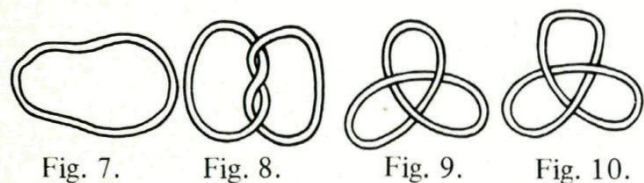


Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Een gesloten koord als in fig. 7 zullen we geen knoop noemen.

Verskillende typen

Zelfs bij de eenvoudige knopen die hier getekend zijn, is het moeilijk aan de plaatjes te zien of we knopen als gelijk kunnen beschouwen. Als je de knoop van fig. 8 met een koordje namaakt, blijkt dat je hem neer kunt leggen als de zakdoek-

knoop van fig. 5 en als de trifolio (klavertjedrie) van fig. 9. De trifolio van fig. 10 daarentegen, blijkt op geen enkele manier precies gelijk te krijgen aan die van fig. 9, gelet op de drie kruisingen. Toch zijn het allebei klavertjesdrie, maar dan elkaars spiegelbeeld. We zullen de knopen van de figuren 5, 8, 9 en 10 *van hetzelfde type* noemen.

Nu is het natuurlijk de kunst om regels te vinden waaruit we kunnen besluiten wanneer knopen van hetzelfde type zijn. We hebben in het voorgaande al even op de kruisingen gewezen. Letten we nu in het bijzonder op hun aantal, dan zien we de overeenkomst tussen de figuren 8, 9 en 10: drie kruisingen. Maar ook fig. 11 heeft drie kruisingen en is niet eens een echte knoop, dus zeker niet van het type trifolio.

Het koord van fig. 11 is immers uit te draaien tot het koord van fig. 7!

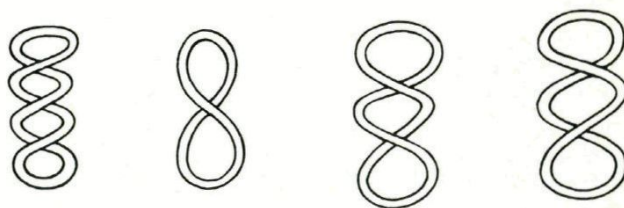


Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

We moeten orde op zaken stellen door af te spreken dat we alleen knopen zullen bekijken die in een eenvoudigste vorm, d.w.z. met zo weinig mogelijk kruisingen, zijn neergelegd. Fig. 11 is vanaf nu verboden. Maar ook de figuren 12, 13 en 14. Waaruit volgt dat er geen knopen zijn met minder dan drie kruisingen.

Kruisingen

Zoals al eerder gezegd: knopen die elkaars spiegelbeeld zijn, zullen we tot hetzelfde type rekenen. Om te kunnen besluiten of twee knopen van een zeker type elkaars spiegelbeeld zijn, leggen we de kruisingen nader vast. We nemen in de knoop een omlooprichting aan (zie de pijltjes in fig. 15). We noemen de kruising positief als we de bovenligger met een wiskundig positieve draaiing (linksom) gelijkgericht kunnen krijgen met de onderligger, zie fig. 16. Fig. 17 daarentegen geeft een negatieve kruising weer. Ga na, dat deze afspraak onafhankelijk is van de omlooprichting of van welke kant je tegen de kruising aankijkt.

Met andere woorden: een plus-kruising blijft een plus-kruising, ook als je alle pijltjes in de knoop omkeert of als je van de achterkant tegen de kruising aankijkt.



Fig. 15.



Fig. 16.



Fig. 17.

Loop je de knoop van fig. 15 gedeeltelijk langs, dan passeer je de drie kruisingen in een zekere volgorde. Ze zijn alle positief en we noteren $+++$. De trifolio van fig. 10 blijkt als $---$ genoteerd te moeten wor-



3a Trifolio.
Hier afgebeeld de rechtse versie van deze torusknoop.



5a

6a. Amphicheiraal.



6b



6c

den: het spiegelbeeld. Een knoop met vier kruisingen is het achtje van fig. 6, die we kunnen weergeven door $++$. Beginnen we echter twee kruisingen verder langs de knoop te lopen, dan zouden we noteren $++--$, waardoor we vermoeden dat de knoop zijn eigen spiegelbeeld is. Wel, dat klopt. Probeer het maar eens met een touwtje. Na enig omleggen en doorhalen blijkt de knoop in zijn spiegelbeeld veranderd.

Een knoop die om te vormen is tot zijn spiegelbeeld heet 'amphicheiraal', wat betekent 'past elke hand', zoals een rubber handschoen door binnenste buiten trekken van een linker in een rechter handschoen overgaat, of omgekeerd.

De notatie met plussen en minnen heeft ons nu wel geleid tot de ontdekking van het amphicheiraal zijn, verder deugt ze nauwelijks. Er blijken niet alleen bij één knoop verschillende notaties mogelijk, soms zijn bij één notatie ook knopen van verschillende typen mogelijk (bijvoorbeeld $---+++$ bij 6a en 6d in fig. 18).

Overzicht

We geven nu een overzicht van alle knooptypen tot en met zeven kruisingen (fig. 18).



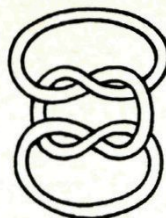
4a Achtje. Amphicheiraal.



5b. Afgebeeld:
de rechtse torusknoop.



6d. Platte knoop (samenstelling) Amphicheiraal.



6e. Oud wijf (samenstelling).

7a. (samenstelling).



7b.



7c.



7d.



7e.



7f.



7g. Turkse knoop.



7h. Afgebeeld: linkse torusknoop.

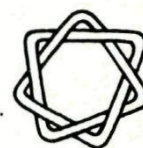
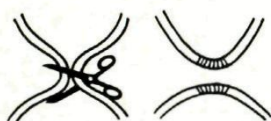


Fig. 18.

De knopen 6d, 6e en 7a zijn zo uiteen te trekken dat er een dubbele baan ontstaat die men volgens fig. 19 gesneden en aaneengehecht kan denken, waardoor de knoop uiteenvalt in twee ongeketende knopen van een eenvoudiger type. Knopen waarbij dit mogelijk is heten *samengesteld*. Zo is knoop 7a samengesteld (fig. 20) uit een trifolio en een achtje. Knopen 6d en 6e beide uit twee trifolia. Niet samengestelde knopen heten *priemknopen*.

Fig. 19.



Alle knopen in het overzicht van fig. 18, behalve 6d, zijn zo neergelegd dat onderdoorgangen en bovenkruisingen elkaar afwisselen bij het doorlopen van de knoop. Een knooptype waarbij dit mogelijk is, heet *alternerend*. Van de eenentwintig priemtypen met acht kruisingen blijken er drie niet alternerend te zijn, van de negen- en veertig met negen kruisingen blijken er acht niet alternerend.

Fig. 20.



Fig. 21.

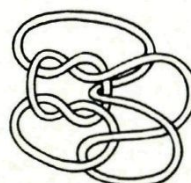


De knopen 3a, 5b en 7b kunnen ontstaan gedacht worden uit een linkse of rechtse schroefdraad op een torus (ringvormig lichaam). Bijvoorbeeld fig. 21 voor fig. 5b. Vandaar de aanduiding (linkse of rechtse) torusknoop.

De wiskunde in de knoop

Tot nu toe zul je waarschijnlijk weinig wiskunde ontdekt hebben in het verhaal. Mochten we het wel 'wiskunde in de knoop' noemen? Het begon er een beetje op te lijken toen we probeerden een notatie te vinden voor een knoop. Toch zit de wiskunde ook figuurlijk 'in de knoop'. Want er is nog geen notatie of zelfs methode gevonden waarbij het blijkt tot welk type een zekere knoop behoort.

Fig. 22.



Verder heeft men nog geen formule gevonden waarmee het aantal priemtypen berekend kan worden met n kruisingen. Zo vermoedt men dat het aantal met tien kruisingen 167 bedraagt, maar zeker is dat niet. Hierin moet de wiskundewetenschap nog veel werk verzetten, voordat de laatste knoop is doorgehakt.

Een minder zwaarwichtige opmerking tot slot. Fig. 22 toont een platte knoop met nog een extra slinger aan de rechterkant. In goochelaarskringen staat hij bekend als Chefalo-knoop. Ten onrechte zouden wij zeggen, want het is helemaal geen knoop. Probeer het maar eens.



Denkertjes

8. Laat proefondervindelijk zien, dat een platte knoop alternerend is.
9. Bewijs dat er geen torusknoop is met een even aantal kruisingen.
10. Hoeveel kruisingen passeer je als je een knoop met n kruisingen precies één keer doorloopt?

Van knoop naar lampekup

De sierlijke lampekup, die op de omslag van dit nummer gereproduceerd is, blijkt bij nadere beschouwing te bestaan uit een simpele knoop.

Neem een strook papier van 30 cm lang en 2,5 cm breed en leg er een knoop in zoals fig. 1 laat zien.

Plak de uiteinden A en B (zonder slag) aan elkaar en schuif zolang, tot de ruimtelijke figuur er van opzij uit ziet als fig. 2. De band kruist zichzelf op 3 plaatsen en als het materiaal doorzichtig is (de lampekup was van doorschijnend oranje plastic) zie je drie liggende ruiten op de omtrek. Elke ruit was met twee plastic-knoopjes (P en Q) vastgezet. De bovenste knopen P waren tevens de bevestigingsplaatsen van 3 spaakjes waaraan de kap aan het snoer van de lamp was opgehangen.

Als je zelf zo'n lamp wilt maken is het nuttig te weten, dat de breedte van de plastic-band 20 cm was. Het totaal effect is bijzonder sierlijk.

Wellicht zijn er van andere knopen ook mooie vormen voor lichttornamenten te maken.



Fig. 1.

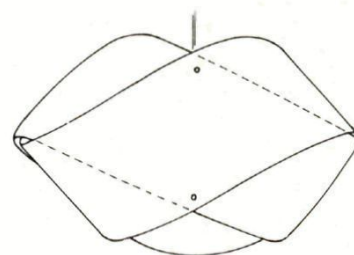


Fig. 2.



Fig. 3.

°° Getallenpuzzel op een boormachine

In de afgelopen zomervakantie was een van onze redacteurs met enkele leerlingen van de Nassauscholengemeenschap in Breda drie weken lang in Kfar Szold, een kibboets in Noord-Israël, vlak aan de Libanese grens. Er werd gewerkt in een fabriek van koelmachines en onze redacteur bracht een groot deel van de tijd door achter een boormachine. Het apparaat beschikte over negen verschillende toerentallen die met behulp van twee knoppen, elk in drie verschillende standen, konden worden ingesteld. Een bord boven aan de machine (fig. 1) gaf de toerentallen en de bijhorende knopstanden.

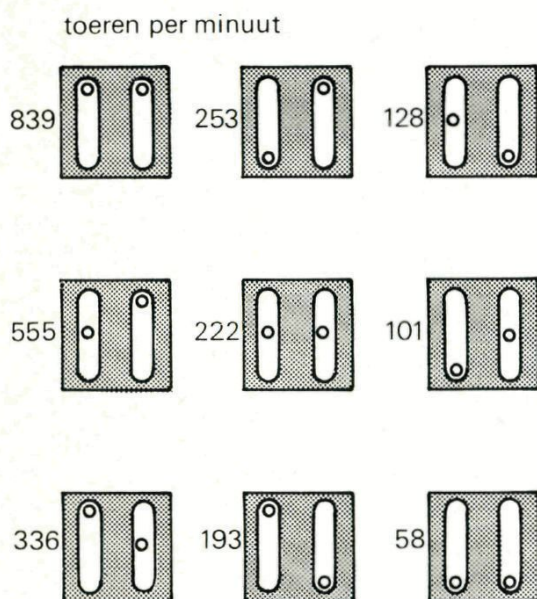


Fig. 1. Het toerentalbord van de boormachine.

Misschien was het door de verveling die van het eindeloze gaten boren uitging dat hij gefascineerd werd door de schijnbaar chaotische getallenverzameling. Zou het mogelijk zijn een analyse van de tandwielkast te maken, . . . zonder deze inwendig te kunnen observeren?

Verhoudingen

Op het eerste gezicht lijkt er in deze getallen weinig systeem te zitten. Behalve dat ze gerangschikt zijn in afdalende grootte. Dat is natuurlijk gedaan om gemakkelijk het gewenste toerental en de daarbij behorende stand van de knoppen te kunnen vinden.

We kunnen de getallen opnieuw rangschikken, nu naar de stand van de knop-

pen. Ook deze tabel (fig. 2) verkapt ons nog niets, althans niet direct. Maar zodra we de verhouding tussen de getallen in een kolom vergelijken met die in een andere kolom, blijkt de overeenkomst.

		Rechts		
Links	Hoog	839	336	193
	Midden	555	222	128
	Laag	253	101	58

Fig. 2.

De getallen in elke kolom verhouden zich ongeveer als 3,33 : 2,20 : 1. Waarom in deze verhoudingsgetallen (fig. 3) kleine

3,32	3,33	3,33
2,19	2,20	2,21
1	1	1

Fig 3

4,35	1,74	1
4,34	1,73	1
4,36	1,74	1

Fig. 4

verschillen voorkomen, laat zich gemakkelijk verklaren door de afronding op helen die op de gegeven toerentallen waarschijnlijk is toegepast. In de rijen zien we een dergelijk verschijnsel. Ook hier kleine verschillen, maar een te grote overeenkomst om toevallig te kunnen zijn (fig. 4).

Blijkbaar hebben we te maken met twee schakelkasten die onafhankelijk van elkaar te schakelen zijn, elk met drie standen.

Tandwielen

Als je twee tandwielen koppelt en het ene heeft in het rond vijftwintig tanden en het andere tien, dan krijgt het wiel met vijftwintig tanden een kleinere hoeksnelheid dan dat met tien. We zeggen: de hoeksnelheden van de beide wielen verhouden zich als 1 : 2,5. Als de tanden correct in elkaar moeten grijpen, zullen de tanden ook even groot moeten zijn. Een gevolg daarvan is dat de omtrekken van beide tandwielen ook een verhouding 2,5 : 1 moeten hebben. Tevens is dit dan ook de verhouding van hun stralen en diameters (fig. 5).

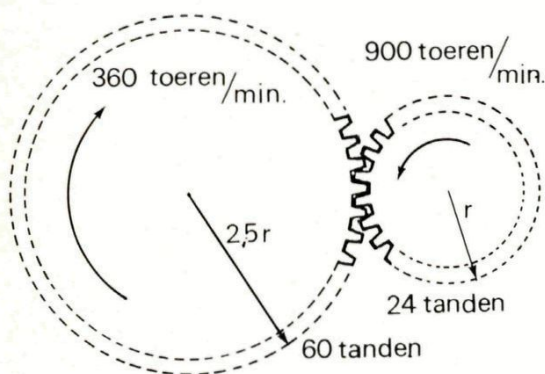


Fig. 5. Stralen verhouden zich als 2,5 : 1 en dus de toerentallen 1 : 2,5.

Algemeen geldt: als een tandwiel met een draaisnelheid f (omwentelingen per minuut) en a tanden een tandwiel met d tanden aandrijft, wordt de draaisnelheid hiervan $\frac{af}{d}$ omw./min

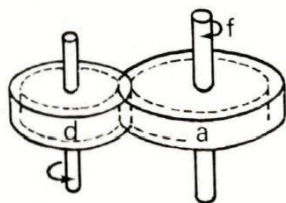


Fig. 6.

Opvallend hierbij is dat het resultaat niet verandert als a en d beide met een factor vermenigvuldigd worden.

Bij een schakelkast nu, willen we de draaisnelheid van de aandrijvende (ook wel primaire) as niet wijzigen, maar wel die van de andere (secundaire) as.

Men bevestigt andere tandwielen op dezelfde assen, met bijvoorbeeld tandaantallen b en e , en laat die met elkaar in aan-grijping komen. Het toerental van de secundaire as wijzigt hierdoor in $\frac{bf}{e}$.

We hebben nog niet verteld hoe deze wisseling van tandwielen plaatsvindt. Een eenvoudige oplossing bestaat uit een constructie waarbij de tandwielen op een van de assen kunnen verschuiven in de langs-richting van deze as, zonder echter vrij te kunnen draaien rond deze as. Je zou kunnen denken aan een as met een vierkante doorsnede. Men gebruikt in de praktijk meestal een groef in de langsrichting en tandwielen waarbij in de opening een 'tand' is uitgespaard (fig. 7).

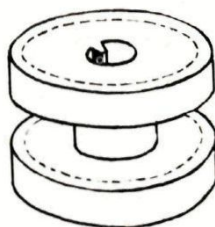


Fig. 7.

Voor een dergelijke constructie geldt de verrassende stelling:

$$a + d = b + e$$

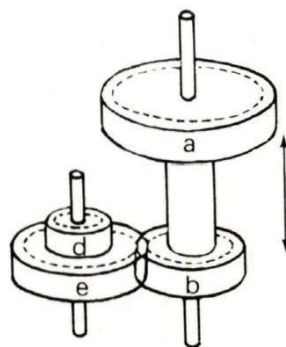
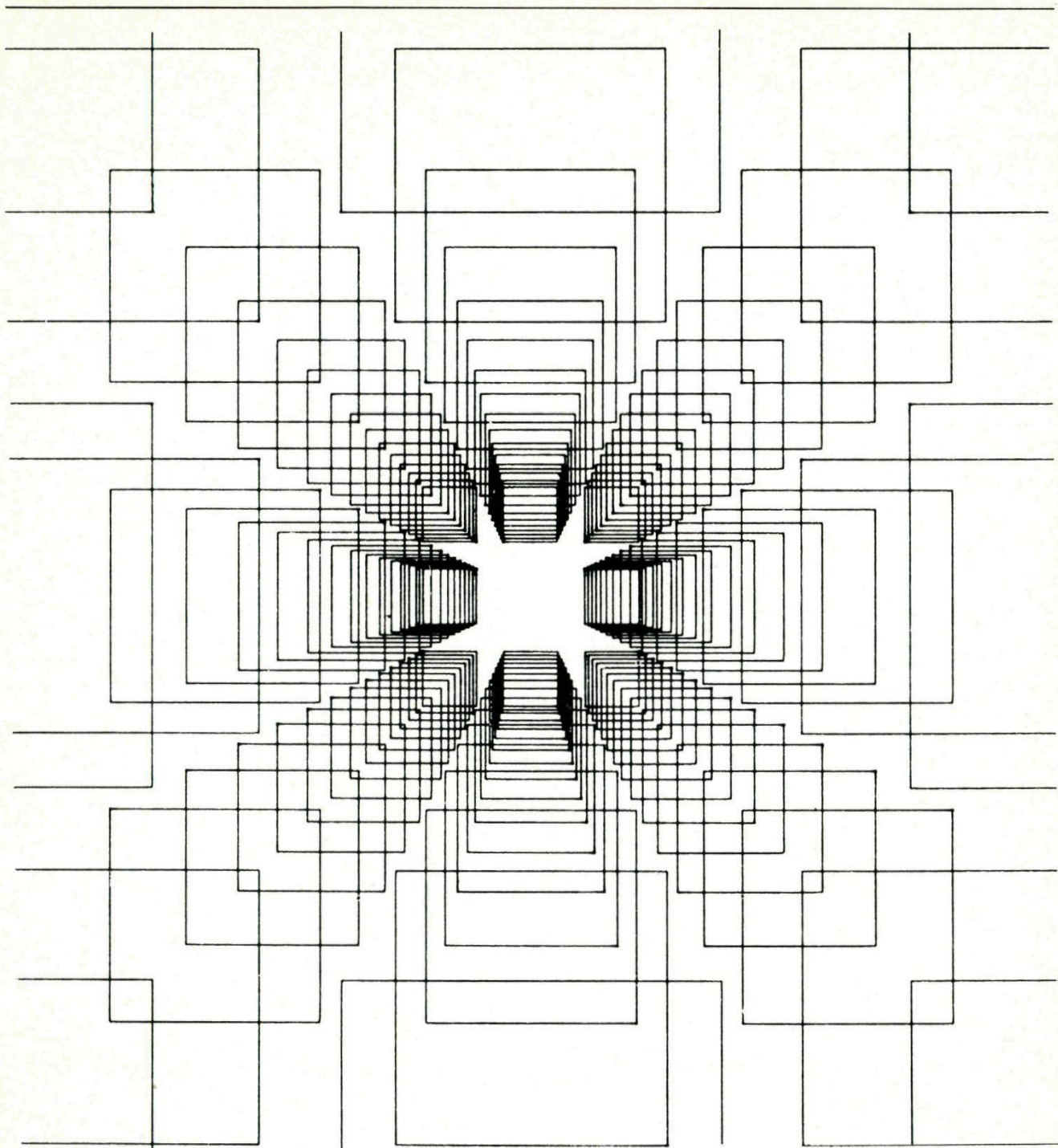


Fig. 8.



Steeds grotere vierkanten. Wat is de vergrotingsfactor? Zouden de vierkanten op de duur elkaar niet meer overlappen? Hoever van het middelpunt zou dit dan gebeuren?

Met andere woorden: bij de ene wielcombinatie zijn in het totaal evenveel tanden betrokken als bij de andere combinatie. Probeer het maar eens te bewijzen. Denk daarbij aan de gelijkblijvende afstand tussen de assen, zodat de som van de wielstralen gelijk blijft.

Vergelijkingen in tanden en toeren

Voordat we terugkeren tot onze boormachine bekijken we eerst een eenvoudiger probleem, gebaseerd op fig. 8. Neem aan dat de toerentallen aan de secundaire as gelijk zijn aan 300 respectievelijk 900 bij de twee standen van de tandwielen.

Dan geldt:

$$\frac{af}{d} = 900$$

$$\frac{bf}{e} = 300$$

$$a + d = b + e$$

Dit zijn drie vergelijkingen met vijf onbekenden. Misschien is je bekend dat die onbekenden daarmee niet elk tot één enkele waarde worden beperkt. Er is nog een ruime keuze in oplossingen. Het wegwerken (eliminieren) van e en f leidt tot één vergelijking:

$$a(a + d - b) = 3bd$$

Kiest men vrij een waarde voor a en b , dan volgt de waarde van d uit deze vergelijking.

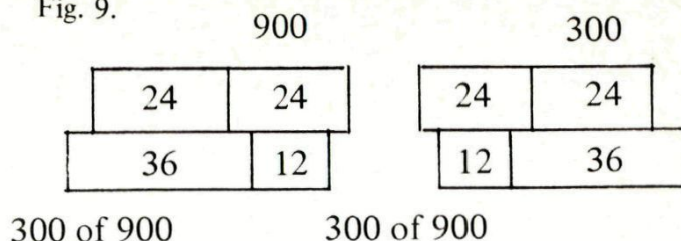
a	b	d	e	f
1	1	0	0	x
2	1	2	3	900
1	2	$-\frac{1}{5}$	$-1\frac{1}{5}$	?
3	1	x	x	x
3	2	1	2	300

(1)

(2)

Zo heel erg vrij in die keuze van a en b zijn we niet, blijkend uit bovenstaande tabel. Een tandwiel met 0, 1 of $-\frac{1}{5}$ tand is erg moeilijk voor te stellen. In de praktijk geldt zelfs een minimumaantal tanden van tien à twaalf. Al eerder hebben we gezien dat we alle aantallen tanden met eenzelfde factor mogen vermenigvuldigen. Zo kunnen we oplossingen (1) en (2) omvormen tot bruikbare tandwielen, schematisch weergegeven in fig. 9. Je ziet dat beide oplossingen iets symmetrisch hebben.

Fig. 9.



Nu de boormachine

In onze boormachine hebben we te maken met drie paren tandwielen per schakelkast. Schematisch weergegeven in fig. 10. Hierin komen twaalf tandwielen voor. De constructie kan aanzienlijk eenvoudiger door op de middelste as slechts drie tandwielen op te nemen en die voor beide schakelkasten te gebruiken. In fig. 11 is dat schematisch aangegeven, met daarin de aantallen tanden rekening houdend met de eerder ontdekte stelling.

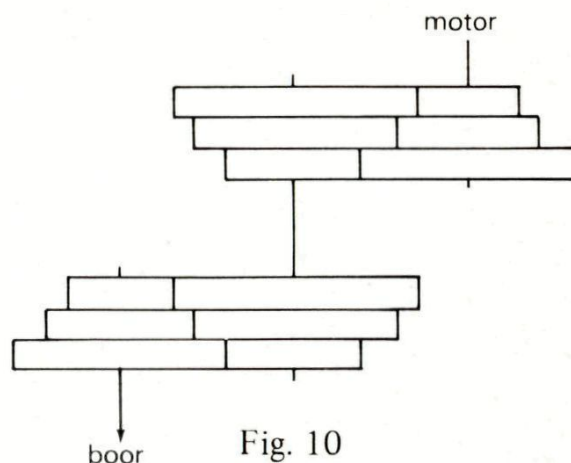


Fig. 10

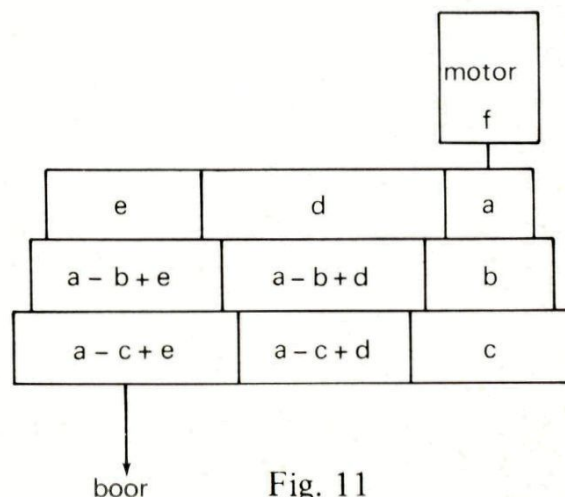


Fig. 11

Neem aan dat $a < b < c$, dan zal de overbrenging via tandwielen c en $(a - c + d)$ de grootste snelheid aan de secundaire as geven. Evenzo de overbrenging via d en e de grootste snelheid aan de tertiaire as met de boor. Daarom geldt:

$$\frac{c}{a - c + d} \cdot \frac{d}{e} \cdot f = 839$$

We moeten er rekening mee houden dat het getal 839 door afronding is verkregen, dus in werkelijkheid wel 838,53 of 839,416 kan zijn. We noteren $[\pm 0,5]$ om deze onnauwkeurigheid aan te geven. We komen zo bijvoorbeeld ook tot de volgende vergelijking (middelste tandwielen).

$$\frac{b}{a - b + d} \cdot \frac{a - b + d}{a - b + e} \cdot f = 222 [\pm 0,5]$$

Deze vorm is te vereenvoudigen tot

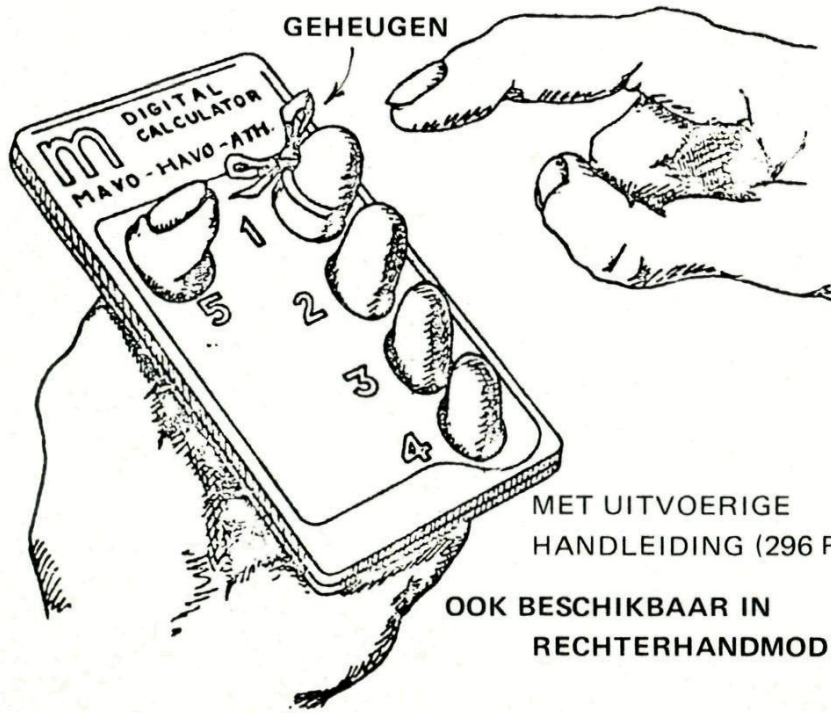
$$\frac{b}{a - b + e} \cdot f = 222 [\pm 0,5]$$

De negen schakelingen leveren aldus de volgende vergelijkingen:

- (1) $\frac{c}{a - c + d} \cdot f = 839 [\pm 0,5]$
- (2) $\frac{c}{a - c + d} \cdot \frac{a - b + d}{a - b + e} \cdot f = 555 [\pm 0,5]$
- (3) $\frac{c}{a - c + e} \cdot f = 253 [\pm 0,5]$
- (4) $\frac{b}{a - b + d} \cdot \frac{d}{e} \cdot f = 336 [\pm 0,5]$
- (5) $\frac{b}{a - b + e} \cdot f = 222 [\pm 0,5]$
- (6) $\frac{b}{a - b + d} \cdot \frac{a - c + d}{a - c + e} \cdot f = 101 [\pm 0,5]$
- (7) $\frac{a}{e} \cdot f = 193 [\pm 0,5]$
- (8) $\frac{a}{d} \cdot \frac{a - b + d}{a - b + e} \cdot f = 128 [\pm 0,5]$
- (9) $\frac{a}{d} \cdot \frac{a - c + d}{a - c + e} \cdot f = 58 [\pm 0,5]$

REKENMACHINE (ZAKFORMAAT)

GEHEUGEN



MET UITVOERIGE
HANDLEIDING (296 PAG.)

OOK BESCHIKBAAR IN
RECHTERHANDMODEL!

ADVERTENTIE

De zaak overziende treffen we in deze negen vergelijkingen maar zes onbekenden aan (a t.e.m. f). Dat lijkt het omgekeerde van ons eerdere voorbeeld, waarin meer onbekenden dan vergelijkingen waren. Moeten we hieruit concluderen dat er waarschijnlijk geen oplossing is? Is een negen-tandwielenschakelkast helemaal niet in staat om de gegeven toerentallen op te leveren? Zo erg is het nog niet. De negen vergelijkingen zijn niet onafhankelijk. Vergelijking (4) is te verkrijgen door de vergelijkingen (1) maal (6) te delen door (3). Vergelijking (4) kunnen we dus wegschrappen. Om dezelfde reden kunnen we (6), (8) en (9) wegschrappen. Het resultaat is nu vijf onafhankelijke vergelijkingen met zes onbekenden en dus waarschijnlijk weer een ruime keus in oplossingen. Er zijn natuurlijk wel beperkingen. De variabelen a t.e.m. e zullen slechts gehele waarden mogen aannemen en wel twaalf of groter. Verder zal de overbrengingsverhouding van twee in elkaar grijpende tandwielen niet 9 : 1 te boven gaan, om soepele aangrijping en redelijke krachten op de tanden te waarborgen.

De computer 'ingeschakeld'

De vergelijkingen lokken niet bepaald tot zelf uitrekenen. Gelukkig bestaan er machines om het saaie werk voor ons over te nemen. We gaven de computer de volgende opdrachten:

1. neem voor f waarden van 500 tot 1400;
2. neem voor a waarden van 12 tot 240;
3. bereken met vergelijking (7), met afronden, de waarde van e ;
4. bereken met (5), met afronden, de waarde van b ;

5. bereken met (3), met afronden, de waarde van c ;
6. bereken met (1), met afronden, de waarde van d ;
7. controleer met deze afgeronde waarden van a t.e.m. f alle vergelijkingen. Ga bij onjuistheden door met regel 10;
8. ga na of een van de tandverhoudingen boven 9 : 1 uitgaat. Zo ja, ga door met regel 10;
9. schrijf de waarde van a t.e.m. f ;
10. neem de volgende waarde van a , doorgaan met regel 3;
11. neem de volgende waarde van f , doorgaan met regel 2;
12. klaar.

Je ziet dat we hierbij hebben aangenomen dat het motortoerental 500 of meer is. Er verschenen enkele tientallen oplossingen op papier, waarvan we er hier één zullen weergeven (fig. 12).

Fig. 13 geeft weer, hoe we ons deze schakelkast ingericht kunnen denken. We gaan nog even na of ons bord met de negen toerentallen klopt. De verkregen waarden, ingevuld in de linkerleden van de vergelijkingen, geven de volgende resultaten:

838,95 554,89 253,01 335,70 222,03
101,24 192,88 127,57 58,17

Na afronding klopt dat allemaal. Iedereen dus gelukkig?

Om de waarheid te zeggen, de schrijvers van dit artikel nog niet helemaal. In twee standen van de knoppen werkt de schakeling als versnellingsbak. Dan is dus de omwentelingssnelheid van de boor groter dan die van de motor. En dat is nogal onge-

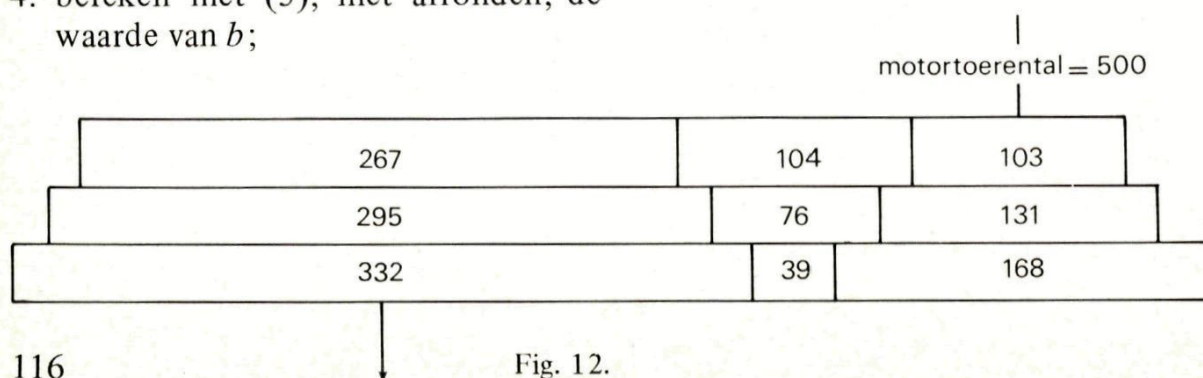


Fig. 12.

bruikbaar. Ook tegen andere oplossingen door de computer geleverd gold dit bezwaar.

Als een van de lezers van *Pythagoras* nog eens in Kfar Szold komt, wil die eens kijken hoe het zit met die boormachine?

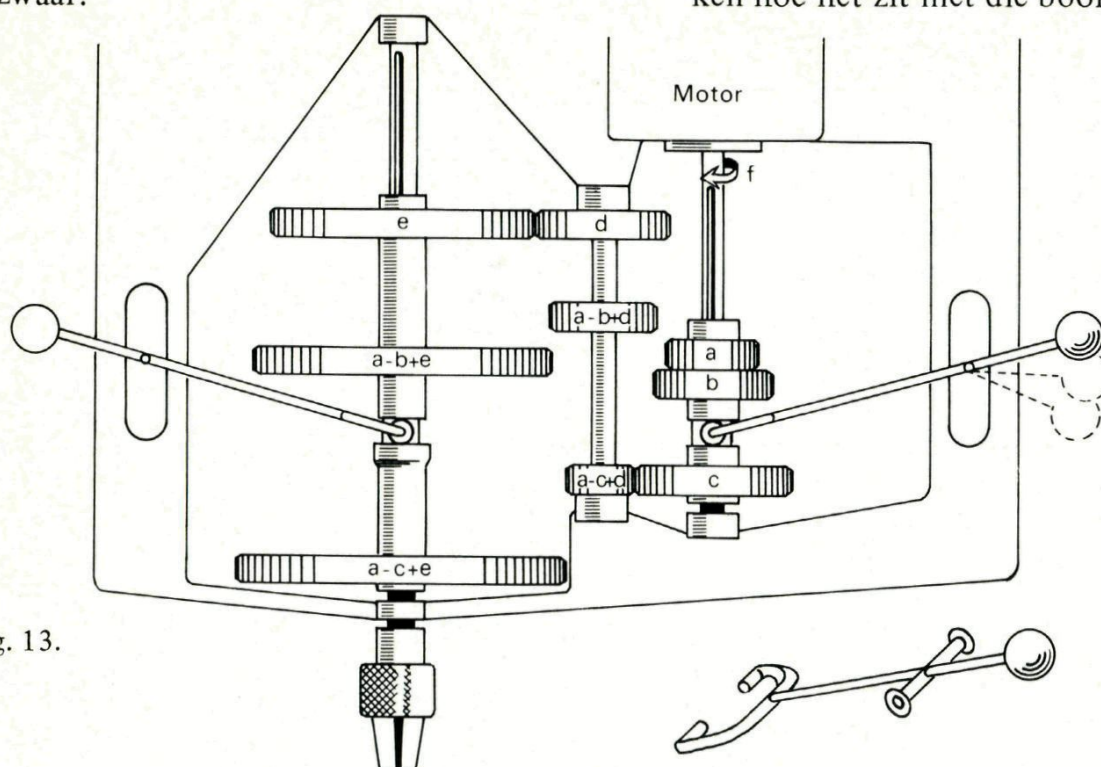
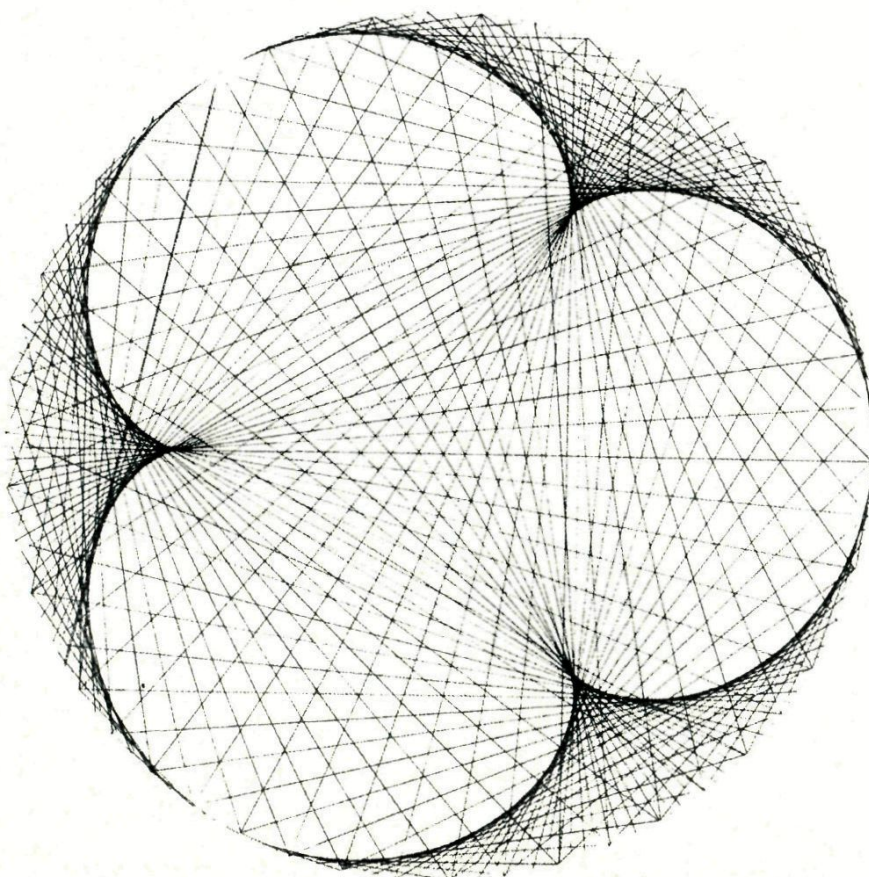


Fig. 13.



Computertekening. Hoeveel lijntjes staan er? Is dat op een handige wijze te tellen? Hoe zou het constructievoorschrift luiden?

open vierkantjes en zijn te vergelijken met de zwarte streepjes (*clock marks*) op de schrapkaart. Hieraan kan onderscheiden worden dat een bepaalde groep tekens, ook al staan ze niet in elkaars verlengde, als één teken opgevat moeten worden.

De plaatswaarde van de verschillende cijfers is:

	4
	2
8	1

waaruit afgeleid kan worden dat de getallen 1 tot 10 van rechts naar links staan aangegeven.

Oplossing denkertjes

- 1955.
- 43 en 63.
- Elk kwadraat is een achtvoud plus 0, 1 of 4. De som van 3 van deze getallen kan geen achtvoud plus 7 zijn.

4.

								8
2	3	3	3	3	3	3	2	7
5	8	9	9	9	9	8	5	6
13	22	26	27	27	26	22	13	5
	61	75	80	80	75	61	35	4
		216	235	235	216	171		3
			686	686	622			2
				1994				1
a	b	c	d	e	f	g	h	

In elk veld staat aangegeven op hoeveel manieren vanuit dat veld de achtste rij bereikt kan worden.
Antwoord 1994.

- Stel $M = x_1 x_2 \dots x_n$ is de maximale waarde. Geen der x_i kan dan 1 zijn, want anders zou men het produkt kunnen vergroten door deze weg te laten, en een andere factor met 1 te vergroten. Geen der factoren kan ook groter dan 4 zijn, want anders zou men hem kunnen vervangen door de twee factoren 2 en $x_i - 2$, waarmee het produkt groter wordt. Aangezien $4 = 2 \cdot 2$, is M dus van de vorm $M = 2^k 3^l \cdot k$ is hoogstens 2, want 2^3 is kleiner dan $3^2 \cdot 1976 = 3 \cdot 658 + 2$, dus $M = 2 \cdot 3^{658}$.
- Bekijk de stand na twee draaien.

A	B	C	D	E	F
1	3	7	9	7	3

Om te winnen moet A meer dan 8 punten op zijn overbuurman D inlopen. Dat kan door
 of $2 \times \textcircled{5}$: winst op D $2 \times (5 - 0) = 10$
 of $3 \times \textcircled{4}$: winst op D $3 \times (4 - 1) = 9$

Bij $3 \times \textcircled{4}$ is de eindstand

A	B	C	D	E	F
13	12	7	12	13	18

waardoor F zou winnen.

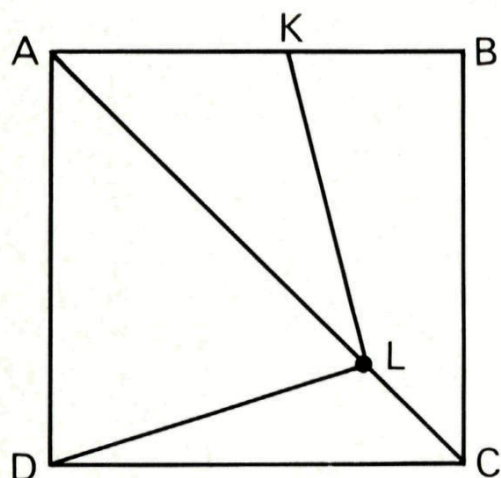
Blijft over dat A tenminste $2 \times \textcircled{5}$ krijgt. De stand wordt hierdoor

A	B	C	D	E	F
11	11	13	9	9	7

Nu is C zijn zwaarste concurrent. De enige manier om ten minste 3 punten meer te krijgen dan de persoon twee plaatsen verder aan je rechter hand, is door een ④ te krijgen.

Eindstand

A	B	C	D	E	F
15	14	13	10	11	12



7. Noem het snijpunt van AC en BD eerst S , dan is AL' het beeld van DL na rotatie om S over -90° . Nu nog te bewijzen: $AL' \parallel KL$.

$L'L$ is het beeld van DC bij de vermenigvuldiging $P_{S, \frac{1}{2}} \Rightarrow \overrightarrow{L'L} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC}$

Dus geldt $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{L'L}$

Er bestaat dus een translatie over $\overrightarrow{AK}$, waarbij KL het beeld is van $AL' \Rightarrow AL' \parallel KL$

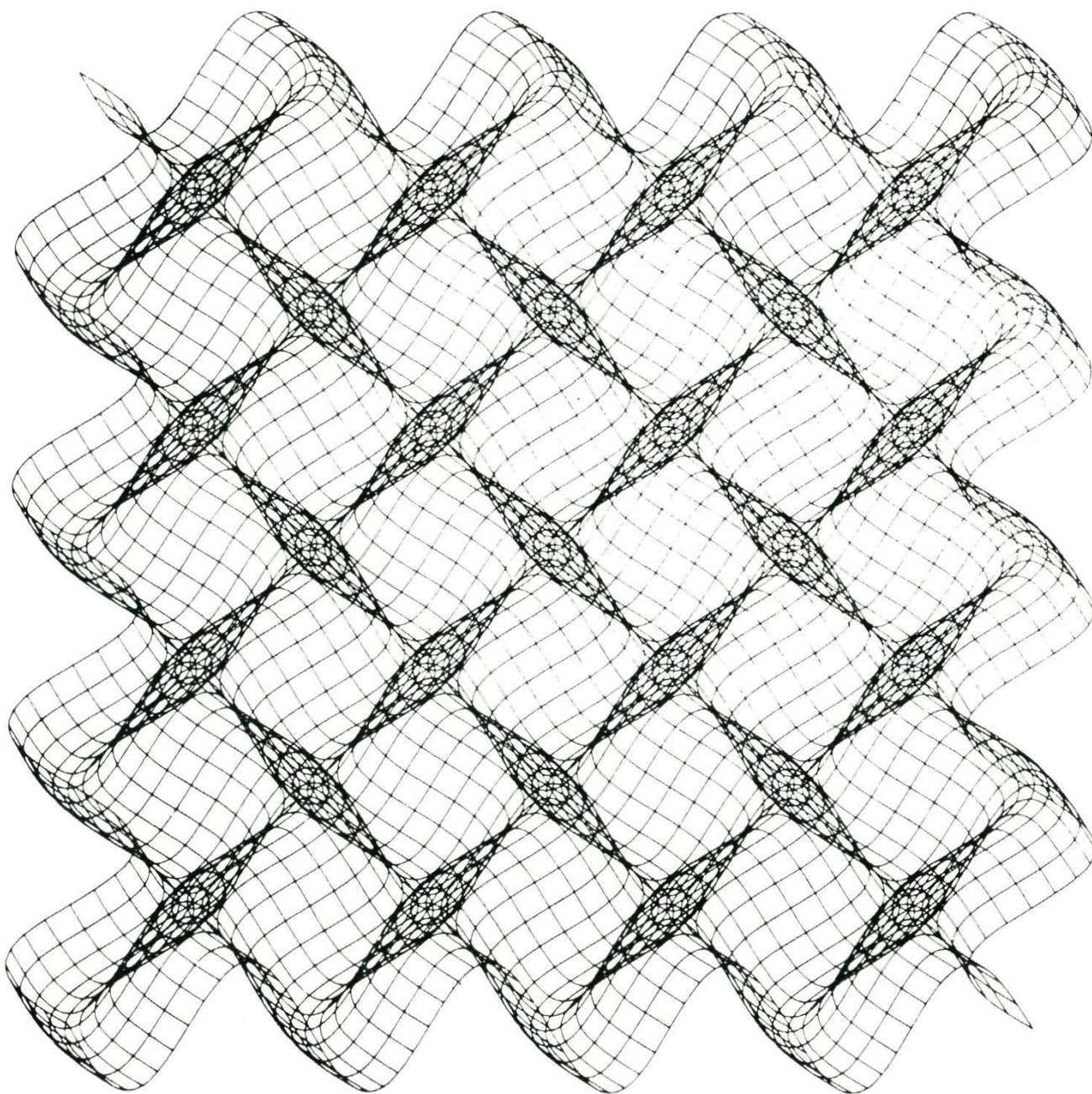
8.



9. Neem een torus in gedachte met daarop een schroeflijn zoals in de figuur. Kleur nu de bovenligger van een zekere kruising, daarna de onderligger van de volgende kruising en zo, om en om, verder. Bij een even aantal kruisingen zal, hoeveel rondgangen men ook maakt, de helft van de schroeflijn ongekleurd blijven. Het blijkt dus een samenstelling (ketening) van twee gesloten koorde (gekleurd en blank) die geen van beide een knoop vormen, en zeker ook niet samen.



10. Het aantal van $2n$ keer. Men passeert immers elke kruising tweemaal, eenmaal bovenlangs, eenmaal onderlangs.



Netwerk, getekend door een computer. Kun je erachter komen hoe de figuur in elkaar zit? Begin eens eens bij een bepaald punt en probeer de lijn zo lang mogelijk te volgen.

Inhoud

Boodschap aan het heelal	97
Spanningsbollen	99
Nederlandse Wiskunde Olympiade 1977	104
Wiskunde in de knoop 2	107
Van knoop naar lampekap	110
Getallenpuzzel op een boormachine	111
Oplossing van de heelalboodschap	118

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

A.J. Elsenaar, Harderwijk.

W. Kleijne, Heerenveen.

Ir. H. Mulder, Breda.

G. A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Mauritsstraat 117, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 6,50 per jaargang. Voor anderen f 10,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 20 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.