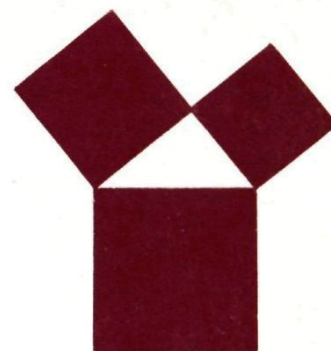




1
jaargang 17 / oktober 1977

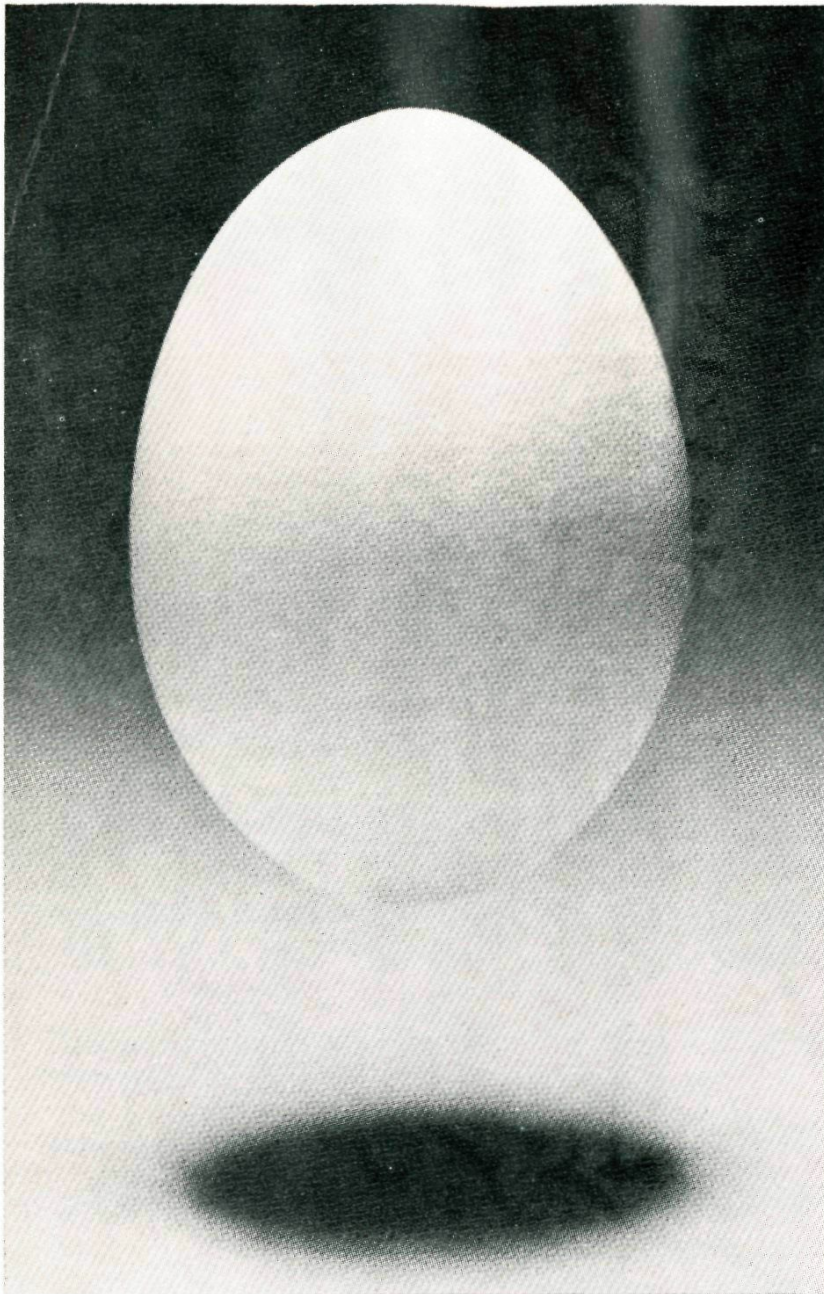
**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 x per schooljaar

Pythagoras



Eén ei is geen ei, zo begint een bekend rijmpje. Maar het heeft een aantal lezers toch aan het puzzelen gezet hoe je een ei-vorm nu in een formule brengt.
Een verslag daarvan vind je op pag. 12 e.v.

BIJ DE FOTO OP HET OMSLAG

Een tekst uit de koran (1, 1-5).

Het middendeel heeft een 6-talig rotatie-as en drie spiegellijnen.

Figuren die alleen rotatie- en spiegellijnen hebben zijn (wiskundig gezien) eigenlijk eenvoudig. Toch is het juist de symmetrie die deze ornamenten voor ons zo aantrekkelijk maakt.

Vertaling: 'In de naam van God, de meedogende, de barmhartige. Alle lof behoort God alleen, Heer van het Heelal, genadige, altijd barmhartige, Heer van de dag des oordeels. U alleen loven wij en U alleen vragen wij om hulp.'

° Transformatie: Binnenste-buiten

De beroemde stelling van Pythagoras is op veel manieren te bewijzen. Een daarvan is de knip- en plakmethode. In dit nummer vind je daar nog eens een voorbeeld van. Het idee daarbij is om vlakdelen met onbekende oppervlakte te transformeren in andere waarvan de bepaling eenvoudiger is. Zo kun je een trapezium omvormen in een rechthoek en zo de oppervlakte bepalen.

Telkens wordt hierbij een figuur verknipt en de stukken worden dan weer aangevoegd tot een meer bekend model. Heel echt wiskundige lezers zullen wellicht die knip- en plakmethode niet serieus nemen. Er wordt immer niets bewezen!

Toch wel. We moeten daar aantonen dat de brokstukken inderdaad volledig aansluiten bij de vorming van de nieuwe figuur. Dat we daarbij ons oog soms matig kunnen vertrouwen, zien we bij listige spelletjes waarbij ernstig uitziende lieden

argeloze lezers proberen duidelijk te maken dat bijvoorbeeld $64 = 65$. De fout in de logica schuilt daarbij altijd in het niet echt passen.

Een geval waarbij de zaak in ieder geval wel echt past, staat in fig. 1. Een zeshoek

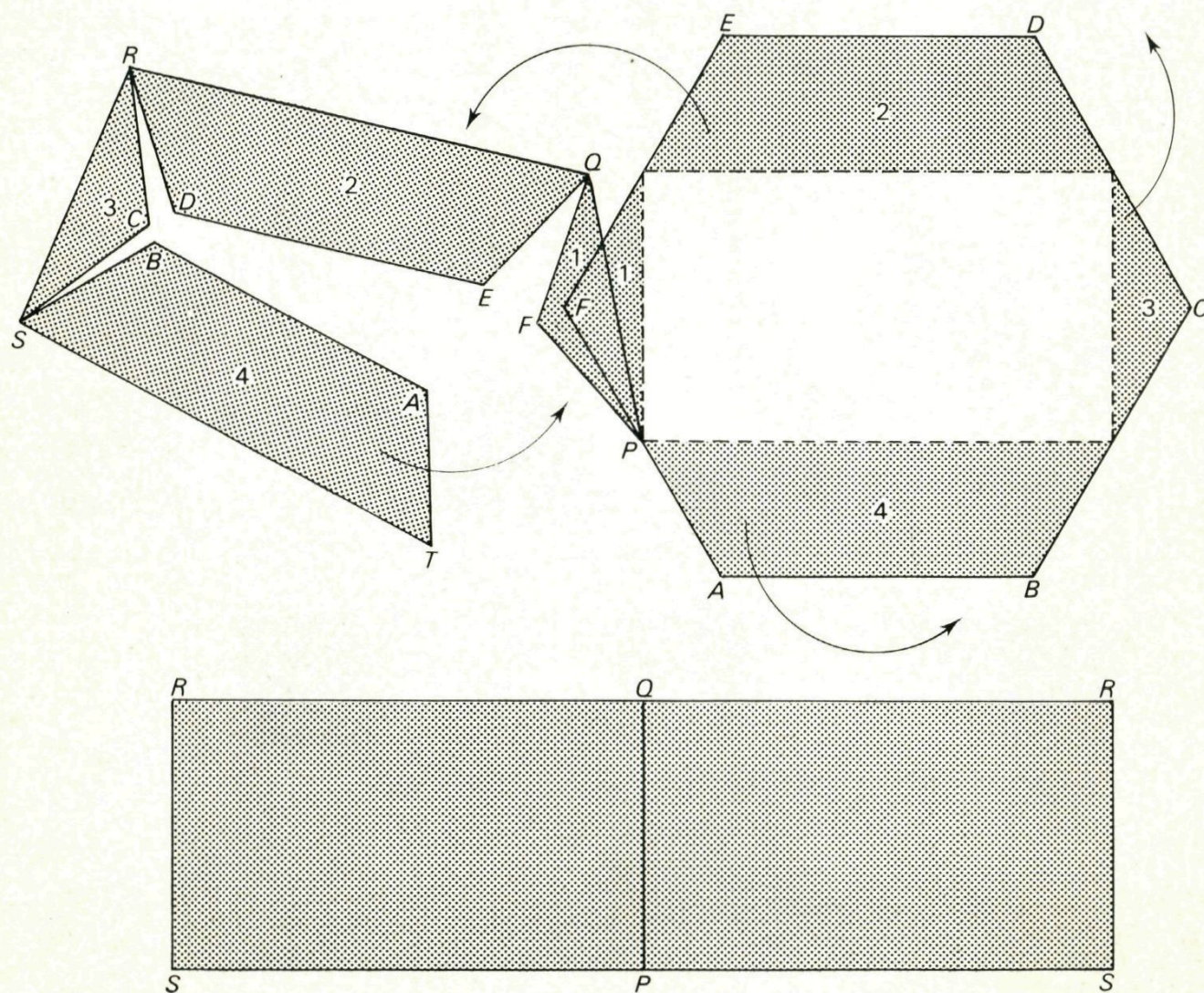


Fig. 1. Transformatie van een zeshoek in een rechthoek.

is door handig knippen en aaneenvoegen van de stukken getransformeerd in een combinatie van twee rechthoeken.

Merk daarbij op dat het zo te doen is dat de zeshoek ontstaat uit een sliert van vijf stukken, een rechthoek, twee driehoeken en twee trapezia, alle scharnierend om de punten P , Q , R en S , waardoor delen die eerst aan de binnenkant lagen nu naar buiten draaien.

Zo zou een transformatie kunnen geschieden zonder dat de vijf delen geheel los van elkaar komen. Ze blijven via de scharnierpunten aan elkaar.

Nu in de ruimte

Het zou wel spannend zijn als we dergelijke transformaties ook bij ruimtelijke lichamen zouden kunnen uitvoeren.

Een grafisch ontwerper, Tomura Hiroshi, uit Japan, probeert ruimten te omspan-

nen en zoekt daarbij naar dergelijke omvormingen.

Voor wie wat handigheid heeft en ook zin heeft om wat wiskunde met schaar en lijm te bedrijven, hier enkele voorbeelden uit zijn werk.

Het 14-vlak van Kelvin

Een van de beroemdste veelvlakken is het 14-vlak van Kelvin. Verschillende levende cellen hebben deze vorm. Het veelvlak grenst ruimte af met behulp van zes vierkanten en acht regelmatige zeshoeken. Alle ribben zijn even lang. De bouwplaat ervan staat in fig. 2.

Neem gekleurd etalagekarton en teken daarop de figuur, zo goed mogelijk, met behulp van passer en driehoek. Rits de getrokken lijnen wat in en vouw daar om. Breng wat bisonkit aan op de randen en druk, na even wachten, de bij elkaar ho-

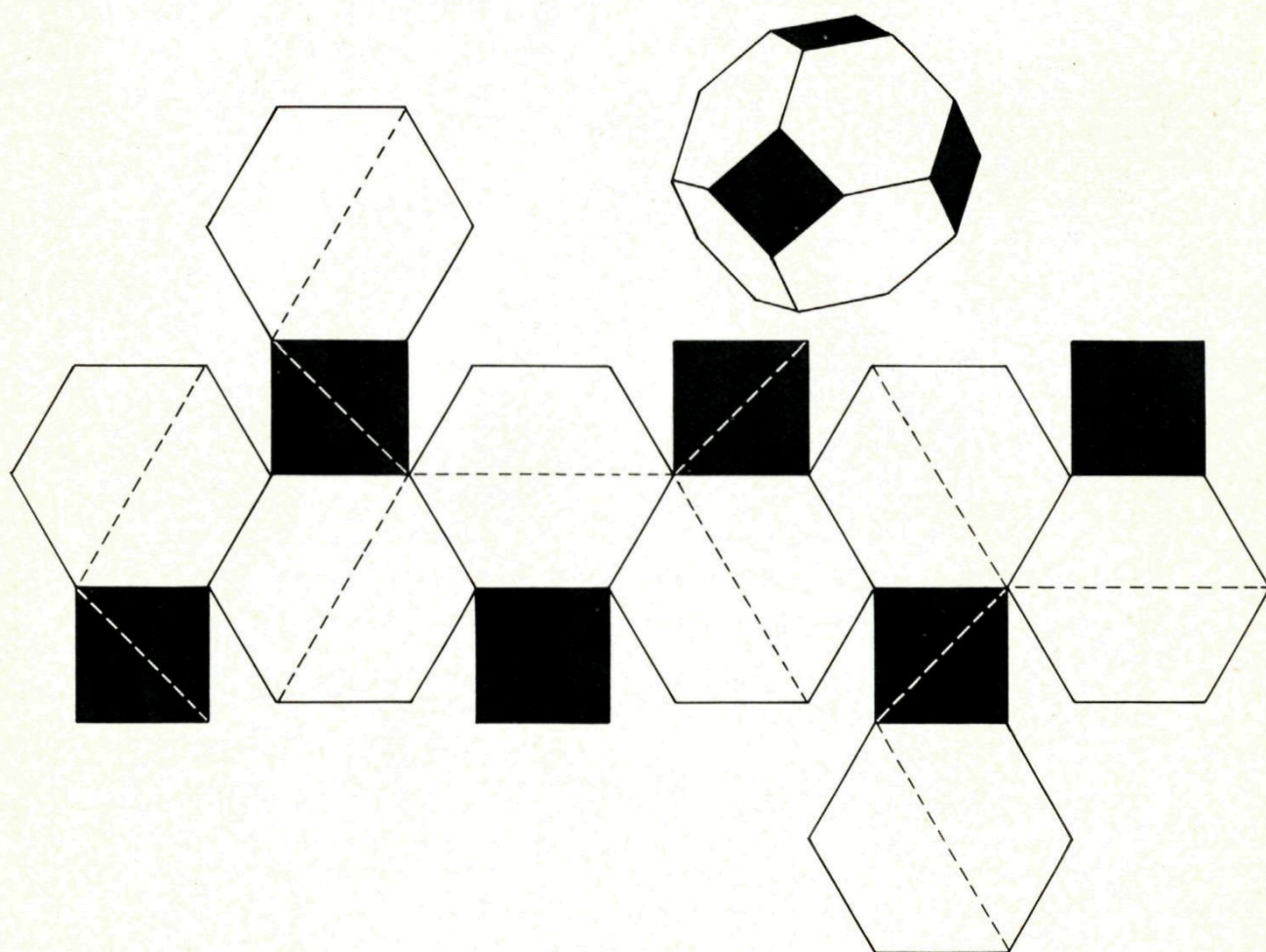


Fig. 2. Bouwplaat van het 14-vlak van Kelvin.

rende lijnstukken tegen elkaar.

Hierna gaan we met een scherp hobbymes dit veelvlak in zes delen snijden volgens de stippellijnen (fig. 3).

Als je goed kijkt, zul je ontdekken dat die stippellijnen samen een rechthoekig blok bepalen, het inwendige van het 14-vlak. Tegen dit blok rusten dan 6 dakvormige delen, 4 stuks zadeldak, 2 stuks plat dak. Door de 6 delen op een andere manier te groeperen, kan een congruent blok tevoorschijn komen, zodat het 14-vlak is overgegaan in 2 blokken, die samen eenzelfde volume hebben als het 14-vlak.

Hoe die transformatie in zijn werk gaat staat ook in fig. 3. Het is tevens mogelijk de stukken daarbij als een sliert bijeen te houden, verbonden door scharnieren. Daarvoor kunnen strookjes linnen gebruikt worden, die je langs de randen plakt.

Het is aardig ook het inwendige blok te plakken. Ga zelf na, dat als de ribben van het 14-vlak 1 zijn, de ribben van dat blok 2, 2 en $\sqrt{2}$ zijn.

Daaruit volgt dan tevens dat als de ribben van het 14-vlak a zijn, de inhoud ervan $8a^3\sqrt{2}$ zal zijn. Ga dat ook na.

Hiermee hebben we dan een handige methode gevonden om een volume te bepalen. Je moet natuurlijk nog wel aantonen dat de delen werkelijk sluiten en er geen gaten ontstaan. Ook dat mogen we gerust aan de geïnteresseerde lezer overlaten.

Het is aan te bevelen om de vijf dakvormige delen aan de onderzijden af te plakken met passende respectievelijk rechthoekige en vierkante stukken karton.

Een variatie

In fig. 4 is een soortgelijke transformatie uitgevoerd bij een ruiten-12-vlak. Alle ruiten zijn congruent. Probeer dan te bewijzen dat diagonalen en zijden de aangegeven verhoudingen moeten hebben. De hoeken van de ruit worden $70,5^\circ$ en $109,5^\circ$ (fig. 5). Er zijn 8 hoekpunten, bij de helft waarvan er telkens 3 ruiten bij elkaar komen, bij de andere punten telkens 4. Door de zaak met behulp van de scharnieren binnenste buiten te klappen, ontstaan in dit geval 2 kubussen. Op die manier is het niet moeilijk om de inhoud van het 12-vlak te bepalen. Als de zijde van het 12-vlak op 1 gesteld wordt, zal de ribbe van zo'n kubus $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$ worden. Als

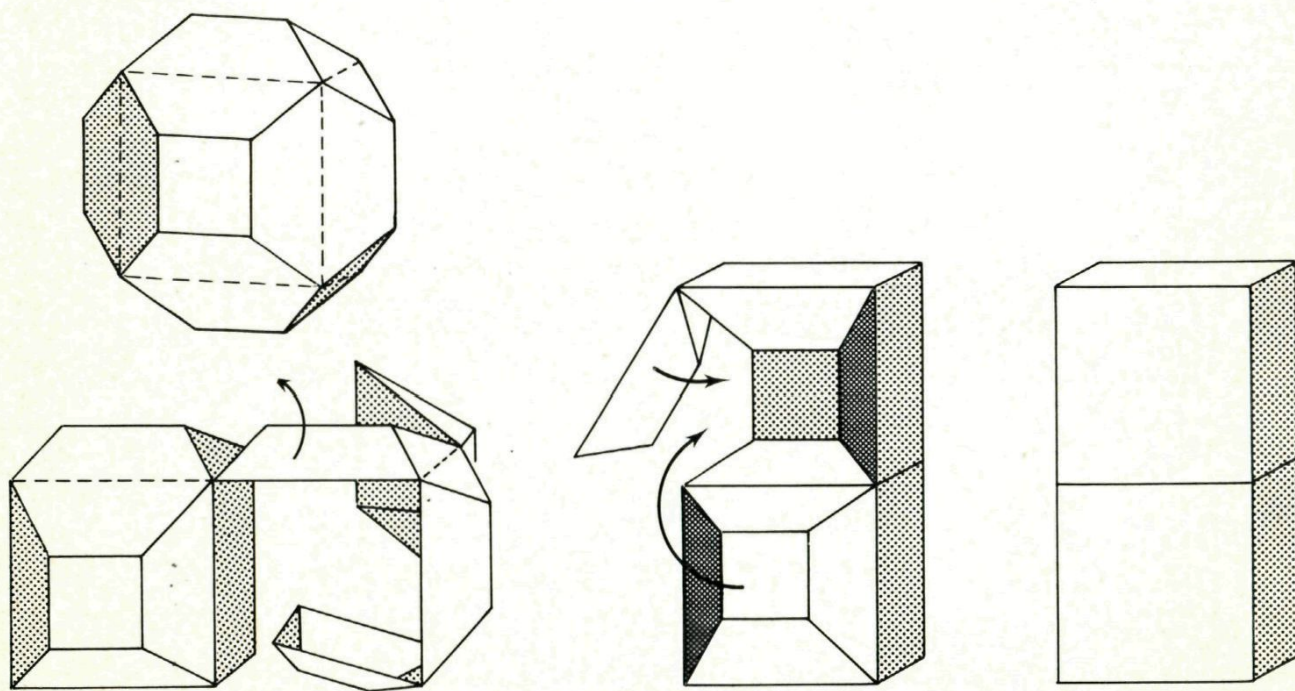


Fig. 3. Transformatie van een 14-vlak.

het 12-vlak dus ribben a heeft, zal het volume $\frac{8}{9} a^3 \sqrt{3}$ zijn.

Reken het 12-vlak eens na en kijk of er inderdaad bij de merkwaardige omklapbeweging geen spleten verschijnen.

Zou Tomura Hiroshi gelijk hebben?

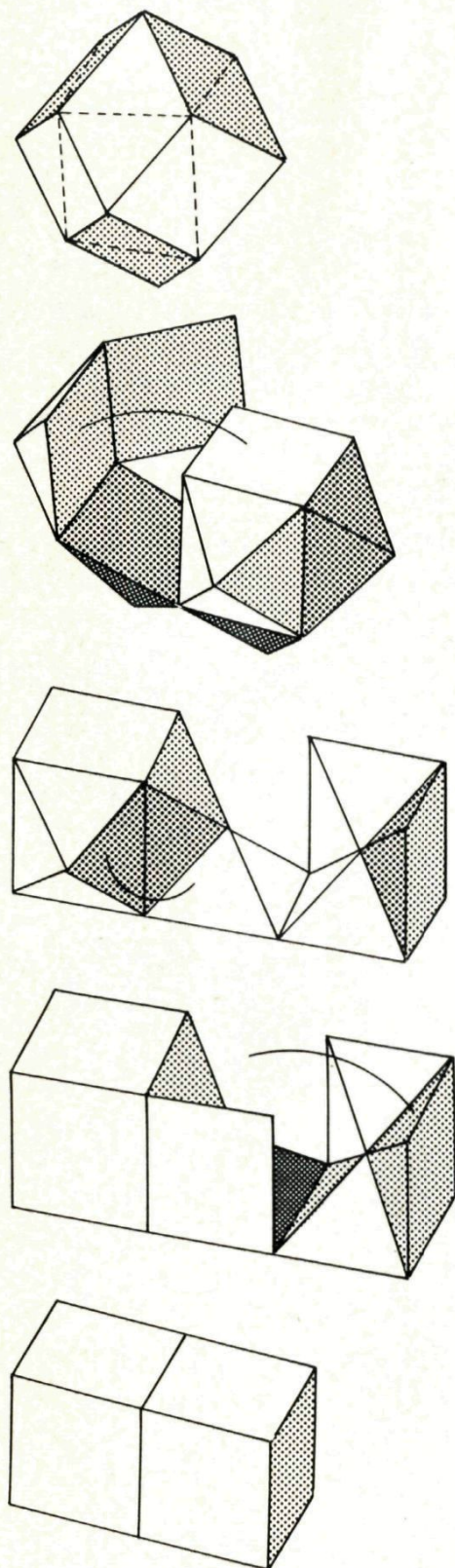


Fig. 4. Transformatie van het ruiten 12-vlak.

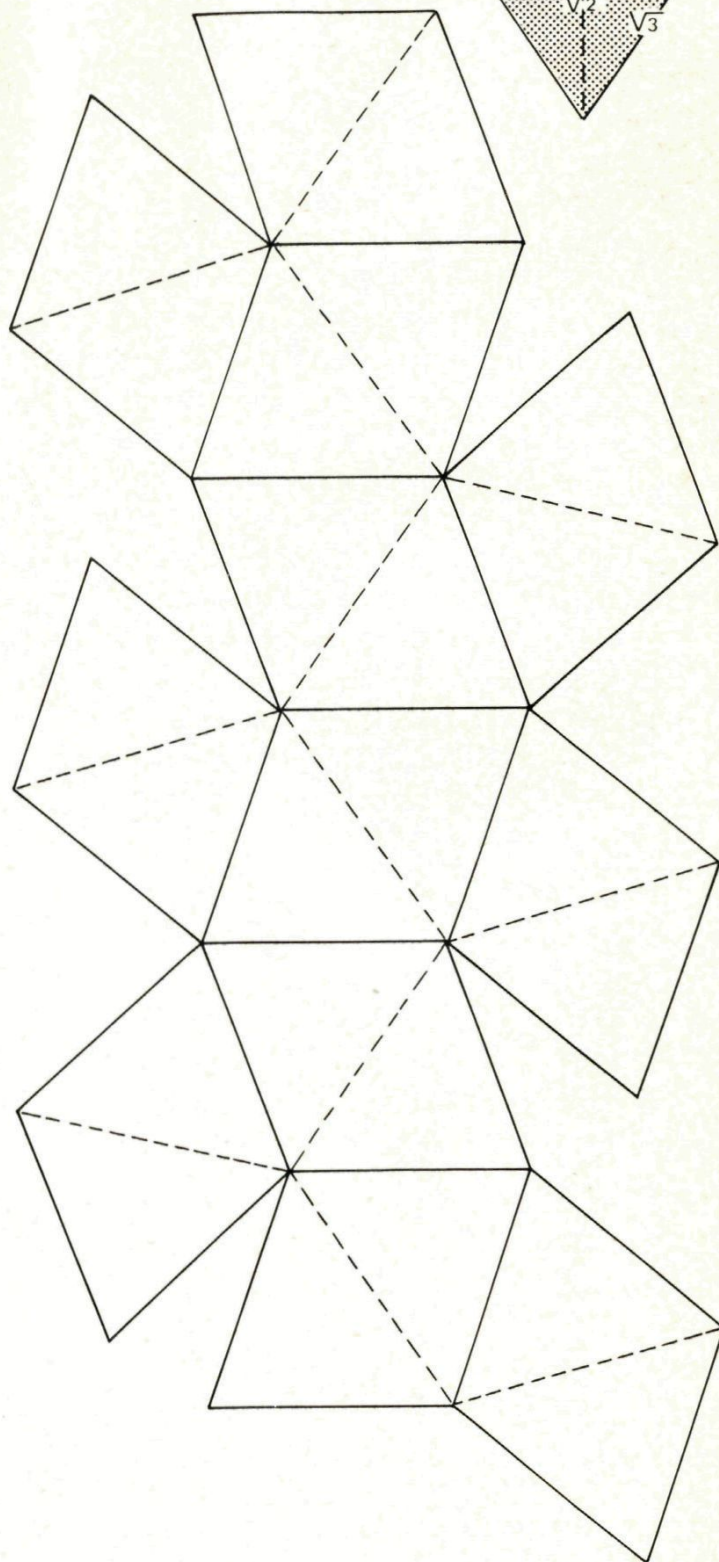
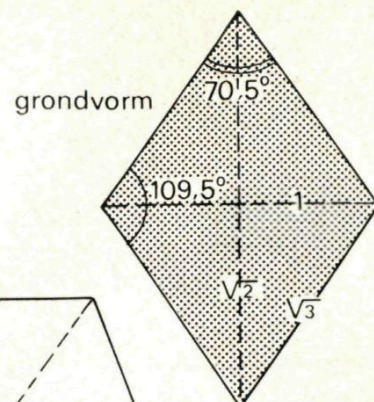


Fig. 5.

En zo gaat het!

In de volgende fotoserie zie je hoe we zelf het 14-vlak geplakt hebben in de vorm, waarin het open te klappen is tot een dubbelblok (fig. 6 t/m 10).

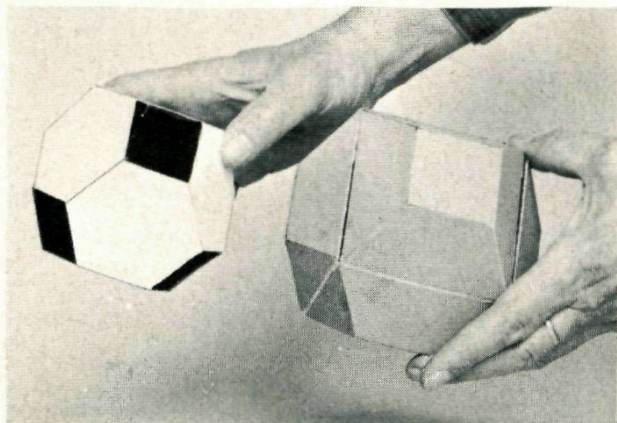


Fig. 6.

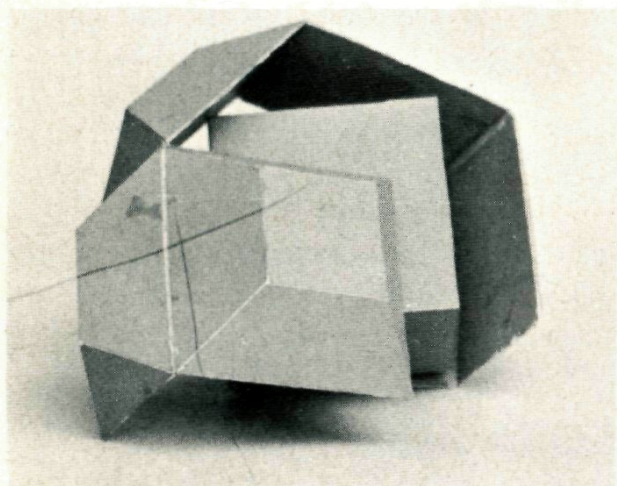


Fig. 7.

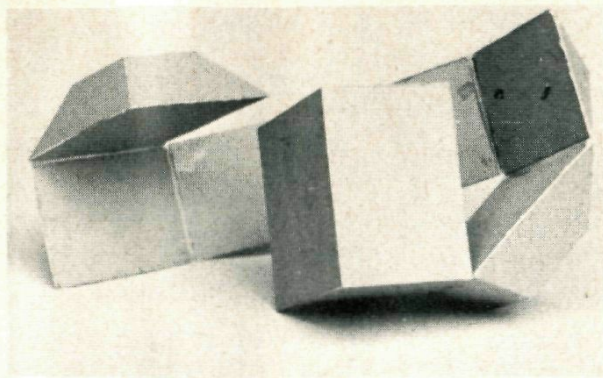


Fig. 8.

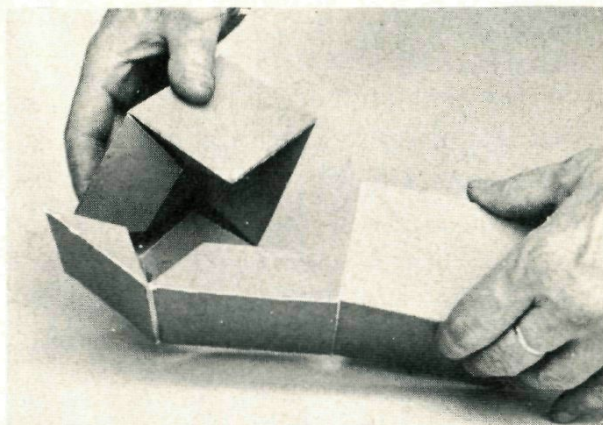


Fig. 9.

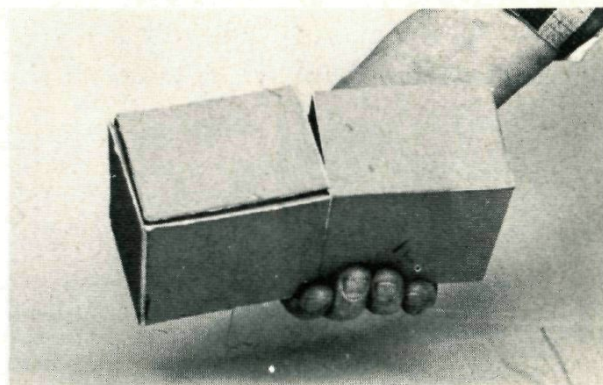


Fig. 10.

° Windstoten van 162 km per uur

Ons land wordt zelden geteisterd door zeer zware stormen. Begin november 1972 beleefden we er zo een, die tien miljoen bomen ontwortelde. Over die bomen wil ik het nu niet hebben, wel over de kranteberichten.

De maximale windsnelheid, bij deze gelegenheid gemeten, was volgens de kranten, die beweerden dat ze het van De Bilt had-

den, 162 km per uur. Natuurlijk werd die niet overal gemeten. Op sommige plaatsen was het 117 km per uur, op andere

126 km of 144 km per uur – ook nogal flinke snelheden.

Als je die snelheidsmetingen van 162, 117, 126, 144 km per uur de revue laat passeren, krijg je de indruk dat de meteorologen zo iets wel erg nauwkeurig meten – geen ronde 160, 120, 125, 145 km per uur maar, naar het schijnt, op de kilometer nauwkeurig. Of kun je werkelijk windsnelheden op scherper dan 1% nauwkeurig meten en als je het kunt, welk zinvol doel is met dergelijke overdreven nauwkeurige metingen gediend?

Ik zat er eventjes over te puzzelen tot me opviel dat al die getallen door 9 deelbaar waren. Meet De Bilt misschien windsnelheden in het 9-tallig stelsel?

Neen, het is iets anders. Wie enige ervaring met natuurwetenschappelijke metingen heeft, weet dat fysici, technici en andere beoefenaars van exacte vakken snelheden niet in km per uur, maar in meters per seconde opgeven.

162, 117, 126, 144 km per uur zijn respectievelijk 45, $32\frac{1}{2}$, 35, 40 m per seconde, en dit zijn vrijwel zeker de cijfers die

door De Bilt werden opgegeven – ronde cijfers, die aantonen, dat in feite windsnelheden met een foutenmarge van $2\frac{1}{2}$ m per seconde, dus van 9 km per uur worden gemeten en niet van 1 km per uur, zoals de kranteberichten ons suggereren.

In wetenschapsbeoefening en techniek werkt men met de seconde als tijdseenheid als men snelheden, frequenties e.d. wil meten. Dit ligt voor de hand. Met welke snelheid moet men een projectiel weg-schieten om het 100 meter hoogte te doen bereiken? Met 44 m per seconde – luidt het antwoord.

'160 km per uur' zou eenvoudig belachelijk zijn, want die snelheid van 44 m per seconde houdt het maar voor een ogenblik. Van een buis zegt men dat hij 10 liter water of gas per seconde kan verwerken en niet 36 000 liter per uur. De stemvork die de 'concert-A' voortbrengt, maakt (per definitie) 435 trillingen per seconde en niet 1 566 000 per uur.

Het geluid plant zich volgens de natuurkundige terminologie met 330 meter per seconde voort en niet met 1200 km per uur.

Waarom zetten kranten dan alle snelheden van 'per seconde' in 'per uur' om? Het is nogal duidelijk. Omdat de snelheden, waarmee veel mensen vertrouwd zijn, *die van het verkeer zijn* – die 50 km maximum, die meestal in de bebouwde kommen gelden, die 70 km die daar ook af en toe gepermitteerd zijn, de 100 km, 110 km, 120 km, 130 km, 140 km, waar-naar je de snelheidsmeter op de autoweg ziet oplopen.

Je kunt een windsnelheid beter met verkeerssnelheden vergelijken wanneer hij als 162 km per uur opgegeven wordt dan wanneer men 45 meter per seconde noteert. Natuurlijk heeft de automobilist een goed recht op zijn snelheidsgegeven per uur, want hij moet immers weten hoe laat hij op zijn plaats van bestemming



aankomt, wanneer hij met die of die snelheid rijdt. Maar voor een windstoot in De Bilt is het niet zo erg belangrijk wanneer hij in Groningen is aangekomen en voor wetenschappelijke doeleinden blijf je hem maar in meters per seconde meten.

Desniettemin valt ook al aan de geluidssnelheid de eer te beurt om in plaats van met 330 meter per seconde te worden aangegeven in 1200 km per uur. Waarom? Omdat er supersone vliegtuigen zijn, d.w.z. vliegtuigen die sneller dan het geluid vliegen — twee of drie keer zo snel. En van een supersonisch vliegtuig dat om 12 uur in New York is vertrokken, wil je uiteraard graag weten, hoe laat het in Schiphol aankomt.

Nu is er geen enkel bezwaar tegen dat je voor verschillende doeleinden verschillende maten gebruikt. Reukstoffen verkoop je per milligram of gram, appels per kg, staal per ton. Het vervelende met uur en seconde is dat hun verhouding, 3600, niet in het tientallig stelsel past, en dit veroorzaakt moeilijkheden en onduidelijkheden.

Met de andere tijdmaten, jaar, maand, dag, minuut is het eender gesteld. Als ik zeg dat in Nederland per jaar 250 000 kinderen worden geboren, bedoel ik geen precies statistisch gegeven, maar een ronde schatting. Als ik van hier naar het dagelijks geboortental toe wil, moet ik niet maar 250 000 door 365 delen en stellen dat het er per dag 684,93... zijn, want hiermee wordt een in de gegevens niet aanwezige nauwkeurigheid geïntroduceerd. Wat dan wel?

250 000 per jaar hoort kennelijk in een schaal, met stappen van 50 000:

50 000	100 000	150 000	200 000
250 000	300 000	350 000	400 000

Met 250 000 bedoelt men: tussen 225 000 en 275 000. Want was het iets minder dan 225 000 dan had men 200 000 gezegd en bij iets meer dan 275 000 had men 300 000 genomen.

Wil men dit bedoelde gegeven per dag om-

rekenen dan wordt het: tussen 618 en 752. Hoe zou men dit ruwweg formuleren? Ik zou zeggen: 700 per dag. Dit geeft zo ongeveer de bedoeling weer. En hoeveel kinderen gemiddeld per uur? Zeg maar gerust: 30.

Bij het omzetten en vertalen van *numerieke gegevens* met maten, gewichten, geldwaarden enz. moet men op zijn qui-vive zijn. Een van onze radiosprekers vertaalt windsterkten zowel in meters per seconde als in kilometers per uur, en dit lijkt me verstandig. In andere gevallen zijn radio en pers soms minder verstandig. Vliegtuigkapers die 3 300 000 guldens losgeld eisen (of: 'ongeveer 3 300 000 guldens') zijn schering en inslag, het is nog foutief ook, want ze moesten echt dollars hebben en zouden met Nederlandse guldens evenmin genoeg nemen als met betaalcheques. Een krant meldde, dat de Mt. Everest hoger was gebleken dan tot nu toe aangenomen werd maar dat kwam omdat hij de Engelse gegevens ruwweg vertaald had met 10 voet = 3 meter, hetgeen de Mt. Everest juist met 10 % verlaagde.

Als een Nederlandse encyclopedie vermeldt, dat de leeuw 1,8–2,4 m lang wordt, met een staart van 0,6–0,9 m en een gewicht van 180–225 kg, dan ligt de vertaling uit het Engels er dik op: 6–8 voet lang met een staart van 2–3 voet en een gewicht van 200–250 Britse ponden. Veel erger is het, wanneer fysische grootheden zoals lichtsnelheid, omtrek van de aarde, afstand van de hemellichamen, enz. eerst door Amerikaanse kranten uit het metrieke stelsel in mijlen, voeten enz. worden overgezet, om daarna — soms foutief — door Nederlandse kranten terugvertaald te worden in het metrieke stelsel.

Vaak komen er dan ook nog wat nulletjes bij of vallen er af.

Vertalen van maten en gewichten is een netelige zaak, en ik hoop maar dat je bij het lezen van Shakespeare 'every inch a king' niet gaat vertalen met 'elke 2,54 cm een koning'.

° Hoe teken je?

Stauroliet is een mineraal (een ijzer-aluminiumsilicaat) dat dikwijls voorkomt als tweelingkristallen die elkaar loodrecht doordringen. In fig. 1 zie je zo'n kristal, het is gevonden in Bretagne en het blokje is ca. 2×2 cm met een dikte van 1 cm.

De vorm van zo'n kristal is alleraardigst; ze lijkt een beetje op de kruisgewelven die Escher in zijn prent *Hol en bol* gebruikte (fig. 2).

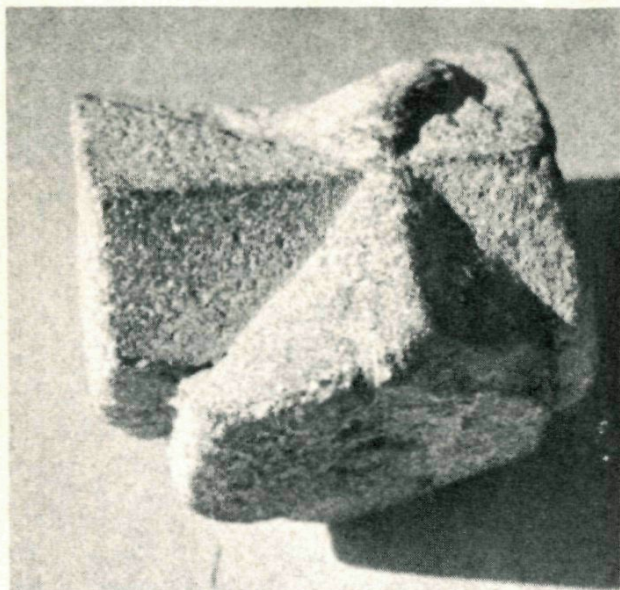


Fig. 1. Tweelingkristal van stauroliet. (foto)

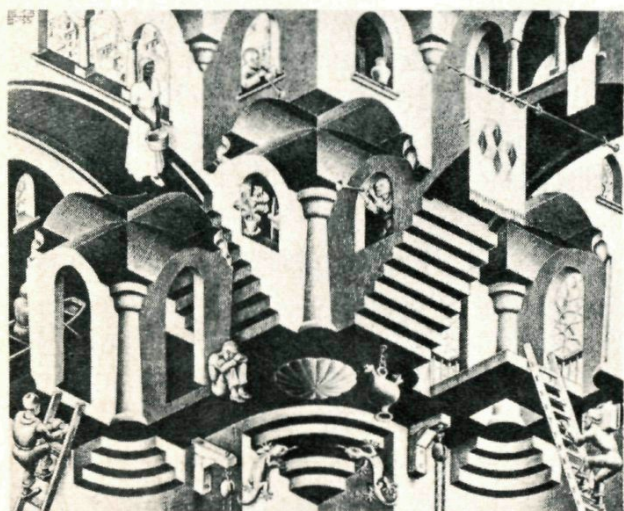


Fig. 2.

Steunfiguur

Wie van mooie figuren houdt en graag tekent is het zien van zo'n kristal een uitdaging om het nauwkeurig te tekenen. We beginnen met twee balken A en B (fig. 3) waarvan de loodrechte doorsnede een vierkant is. Hoe tekenen we nu de figuur die ontstaat als deze twee balken elkaar doordringen?

Eerst zoeken we een 'steunfiguur' die kan dienen om een aantal punten vast te leggen. We kiezen daarvoor een kubus (fig. 4) en tekenen daarin de beide balken zodat ze elkaar loodrecht snijden. Op het eerste gezicht toont de figuur een verwarrende hoeveelheid verbindingslijnen, maar als je het systeem door hebt is het gewoon een kwestie van systematisch afwerken. Als voorbeeld gaan we even na hoe balk B uit fig. 3 in de kubus gezet wordt. Op het voorvlak van de kubus tekenen we de middens van de zijden van het vierkant: *AECF*. De balk loopt door naar het achtervlak van de kubus. We tekenen daar het vierkant *BGDH*. De eerste balk ligt nu vast.

Op dezelfde manier tekenen we balk A uit fig. 3. Je merkt nu, dat elk snijpunt en elke snijlijn van de doordringingsfiguur gemakkelijk gevonden kunnen worden. Als we nu op transparant papier alleen dié punten en lijnen overnemen die je kunt zien en de verschillende georiënteerde vlakken een verschillende tint grijs geven ontstaat fig. 5.

Het prettige van deze tekenmethode met behulp van een steunfiguur is, dat we ook

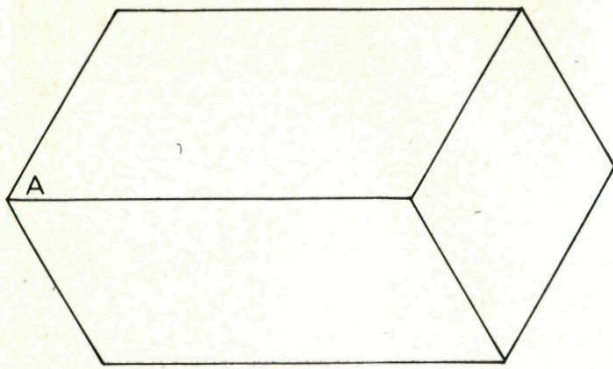


Fig. 3.

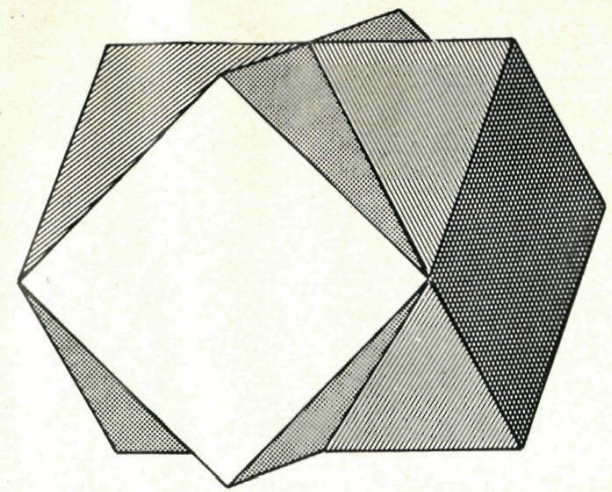
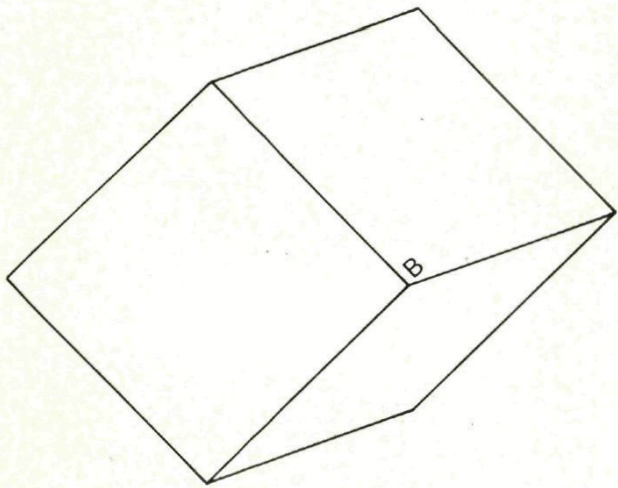


Fig. 5.

gemakkelijk de figuur in elke willekeurige stand kunnen tekenen. We behoeven daarvoor alleen de steunfiguur maar een andere stand te geven. In fig. 6 is dat gedaan voor de twee balken die elkaar doorsnijden. Het resultaat zien we in fig. 7.

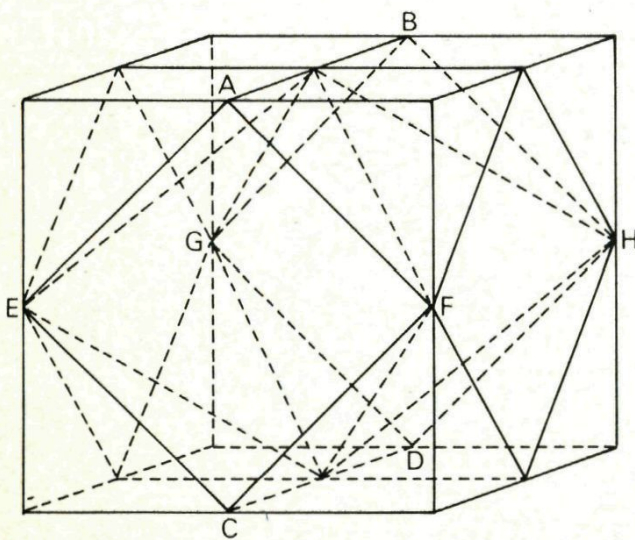


Fig. 4.

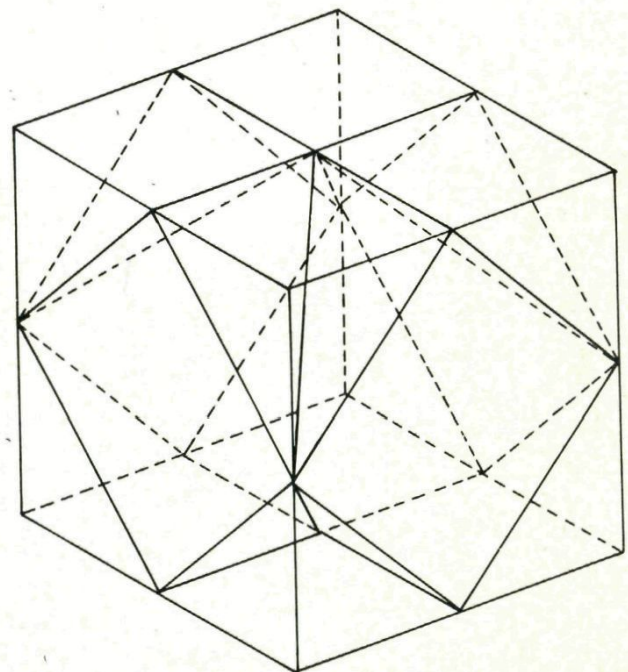


Fig. 6.

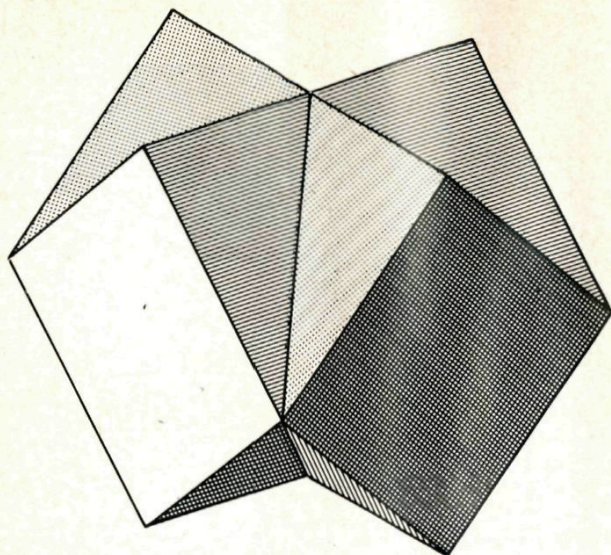


Fig. 7.

Een moeilijke figuur als voorbeeld

De lastigste figuren van elkaar doorsnijdende lichamen zijn op deze wijze in alle mogelijke standen te tekenen. Als voorbeeld van een wat ingewikkelder figuur geven we het volgende.

In fig. 8 is een kubus getekend met drie

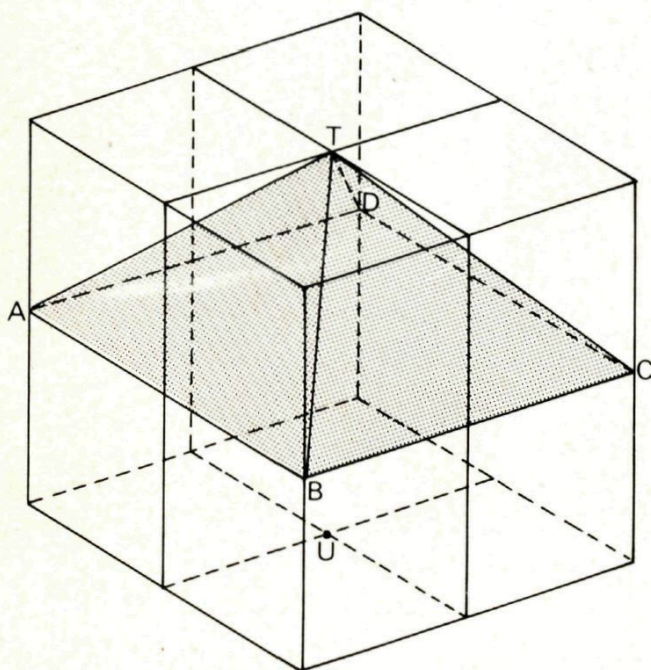


Fig. 8.

loodrecht op elkaar staande vlakken die elk de kubus halveren.

We tekenen de piramide $TABCD$. Met U als top krijgen we de piramide $UABCD$. Binnen de kubus kunnen we zo nog 2 dubbelpiramiden tekenen. Hoe ziet de doorsnijdingsfiguur van de 3 dubbel piramides eruit?

Alle daarvoor nodige verbindingslijnen zijn in fig. 9 getekend, en na nogal wat gepuzzel komt daaruit fig. 10 tevoorschijn.

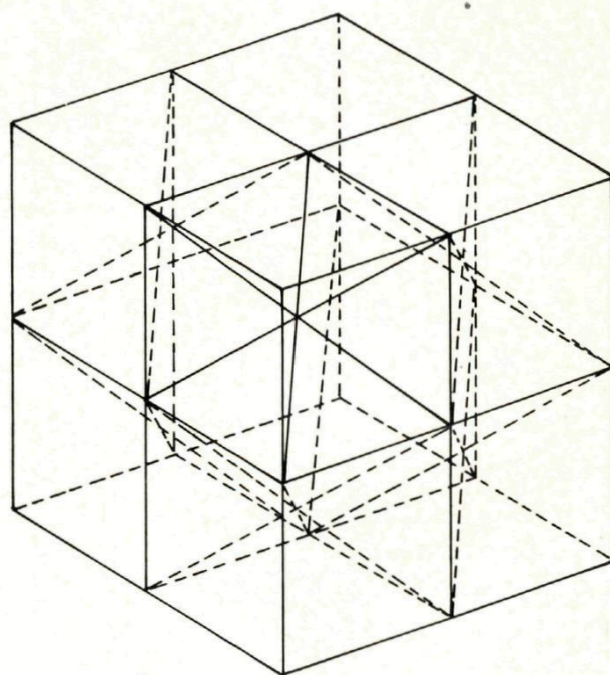


Fig. 9.

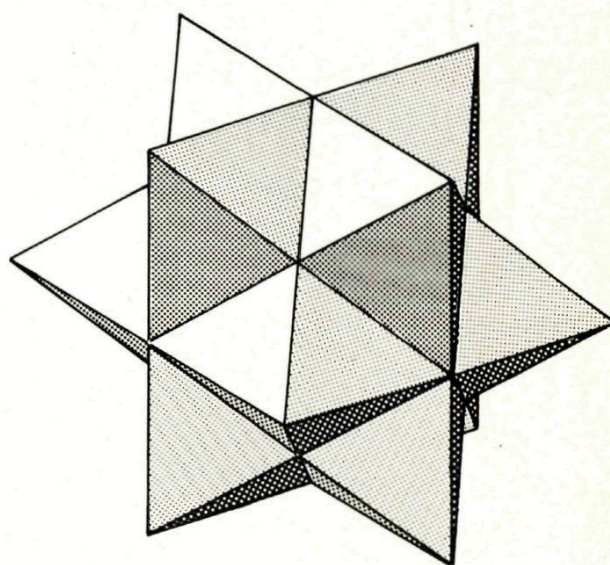


Fig. 10.

Denkertje 1: een optelsom in kleuren

	R	O	O	D
	G	E	E	L
G	R	O	E	N
B	R	U	I	N

In deze optelsom komen tien verschillende letters voor. De bedoeling is, iedere letter te vervangen door een cijfer. Eenzelfde letter moet steeds door eenzelfde cijfer worden vervangen; verschillende letters natuurlijk ook door verschillende cijfers. Een getal mag hier niet met een nul beginnen.

Er bestaan verscheidene manieren waarop men een kloppende optelsom kan maken van het gegeven schema. Zoek naar die oplossing waarbij voor R O O D een zuiver kwadraat verschijnt.

In dit geval is er maar één enkele oplossing.

Oplossingen van de denkertjes vind je achter in dit nummer.

Ontworpen door: Ir. H. Nijon, Van Brussellaan 18 Paramaribo—Suriname

°Knippatronen voor de stelling van Pythagoras

Naar aanleiding van 'knippatroon voor de stelling van P' in het eerste nummer van de vorige jaargang, ontvingen we van Dr. M. Rutgers van der Loeff in Huizen nog 2 andere patronen. Kijk maar of het klopt.

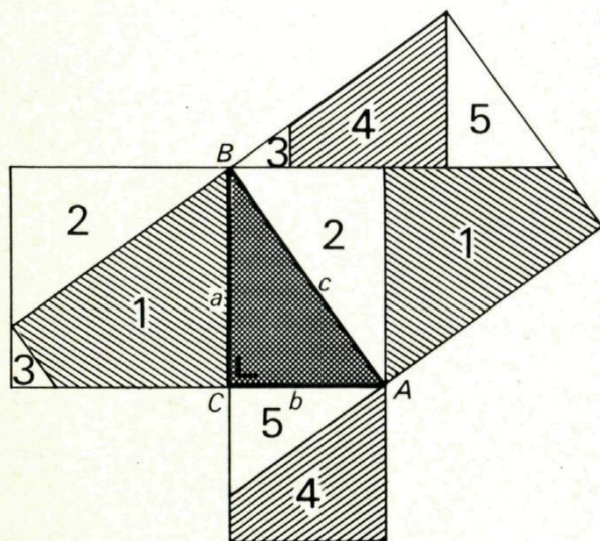


Fig. 1. Knippatroon voor de stelling van P
 $c^2 = a^2 + b^2$

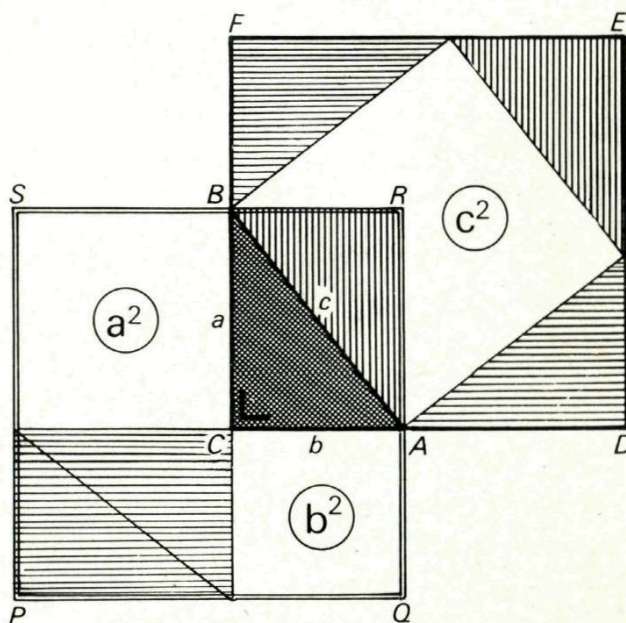


Fig. 2. Knippatroon voor de stelling van P
de vierkanten PQRS en CDEF zijn even groot zodat
 $a^2 + b^2 + 4(ABC) = c^2 + 4(ABC)$.

De ei-kromme

Een lezer uit Texel schrijft ons: 'Telkenjare als de paaseieren op tafel verschijnen, heb ik zin om er met een stift de x, y -relatie op te schrijven, die de vergelijking zou kunnen zijn van de ei-kromme. Maar ik weet er geen weg mee. Welke lezer van *Pythagoras* kan het wel? Het gaat hier dus om de kromme die ontstaat als een ei wordt doorgesneden door een vlak gaande door de as.

Laten we even een paar zaken afspreken. Een ei is geen ellips. Een ei heeft slechts één symmetrieas en een ellips twee!

Verder is in dit geval de ene oplossing fraaier dan de andere. We zouden het liefst één enkele vergelijking hebben en niet een parametervoorstelling. Werken met absoluutstrepen of domeinbeperking vinden we ook niet geweldig. Een ei opbouwen uit een halve cirkel en een halve ellips is ook niet volgens de natuur.

Maar wie het zelf niet kan, kan makkelijk eisen stellen. Daarom, wie neemt de uitdaging aan en levert een bijdrage?

We hebben al enkele inzendingen, maar helemaal content zijn we nog niet.

Jongelui uit de hoogste klas van de Nassauscholengemeenschap in Breda hebben er hun tanden ingezet en we kregen ook een reactie van prof. H. Freudenthal uit Utrecht. Zijn idee werd door een van de leerlingen nader uitgewerkt.

Hier is het verslag van hun inspanningen. Misschien inspireert het om ook aan de slag te gaan.

a. Het ontwerp van Jan Overduin (naar een idee van Toon Bogers)

$$x = -\frac{1}{40}(t^{3\frac{1}{2}} - 8,4 t^{2\frac{1}{2}})$$

$$|y| = \frac{1}{15} t(6-t) \sqrt{t(6-t)} \text{ of } \frac{1}{15} [t(6-t)]^{\frac{1}{2}}$$

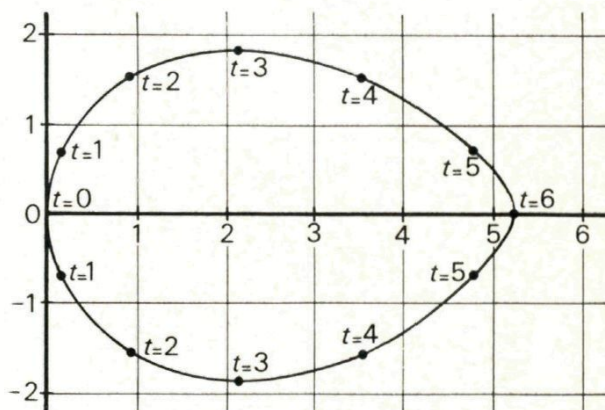
De bijbehorende grafiek staat in fig. 1.

De wortelvorm zorgt er voor dat t blijft tussen 0 en 6. De absoluuttekens zorgen dat er steeds 2 tegengestelde waarden van y komen. Dat garandeert de symmetrie. Hij heeft bovendien voor ons keurig bewezen

dat de kromme vloeiend loopt. Wie een rekenmachientje heeft, kan de bijgevoegde tabel zelf narekenen.

t	x	y
0	0	0
1	0,184	0,740
2	0,904	1,508
3	2,104	1,800
4	3,520	1,508
5	4,752	0,740
6	5,280	0

Fig. 1. Tabel van waarden van t , x en y .



Grafiek van de ei-kromme.

De oplossing is erg listig gevonden, maar we zouden de parametervoorstelling en de absoluutstrepen wel kwijt willen.

b. Het idee van prof. Freudenthal

Hij schreef ons: neem een derdegraads-kromme met 3 reële nulpunten. Vervang

vervolgens y door y^2 en de ei-kromme verschijnt!

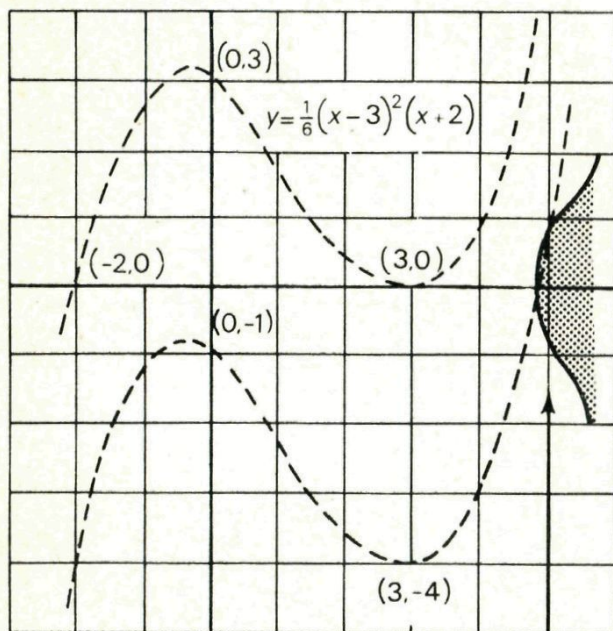
Hoe dat allemaal in zijn werk gaat staat in fig. 2.

We zijn uitgegaan van de kromme:

$$y = \frac{1}{6}(x-3)^2(x+2).$$

Vervolgens tekenen we:

$$y = \frac{1}{6}(x-3)^2(x+2) - 4 \text{ (zie fig. 2a).}$$

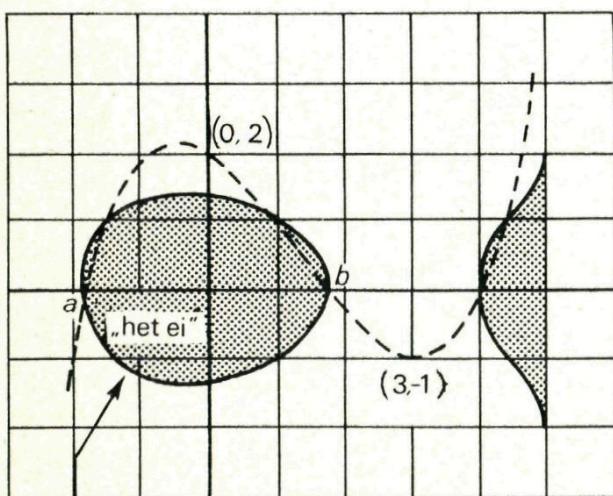


$$y^2 = \frac{1}{6}(x-3)^2(x+2) - 4$$

Fig. 2a.

Deze ontstaat uit de eerste door 4 eenheden verschuiving omlaag. Er verschijnt dan maar één snijpunt met de x -as.

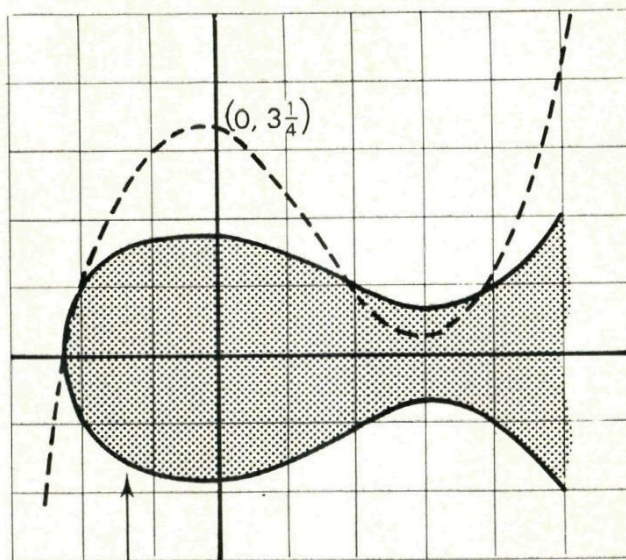
Wanneer we nu y vervangen door y^2 dan



$$\begin{cases} y^2 = \frac{1}{6}(x-3)^2(x+2) - 1 \\ a < x < b \end{cases}$$

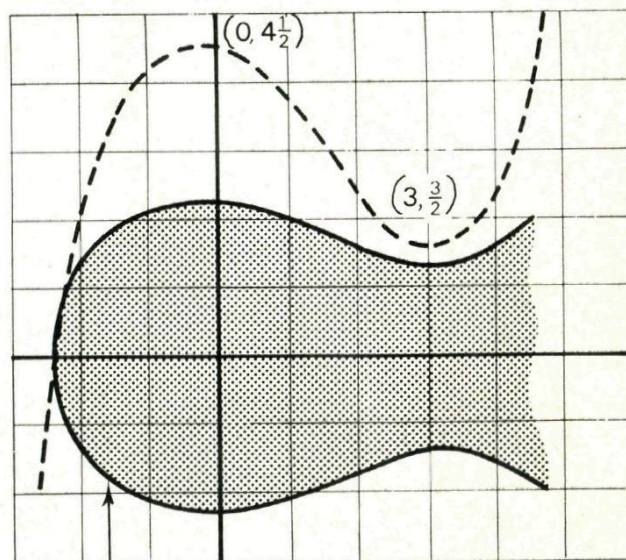
Fig. 2b.

bestaat deze grafiek alleen maar voor voldoende grote waarden van x (gearceerde gebied). Als we de oorspronkelijke grafiek maar één eenheid omlaag schuiven en weer y vervangen door y^2 krijgen we fig. 2b. Daarbij verschijnt het ei! Hoe bij nog verdere verschuiving het proces verloopt staat in de volgende tekeningen. Het ei verdwijnt daarbij weer.



$$y^2 = \frac{1}{6}(x-3)^2(x+2) + \frac{1}{4}$$

Fig. 2c.



$$y^2 = \frac{1}{6}(x-3)^2(x+2) + \frac{3}{2}$$

Fig. 2d.

Henk Baas uit Breda heeft een en ander uitgewerkt. Hij heeft geschikte coëfficiënten gekozen, punten berekend en het ei getekend. In fig. 3 staat het resultaat van zijn inspanning.

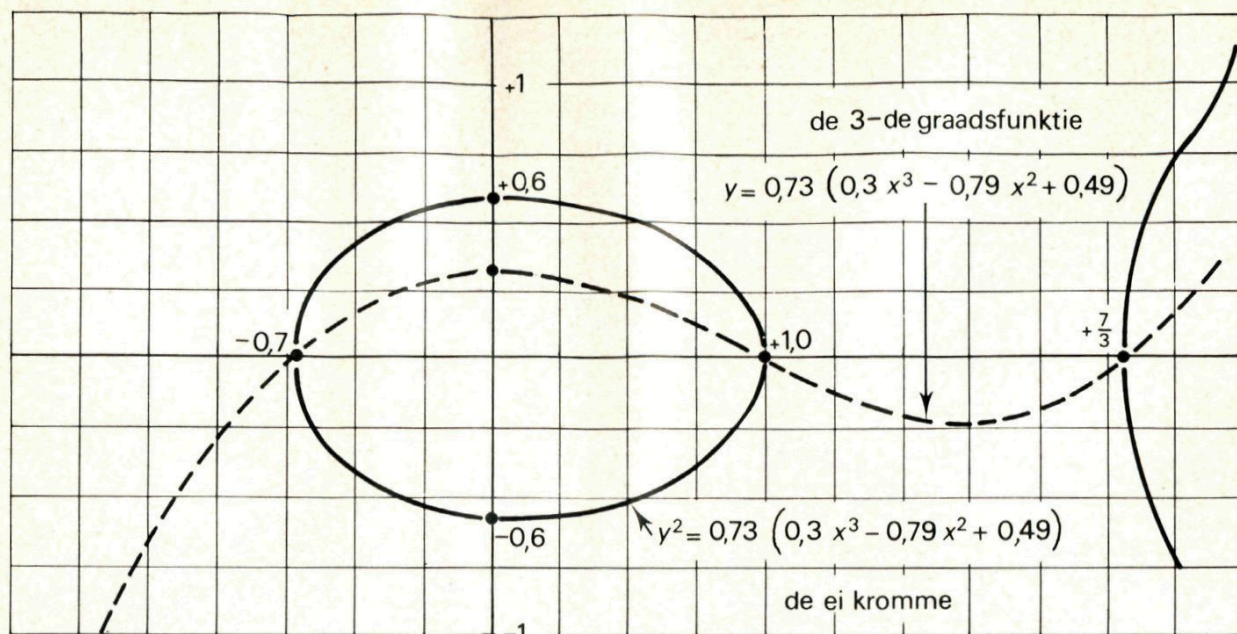


Fig. 3. De uitwerking van Henk Baas.

Om een fatsoenlijk ei te krijgen is hij uitgegaan van:

$$y^2 = 0,73 (0,3 x^3 - 0,79 x^2 + 0,49)$$

$$\text{of } y^2 = 0,73 (0,3 x - 0,7) (x + 0,7) (x - 1)$$

Het is beslist een fraaie oplossing.

De snijpunten met de x -as liggen bij $(1,0)$ en $(-0,7, 0)$ en met de y -as bij $(0, +0,6)$ en $(0, -0,6)$.

Voor waarden van x tussen $+1$ en $+\frac{7}{3}$ bestaan er geen waarden voor y . Voor hogere waarden van x wel weer. Ook voor x kleiner dan $-0,7$ zijn er geen uitkomsten voor y .

Ongetwijfeld een schrandere oplossing, alleen vervelend dat die tweede tak steeds opdoemt. Die ontbrak in het vorige ontwerp.

c. Het ei van Blok

Chris Blok uit Fijnaart is toch aan de slag gegaan met een combinatie van een halve cirkel en een halve ellips.

Vanuit het oogpunt van de natuur niet fraai, maar wiskundig en . . . fysisch knap uitgewerkt.

Zijn oplossing luidt:

$$x = r \cos t$$

$$y = pr \sin t + (p - 1)r |\sin t|$$

De bijbehorende kromme staat in fig. 4.

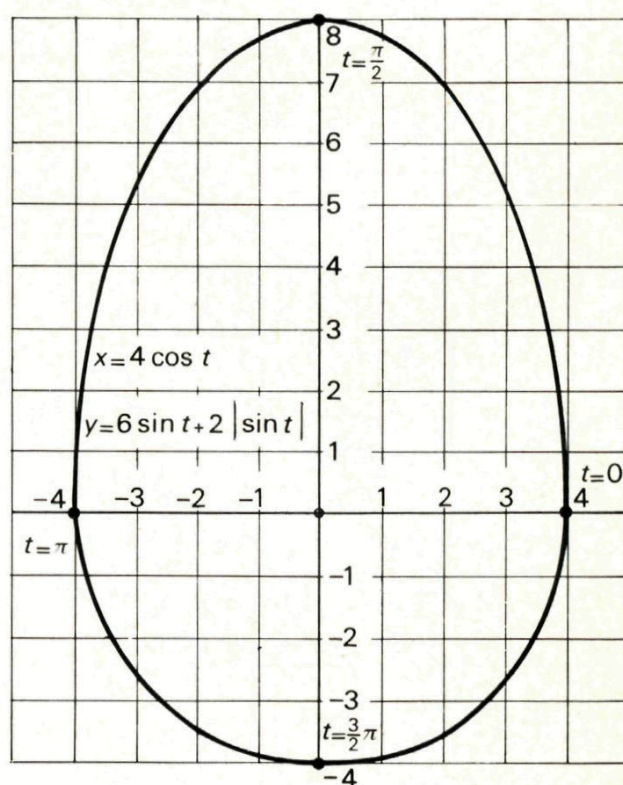


Fig. 4. De oplossing van Chris Blok.

Daar is voor $p = 1\frac{1}{2}$ en voor $r = 4$ gekozen. Er wordt listig met de absoluutstrepen gewerkt. Ga zelf maar na wat er gebeurt als je die weglaat.

Schoonheidsfouten:

1. de absoluutstrepen;
2. de parametervoorstelling;
3. de combinatie cirkel-ellips.

Een wiskundige zou hiermee zijn taak als volbracht beschouwd hebben, maar Chris Blok heeft behalve wiskunde ook natuurkunde in zijn pakket. Op zekere dag zat hij in het natuurkundekabinet te werken aan de oscilloscoop. Toen wilde hij ook 'het ei van Blok' op het scherm zichtbaar maken. Hij slaagde daar uitstekend in. Op het stel verticale platen zette hij een 50 Hz wisselspanning volgens het verloop:

$x = 4 \cos t$. Op het stel horizontale platen zette hij evenzo een wisselspanning van 50 Hz volgens: $y = 6 \sin t + 2 |\sin t|$.

Om $2 |\sin t|$ te realiseren, gebruikte hij een gelijkgerichte wisselspanning van een gelijkrichter (Grätzschakeling).

In fig. 5 staat het schema.

En zo kennen we voortaan behalve het ei van Columbus ook het ei van Blok. Of weet iemand nog wat beters???

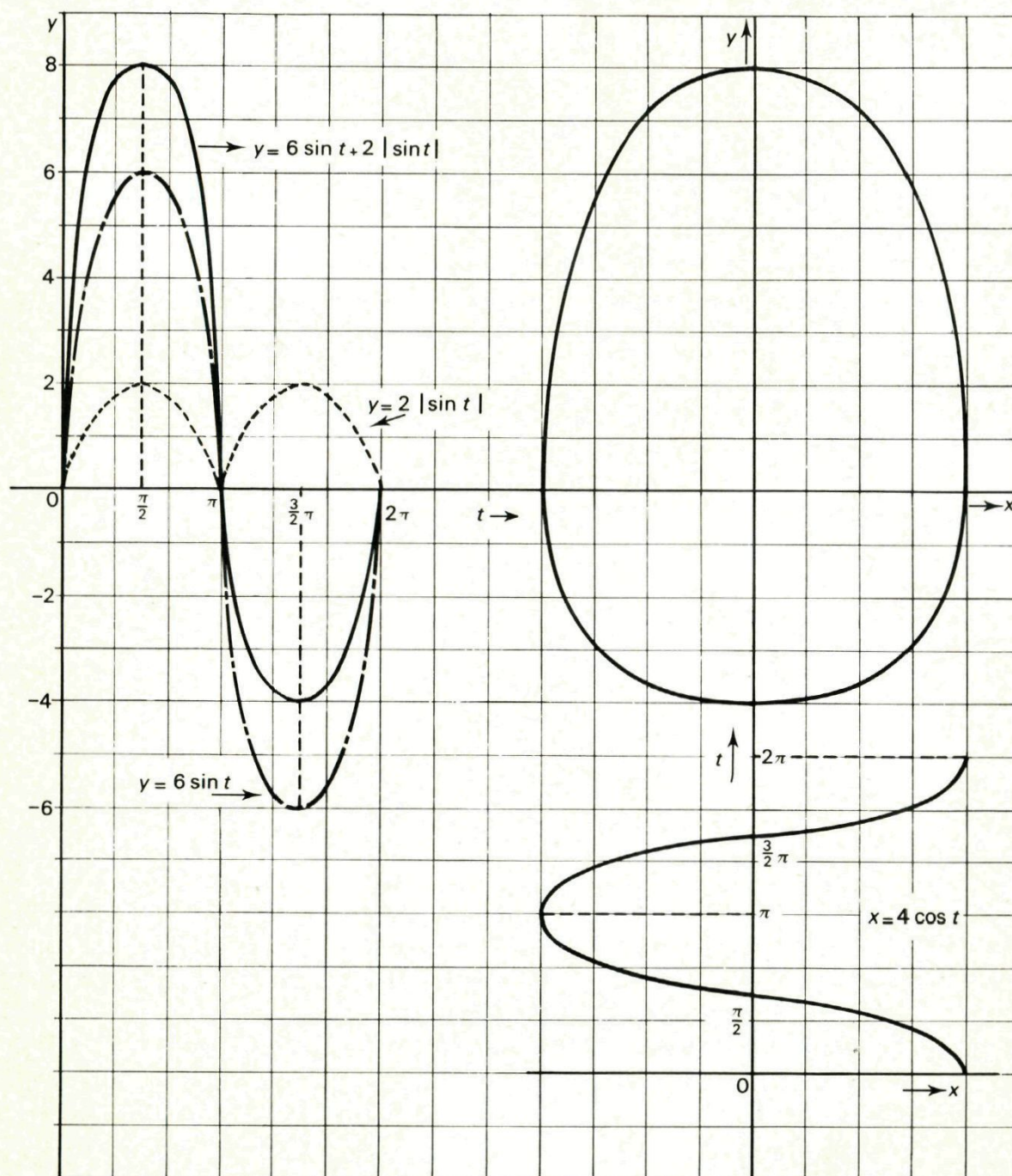


Fig. 5. Het ei van Blok.

Denkertje 2: tussen H en X

Een minimumprobleem voor hoogste klassers

In fig. 1 zijn 4 punten getekend A , B , C en D , die samen een vierkant vormen. Deze 4 punten zijn te verbinden door een H-vormig wegennet of door een X-vormig wegennet. De minister van verkeer en waterstaat verzoekt een nog korter verbindingsnet te ontwerpen.

De puzzel luidt: Stel een functie op van het totale wegennet van 5 stukken, zoals aangegeven in de middelste tekening, en bereken α zo dat de totale weglengte het kleinst wordt.

Voer daarna nog eens een soortgelijk onderzoek uit, maar stel daarbij dat de 4 punten op een rechthoek liggen.

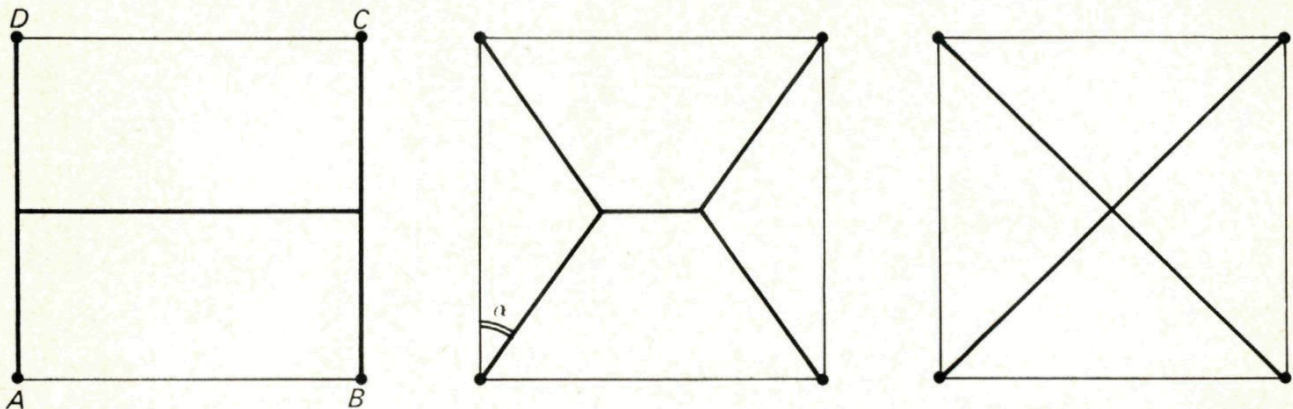


Fig. 1. H of X of nog korter?

°Schoonheid door symmetrie

De begrippen kunst en schoonheid hebben eeuwenlang stof gegeven voor eindeloze discussies. En nog is het zo, dat wat de een mooi vindt een ander koud laat of zelfs met een soort afgrijzen vervult.

Een spreekwoord zegt: 'Over kunst valt niet te twisten'. Ik zou het, gezien de feiten, liever willen veranderen in: 'Over kunst valt alleen maar te twisten.'

Een margriet

Buiten alle discussies over kunst en schoonheid om, blijkt dat vrijwel iedereen gevoelig is voor de bekoring die uitgaat van de combinatie: *regelmaat + variatie*. Die regelmaat houdt herhaling van eenzelfde motief in en ik geloof, dat dit inspeelt op de behoefte aan herkenbaarheid. En de variatie voorkomt, dat het eentonig, dood en al te doorzichtig wordt.

Eén wit slipje van de bloem van een margriet is niet direct fraai. Maar een hele bloem vindt iedereen mooi. Het is opvallend, dat de meeste bloemen en vruchten minstens één spiegelas hebben terwijl een groot aantal ook een rotatie-as heeft en deze symmetrie-elementen brengen nu juist én regelmaat én variatie in de vormen.



Fig. 1.



Fig. 2.

Knippen

Als je een blad papier *dubbel* vouwt en figuren uit dit gevouwen blad wegnipt, dan zullen bij openvouwen de figuur en zijn spiegelbeeld één geheel vormen. De vouw is dan de spiegelas. Dit knipwerk was vooral in de 18de en 19de eeuw heel populair (fig. 1 t.e.m. 3).

Fig. 4 is zo'n 'Scherenschnitt' van de beroemde sprookjesschrijver Hans Christiaan Andersen. Misschien niet zo erg fraai, maar wel interessant, omdat hij door plaatselijk extra vouwen aan te brengen enige spiegellassen heeft toegevoegd die niet door de hele figuur heen lopen.

Misschien heb je vroeger zelf wel eens 'matjes geknipt'. Daarvoor vouw je een vierkant of cirkelvormig stuk papier drie maal dubbel (fig. 5) of zelfs 4 maal. In het laatste geval wordt het knippen wel erg lastig omdat het pakketje dan 16 velletjes dik is.

Als je nu bij de rand bij A of bij B een figuurtje uit het pakket knipt zal het opengevouwen 'matje' een viertallige rotatie-as hebben (fig. 6) en bovendien twee



Fig. 3.

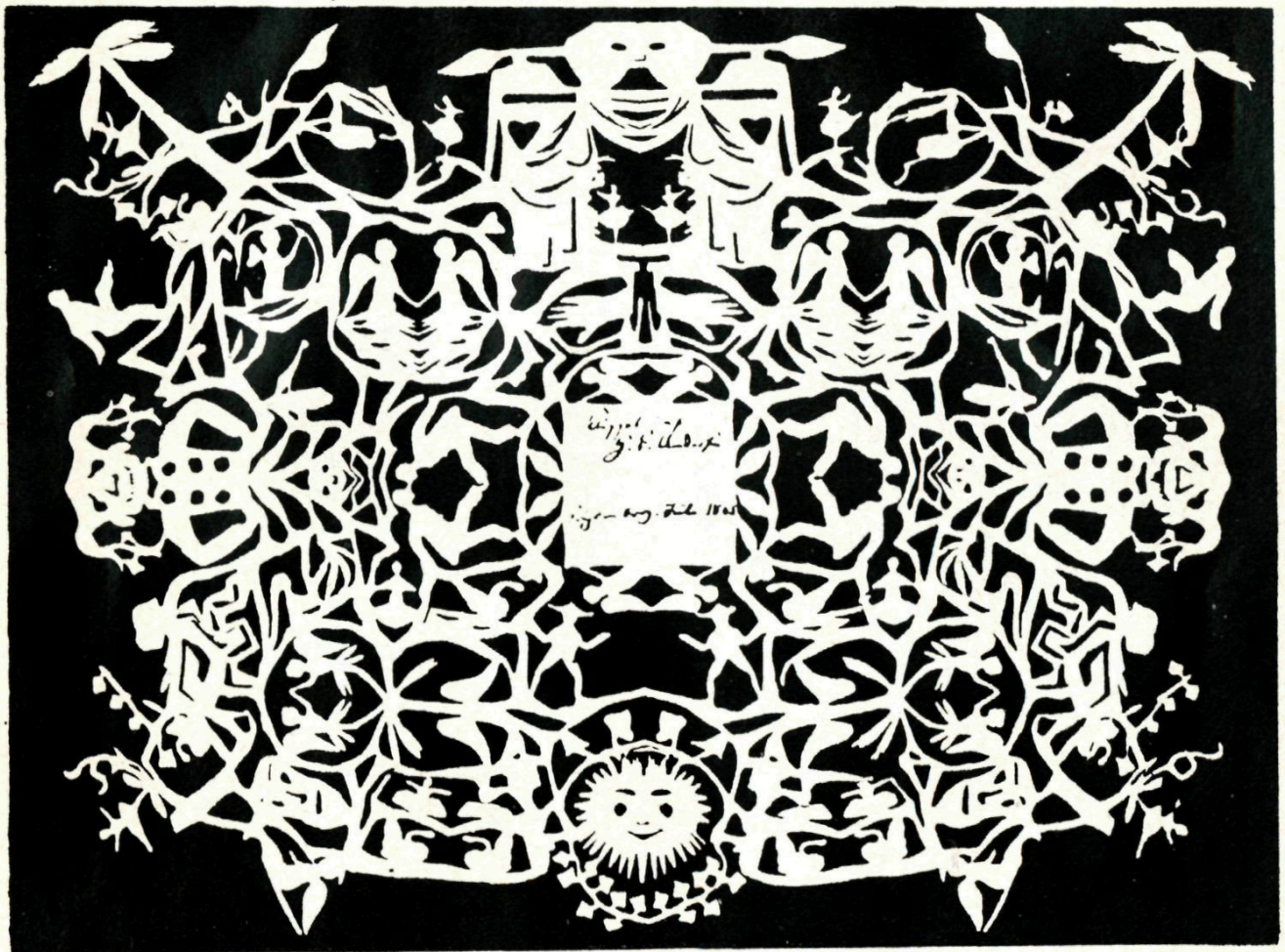


Fig. 4. 'Scherenschnitt' van Hans Christiaan Andersen.

spiegelassen (gestippeld). Je kunt dit direct uit fig. 5 aflezen.

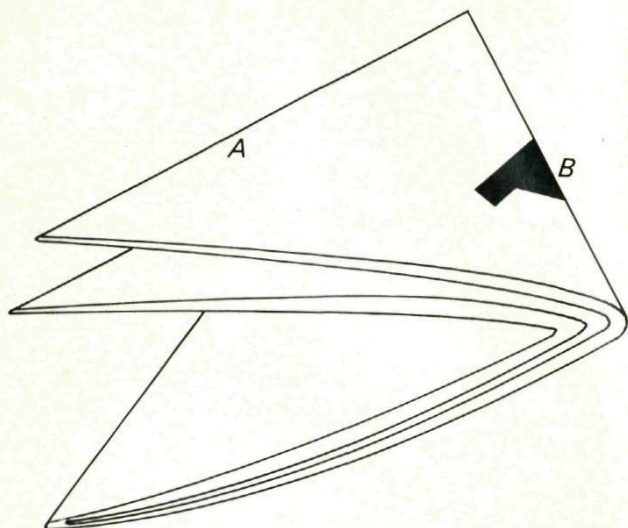


Fig. 5. Cirkelvormig stuk papier, 3 maal gevouwen.

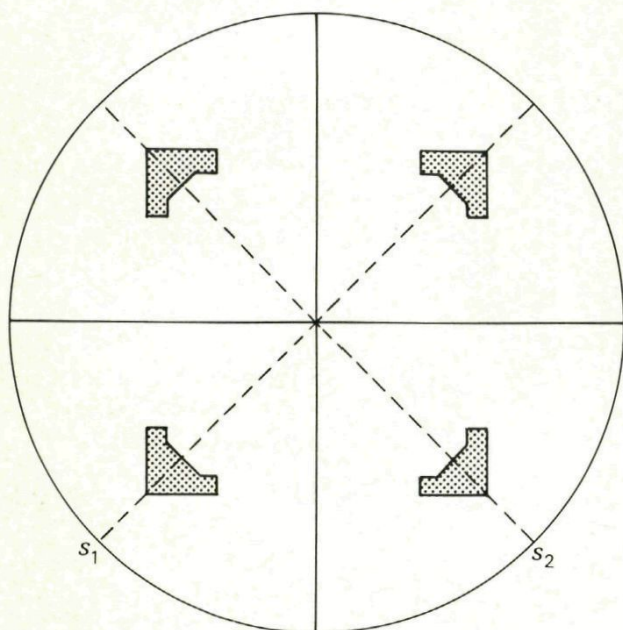


Fig. 6. Het papier van fig. 5 opgevouwen.

Bij het 'matjes knippen' krijg je alleen maar 2-, 4-, 8-... 2^n -tallige rotatie-assen en tegelijk het halve aantal spiegellijnen. Ondanks deze beperking ontstaan op deze manier uit ongelijke figuren prachtige matjes. Vergelijk daarvoor maar eens fig. 7 (het ingeknipte, 4 maal gevouwen blaadje) met fig. 8, die we krijgen als het blaadje van fig. 7 opgevouwen is.

Hoekspiegels en kaleidoscopen

Met behulp van twee spiegels kunnen we ook figuren krijgen met meervoudige rotatie-as en spiegellijnen. De beperking, wat de rotatie-assen betreft, die we bij het knippen hadden geldt hier niet. Ook 3-tallige, 5-tallige ... n -tallige rotatie-assen zijn verrassend eenvoudig te realiseren.

Laat bij een glashandel twee spiegeltjes snijden van ca 6 cm x 4 cm en plak aan de achterkant lucifersdoozjes of blokjes hout, zodat je de spiegeltjes verticaal kunt zetten met twee verticale zijden tegen elkaar (fig. 9). Als je een voorwerpje tussen de spiegels legt zie je ineens een hele krans van voorwerpjes in de spiegels verschijnen. Dit komt door herhaalde terugkaatsing aan beide spiegels.

Aan de hand van fig. 10 zullen we zien hoe deze vele spiegelbeelden ontstaan.

P is een punt tussen de spiegels S_1 en S_2 . P_1 is het spiegelbeeld van P in S_1 . P_{12} is het spiegelbeeld van P_1 in S_2 . P_{121} is weer het spiegelbeeld van P_{12} in S_1 en tenslotte is P_{1212} het spiegelbeeld van P_{121} in S_2 . Het laatste spiegelbeeld kan geen beeld meer geven in S_1 omdat het *achter* (het verlengde) van deze spiegel ligt. Op dezelfde manier vinden we P_2 , P_{21} etc.

Het voorwerp en alle spiegelbeelden daarvan liggen op een cirkel. Dit is eenvoudig in te zien (fig. 11). De spiegels zijn hier MA en MB . Door de spiegeling wordt $MP = MP_1$; $MP_1 = MP_{12}$ etc.

Als je de hoek die de spiegels vormen langzaam kleiner maakt, dan zie je niet alleen het aantal spiegelbeelden geleidelijk vermeerderen, maar je zult ook opmerken dat recht tegenover het voorwerp telkens twee spiegelbeelden elkaar naderen en dan samenvallen. Dit is het geval als de hoek die de spiegels met elkaar maken een geheel aantal malen in 360° zit. Noemen we deze hoek α dan is in dit geval dus: $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$. Waarin n een geheel getal.

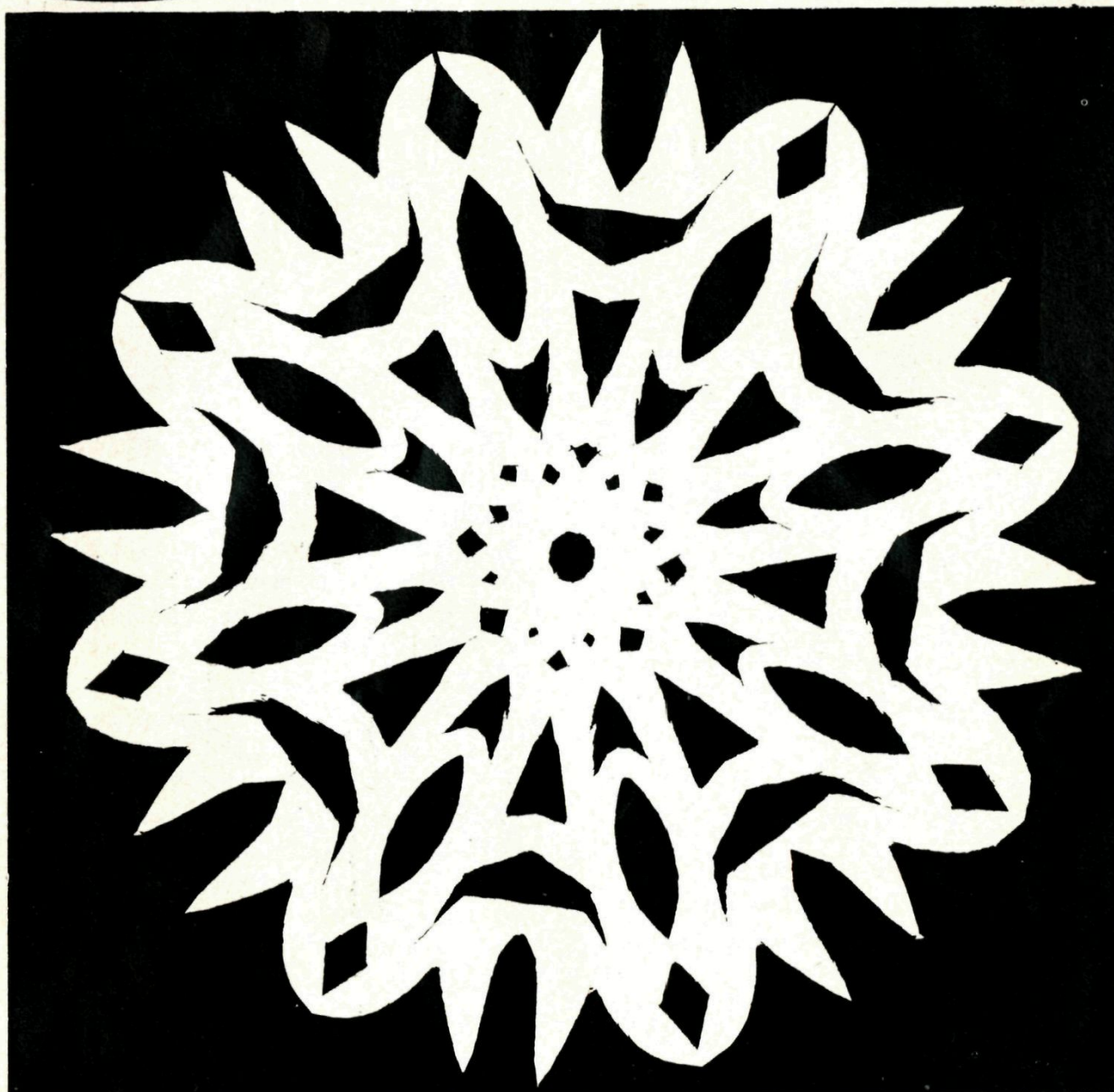
Fig. 7. Viermaal gevouwen stuk papier met delen langs de randen weggeknipt.



Dat dit zo moet zijn volgt uit de overweging, dat het hele cirkelsegment tussen de spiegels telkens weerspiegeld wordt. In fig. 11 hebben we als spiegelhoek (AMB) 60° gekozen en als we de spiegelbeelden gaan construeren blijkt ook P_{121} samen te vallen met P_{212} .

Als je een aantal gekleurde papiersnippers tussen de spiegels strooit ontstaat, mét de

Fig. 8. Fig. 7, opengevouwen.



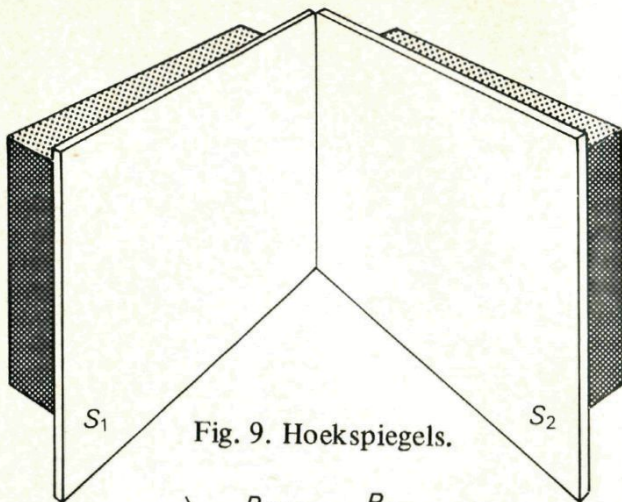


Fig. 9. Hoekspiegels.

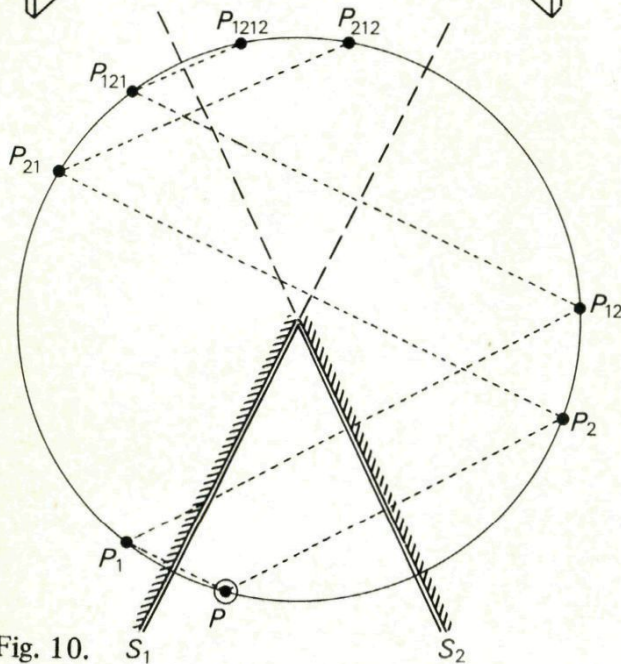


Fig. 10.

Constructie van de beelden bij hoekspiegels.

meervoudige weerspiegelingen hiervan, altijd een bevredigend beeld. Daarom wordt al eeuwenlang tot vermaak van groot en klein een instrumentje in de handel gebracht onder de naam *kaleidoscoop** en waarvan de werking berust op de zojuist besproken hoekspiegels. In een kokertje liggen twee repen spiegel die meestal een hoek van 60° met elkaar maken (fig. 12). Aan de voorkant is het kokertje afgesloten door twee glazen plaatjes waartussen gekleurde stukjes glas liggen die door schudden steeds een andere positie innemen. Aan de andere kant is een gaatje gemaakt om deze stukjes glas en alle spie-

* Van het Griekse: Kalos = mooi, eidos = beeld. Letterlijk: een mooi-beeld-kijker.

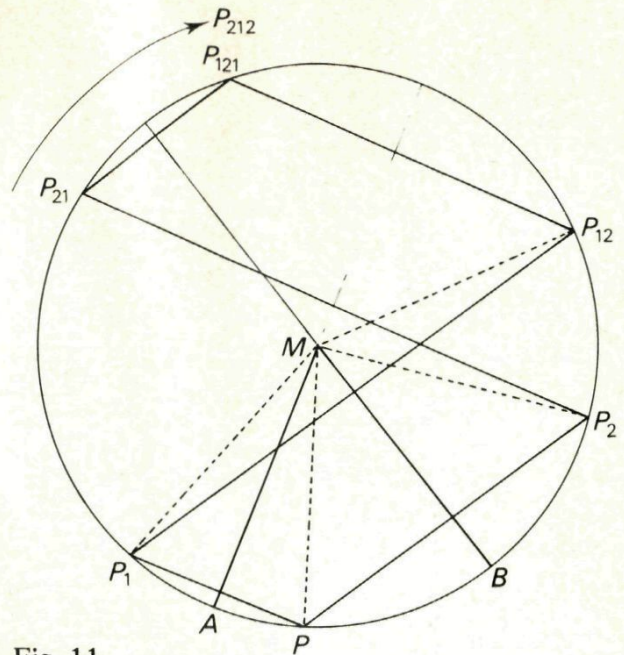


Fig. 11.

De beelden met het voorwerp liggen op een cirkel.

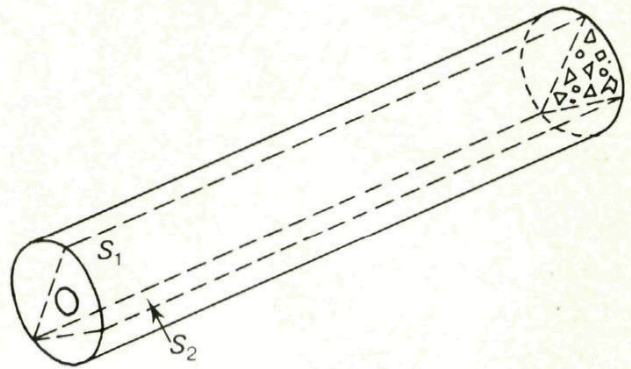


Fig. 12. De kaleidoscoop.

gelbeelden waar te nemen. Je kunt gemakkelijk zelf zo'n kaleidoscoop maken.

De weg van het licht

Als je naar een bepaald beeld (bijv. P_{12} van fig. 13) kijkt, dan komt het licht na herhaalde terugkaatsing in ieder geval uit P . Het is interessant om de weg die het licht heeft afgelegd terug te vinden. Dit gaat als volgt. Nemen we aan dat het oog in O is, dan verbinden we O met P_{12} deze lijn snijdt de spiegel S_2 in A . OA is dus in ieder geval een deel van de lichtstraal. Omdat P_{21} het spiegelbeeld is van P_2 moet het licht uit de richting P_2A komen. We trekken daarom P_2A , die S_1 snijdt in

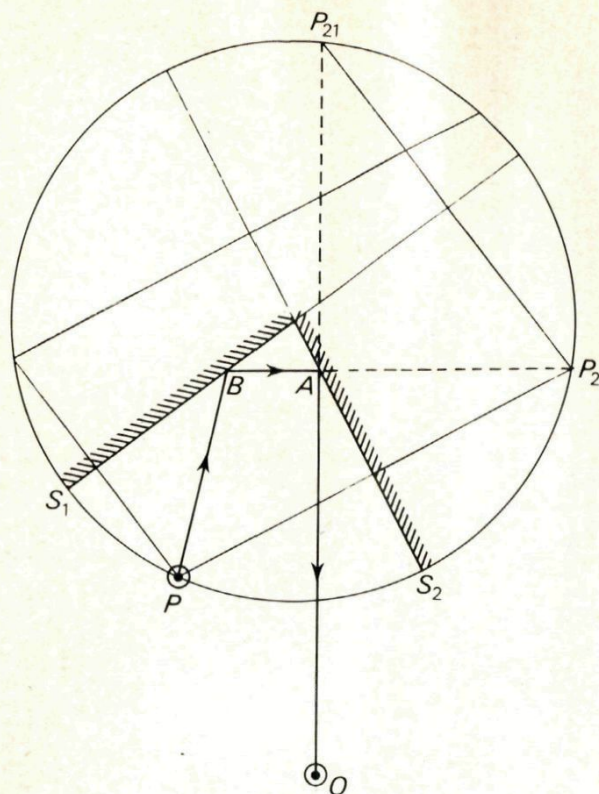


Fig. 13. De stralengang bij hoekspiegels.

B. Hiermee vinden we het stukje *BA*. Ten slotte verbinden we *B* met *P*. Om ons het beeld P_{12} voor te toveren heeft het licht dus de gebroken weg *PBAO* afgelegd.

Een merkwaardige hoekspiegel

Leg de hoekspiegels zo neer, dat ze een hoek van 90° met elkaar maken en ga er zo voor zitten dat je je gezicht erin kunt zien. Als je met je *rechteroog* knipoogt doet het *linkeroog* van het spiegelbeeld dit! Breng een vinger naar je rechteroog en in het spiegelbeeld verschijnt een vinger bij het linkeroog. In deze hoekspiegel worden links en rechts verwisseld! Hoe dit komt, kun je aan de hand van fig. 14 nagaan. Het beeld van de pijl *LR* wordt na twee terugkaatsingen $R_{21}L_{21}$ of zo je wilt het daarmee samenvalende beeld $R_{12}L_{12}$.

Rotatiesymmetrie zonder spiegelsymmetrie

Met vouwen en knippen en met hoekspiegels ontstaan figuren met rotatiesymme-

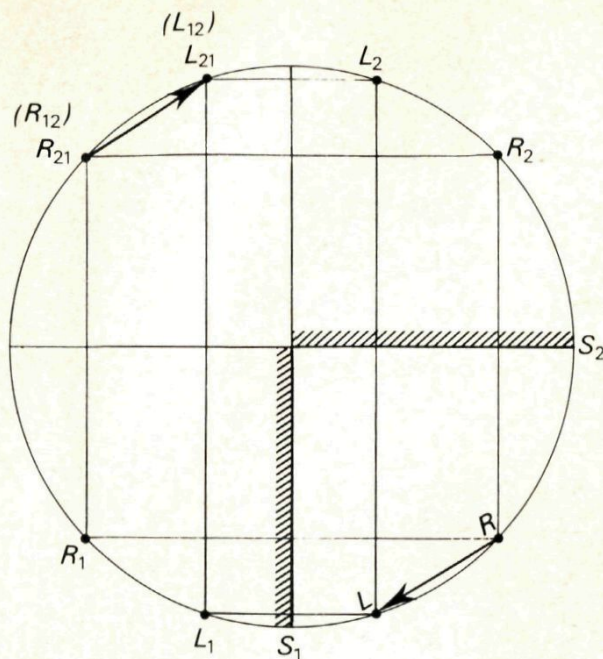


Fig. 14. Een bijzondere hoekspiegel.

trie, maar onvermijdelijk komen ook spiegels tevoorschijn. Natuurlijk zijn ook figuren mogelijk die alleen maar rotatiesymmetrie vertonen. Ik ken alleen geen manier waarop zo'n figuur min of meer vanzelf ontstaat; je zult hem gewoon moeten tekenen. In fig. 15 hebben we een cirkel in 6 gelijke segmenten verdeeld en in elk segment het linkse motiefje getekend. De hele figuur vertoont nu alleen maar een 6-tallige rotatie-as.

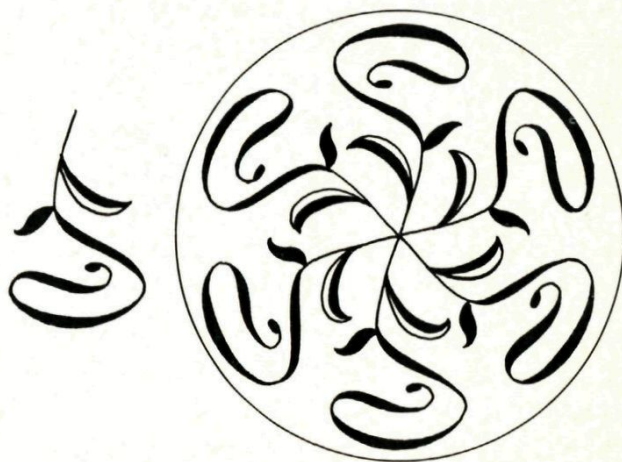


Fig. 15. Een figuur met 5-tallige rotatie-as zonder spiegels.

Denkertje 3: waar schuilt de fout?

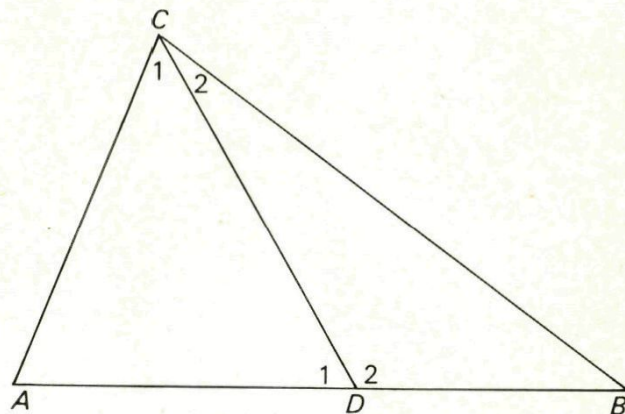
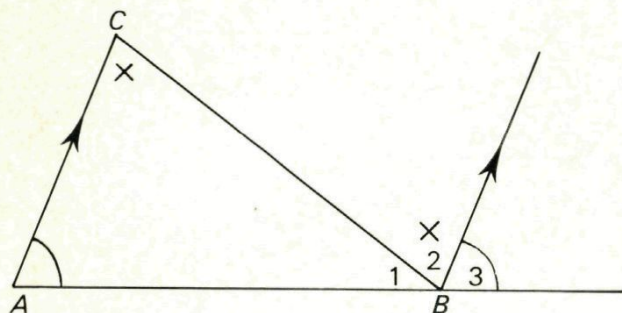
In schoolleerboeken komt voor de stelling: De som van de hoeken van een driehoek is 180° .

Het bewijs wordt meestal gegeven met bijvoorbeeld een hulplijn zoals in fig. 1.

Trek door punt B een halve rechte evenwijdig aan AC .

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle B_3 \\ \angle C = \angle B_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A + \angle B_1 + \angle C = \angle B_3 + \angle B_1 + \angle B_2 = 180^\circ$$

Er bestaat nog een ander aardig bewijs van deze al zo oude stelling: Zie fig. 2.



Trek in $\triangle ABC$ een willekeurige rechte CD .

Stel de som van de hoeken van een driehoek is x .

$$\text{In } \triangle ADC : \angle A + \angle D_1 + \angle C_1 = x$$

$$\text{In } \triangle BDC : \angle B + \angle D_2 + \angle C_2 = x$$

$$\begin{array}{l} \text{-----} + \\ \angle A + \angle B + \angle D_{1,2} + \angle C = 2x \\ \angle D_{1,2} = 180^\circ \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{-----} + \\ \angle A + \angle B + \angle D_{1,2} + \angle C = 2x \\ \angle D_{1,2} = 180^\circ \end{array}} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 180^\circ + x = 2x \\ x = 180^\circ \end{array}$$

Dit bewijs heeft één groot nadeel . . . het is namelijk fout.

Waar ontspoord de opsteller van dit bewijs?

Wie tenslotte het bedrieglijke niet vinden kan, vindt de oplossing achter in dit nummer.

Oplossingen van de denkertjes

1. Een optelsom in kleuren

We vereenvoudigen het schema:

$$\begin{array}{cccc} & & O & O & D \\ & G & E & E & L \\ G & R & O & E & . \\ \hline B & . & U & I & . \end{array}$$

Op de stippen komt hier geen cijfer te staan.

$$D + L = 10$$

Een kwadraat kan niet eindigen op een 2, 3, 7 of 8.

Voor D komen alleen in aanmerking 0, 1, 4, 5, 6 of 9.

0 en 5 vervallen vanwege ongeoorloofde cijferherhaling.

$$\text{dus } D = 1 \ 4 \ 6 \ 9$$

$$L = 9 \ 6 \ 4 \ 1$$

Zoek $O + 2E + 1$ eindigende op een ander cijfer I

$2O + E + \text{rest}$ eindigende op een ander cijfer U

$$G + 1 = B$$

$$G + R + \text{rest} = 10.$$

Voor N resteert het laatste nog ongebruikte cijfer.

Oplossing:

$$\begin{array}{r} 2 \ 1 \ 1 \ 6 \\ 7 \ 9 \ 9 \ 4 \\ 7 \ 2 \ 1 \ 9 \ 5 \\ \hline 8 \ 2 \ 3 \ 0 \ 5 \end{array} = 46^2$$

2. Tussen H en X

Stel de zijde van het vierkant a . Het verbindingsstuk heeft dan een lengte: $a - 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot \tan \alpha$ of $a - a \cdot \tan \alpha$.

De 4 schuine stukken worden ieder lang: $\frac{1}{2}a / \cos \alpha$.

De 5 stukken samen dus: $4 \cdot \frac{1}{2}a / \cos \alpha + a - a \cdot \tan \alpha$.

Als we het minimum van deze functie willen bepalen, moeten we differentiëren.

$$\text{De afgeleide functie wordt: } a \cdot \frac{2 \sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$$

Deze wordt 0 voor $\alpha = 30^\circ$

In het geval van de rechthoek, stellen we $AB = a$ en $AD = b$. Veronderstel hierbij a groter dan b . Het is zeer merkwaardig, maar de afgeleide functie wordt nul voor dezelfde waarde van α ! En dat was te verwachten. Waarom? In het geval dat a kleiner is dan b wordt het natuurlijk bereikt bij $\alpha = 60^\circ$.

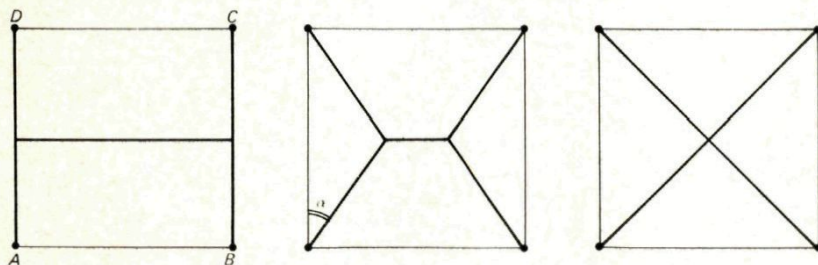
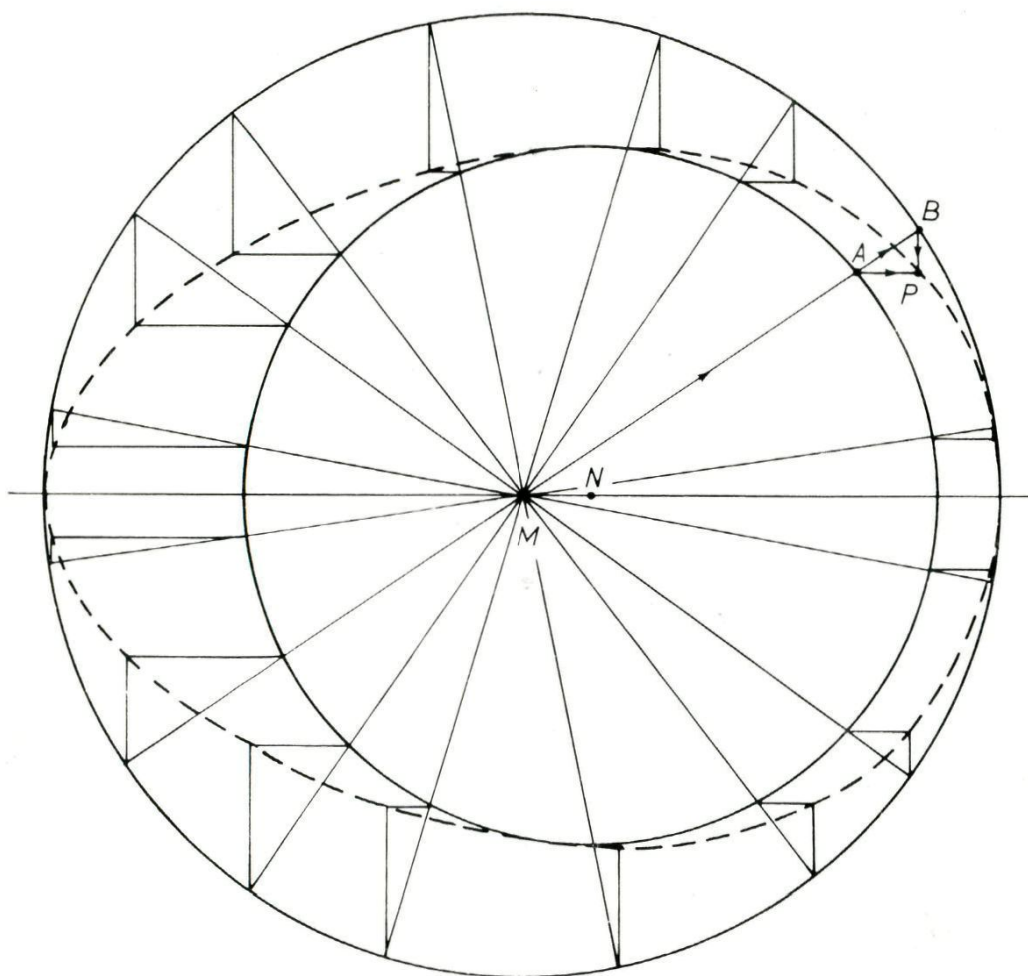


Fig. 1. H of X of nog korter?

3. Waar schuilt de fout?

Het is al mis met de eerste regel, want we weten niets van de som van de hoeken in een driehoek af. We mogen daarom niet aannemen, dat die som in *beide* driehoeken gelijk x is.

°Geen formules, maar wel een fraaie ei-constructie



Neem 2 excentrische cirkels met middelpunten M en N. De cirkels moeten binnen elkaar liggen. Vanuit M wordt telkens een halve rechte getrokken die de eerste cirkel in A en de tweede in B snijdt. Trek nu vanuit A een lijn evenwijdig met MN en vanuit B een lijn loodrecht daarop. Het snijpunt van beide lijnen is P. De verzameling van deze punten P is een ei-kromme. Voer dat proces zelf maar eens uit.

Inhoud

1. Binnenste-buiten 1
2. Windstoten van 162 km per uur 5
3. Hoe teken je? 8
4. Denkertje 1: een optelsom in kleuren 11
5. Knippatronen voor de stelling van Pythagoras 11
6. De ei-kromme 12
7. Denkertje 2: tussen H en X 16
9. Schoonheid door symmetrie 16
10. Denkertje 3: waar schuilt de fout? 23
13. Oplossingen van de denkertjes 24
14. Ei-constructie 25

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

A.J. Elsenaar, Harderwijk.

W. Kleijne, Heerenveen.

Ir. H. Mulder, Breda.

G.A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Stationsstraat 114, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 6,75 per jaargang. Voor anderen f 11,00.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

