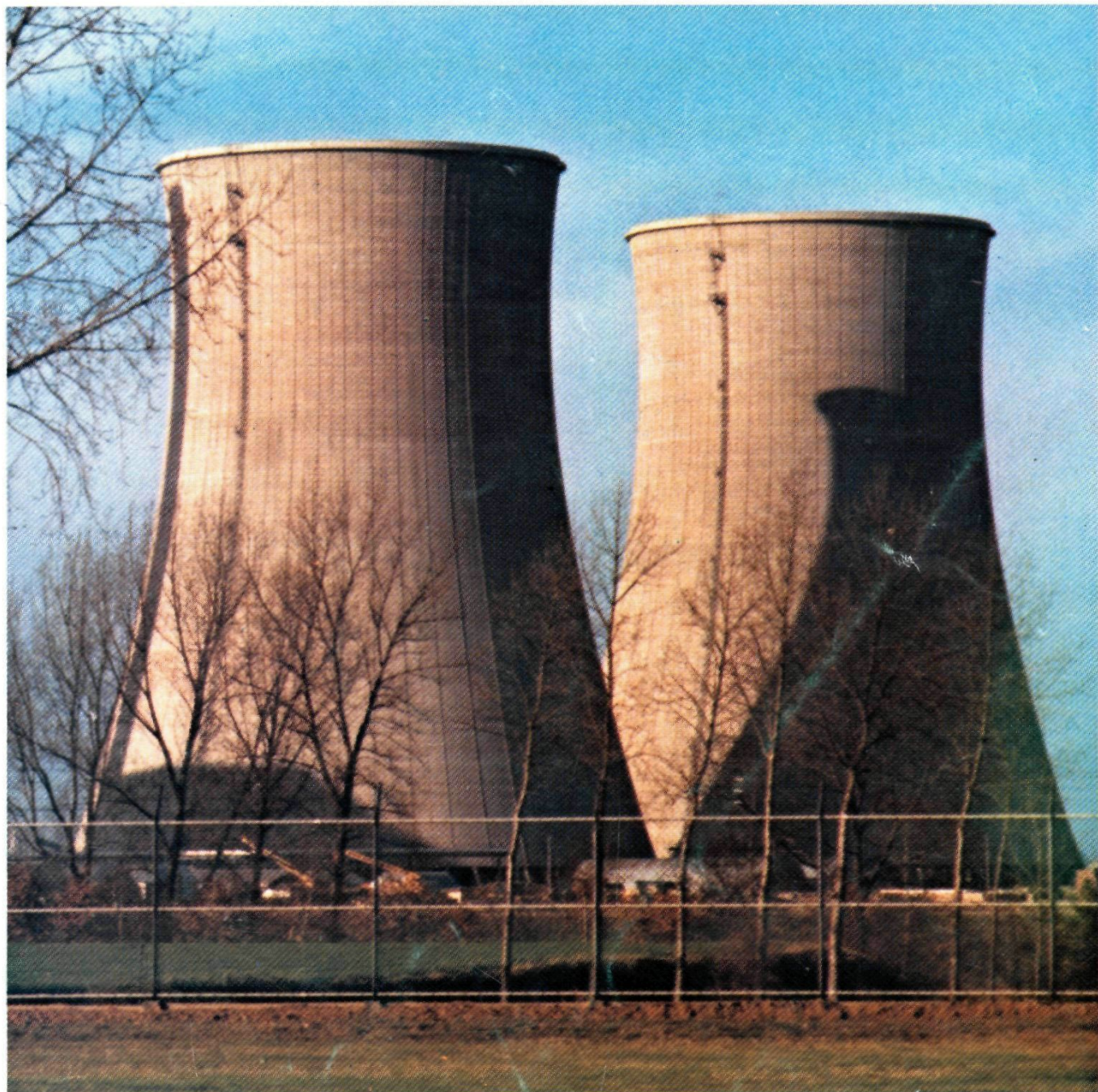


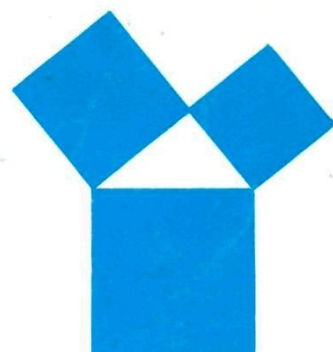


2

jaargang 17 / november 1977

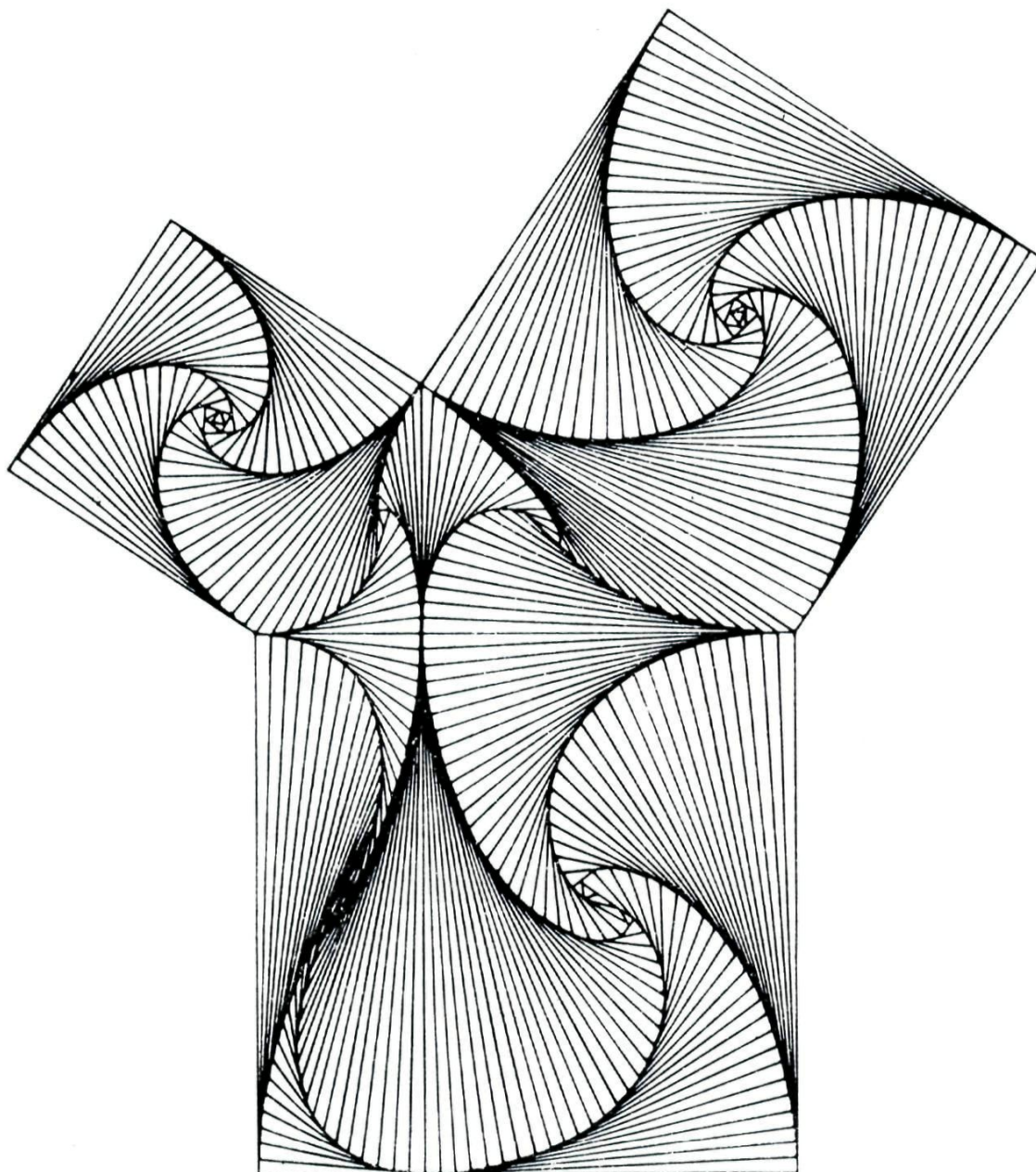
**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Dit fraaie lijnenspel speelt zich af binnen een welbekende figuur: een uitbeelding van de stelling van Pythagoras. We vonden deze figuur in het Engelse jeugdtijdschrift voor wiskunde: *Mathematical pie*. Zou je het constructievoorschrift kunnen achterhalen?

Koeltorens zijn technische installaties en geen monumenten. Toch zijn het prachtige ruimtelijke figuren. In het artikel: *Een hyperbool in een koeltoren*, gaan we daar nader op in.

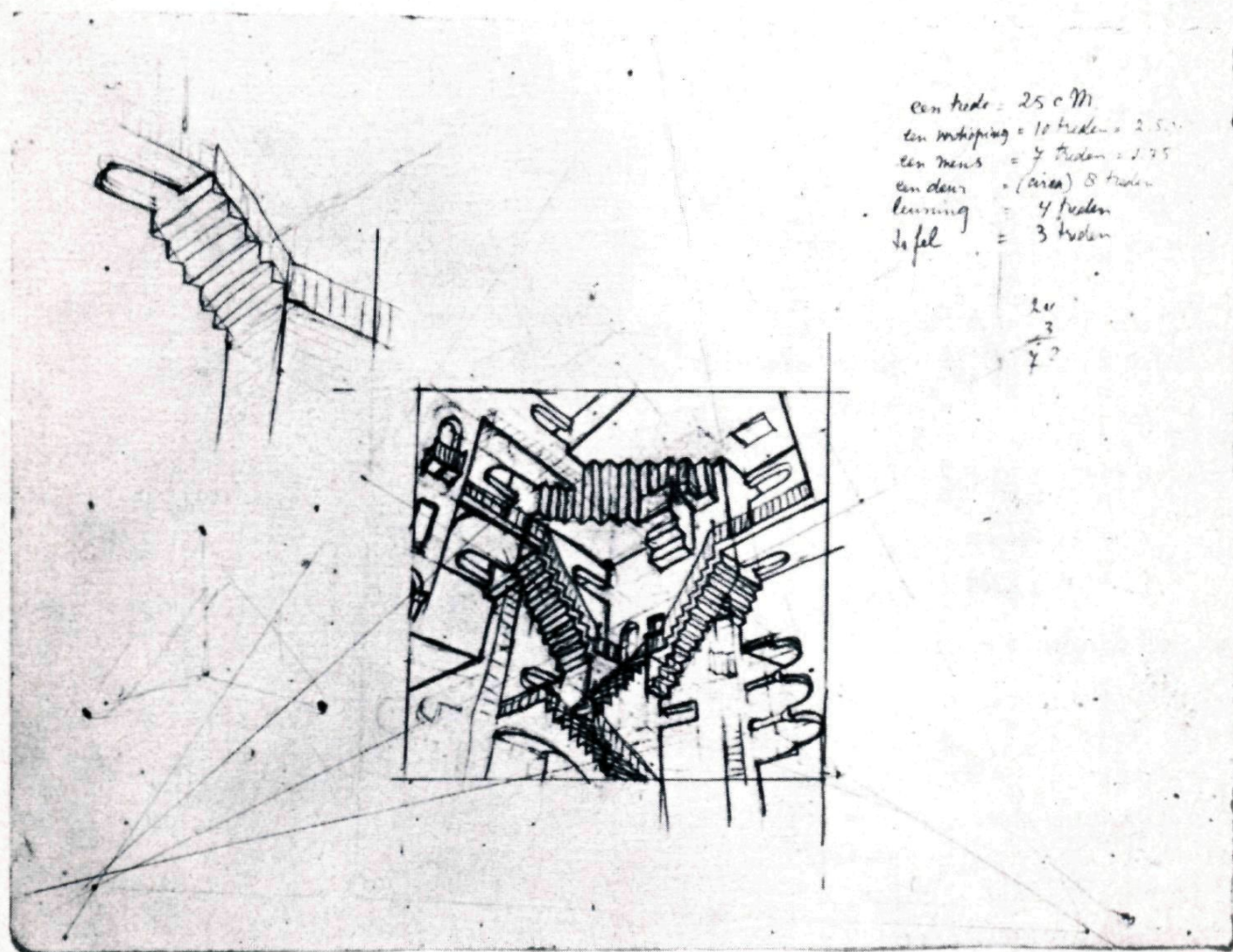
Werken met een onbereikbaar punt

Is het je nooit overkomen, dat je bij een tekening of constructie je tekenblad moest vergroten omdat je een lijn moest trekken naar een snijpunt dat buiten het tekenvlak lag? Bij de constructie van de uurlijnen van een zonnewijzer komt dit veel voor en eveneens bij perspectivische tekeningen, als het verdwijnpunt van een aantal in werkelijkheid evenwijdige lijnen buiten het tekenblad valt.

Het gebruiken van enorm grote tekenvellen is niet zo handig, ofschoon dit in de praktijk wel gebeurt. Escher bijvoorbeeld heeft voor zijn prenten: *Kubische ruimtevulling*, *Diepte*, en *Relativiteit* gewerkt met vellen van enkele vierkante meters! Fig. 1 laat een constructieschets van de prent *Relativiteit* zien.

Er zijn echter constructiemogelijkheden, waarbij niet buiten het tekenpapier gewerkt hoeft te worden. We geven hier twee veelgebruikte methoden en misschien kun je zelf nog wel andere bedenken.

Fig. 1. Escher gebruikte een heel groot vel papier om de verdwijnpunten van *Relativiteit* te kunnen bereiken.



De hoogtelijnmethode

In fig. 2 zijn de lijnen a en b getekend en hun snijpunt S ligt buiten het tekenblad. Gevraagd: teken een lijn die het gegeven punt P met het snijpunt van A en B verbindt.

De hele truc is nu, dat we zorgen dat P het hoogtepunt wordt van een driehoek, waarvan de zijden op a en b liggen, en waarvan het onbereikbare snijpunt S de tophoek is.

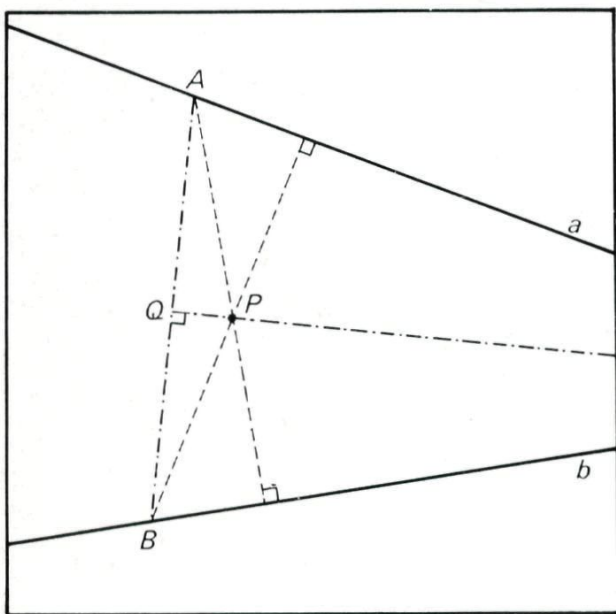


Fig. 2. De hoogtelijnmethode.

Trek daarvoor door P loodlijnen op a en b (gestippeld in fig. 2). Trek de lijn AB en laat vanuit P een loodlijn PQ neer op AB . Het verlengde van PQ zal nu door het onbereikbare snijpunt S gaan, omdat de loodlijnen van $\triangle ABS$ door een punt gaan.

De verdwijnpuntliniaal

Bij perspectiefconstructies is deze methode onhandig, omdat daar meestal een groot aantal lijnen door het onbereikbare verdwijnpunt getekend moeten worden, zoals voor het tekenen van fig. 3. Met de hoogtelijnmethode zouden we steeds weer nieuwe hoogtelijnen moeten trekken

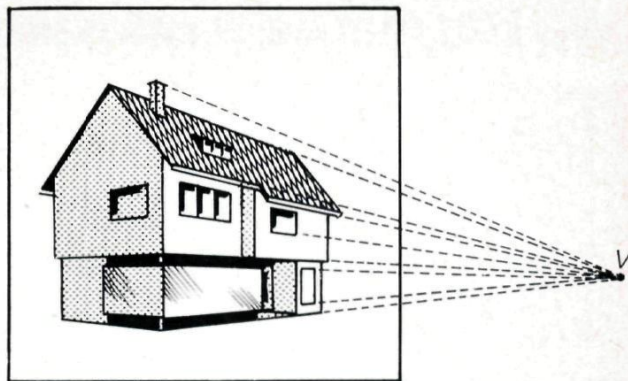


Fig. 3. De verdwijnpunten van de meeste perspectivische tekeningen liggen buiten het tekenblad.

en steeds andere punten A en B op a en b krijgen. Dit is tijdrovend en het tekenblad wordt ontsierd door talloze hulplijnen.

We maken dan gebruik van een zg. verdwijnpuntliniaal. Om te begrijpen hoe die werkt, kunnen we het beste uitgaan van een gelijkbenige driehoek APB (fig. 4), waarvan de hoekpunten op een cirkel liggen. De deellijn van $\angle P$ gaat door M en snijdt de cirkel in S . Nemen we nu een punt Q en verbinden we dit met A en B , dan zullen $\angle P$ en $\angle Q$ gelijk zijn en QS is de deellijn van $\angle Q$. Dit berust allemaal op een stelling uit de meetkunde: de omtrekshoek is gelijk aan de helft van de boog waarop hij staat.

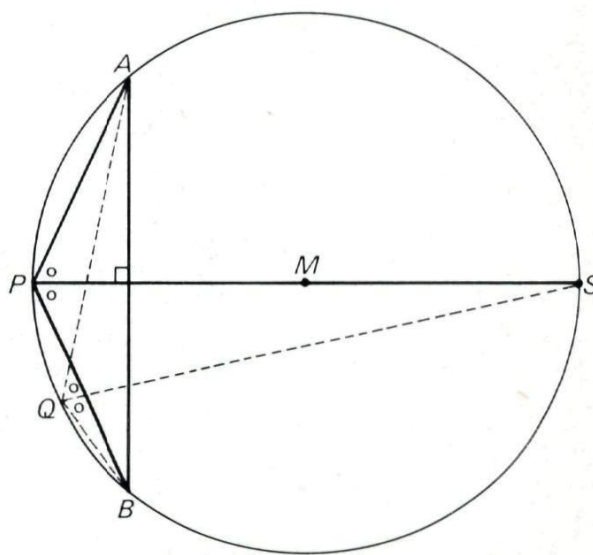


Fig. 4. $\angle P = \angle Q$.

Als we de stompe hoek met zijn deellijn kunnen 'materialiseren', hebben we een instrument waarmee we lijnen kunnen trekken, die altijd door een zelfde punt *S* gaan. In fig. 5 zien we hoe dat kan. De stompe hoek en zijn deellijn zijn uit karton geknipt of gemaakt van plastic of hout. *A* en *B* zijn punaises die in de te-

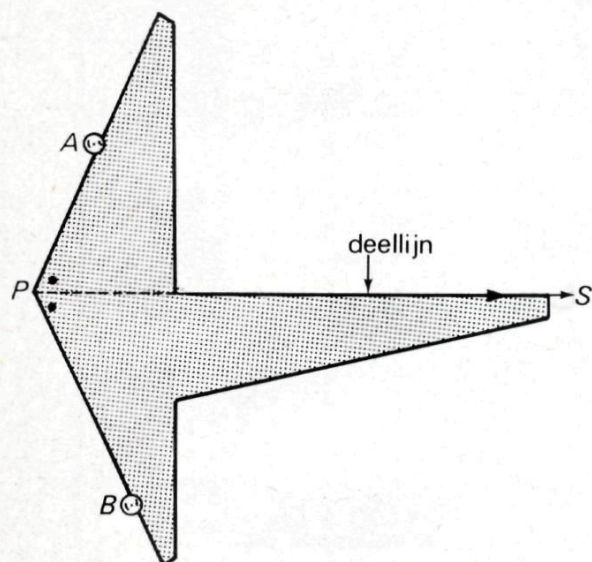


Fig. 5. De verdwijnpuntliniaal.

kenplank geprikt worden, zo, dat de benen van de hoek erlangs kunnen schuiven. In elke stand van de verdwijnpuntliniaal, zal de deellijn steeds door hetzelfde punt gaan, als de benen van de hoek maar tegen de punaises rusten.

In fig. 6 zie je hoe de verdwijnpuntliniaal gebruikt wordt.

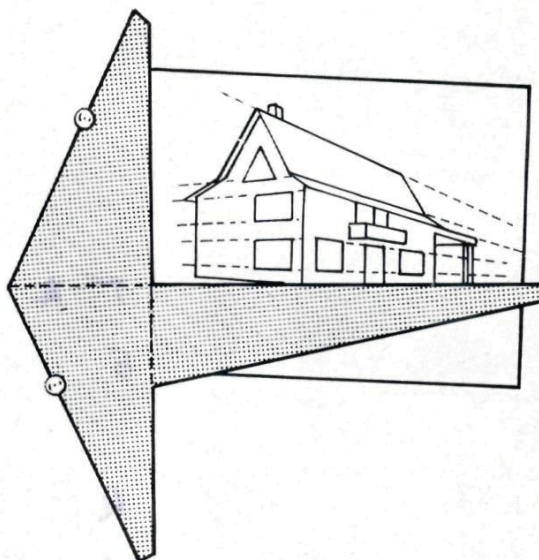


Fig. 6. Zo wordt de verdwijnpuntliniaal gebruikt.

°Denkertje 1: Optelling in nationale kleuren

In deze optelsom komen tien verschillende letters voor. De bedoeling van deze puzzel is, de letters te vervangen door cijfers. Een zelfde letter moet steeds door een zelfde letter, en verschillende letters natuurlijk ook door verschillende cijfers vervangen worden. Dit moet op dusdanige wijze geschieden, dat een kloppende som ontstaat.

In deze optelling mag geen der getallen met een nul beginnen. Daar de cijfers D en T onderling omwisselbaar zijn, zullen er driemaal twee oplossingen bestaan.

$$\begin{array}{r}
 \text{R O O D} \\
 \text{W I T} \\
 \hline
 \text{B L A U W}
 \end{array}$$

Het zal niet veel moeite kosten die oplossing te vinden, die voor *elk* der termen ROOD, WIT en BLAUW, drie getallen oplevert, die ieder zijn opgebouwd uit *opeenvolgende* cijfers.

(Ir. Nijon, Paramaribo, Suriname)

Kruiswoordraadsel



Horizontaal:

1. Jaarlijkse wiskundewedstrijd.
2. Wijze van raken van twee cirkels (afk.).
3. De nog niet uitgerekende som van de termen van een rij.
4. Een deelverzameling van $P \times Q$, waarin P en Q verzamelingen zijn.
5. Deze getallen vormen een deelverzameling van $\mathbb{R}$.
6. Lijn die nodig is om een bewijsvoering te voltooien.
7. Soorten tabellen.
8. Deel van een vergelijking.
9. Onderdeel van de wiskunde.
10. Wijze van redeneren, waarbij men vanuit het bijzondere tot het algemene besluit.
11. Hebben cirkels niet, driehoeken wel.
12. Bewijsvoering, een redenering in overeenstemming met een andere redenering.
13. Getal dat in elke deling voorkomt.
14. Element van $\mathbb{N}$.
15. Bezit een kubus.
16. Kegelsnede.
17. Element van $\mathbb{Z}^+$.
18. Daarmee wordt een hoeveelheid aangeduid.
19. Gelijkwaardig.
20. Een getal dat in de oudheid een heel bijzondere plaats innam.
21. Regelmatig zesvlak.
22. Een omwentelingslichaam.
23. Wordt gebruikt om moeilijker berekeningen te vereenvoudigen (afk.).
24. Zo kan men de gehele getallen noemen wegens een kenmerkende eigenschap, die ze hebben.
43. Bekend onmeetbaar getal.

Verticaal:

1. Een nieuwere tak van de wiskunde.
5. Begrip uit de integraal rekening.
25. Dat vormen vergelijkingen, waarvan je een gemeenschappelijke oplossing moet zoeken.
26. Figuren, waarvan de som van de hoeken 180° is.
27. Teken je bij meetkunde.
28. Gebruik je bij bewijzen.
29. Heeft noch lengte noch breedte.
30. Gaat vooraf aan alle stellingen.
31. Element van $\mathbb{N}$.
32. Kan een grafiek wel eens vertonen.
33. Dat zeg je van de bewering $2 + 8 = 12$.
34. Bijzondere relatie.
35. Wordt toegepast op een of meer van de veranderlijken bij het oplossen van een stelsel vergelijkingen.
36. Het grootste gehele getal waardoor teller en noemer deelbaar zijn (afk.).
37. Een kegelsnede.
38. Middelste getal (bij statistiek).
39. Soort parallellogram.
40. Bepalen een punt bij het tekenen van een grafiek.
41. Een op systematische wijze verdeeld lijnstuk, dat als maatstaf dient.
42. Deelverzameling van alle vergelijkingen.
43. Bekend irrationaal getal.

De oplossing staat in het volgende nummer.

Als je het kruiswoordraadsel erg lastig vindt kun je nog van het volgende lettergrepenlijstje gebruik maken. Daar staan alle lettergrepen in die in de kruiswoordpuzzel voorkomen. Telkens als je zeker bent van een woord kun je een of meer lettergrepen doorstrepen.

~~a~~-a-a-aan
~~be~~-bus
~~ee~~
~~d~~-de-de-de-deel-den-di-di-drie-drie-
due
~~e~~-e-e-een-een-el-el-ex
fels-fi-func
~~g~~-g-ge-ge-ge-ge-gen-gie-go-grand-guur
heids-hoe-~~hoek~~-hulp
~~in~~-in-in-ir
ke-ken-kin-ku-kun
la-le-le-len-lent-li-lid-ling-lo-log-lips-
lips-lij-lym-lijn-lijk-lus

ma-me-me-mi
~~na~~-na-na-na-nen-ni-ning
~~o~~-o-o-o-on-or-or
pi-pi-pi-po-pun-punt
qui
ra-re-re-reeks-rib-ruit-rus
sel-schaal-schijn-stel-stel
~~ta~~-tal-tal-tal-te-ten-ten-ti-ti-tie-tie-
tie-tie-tien-tro-tric
va-ver
~~w~~-waar-waar-wis
xi

∞ Een hyperbool in een koeltoren

Terugkerend van een vakantie in Zuid-Limburg passeerden we de Maas bij Maasbracht en zagen daar de twee grote koeltorens van de elektriciteitscentrale van de P.L.E.M. (fig. 1). We hebben in dit tijdschrift al eens meer geëxperimenteerd met krommen, herkenbaar bij dingen van alle dag. Hier gaat het duidelijk om een hyperbool. Welke? We hebben de torens in het voorbijgaan gefotografeerd om daar nu wat verder aan uit te zoeken.

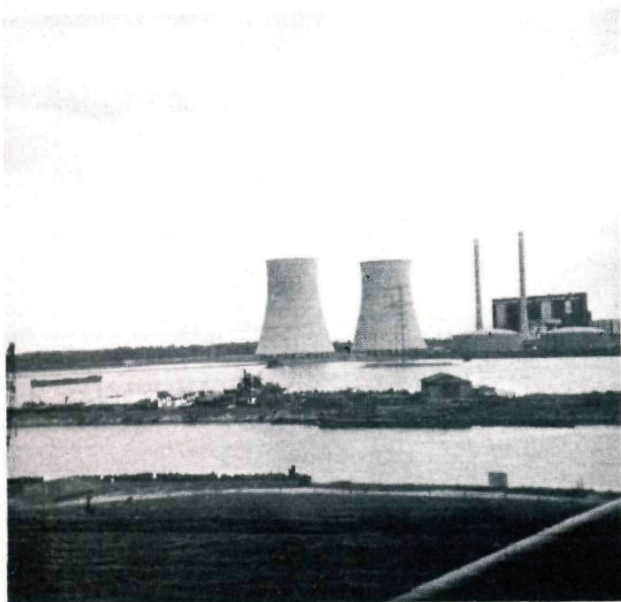


Fig. 1. Koeltorens aan de Maas bij Maasbracht.

Foto en grafiek

We leggen op de foto (fig. 2) de y -as in de verticale richting, dus samenvallend met de as van de toren.

Voor de richting van de x -as kiezen we de kortste afstand tussen beide takken. Zo worden x - en y -as symmetrie-assen van de koeltoren.

We proberen nu de vergelijking van de contourenkromme te vinden.

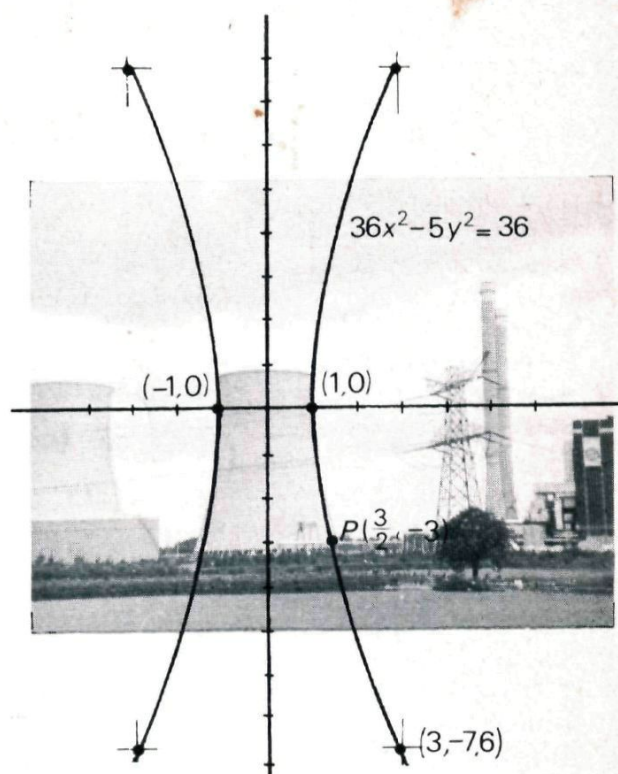


Fig. 2. Een hyperbool als silhouet van een koeltoren.

In het algemeen is de tweedegraadskromme die bij deze vorm hoort te schrijven als:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

We moeten nu de waarden van a en b bepalen. Daarvoor moeten we eerst een eenheid kiezen. Het beste lijkt daarvoor de halve 'taillebreedte' te nemen. Op die manier wordt a gelijk aan 1.

We kunnen de waarde b berekenen door de coördinaten van een gegeven punt in te vullen.

Om een zo goed mogelijk samenvallen van het silhouet van de toren en de hyperbool te garanderen, kunnen we daarvoor het best een uiterst punt aan de voet van de toren nemen.

Voor de coördinaten van P lezen we af: $(1\frac{1}{2}, -3)$.

Als we dit invullen vinden we voor $b^2 = \frac{36}{5}$.

Reken dit zelf maar na.

De vergelijking voor de kromme wordt dan:

$$36x^2 - 5y^2 = 36$$

De hyperbool is nu verder wel te tekenen.

We kunnen nog een waarde voor x kiezen,

bijvoorbeeld $x = 3$. Als we dan y uitrekenen vinden we daarvoor $y = \pm 7,6$. Vanwege de symmetrie hebben we dan gelijk weer 3 andere punten.

Voor het bereik van y lezen we af: $[-3; +1]$.

Zo is dus $36x^2 - 5y^2 = 36$ het wiskundige visitekaartje van de koeltorens aan de Maas bij Maasbracht.

Denkertje 2: Rekenpuzzel

Probeer de nog niet gemaakte opgaven te vinden. In elke opgave moet negen keer hetzelfde cijfer gebruikt worden.

1	$1 \cdot 111 - 1 \cdot 11 + 1 - 1$	= 100
2		= 100
3		= 100
4		= 100
5		= 100
6	$66 + 6 \cdot 6 - \frac{6+6}{6} + 6 - 6$	= 100
7		= 100
8		= 100
9	$99 + 9^{999} - 999$	= 100

°Tovervierkanten in formule

Tovervierkanten zijn wel eens eerder in *Pythagoras* aan de orde geweest. Het hier volgende artikel, ingezonden door Jules van der Spek uit Zoetermeer, bekijkt deze vierkanten weer op een andere manier.

Eerst wordt beschreven hoe men bepaalde tovervierkanten kan construeren, daarna wordt deze constructie omgezet in formules, waarmee elk getal uit zo'n vierkant berekend kan worden.

Tot slot laten wij een computer met behulp van deze formules twee flinke vierkanten opstellen.

Het tovervierkant

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Fig. 1.

13	2	3	16
8	11	10	5
12	7	6	9
1	14	15	4

Een tovervierkant is een dusdanige ordening van de getallen 1, 2, 3, ... in een vierkant, dat de som van de getallen uit elke rij gelijk is aan de som van elke kolom, gelijk aan de som van elke diagonaal. In de vierkanten van fig. 1 kom je op 15, respectievelijk 34. Tovervierkanten met een oneven aantal hokjes zijn gemakkelijk in te vullen. Een van de constructies volgt hier.

De constructie

De volgende methode is geschikt om willekeurig grote tovervierkanten van $n \times n$ getallen te construeren. De enige beperking is dat n een oneven getal moet zijn. We zullen deze methode aan de hand van een voorbeeld, waarin $n = 5$, beschrijven:

- Rangschik de getallen van 1 tot n^2 als in fig. 2
- Breng in de figuur een centraal vierkant aan zoals in fig. 3

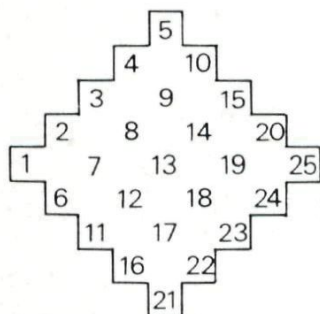


Fig. 2.

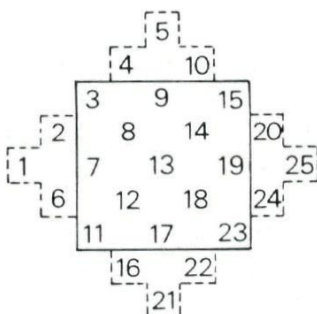


Fig. 3.

- Schuif alle getallen, die buiten het centrale vierkant vallen, n plaatsen dit vierkant in (fig. 4). Als dit gebeurt is vormen de getallen binnen het vierkant een tovervierkant (fig. 5).

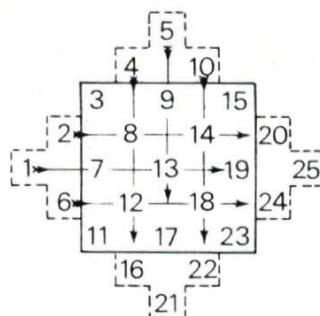


Fig. 4.

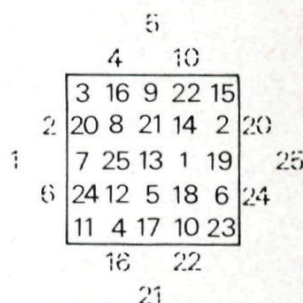


Fig. 5.

Deze constructie is eenvoudig met de hand uit te voeren, maar moeilijk tot een computerprogramma te vormen. Het zou een stuk eenvoudiger zijn, als we een getal in het tovervierkant met een of andere formule konden berekenen.

Om deze formule te vinden, keren we terug naar het 'primitieve' vierkant 5×5 en brengen er een geschikt coördinatenstelsel in aan (fig. 6), zodat elke positie in het

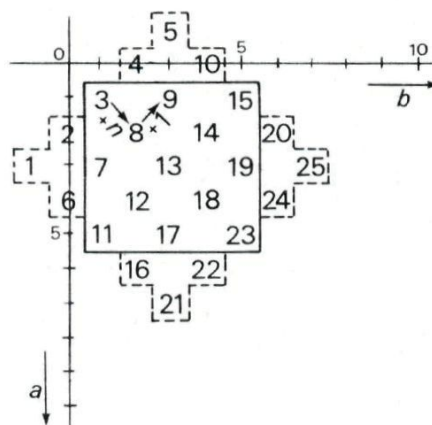


Fig. 6.

'primitieve' vierkant beschreven kan worden m.b.v. een getallenpaar (a, b) .

Nu dit is gebeurd, gaan we over tot de volgende stap: we drukken elk getal binnen het vet omliggende vierkant uit in n .

Het getal in (1,1), de 3, blijkt voor elke oneven n op het midden van de zijde van het primitieve vierkant te liggen (die zijde met de getallen 1 t.e.m. n) en is derhalve gelijk aan $E(\frac{n}{2}) + 1$ waarin E de Entier-functie voorstelt.*

Het volgende getal, op (1, 3), blijkt $(n+1)$ groter te zijn dan het getal op (1, 1). Dit is in fig. 6 duidelijk te zien. Getal (1, 3)

wordt dan $E(\frac{n}{2}) + 1 + (n + 1)$.

Aangezien getal (1, 5) weer $(n + 1)$ groter is dan (1, 3), wordt getal (1, 5) =

$$E(\frac{n}{2}) + 1 + 2(n + 1).$$

Als we nu het omliggende vierkant overnemen en elk getal uitdrukken in n , krijgen we het volgende resultaat:

C		$C + (n + 1)$		$C + 2(n + 1)$
	$C + (n + 1) - 1$		$C + 2(n + 1) - 1$	
$C + (n + 1) - 2$		$C + 2(n + 1) - 2$		$C + 3(n + 1) - 2$
	$C + 2(n + 1) - 3$		$C + 3(n + 1) - 3$	
$C + 2(n + 1) - 4$		$C + 3(n + 1) - 4$		$C + 4(n + 1) - 4$

$$C = E(\frac{n}{2}) + 1$$

De lege hokjes worden nu even genegeerd. We bekijken de rijen afzonderlijk en zien, dat als de b -coördinaat met 2 toeneemt, het bijbehorende getal met $n + 1$ verhoogd wordt. We kunnen dit ondervangen door het getal waarmee de factor $(n + 1)$ vermenigvuldigd moet worden te vervangen door $E(\frac{b}{2})$. Immers: als b met 2 verhoogd wordt, dan wordt $E(\frac{b}{2})$ één groter.

Toelichting:

De coëfficiënt voor de factor $(n + 1)$ in positie (1, 1) = 0 = $E(\frac{1}{2})$.

De coëfficiënt voor de factor $(n + 1)$ in positie (1, 3) = 1 = $E(\frac{3}{2})$.

De coëfficiënt voor de factor $(n + 1)$ in positie (1, 5) = 2 = $E(\frac{5}{2})$.

Druk nu de termen van rij 1 uit in n en b . We krijgen dan:

$$O_n(1, b) = E(\frac{b}{2}) \cdot (n + 1) + C$$

waarin $O_n(a, b)$ het getal op positie (a, b) voorstelt.

Als we de term $E(\frac{b}{2})$ overal in opnemen, dan worden de volgende formules:

$$O_n(2, b) = E(\frac{b}{2}) \cdot (n + 1) + C - 1$$

$$O_n(3, b) = \left[1 + E(\frac{b}{2}) \right] \cdot (n + 1) + C - 2$$

$$O_n(4, b) = \left[1 + E(\frac{b}{2}) \right] \cdot (n + 1) + C - 3$$

$$O_n(5, b) = \left[2 + E(\frac{b}{2}) \right] \cdot (n + 1) + C - 4$$

Het valt ons op, dat bij de term $E(\frac{b}{2})$, afkelijk van a , nog iets moet worden opgeteld; voor $a = 1$ en $a = 2$ is dit getal gelijk aan 0, als $a = 3$ en $a = 4$ is het gelijk aan 1 en voor $a = 5$ wordt dit getal 2.

*) De entier van een getal x is het grootste getal $a \in \mathbb{Z}$ waarvoor geldt $a \leq x$. Bijvoorbeeld: $E(2,38) = 2$, $E(1\frac{8}{9}) = 1$, $E(5) = 5$, $E(-3) = -3$, $E(-3\frac{1}{2}) = -4$.

Na enig zoeken vinden we voor deze tweede term de waarde $E(\frac{a-1}{2})$.

Ten slotte komt er in de vergelijkingen nog een term $(1-a)$ voor, zodat de totaalvergelijking wordt:

$$O_n(a, b) = \left[E\left(\frac{a-1}{2}\right) + E\left(\frac{b}{2}\right) \right] \cdot (n+1) + C + (1-a)$$

Voorbeeld

Het bovenste getal in het vierkant van fig. 6, de 5, ligt in het vakje $(-1, 3)$:

$$\begin{aligned} O_5(-1, 3) &= \left[E\left(\frac{-1-1}{2}\right) + E\left(\frac{3}{2}\right) \right] (5+1) + E\left(\frac{5}{2}\right) - (-1) + 2 \\ &= \left[E(-1) + E(1, 5) \right] \cdot 6 + E(2, 5) + 3 \\ &= \left[-1 + 1 \right] \cdot 6 + 2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Merk op dat we nu slechts de grootte van die getallen kunnen berekenen, waarvan de som van de coördinaten even is. Hiernaast (fig. 7) is het 'primitieve' vierkant 5×5 nog eens afgebeeld:

Binnen het tovervierkant onderscheiden we vier gebieden:

Gebied I, waar geldt: $a < b \wedge a + b > n$, en waar de getallen bij A in komen te vallen.

Gebied II, $a < b \wedge a + b \leq n$, waar de getallen uit B terecht komen.

Gebied III, $a > b \wedge a + b \leq n$, waar de getallen uit C terecht komen.

Gebied IV, $a > b \wedge a + b > n$, voor de getallen uit D.

De getallen uit A komen het vierkant binnen door op elk getal uit A een translatie over de vector $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$ toe te passen. Omgekeerd komen we vanuit een open vakje

of verder uitgewerkt:

$$O_n(a, b) = \left[E\left(\frac{a-1}{2}\right) + E\left(\frac{b}{2}\right) \right] \cdot (n+1) + E\left(\frac{n}{2}\right) - a + 2$$

Deze formule is opgesteld voor een 'primitief' vierkant 5×5 en voor positieve a en b , maar bij nader onderzoek blijkt dat de formule te gebruiken is voor elke oneven n , waarbij a en b uit $\mathbb{Z}$ gekozen mogen worden.

in gebied I bij het corresponderende getal in A, door een translatie over de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ -n \end{pmatrix}$.

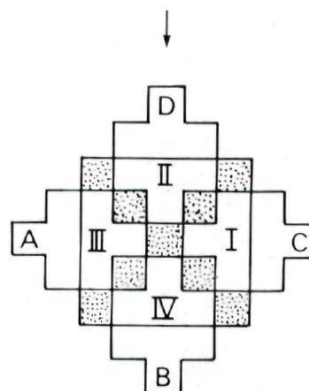
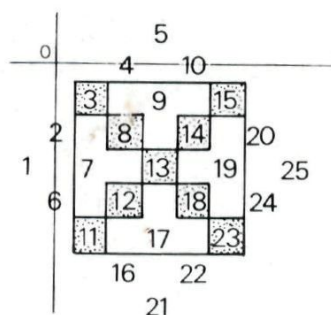


Fig. 7

We komen nu tot de volgende conclusie:

($G_n(a, b)$ stelt het getal voor, dat in het toervierkant van $n \times n$ op positie (a, b) hoort te staan.)

$$G_n(a, b) = \begin{cases} O_n(a, b) & \text{als } (a + b) \text{ is even} \\ G_n(a, b - n) & \text{als } (a + b) \text{ is oneven} \end{cases}$$

als (a, b) in gebied I ligt ofwel als geldt: $a < b \wedge a + b > n$

Op dezelfde manier is af te leiden, dat:

$$G_n(a, b) = \begin{cases} O_n(a, b) & \text{als } (a + b) \text{ even} \\ G_n(a + n, b) & \text{als } (a + b) \text{ oneven} \end{cases}$$

als $a < b \wedge a + b \leq n$ (gebied II)

$$G_n(a, b) = \begin{cases} O_n(a, b) & \text{als } (a + b) \text{ even} \\ G_n(a, b + n) & \text{als } (a + b) \text{ oneven} \end{cases}$$

als $a > b \wedge a + b \leq n$ (gebied III)

$$G_n(a, b) = \begin{cases} O_n(a, b) & \text{als } (a + b) \text{ even} \\ G_n(a - n, b) & \text{als } (a + b) \text{ oneven} \end{cases}$$

als $a > b \wedge a + b > n$ (gebied IV)

Als we deze vier samenstellen, dan levert dit de volgende definitie op:

$$G_n(a, b) = \begin{cases} O_n(a, b) & \text{als } (a + b) \text{ even} \\ G_n(a, b - n) & \text{als } (a + b) \text{ oneven} & \wedge a < b \wedge a + b > n \\ G_n(a + n, b) & \text{als } (a + b) \text{ oneven} & \wedge a < b \wedge a + b \leq n \\ G_n(a, b + n) & \text{als } (a + b) \text{ oneven} & \wedge a > b \wedge a + b \leq n \\ G_n(a - n, b) & \text{als } (a + b) \text{ oneven} & \wedge a > b \wedge a + b > n \end{cases}$$

Met dit resultaat is het mogelijk een vrij eenvoudig programma te schrijven. Hier-naast is het blokschema van zo'n programma weergegeven.

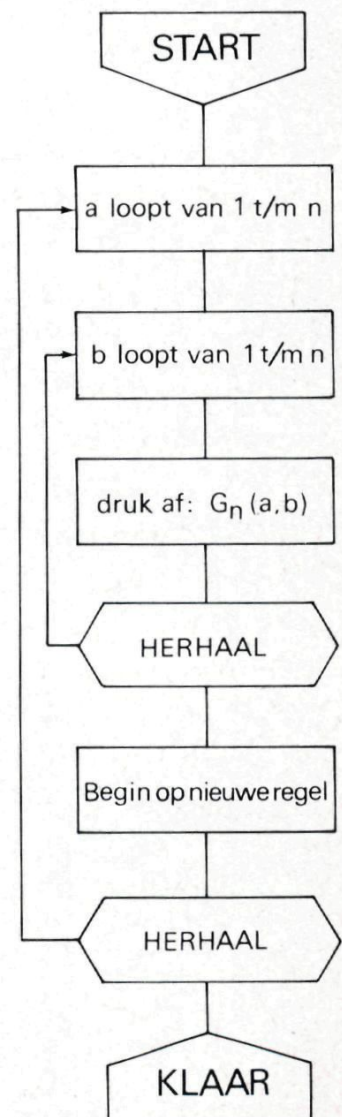


Fig. 8 toont een, met behulp van dit schema verkregen, vierkant. De 961 getal-

len zijn zo geordend, dat de bekende optellingen de waarde 14911 opleveren.

16	497	48	529	80	561	112	593	144	625	176	657	208	689	240	721	272	753	304	785	336	817	368	849	400	881	432	913	464	945	496
527	47	528	79	560	111	592	143	624	175	656	207	688	239	720	271	752	303	784	335	816	367	848	399	880	431	912	463	944	495	15
46	558	78	559	110	591	142	623	174	655	206	687	238	719	270	751	302	783	334	815	366	847	398	879	430	911	462	943	494	14	526
557	77	589	109	590	141	622	173	654	205	686	237	718	269	750	301	782	333	814	365	846	397	878	429	910	461	942	493	13	525	45
76	588	108	620	140	621	172	653	204	685	236	717	268	749	300	781	332	813	364	845	396	877	428	909	460	941	492	12	524	44	556
587	107	619	139	651	171	652	203	684	235	716	267	748	299	780	331	812	363	844	395	876	427	908	459	940	491	11	523	43	555	75
106	618	138	650	170	682	202	683	234	715	266	747	298	779	330	811	362	843	394	875	426	907	458	939	490	10	522	42	554	74	586
617	137	649	169	681	201	713	233	714	265	746	297	778	329	810	361	842	393	874	425	906	457	938	489	9	521	41	553	73	585	105
136	648	168	680	200	712	232	744	264	745	296	777	328	809	360	841	392	873	424	905	456	937	488	8	520	40	552	72	584	104	616
647	167	679	199	711	231	743	263	775	295	776	327	808	359	840	391	872	423	904	455	936	487	7	519	39	551	71	583	103	615	135
166	678	198	710	230	742	262	774	294	806	326	807	358	839	390	871	422	903	454	935	486	6	518	38	550	70	582	102	614	134	646
677	197	709	229	741	261	773	293	805	325	837	357	838	389	870	421	902	453	934	485	5	517	37	549	69	581	101	613	133	645	165
196	708	228	740	260	772	292	804	324	836	356	868	388	869	420	901	452	933	484	4	516	36	548	68	580	100	612	132	644	164	676
707	227	739	259	771	291	803	323	835	355	867	387	899	419	900	451	932	483	3	515	35	547	67	579	99	611	131	643	163	675	195
226	738	258	770	290	802	322	834	354	866	386	898	418	930	450	931	482	2	514	34	546	66	578	98	610	130	642	162	674	194	706
737	257	769	289	801	321	833	353	865	385	897	417	929	449	961	481	1	513	33	545	65	577	97	609	129	641	161	673	193	705	225
256	768	288	800	320	832	352	864	384	896	416	928	448	960	480	31	512	32	544	64	576	96	608	128	640	160	672	192	704	224	736
767	287	799	319	831	351	863	383	895	415	927	447	959	479	30	511	62	543	63	575	95	607	127	639	159	671	191	703	223	735	255
286	798	318	830	350	862	382	894	414	926	446	958	478	29	510	61	542	93	574	94	606	126	638	158	670	190	702	222	734	254	766
797	317	829	349	861	381	893	413	925	445	957	477	28	509	60	541	92	573	124	605	125	637	157	669	189	701	221	733	253	765	285
316	828	348	860	380	892	412	924	444	956	476	27	508	59	540	91	572	123	604	155	636	156	668	188	700	220	732	252	764	284	796
827	347	859	379	891	411	923	443	955	475	26	507	58	539	90	571	122	603	154	635	186	667	187	699	219	731	251	763	283	795	315
346	858	378	890	410	922	442	954	474	25	506	57	538	89	570	121	602	153	634	185	666	217	698	218	730	250	762	282	794	314	826
857	377	889	409	921	441	953	473	24	505	56	537	88	569	120	601	152	633	184	665	216	697	248	729	249	761	281	793	313	825	345
376	888	408	920	440	952	472	23	504	55	536	87	568	119	600	151	632	183	664	215	696	247	728	279	760	280	792	312	824	344	856
887	407	919	439	951	471	22	503	54	535	86	567	118	599	150	631	182	663	214	695	246	727	278	759	310	791	311	823	343	855	375
406	918	438	950	470	21	502	53	534	85	566	117	598	149	630	181	662	213	694	245	726	277	758	309	790	341	822	342	854	374	886
917	437	949	469	20	501	52	533	84	565	116	597	148	629	180	661	212	693	244	725	276	757	308	789	340	821	372	853	373	885	405
436	948	468	19	500	51	532	83	564	115	596	147	628	179	660	211	692	243	724	275	756	307	788	339	820	371	852	403	884	404	916
947	467	18	499	50	531	82	563	114	595	146	627	178	659	210	691	242	723	274	755	306	787	338	819	370	851	402	883	434	915	435
466	17	498	49	530	81	562	113	594	145	626	177	658	209	690	241	722	273	754	305	786	337	818	369	850	401	882	433	914	465	946

Fig. 8. Tovervierkant met $n = 31$ en met de constante som 14911.

Het tovergetal van de op deze wijze verkregen vierkanten is eenvoudig in n uit te drukken. Dit getal is namelijk gelijk aan de som van alle getallen in het vier-

kant, gedeeld door het aantal kolommen (n). Aangezien het vierkant bestaat uit de getallen 1 t.e.m. n^2 wordt het tovergetal:

$$T = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n^2}{n} = \frac{\frac{n^2(n^2 + 1)}{2}}{n} = \frac{n^3 + n}{2}$$

strook zoals in fig. 3. Daar hebben we van te voren de halve diameter op afgetekend, zodat we dan alleen nog maar hoeven te zorgen dat de eindcirkel passeert bij de punten *C* en *D*.

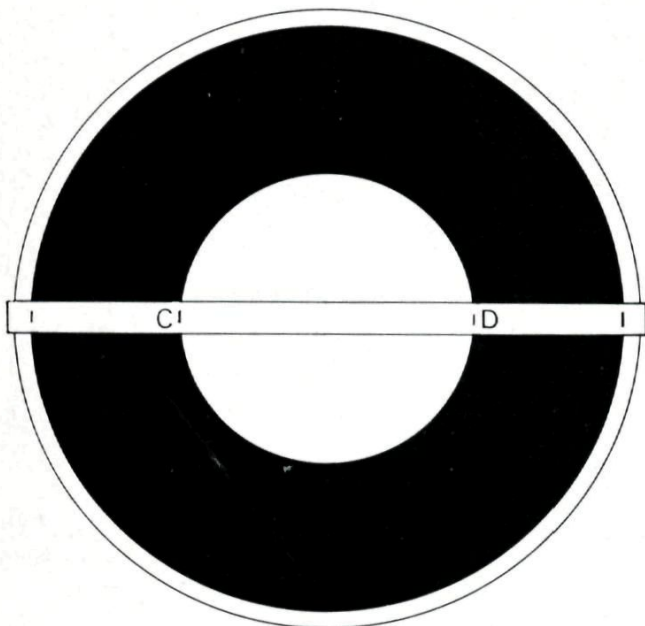


Fig. 3. Instelling met behulp van een meetstrook ($CD = \frac{1}{2}d$).

Zelf proberen

Pas de beschreven meetmethode eens toe op een pijp en kijk daarbij wat de nauwkeurigheid wordt van het meetresultaat. Vergelijk de gemeten waarde met de werkelijke pijplengte.

Denk eraan dat als je op deze manier de diepte van een waterput wilt bepalen en je ziet de binnenring als spiegelbeeld van de bovenrand in het water, dat de uitkomst het dubbele is van de afstand bovenrand tot waterspiegel.

Probeer ook zelf eens de regel te formuleren voor het geval het niet mogelijk is om de juiste afstand tot de pijp te nemen en je ziet bijvoorbeeld de kleine cirkel niet half maar een derde keer zo groot als de grote cirkel. Of nog algemener: kleine en grote cirkel verhouden zich als $m : n$ en de afstand tot de voorkant pijp is a .

Geschiedenis

De methode van de pijplengte bepalen gelijk aan de afstand tot de pijp, is al oud. Van Thales van Milete (rond 600 v.Chr.) wordt verteld dat hij op een soortgelijke wijze de afstand van een schip tot de kust bepaalde. Hij sloeg drie palen A, B, C, in één lijn en op onderling gelijke afstanden aan de oever in de grond (fig. 4).

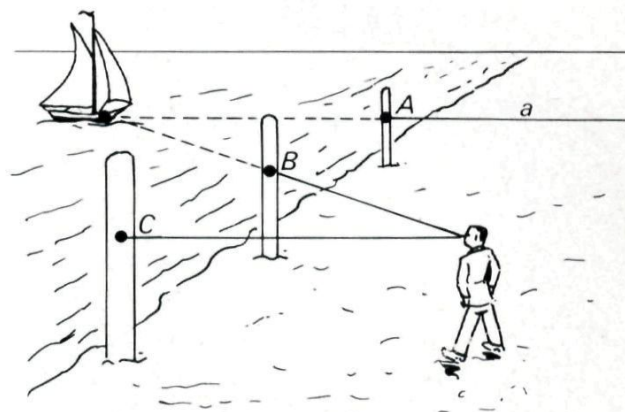
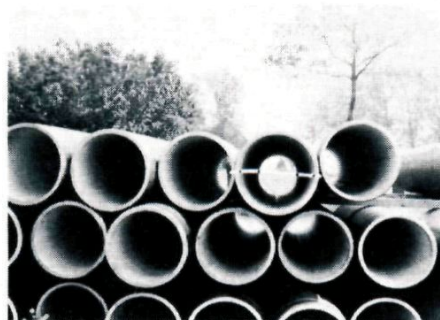


Fig. 4.

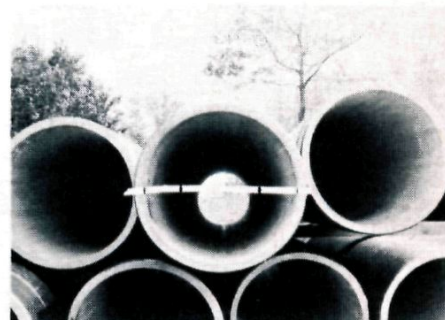
Hij liep nu vanaf paal C landinwaarts, evenwijdig aan de lijn langs schip en paal A (rechte *a*), totdat hij vanuit zijn plaats het schip zag achter paal B. De door hem afgelegde afstand was gelijk aan de ge-



Ver weg. De eindcirkel is bijna even groot als de begincirkel.



Dichterbij. De eindcirkel heeft de halve grootte van de begincirkel.



Dichtbij. De eindcirkel wordt betrekkelijk klein.

vraagde afstand. Dat evenwijdig lopen aan rechte a is in de praktijk natuurlijk moeilijk. Je kunt je voorstellen dat iemand over de lijn a , steeds zorgend het schip achter paal A te houden, met Thales meeliep, waarbij die twee hun onderlinge

afstand gelijk hielden door een strak touw. Hoe het allemaal precies in z'n werk is gegaan weten we niet. Het is zelfs niet helemaal zeker dat Thales nu juist de drie palen methode gebruikte of dat hij een andere oplossing had.

°Pythagoras: eindeloos!

Er is waarschijnlijk in de wiskunde geen stelling zo beroemd als de stelling van Pythagoras. In de loop van de tijd hebben de mensen zich eindeloos uitgesloofd om er bewijzen voor te bedenken. Een grappige manier is de methode van knippen en plakken, van passen en meten. Hier is er weer zo een.

Driehoeken stapelen

We nemen een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b , en een schuine zijde c . Hierbij veronderstellen we dat a kleiner is dan b (fig. 1a).

Meet nu vanaf hoekpunt A een afstand even groot als a , langs de helling omhoog. Zet op het resterende stuk van de helling een rechthoekige driehoek met dezelfde hoeken als de oorspronkelijke (fig. 1b).

Herhaal het proces 'eindeloos', zolang als de nauwkeurigheid van tekenen dit toelaat (fig. 1c), of zolang tot je geduld op is.

Als we het proces eindeloos konden voortzetten, zouden we precies vier van dergelijke 'overhangende gebergten' samen kunnen voegen tot een perfect vierkant (fig. 2).

Ga zelf maar na dat dit inderdaad kan. Let daarbij speciaal op de grootte van zijden en hoeken.

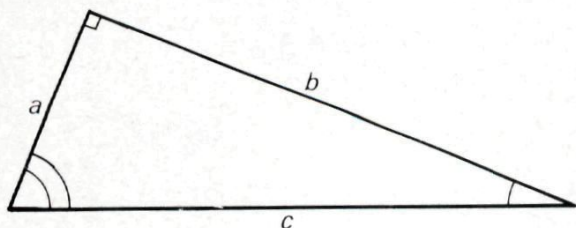


Fig. 1a.

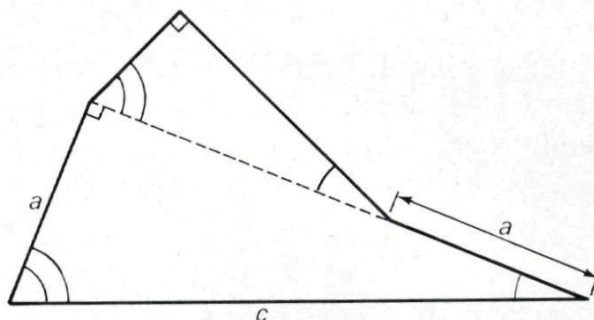


Fig. 1b.

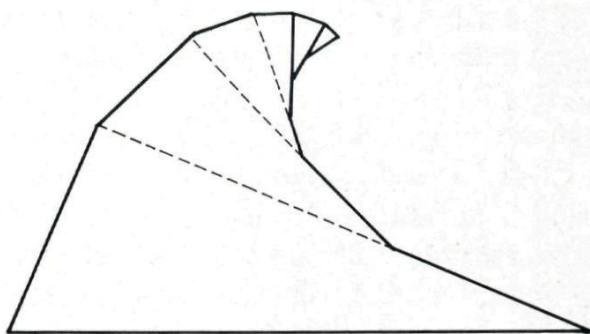


Fig. 1c.
Driehoeken stapelen.

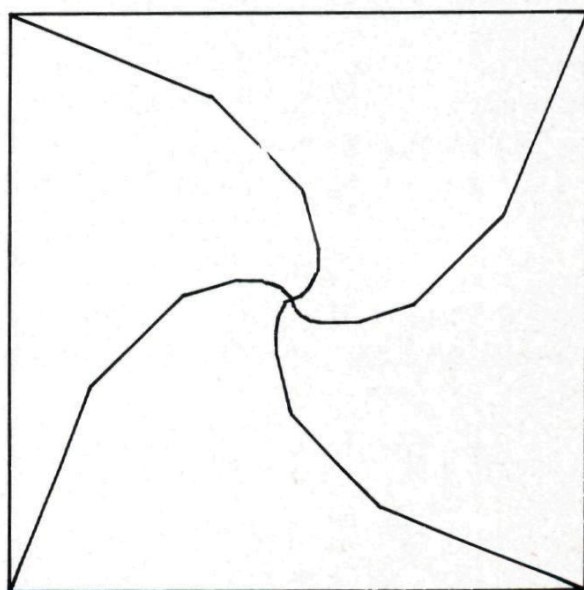


Fig. 2. Vier series driehoeken vormen samen een vierkant.

°° De stelling van P

Het is mogelijk uit deze merkwaardige knipfiguur de stelling van P te bewijzen.

Stel eens dat geldt: $a = \frac{1}{2}b$. Dan heeft de tweede driehoek zijden die twee keer zo klein zijn als die van de eerste; de oppervlakten van beide driehoeken verhouden zich dan als 1 : 4. De volgende driehoek wordt in oppervlakte weer vier keer zo klein enz.

In het algemeen: als de lengteverkleining $(c) : (b - a)$ wordt zal de oppervlakteverkleining $(c)^2 : (b - a)^2$ worden.

We zeggen liever: de oppervlaktevergroting is $\frac{(b - a)^2}{c^2}$.

Stellen we deze voor het gemak even p . De waarde p is dan kleiner dan 1 en stelt de factor voor waarmee vermenigvuldigd moet worden om de oppervlakte van een volgende driehoek uit die van de vorige af te leiden.

Zo is de oppervlakte van de eerste driehoek $\frac{1}{2}ab$, van de tweede $p(\frac{1}{2}ab)$, van de derde $p^2(\frac{1}{2}ab)$ enz.

Omdat de oppervlakte van de vier 'gebergten' samen gelijk is aan die van het vierkant, geldt:

$$c^2 = 4 \cdot (\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}pab + \frac{1}{2}p^2ab + \frac{1}{2}p^3ab + \dots)$$

$$\text{of } c^2 = 2ab(1 + p + p^2 + p^3 + \dots)$$

Misschien lijkt het dat de vorm tussen haakjes een oneindig grote waarde op de duur gaat bereiken, maar een enkele blik op de tekening ontnemt ons dat gevoel al.

Dat komt doordat p kleiner dan 1 is.

We geven even de uitkomst of, zoals dat wel heet, de somlimiet:

$$(1 + p + p^2 + p^3 + \dots) = \frac{1}{1 - p}$$

Het bewijs daarvoor staat in het slot van dit verhaal. Voor het moment gaan we even verder kijken, naar wat daaruit volgt.

We hebben dan:

$$c^2 = 2ab \left(\frac{1}{1 - p} \right) \text{ of } c^2(1 - p) = 2ab \text{ of } c^2 = 2ab + c^2 p$$

Vullen we daar weer in: $p = \frac{(b - a)^2}{c^2}$ of

$pc^2 = (b - a)^2$ dan:

$$c^2 = 2ab + (b - a)^2$$

$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2$$

$$\text{of } c^2 = a^2 + b^2 !!$$

en daar staat dan de stelling van P.

De rij $(1 + p + p^2 + p^3 + \dots)$

We willen nu nog de afleiding geven voor de somlimiet van de oneindige rij. Laten we maar met een voorbeeld beginnen.

Hoeveel is: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$?

In fig. 3 is gemakkelijk te zien dat een hele appel, plus een halve, plus een kwart, plus ... op de duur 2 appels geeft.

Zo wordt $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ op de duur $\frac{3}{2}$. Probeer dat maar eens met een soortgelijke tekening als in fig. 3 aan te tonen.

Maar is het ook mogelijk zoiets in het algemeen uit te zoeken.

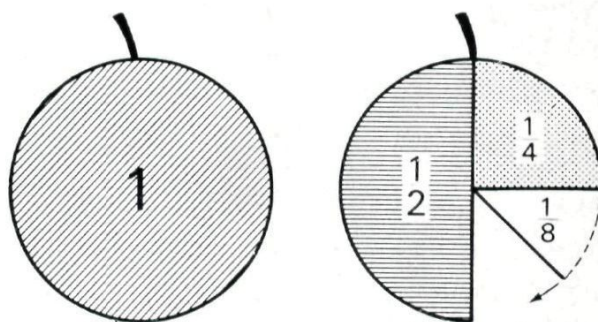


Fig. 3. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$.

We demonstreren de werkwijze aan de hand van:

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots$$

Nu komt de truc!

Vermenigvuldig beide leden met $\frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{5}S = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \frac{1}{3125} + \dots$$

Trek nu beide leden rechts en links af:
we krijgen dan:

$$(1 - \frac{1}{5})S = 1 \text{ of } S = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

Zo is precies op dezelfde manier te bewijzen:

voor p kleiner dan 1 geldt:

$$(1 + p + p^2 + \dots) = \frac{1}{1 - p}$$

° Met je zakrekenmachine een computer beter begrijpen

Is de computer voor velen nog min of meer een magisch apparaat, de zakrekenmachine is door prijs en hanteerbaarheid al een vertrouwde bondgenoot. Bovendien een verdienstelijke ook daarom, omdat hij sommige algoritmen gevolgd door de grote soortgenoot zo onmiddellijk en letterlijk iedereen voor ogen kan houden. Een voorbeeld daarvan is de oplossing van het volgende probleem:

Bepaal een benadering van de reële wortel van de derdegraadsvergelijking

$$x^3 + x - 1 = 0 \quad (1)$$

Een traditionele methode zoals het ontbinden in factoren van het eerste lid, schiet hier te kort. Een totaal andere weg is:

$$x^3 + x - 1 = 0$$

$$x(x^2 + 1) = 1$$

$$x = \frac{1}{1 + x^2} \quad (2)$$

De opgave kan nu anders geformuleerd worden:

Teken de rechte $f: y = x$ en de kromme $g:$

$y = \frac{1}{1 + x^2}$ in één figuur en bepaal de coördinaten van het snijpunt zo nauwkeurig mogelijk.

In fig. 1 zijn beide getekend. Door het gebruik van millimeterpapier is onverwacht al een oplossing gevonden. Het snijpunt is ongeveer (0.7, 0.7) en de wortelbenadering is dus 0.7.

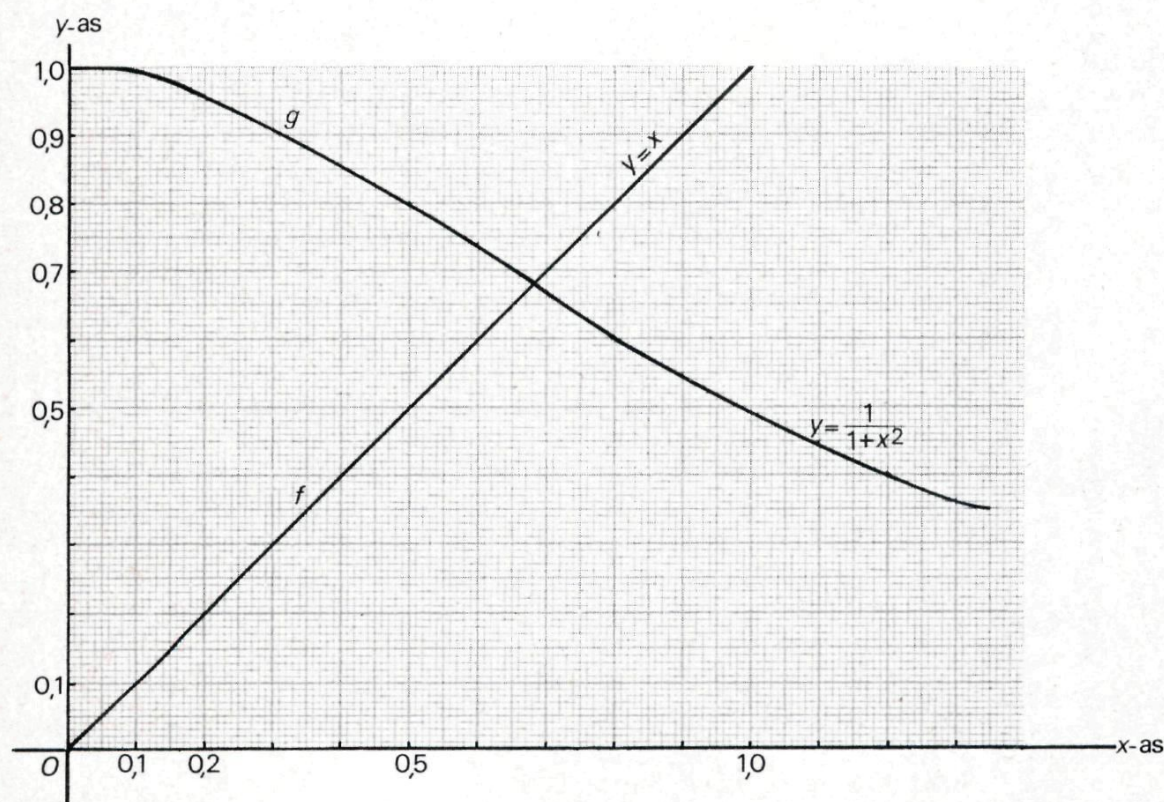


Fig. 1.

Als echter meer decimalen vereist zijn, kan millimeterpapier niet meer helpen. Om een betere weg te vinden letten we nog eens op de vergelijking ②.

Wat is een wortel van die vergelijking? In het algemeen is dat die waarde van x , die na substitutie een ware bewering geeft. In het bijzonder kan hier worden geschreven: Die waarde van x , die gesubstitueerd in het rechterlid dezelfde waarde van x weer oplevert.

Is 0,7 een wortel? $\frac{1}{1+0,7^2} = 0,6711409$.

Dat scheelt $0,7 - 0,6711409 = 0,03$. Is 0,611409 een wortel?

origineel functiewaarde

$x \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}$

0,6711409 $\longrightarrow$ 0,6894506

Het verschil tussen rechterlid en linkerlid is nu 0,02 en dit is al kleiner dan de vorige afwijking.

Verder:

0,6894506 $\longrightarrow$ 0,6778088 verschil 0,012

0,6778088 $\longrightarrow$ 0,6852015 verschil 0,007

enz.

Op deze manier wordt de gezochte wortel steeds beter benaderd. Fig. 2 toont de grafische voorstelling van deze methode. S is het snijpunt van beide grafieken en T is het punt op de X -as, dat het bijbehorende origineel aanwijst. Kies een willekeurig getal x_1 als origineel. Nu kan x_1 beschouwd worden als een zelfgekozen benadering van de wortel.

$$AB = g(x_1)$$

$$AB = CD = OD \text{ (wegens } y = x \text{)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Neem nu } OD \text{ als nieuw origineel } x_2 \\ g(x_1) = f(x_1) = x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$g(x_1) = f(x_1) = x_2 \quad (3)$$

$$DE = g(x_2)$$

$$DE = FG = OF = x_3 \quad \left. \vphantom{DE = g(x_2)} \right\} \Rightarrow g(x_2) = f(x_2) = x_3$$

In de figuur zie je, dat F al dichterbij T ligt dan A en dus is x_3 al een betere benadering dan x_1 .

Op dezelfde manier doorgaande volgen $x_4, x_5, x_6, \dots$ en telkens ontstaat een betere benadering.

Duidelijk is dat T nooit wordt bereikt en daarom is een afspraak nodig, waaruit blijkt wanneer gestopt wordt. Zo'n afspraak kan zijn: stoppen als

$$|x_{n+1} - x_n| < 0.0001.$$

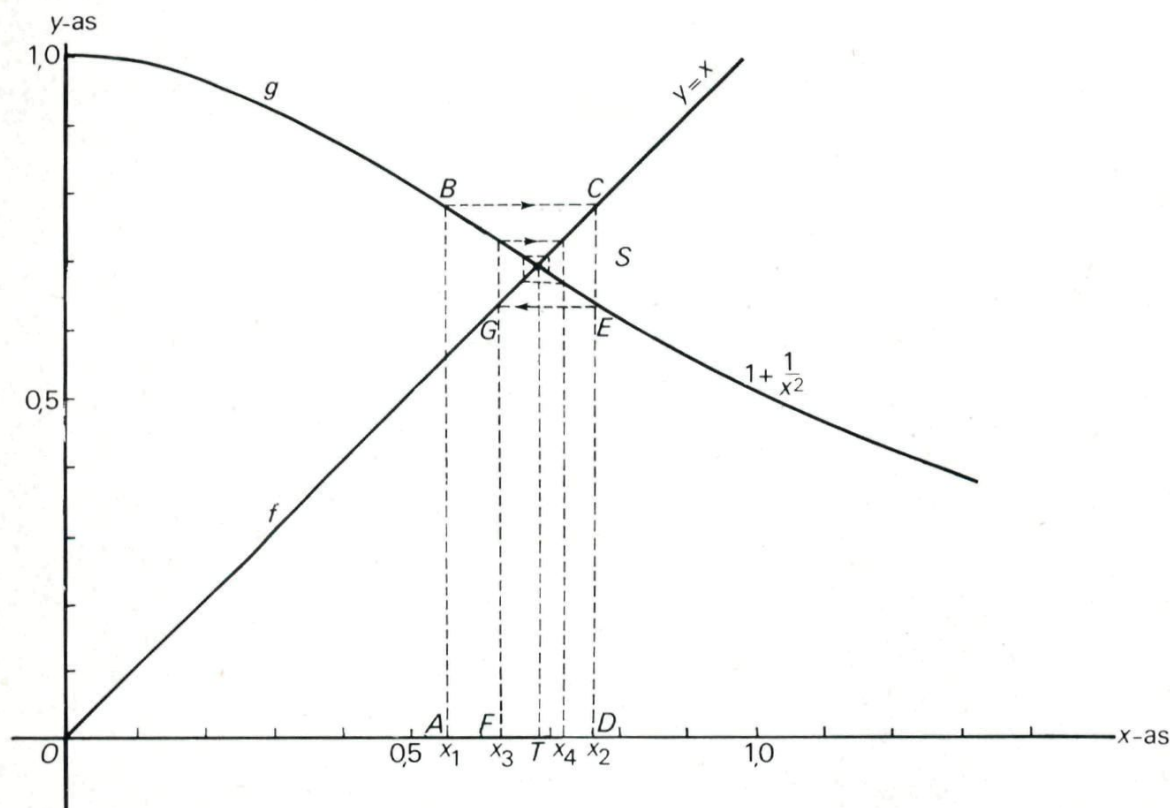


Fig. 2.

In fig. 2 betekent dat: stoppen als de afstand tussen de twee laatst gevonden origineelpunten kleiner is dan 0.0001.

Een algoritme zoals deze heet convergent.

Nu is het moment gekomen om te starten met je eigen rekenapparaat. Kies een beginorigineel, bijvoorbeeld $x_1 = 0.7$ en bereken $g(0.7) = \frac{1}{1 + 0.7^2}$. Verricht zo min

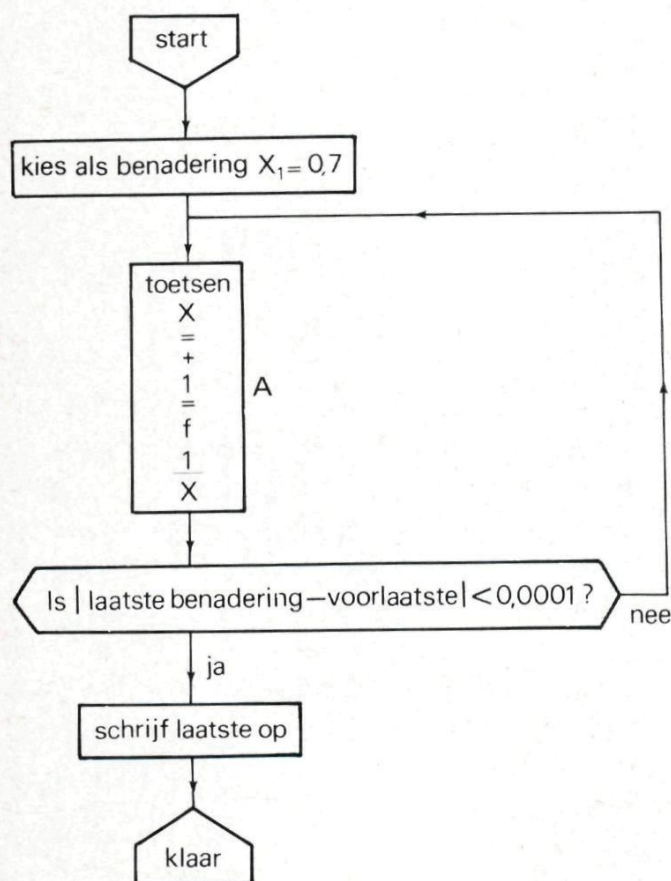
mogelijk handelingen.

Na aantikken van 0.7:

0.7 x 0.7	uit X-toets	
=	-toets	op het scherm nu 0.49
+1	uit + -toets	
1	-toets	
=	-toets	op het scherm nu 1.49
$\frac{1}{1 + 0.7^2}$	uit f-toets	
$\frac{1}{x}$	-toets	op het scherm nu 0.6711409

Opmerking:

Als de f-toets ontbreekt, moet $\frac{1}{1.49}$ op



een bij de eigen rekenmachine passende manier uitgerekend worden.

Uit ③ volgt $x_2 = 0.6711409$

Nu is $g(x_2) = g(0.6711409)$ aan de beurt en je vindt de uitkomst, als je precies dezelfde handelingen verricht als reeds beschreven. In schemavorm kan het programma geschreven worden als:

Op de voor dit artikel gebruikte zakrekenmachine kwam ten slotte:

$x_{13} = 0.6824040$	$x_{16} = 0.6823083$
$x_{14} = 0.6822794$	$x_{17} = 0.6823402$
$x_{15} = 0.6823585$	

$|x_{14} - x_{13}| = 0.0001246 > 0.0001$

$|x_{15} - x_{14}| = 0.0000791 < 0.0001$

We stoppen dus bij x_{15} . De laatste drie decimalen zijn niet betrouwbaar en een aanvaardbare benadering is dus 0.6823.

Ga op je eigen zakrekenmachine eens door voorzover de capaciteit het toelaat.

Let nu nog even op vak A in het schema. De tekenjes die daarin staan, kun je opvatten als een soort machinetaal passend bij het gebruikte minirekenapparaat. Een echte computer, die nog meer kan dan alleen rekenopdrachten uitvoeren, vereist andere tekens. Herhaald toetsen indrukken is ook niet nodig; de machine controleert zelf $|x_{n+1} - x_n| < 0.0001$ en begint eventueel zelf aan herhaling van het programmadeel. Uiteindelijk wordt de uitkomst afgedrukt.

De persoon die de instructievolgorde met behulp van de juiste tekentaal (programmeertaal) klaarmaakt, heet programmeur. Zoals in het gegeven voorbeeld ① herschreven werd tot ②, zoekt hij naar de juiste en meest voordelige aanbieding van de verkregen opdracht.

Vind je het bepalen van zo'n algoritme een fijne wiskundige bezigheid? Let dan vooral ook op de gevaren, die op de loer liggen.

$\sqrt{30}$ berekenen?

Bijna automatisch, enigszins naar analogie van het bovenstaande, kun je schrijven:

$$x = \sqrt{30}$$

$$x^2 = 30$$

$$x = \frac{30}{x}$$

Deze vorm lijkt op (2), maar helaas, er ontstaat geen convergerende algoritme, zoals in fig. 3 te zien is en ook eenvoudig

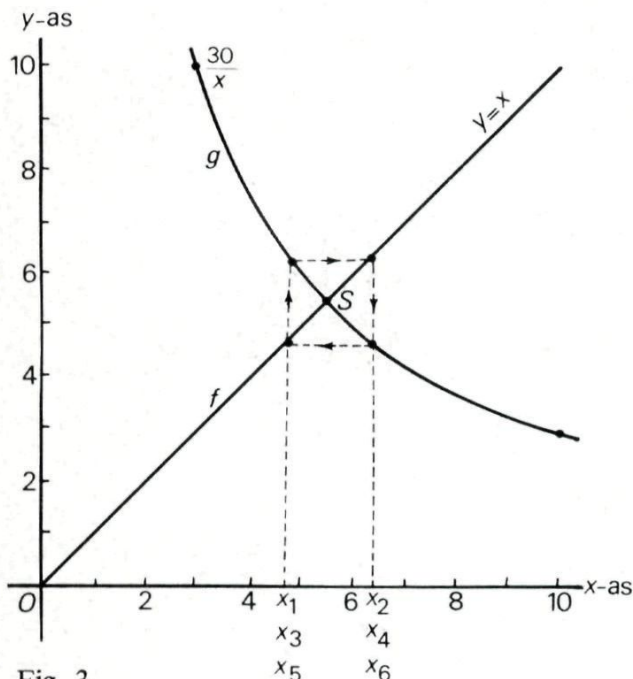


Fig. 3.

blijkt bij het nemen van een gemakkelijk beginorigineel:

$$x \rightarrow \frac{30}{x}$$

$$5 \rightarrow 6$$

$$6 \rightarrow 5$$

$$5 \rightarrow 6 \text{ enz.}$$

De vraag dringt zich nu op, wanneer convergeert een algoritme en wanneer niet? Grafisch afgebeeld: wanneer ontstaat fig. 2 (convergerend), wanneer fig. 3 of eveneens teleurstellend fig. 4 (divergerend).

Zonder verder bewijs stellen we hier:

Als in de omgeving van de gezochte wortel geldt:

$$|f'(x)| < 1 \quad (4)$$

dan convergeert de algoritme.

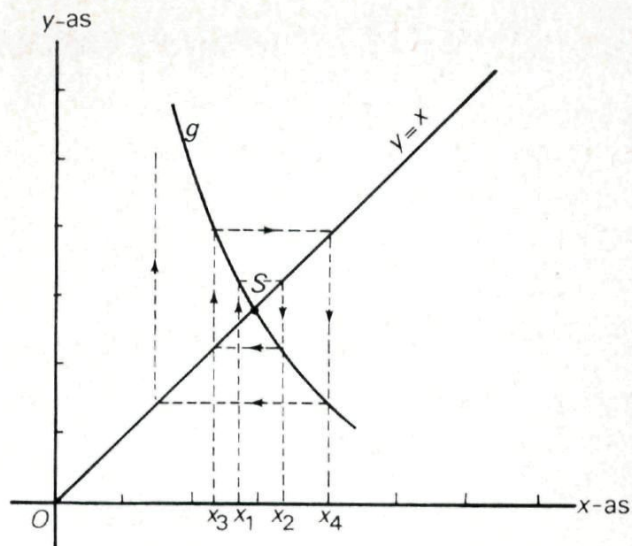


Fig. 4.

Voor $\frac{30}{x}$ geldt: $f'(x) = -\frac{30}{x^2}$. Dus $f'(\sqrt{30}) = -1$.

Voldoet niet aan (4), geen convergentie.

Maar:

$$x = \frac{30}{x}$$

$$2x = x + \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{30}{x} \right) \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{30}{x} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{30}{x^2} \right)$$

$$f'(\sqrt{30}) = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0.$$

Een snelle convergentie.

Probeer (5) nu eens toe te passen op je eigen zakrekenmachine. Je zult nu wel begrijpen, hoe het gaat. Na slechts een paar herhalingen komt er $\sqrt{30} = 5,47722557$.

Wie van soortgelijk wiskundig 'puzzelen' houdt, kan van die hobby een beroep maken: computergebruik vindt steeds meer toepassing. Er worden ook goede programmeurs gevraagd.

Als je bijvoorbeeld $12!$ wilt berekenen, dan moet je daarvoor ook $11!$ en $10!$ en $9!$ etc. berekenen. De wiskundige Stirling heeft in 1730 echter al een formule afgeleid waarmee $n!$ direct benaderd kan worden.

Naar aanleiding van deze formule:

$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n$, besloot ik uit te rekenen hoe goed deze formule klopt. Het resultaat voor enkele kleine waarden van n staat in kolom 3 (vergelijk $n!$ precies in kolom 2). In het vervolg zal ik deze benadering van Stirling voor n schrijven als $St(n)$. Alles is met een rekenmachine van acht cijfers berekend en ik heb

alle cijfers gegeven, want als ik in de tussenberekening al ga afronden kan de fout vergroot worden.

Voor 2π en e heb ik 6,2831853 respectievelijk 2,7182818 gebruikt. Ik vond de afwijking echter zo groot dat ik wilde proberen de formule te verbeteren, door een regelmaat in de fout te vinden.

Eerst berekende ik de absolute fout $n! - St(n)$ (kolom 4). Omdat deze steeds sneller toenam bij toenemende n nam ik de relatieve fout (kolom 5). Deze nam steeds langzamer af, ik probeerde het omgekeerde (kolom 6). Hierin zat een zeer duidelijke regelmaat.

n	$T_1 \quad n!$	$T_2 \quad St(n)$	$T_3 \quad n! - St(n)$	$T_4 \quad \frac{n! - St(n)}{n!}$	$T_5 \quad \frac{n!}{n! - St(n)}$
1	1	0,92213697	0,07786303	0,07786303	12,843065
2	2	1,9190043	0,0809957	0,04049785	24,692668
3	6	5,8362083	0,1637917	0,027298616	36,631892
4	24	23,506169	0,493831	0,020576291	48,599622
5	120	118,01914	1,98086	0,016507166	60,579748
6	720	710,07797	9,92203	0,013780597	72,565795
7	5040	4.980,3955	59,6045	0,011826289	84,557374
13	6.227.020.800	6.187.237.000	39.783.800	0,0025135857	156,52151

Het was nl. ongeveer evenredig met n ; preciezer:

$$\frac{n!}{n! - St(n)} \approx 12n + \frac{1}{2}.$$

Voor de kleinste n waren de waarden iets groter, voor toenemende n lijkt het erop dat het naar $12n + \frac{1}{2}$ nadert. Het getal $\frac{1}{2}$ heb ik geschat, het kan best iets meer of minder zijn, net als het getal 12.

$$\text{Dus: } \frac{n!}{n! - St(n)} \approx 12n + \frac{1}{2}$$

$$(12n + \frac{1}{2})(n! - St(n)) \approx n!$$

$$(12n + \frac{1}{2})(-St(n)) \approx (\frac{1}{2} - 12n)n!$$

$$n! \approx \left(\frac{12n + \frac{1}{2}}{12n - \frac{1}{2}} \right) St(n)$$

Dus krijgen we de nieuwe benaderingsformule:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \left(\frac{12n + \frac{1}{2}}{12n - \frac{1}{2}} \right)$$

n	$n!$	T_6 nieuwe benadering
1	1	1,0023227
2	2	2,0006638
3	6	6,0006084
4	24	24,001034
5	120	120,00265
6	720	720,00912
7	5040	5040,0407
13	6.227.020.800	6.227.025.800

De waarden hiervan staan in de tweede tabel. De procentuele fout is veel kleiner dan bij Stirling en neemt af, daarom lijkt het me een goede benadering, bovendien omdat als $n \rightarrow \infty$ de nieuwe benadering naar $n!$ gaat, want:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

(Hieruit volgt de formule van Stirling)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12n + \frac{1}{2}}{12n - \frac{1}{2}} \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{12n + \frac{1}{2}}{12n - \frac{1}{2}} \right) \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12n + \frac{1}{2}}{12n - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{1} = 1$$

Deze benaderingsformule zal nog wel verder te verbeteren zijn, maar dat heb ik niet geprobeerd, want omdat de fout nu zo klein is, gaat daarin de onnauwkeurigheid van de rekenmachine een grote rol spelen.

Naschrift redactie

Een prima stuk onderzoek van Carel (klas A6β, Rijksscholengemeenschap, Tiel). We moeten eerlijkheidshalve iets meer eer geven aan de wiskundige Stirling dan uit de tabellen 1 en 2 blijkt. Ten eerste is de formule bedoeld voor het vereenvoudigen van de berekening van n -faculteit voor grote waarden van n . Ten tweede luidt het oorspronkelijke resultaat van Stirling:

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$$

waaruit blijkt dat de geciteerde formule bewust 'van de onderkant af' benadert. De $12n$ die in de exponent van de factor helemaal rechts voorkomt heeft bovendien nog iets te maken met de $12n$ die in Carels correctiefactor zit. Het zou te voeren om hierop nu in te gaan.

° Een hoogst merkwaardige wortel

$\sqrt[3]{125} = 5$ want $5^3 = 125$. Dat lijkt nogal duidelijk.

Moeilijker wordt het als we willen weten: hoeveel is $\sqrt[2]{125}$? We willen dan het getal weten dat in het kwadraat 125 zal opleveren. We kunnen zelf al verzinnen dat de uitkomst ruim 11 zal zijn, want $11^2 = 121$. Gelukkig hebben we tegenwoordig

voor zulk werk een rekenmachientje. Dat geeft snel en vrij correct: $\sqrt[2]{125} = 11,180339$. Is het wel zo correct? Als je het apparaat 11,180339 laat kwadrateren, krijg je als uitkomst 124,99998. Hieruit blijkt dan wel dat je zelfs machientjes niet geheel kunt vertrouwen.

Eigenlijk wisten we zelf ook al dat $\sqrt[2]{125}$ niet door een breuk met een eindig aantal decimalen is aan te geven. We zeggen dan ook: $\sqrt[2]{125}$ is irrationaal.

We nemen nog even wat voorbeelden om de betekenis van macht- en wortel exponenten na te gaan.

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$$

$$\sqrt[2]{125} = \sqrt[2]{5^3} = 5^{\frac{3}{2}} = 11,180339$$

Zo kunnen we ook aan $\sqrt[1]{5}$ een betekenis toekennen en wel 5^1 of 5.

Ga na dat op die manier $\sqrt[1/2]{5}$ hetzelfde wordt als $5^{1/2}$ of 25.

We zouden elk positief rationaal getal wel als wortel- of machtsexponent kunnen toelaten.

In het algemeen betekent dan $\sqrt[p]{a^q}$ hetzelfde als $a^{q/p}$ en daarmee bedoelen we dat we een getal a in de q -de macht moeten zetten en daar dan weer de p -de machtswortel uit moeten trekken. Als we die bewerkingen in omgekeerde volgorde uitvoeren, blijft het resultaat hetzelfde.

$$\sqrt[x]{x}$$

We gaan nu een heel merkwaardige wortel onderzoeken en wel die waarbij het grondtal gelijk is aan de wortel exponent.

We schrijven dat als $\sqrt[x]{x}$.

Welke waarden krijgen dergelijke uitkomsten?

We zoeken er enkele op en laten ons rekenmachientje daarbij het zware werk opknappen.

$$\begin{array}{lll} \sqrt[1]{1} = 1,00000 & \sqrt[2]{2} = 1,41421 & \sqrt[3]{3} = 1,44225 \\ \sqrt[4]{4} = 1,41421 & \sqrt[5]{5} = 1,37973 & \sqrt[6]{6} = 1,34801 \text{ enz.} \end{array}$$

Het valt al snel op dat de uitkomsten voor stijgende waarden van x , eerst toenemen en daarna weer afnemen. Zou er een maximale uitkomst in deze rij zitten? Het is niet moeilijk in te zien dat voor erg grote waarden van x de uitkomst van de wortel steeds kleiner zal worden, maar . . . toch altijd groter dan 1 zal blijven.

Laten we nog eens wat uitrekenen voor grotere waarden van x . We zoeken op:

$$\begin{array}{l} \sqrt[10]{10} = 1,25893 \text{ (controle: } 1,25893^{10} = 10,0004) \\ \sqrt[100]{100} = 1,04713 \quad \sqrt[1000]{1000} = 1,00693 \quad \sqrt[10000]{10000} = 1,00092 \end{array}$$

Om enig idee te krijgen hoe nauwkeurig dergelijke uitkomsten zijn hebben we ook opgezocht:

$$1,00091^{10000} = 8919,54 \quad 1,00092^{10000} = 9857,62 \text{ en } 1,00093^{10000} = 10894,4. \text{ Het eerste is duidelijk te laag en het laatste te hoog.}$$

Al met al zien we erg duidelijk hoe voor grotere waarden van x (element van de natuurlijke getallen) de uitkomst van $\sqrt[x]{x}$ van boven nadert tot 1.

Voor waarden van x onder 1

Wat gaat er gebeuren met de uitkomsten van $\sqrt[x]{x}$ voor waarden van x tussen 0 en 1? Uit enkele voorbeelden kan dat snel duidelijk worden.

$$\sqrt[1/2]{1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \sqrt[0,1]{0,1} = (0,1)^{10} = 10^{-10} \text{ enz.}$$

Zo zien we dat de wortel, voor x naderend van boven tot nul, tot nul nadert.

In fig. 1 is de grafiek van de wortelfunctie getekend.

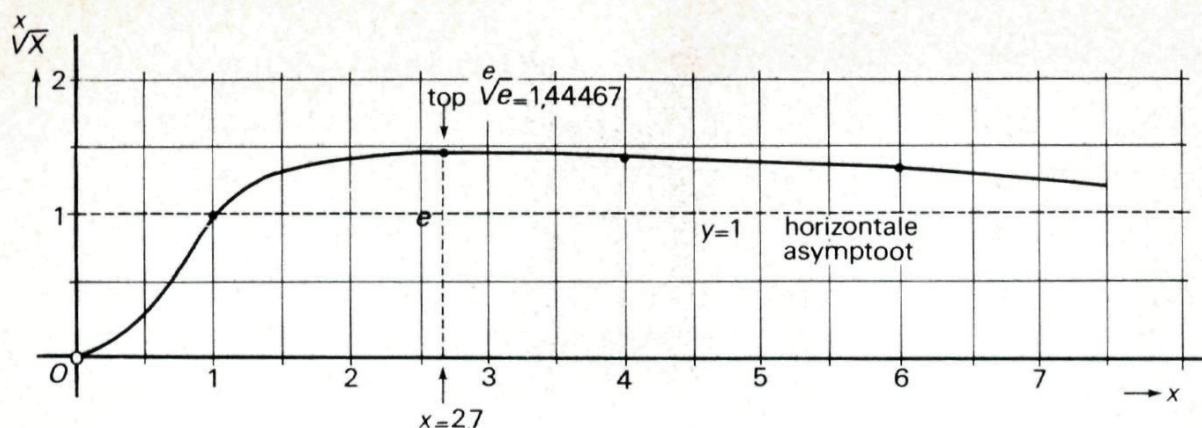


Fig. 1. Grafiek van de functie: $x \rightarrow \sqrt[x]{x}$.

Het domein van 2 tot 4

In het gebied voor waarden van x tussen 2 en 4 loopt de kromme uiterst vlak. Toch is wel zichtbaar dat er een maximum optreedt in de buurt van 3. Voor welke waarde van x treedt dat precies op en hoe groot is dat maximum?

Al snel blijkt dat het voor een waarde van x onder 3 is.

We zoeken het gebied verder af.

$$\sqrt[2,9]{2,9} = 1,44361 \quad \sqrt[2,8]{2,8} = 1,44442 \quad \sqrt[2,7]{2,7} = 1,44466 \quad \sqrt[2,6]{2,6} = 1,44413 \text{ enz.}$$

De top ligt bij $x = 2,7!!$

Misschien dat sommige lezers de zaak al doorzien. Er is een wonderlijk getal in de wiskunde. We noemen het: het getal van Euler en het symbool is e . De waarde van e is 2,718281828459045 . . . Het is een irrationaal getal. En, inderdaad, het blijkt juist deze waarde voor x te zijn, die de wortelvorm maximaal maakt. Zeer merkwaardig!!

Die hoogste waarde wordt dan $\sqrt[e]{e} = 1,44467!$

Voor wie enig bewijs hiervoor wil zien, het volgende.

∞ Voor wie het precies weten wil

De grafiek van $y = \sqrt[x]{x}$ heeft in de buurt van 2,7 een maximum.

Het punt is precies te berekenen door de functie te differentiëren. Dat lijkt een beetje moeilijk.

Het is mogelijk de wortelvorm als een e -macht te schrijven. Zo kun je in plaats van x ook schrijven $e^{\ln x}$.

$$\text{In ons geval: } \sqrt[x]{x} = x^{1/x} = e^{\ln x^{1/x}} = e^{1/x \ln x}$$

De afgeleide daarvan wordt:

$(1 - \ln x) x^{\frac{1}{x} - 2}$ en die functie kan alleen nul worden voor $x = e$. Daar ligt dan ook de top.

Oplossing van de denkertjes

1. Optelling in nationale kleuren

We zien gemakkelijk dat $B = 1$; $R = 9$ en $L = \text{nul}$ moet zijn. Voor $D + T$ eindigende op W bestaan, zonder cijferherhaling slechts de volgende mogelijkheden, gezien de eerste 3 kolommen der eenheden.

D en T	W	O	I	U	A
2	3	5			
2	4	6			
2	5	7			
2	6	8			
3	4	7			
3	5	8			
4	8	2			
5	7	2			
5	8	3			
6	7	3	8	5	4
6	8	4	7	5	3
7	6	3	8	5	4
7	8	5			

Daar O + W eventueel + 1 moet eindigen op A en bovendien 10 moet zijn, zelfs 12 moet zijn, kan uit de waarde van W in WIT gezien worden, welke waarde 0 kan hebben.

In enkele minuten vind je dan de driemaal twee oplossingen, waarvan de tweede van de gezochte opeenvolging van cijfers vertoont.

Oplossingen:

I. 9886	9887	II. 9776	9778	III. 9887	9886
357	356	458	456	356	357
10243	10243	10234	10234	10243	10243

2. Rekenpuzzel

(Er zijn nog vele andere mogelijkheden).

1	$1 \cdot 111 - 1 \cdot 11 + 1 - 1$	= 100
2	$2^{2^2} \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 - 2) + 2^2$	= 100
3	$3 \cdot 33 + 3$	= 100
4	$(4 \cdot 4 + 4 + 4 + 4 - 4) \cdot 4$	= 100
5	$5! + 5 + 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5 - 5$	= 100
6	$66 + 6 \cdot 6 - \frac{6+6}{6} + 6 - 6$	= 100
7	$(7 \cdot 7) + 7 - \frac{7-7}{7} \cdot \frac{7+7}{7}$	= 100
8	$8888 : 88 - 8^8 - 8$	= 100
9	$99 + 9^{999} - 999$	= 100

Inhoud

Werken met een onbereikbaar punt	25
Denkertje 1: Optelling in nationale kleuren	27
Kruiswoordraadsel	28
Een hyperbool in een koeltoren	30
Denkertje 2: Rekenpuzzel	31
Tovervierkanten in formule	31
Hoe diep is dat gat?	37
Pythagoras: eindeloos!	39
Met je zakrekenmachine een computer beter begrijpen	41
Verbeterde formule van Stirling	45
Een hoogst merkwaardige wortel	46
Voor wie het precies wil weten	48
Oplossing van de denkertjes	48

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

A.J. Elsenaar, Harderwijk.

W. Kleijne, Apeldoorn.

Ir. H. Mulder, Breda.

G.A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Stationsstraat 114, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 6,75 per jaargang. Voor anderen f 11,00.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

