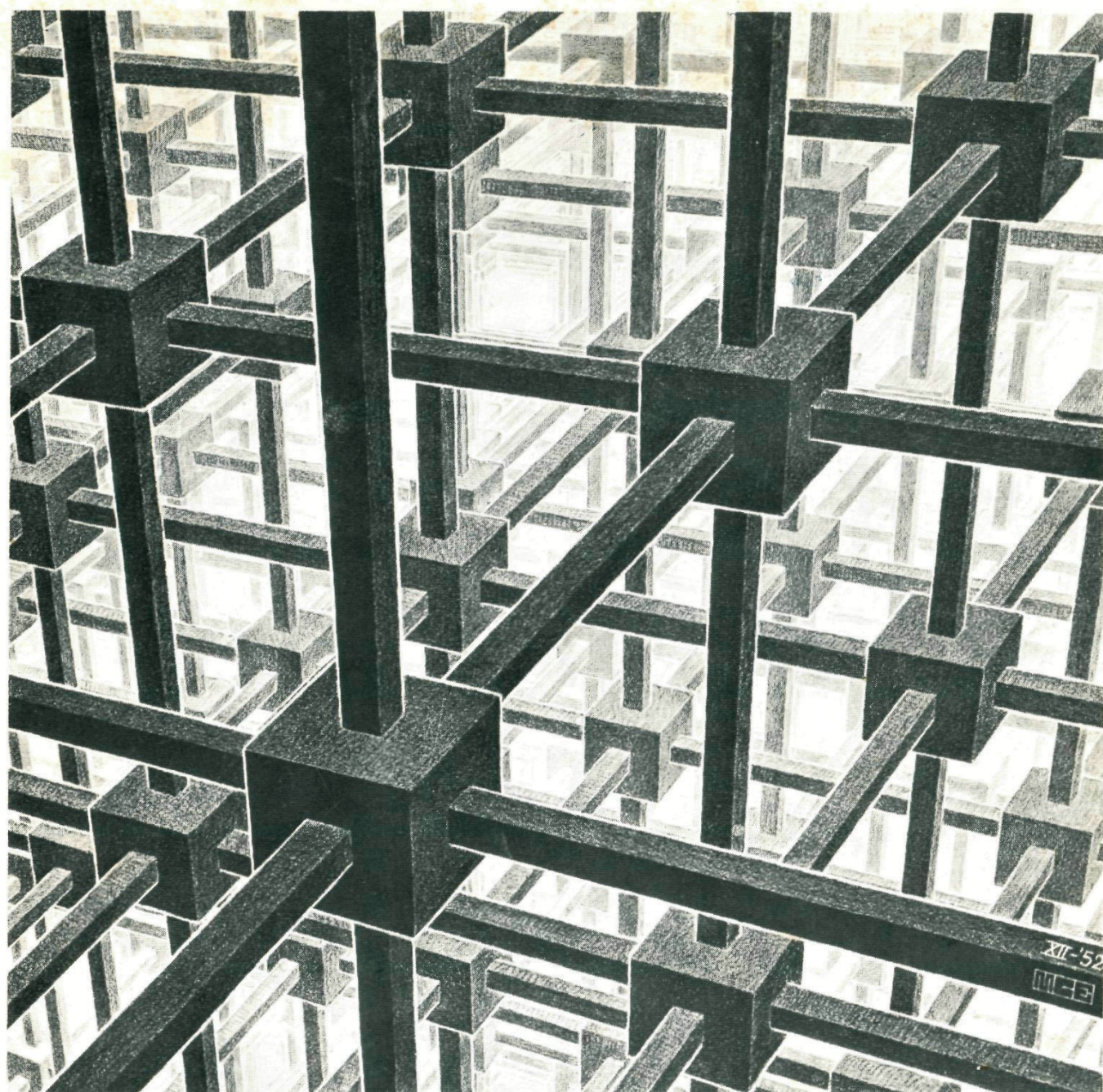


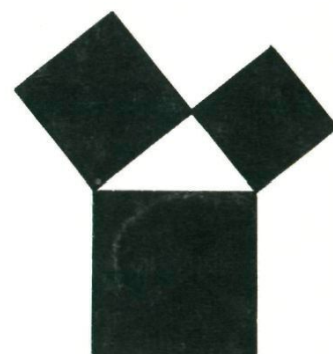


3

jaargang 17 / december 1977

**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Om bij het gieten van ijzer te zorgen dat de vormen zo gelijkmatig mogelijk gevuld worden, moet de stroom van vloeibaar ijzer constant zijn. Misschien zie je direct al in, dat 'gelijkmatig kantelen' er dan niet bij is! In het artikel: DE KANTELENDE GIETPAN gaan we daar nader op in.

BIJ DE PRENT OP DE OMSLAG:

In 1952 maakte M. C. Escher deze litho (steendruk) om DE ruimte uit te beelden. De bedoeling was dat de beschouwer van de zeer nauwkeurig perspectivisch geconstrueerde prent zich zou voorstellen, dat deze vlakvulling van kubussen zich in alle richtingen eindeloos voortzet. Zo kun je in de beperkte ruimte van een vierkant (het tekenvel) de eindeloosheid van de ruimte suggereren.

° Gaatjes boren, moeilijker dan je denkt

Vaak worden er in platen gaatjes geboord.

Soms is dat om materiaal te besparen, om de zaak lichter te houden; soms is het om iets door te laten.

Een boardplaat onder een matras moet kunnen ventileren, de kop van een telefoon moet geluidsgolven kunnen doorlaten en een putdeksel op straat water.

Bij dat boren willen we een regelmatig patroon krijgen: dat werkt beter en staat netter.

Wanneer zo'n plaat rechthoekig is, lijkt de opgave niet moeilijk. We zetten de gaatjes in rijtjes en kolommen naast en achter elkaar op de plaatsen waar zich bij grafiekenpapier de roosterpunten bevinden.

Wanneer de vorm geen rechthoek, maar bijvoorbeeld een cirkel is, liggen de zaken niet meer zo eenvoudig.

Hoe zouden de gaatjes geboord moeten worden in een ronde stoelzitting?

We zouden het in het wilde weg kunnen doen, maar dat is bepaald niet fraai.

Als we naar een goed ontwerp streven, moeten we eerst onze wensen voldoende exact formuleren. Wat willen we eigenlijk?

We zouden het zo kunnen stellen: de middelpunten van naburige gaatjes moeten onderling zo veel mogelijk gelijke afstanden hebben.

Verder willen we een regel om het ontwerp in radiale richting uit te breiden.

De vraag wordt dan: waar komen de middelpunten?

Regelmatige verdeling bij veelhoeken

Bij een vierkant zetten we de middelpunten van de gaatjes op onderling loodrechte lijnen op onderling gelijke afstanden (fig. 1). Zo'n patroon is gemakkelijk uit te breiden. De regelmaat blijft dan gehandhaafd. Bij een gelijkzijdige driehoek wordt de verdeling zoals in fig. 2. Ook hier liggen middelpunten van naburige gaatjes steeds op gelijke afstanden.

Bij een vijfhoek mislukt een dergelijk schema.

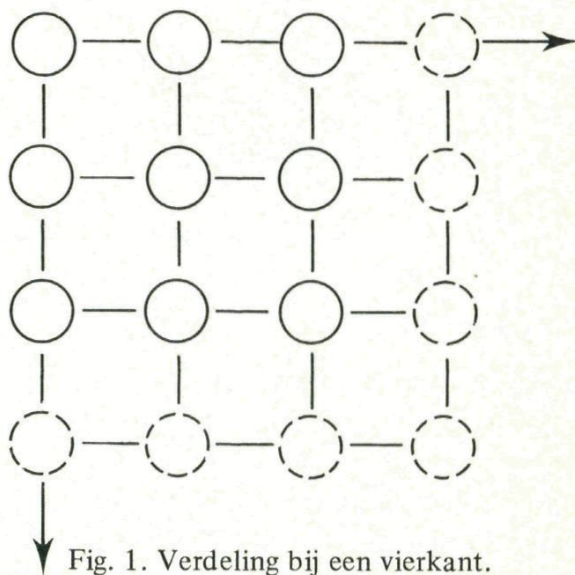


Fig. 1. Verdeling bij een vierkant.

Verdeling bij een cirkel

Wat ons meer interesseert is hoe de verdeling bij een ronde plaat zou moeten gaan. Het vierkantenpatroon geeft daar een onbevredigend resultaat.

In fig. 3 staat de verdeling zoals we die hebben aangetroffen bij het inwendige

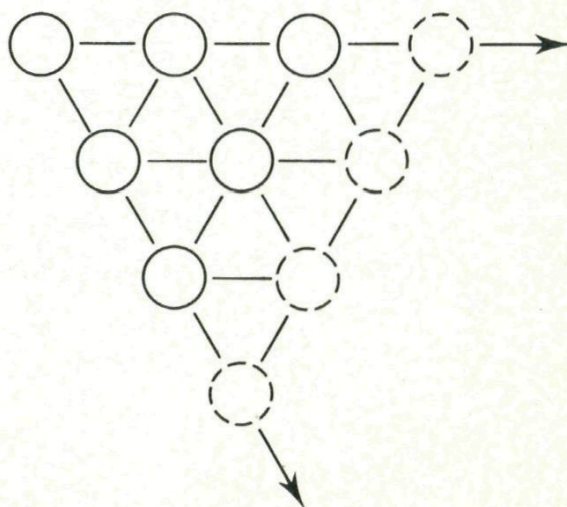


Fig. 2. Bij een gelijkzijdige driehoek.

van de microfoondoos van ons telefoon-toestel. Dat start met een vierkant van gaatjes omringd door 2 cirkels met 12 en 20 gaatjes.

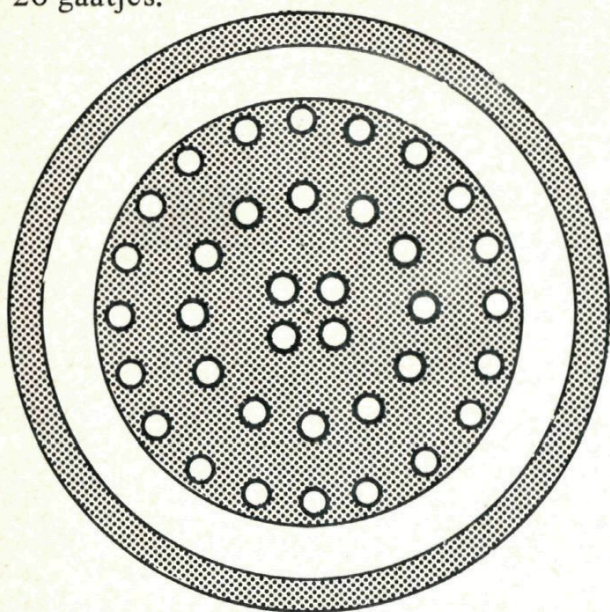


Fig. 3. Microfoondoos.

De verhouding van de middellijnen van beide cirkels is hier 19 mm : 33 mm en dat is ongeveer de verhouding 12 : 20, zodat de gaatjes op de cirkels ongeveer even ver van elkaar liggen. Wiskundig blijft het eindresultaat wat rommelig. Het zou beter kunnen.

In fig. 4 staat de verdeling zoals we die thuis zagen in de keuken bij het zeefje van de gootsteen.

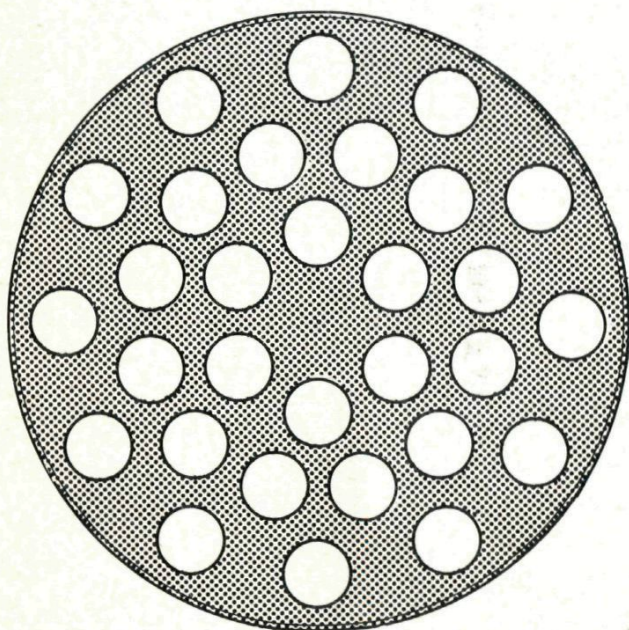


Fig. 4. Gootsteenzeefje.

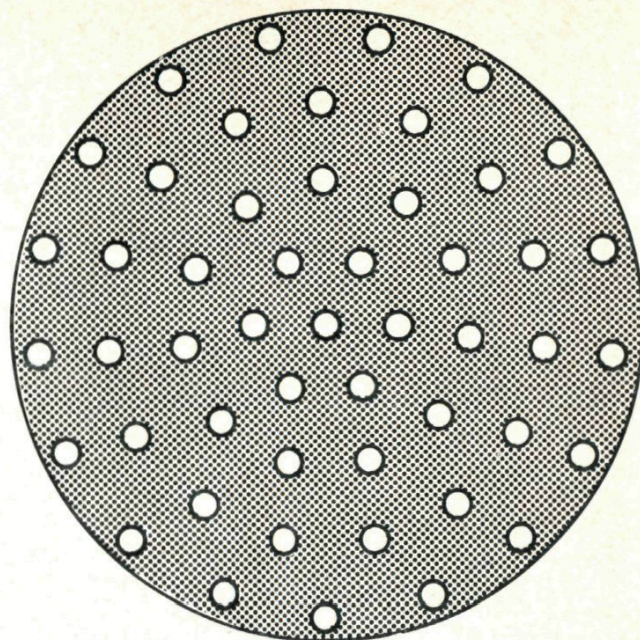


Fig. 5. Schuimspaan.

Het bevredigt ons meer. Speciaal de start in het midden met een zeshoek lijkt bij een cirkelvormige plaat de meest geschikte.

In fig. 5 is de verdeling aangegeven zoals we die hebben aangetroffen bij de schuimspaan. Het lijkt een goede start met behulp van een zeshoek, maar, bij nader inzien is de afwerking bepaald slecht te noemen. Als aantallen gaatjes tellen we 1, 6, 11, 15 en 17.

Beginnen met een zeshoek

Kunnen we niet, uitgaande van de zes-

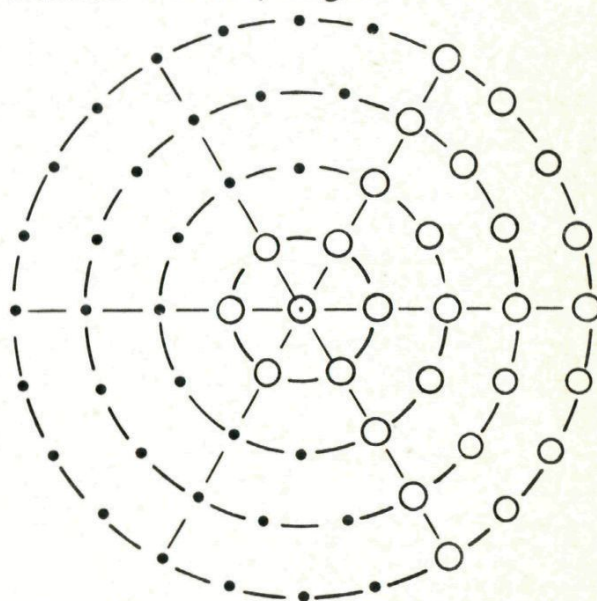


Fig. 6. Ideale verdeling uitgaande van een regelmatige zeshoek.

hoek, tot een beter verdeelvoorschrift komen?

De oplossing staat in fig. 6. Als de straal van de eerste cirkel r is, dan is de straal van de tweede $2r$, van de derde $3r$ enz. Als aantallen gaatjes kiezen we dan: 1, 6, 12, 18 enz. We vonden deze 'perfecte' verdeling bij de afdekkop van het telefoongedeelte van de telefoonhoorn (fig. 7).

Na enig rekenen blijkt de afstand van de gaatjes op een cirkel op de duur enigermate toe te nemen, al is het niet veel.

De omtrek van de n -de cirkel is $2\pi nr$. Hierop liggen $6n$ gaatjes, zodat de afstand van 2 van die gaatjes bij benadering wordt: $(2\pi nr) : (6n) = 2\pi r : 6 = 1,04 r$.

De afstand tussen de middelpunten van de gaatjes neemt op de duur dus maximaal . . . 4 % toe. Immers de gaatjes op de eerste cirkel hebben een onderlinge afstand r .

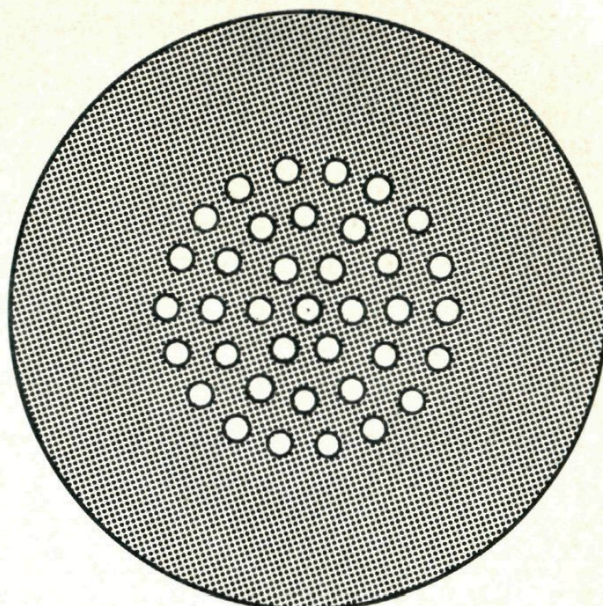


Fig. 7. Telefoonkop.

Verdeling bij een bol

Datzelfde probleem, van de regelmatige verdeling, komen we ook tegen bij bolvormige oppervlakken.

Hoe moeten gaatjes geboord worden in

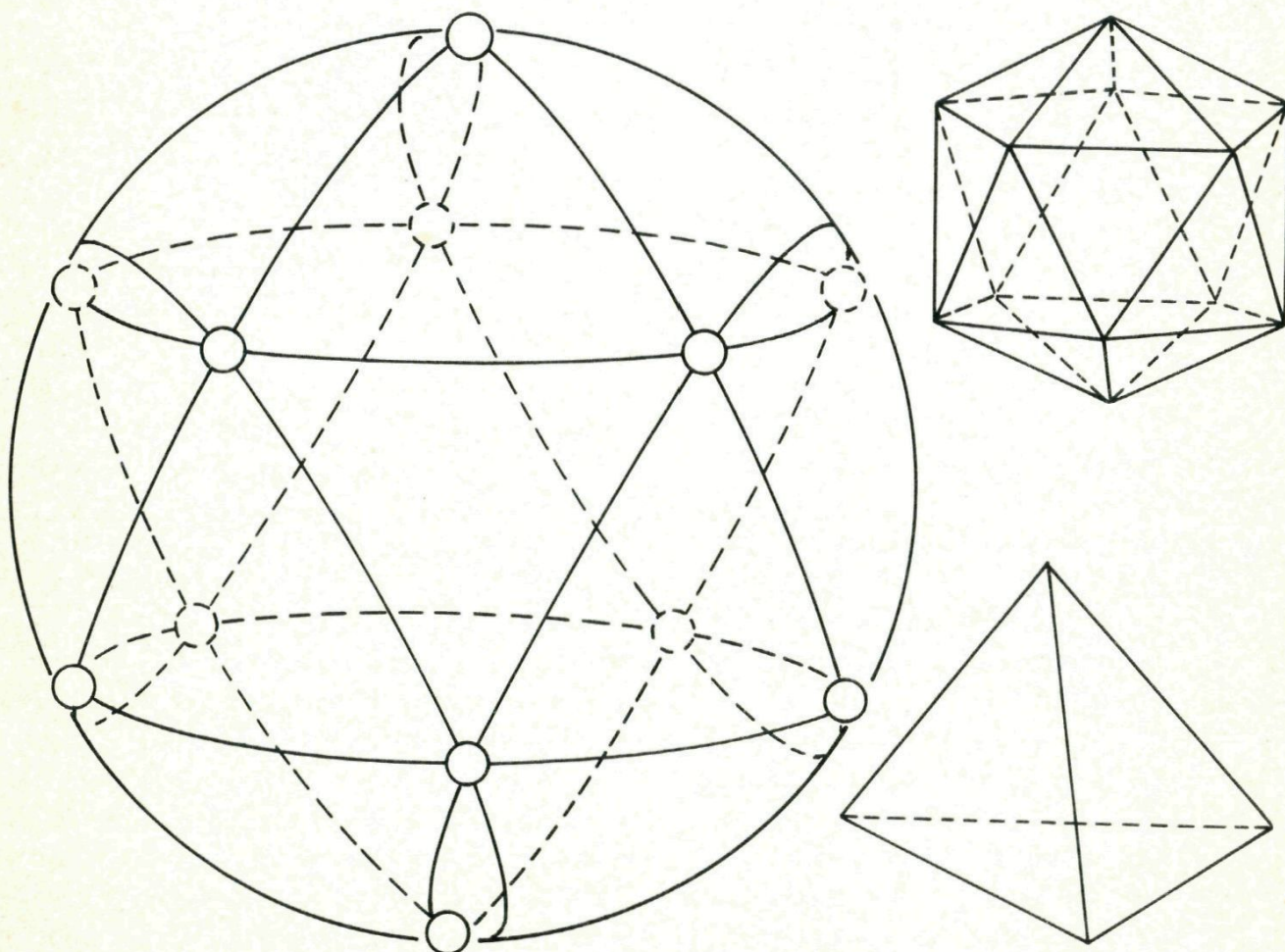


Fig. 8. Regelmatig net bij een bol.

een vergiet, een theezeefje, de bolvormige kop van een gieter?

Als het een klein deel van het boloppervlak betreft, kunnen we zo'n deel als vlak beschouwen en de eerder aangegeven methode benutten.

Bij de verdeling van een volledige bol, komen we uit bij regelmatige veelvlakken.

In fig. 8 staat bijvoorbeeld getekend hoe we, regelmatig verdeeld over het aardoppervlak, een net van relaisstations kunnen plaatsen. De gezochte punten zouden geschikt kunnen liggen op de hoekpunten van een regelmatig viervlak of, indien een groter aantal gewenst wordt, op de hoekpunten van een regelmatig twintigvlak.

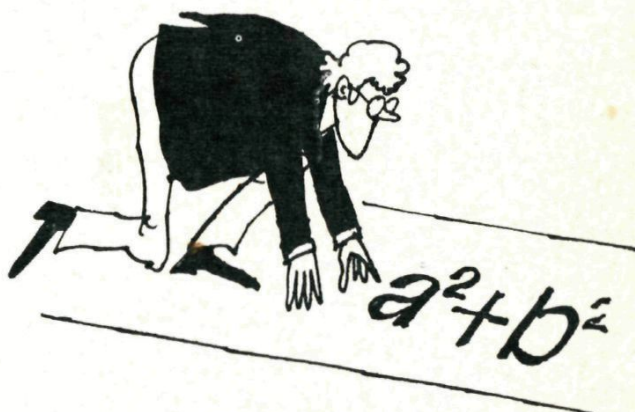
°°° Nederlandse successen bij de Internationale Wiskunde Olympiade

J. van de Craats

Bij de 19e Internationale Wiskunde Olympiade die van 1 tot 13 juli 1977 in Belgrado is gehouden, is de Nederlandse ploeg met 185 punten op de vijfde plaats geëindigd. Aan de Olympiade namen 21 landen deel. De Verenigde Staten behaalden de eerste plaats met 202 punten, gevolgd door de Sovjet-Unie (192 punten), Hongarije en Groot-Brittannië (elk met 190 punten). Na Nederland kwam Bulgarije met 172 punten. Nog nooit is een Nederlandse ploeg zo hoog op de ranglijst geëindigd.

De deelnemers aan de Olympiade zijn leerlingen van het vwo. Elk land kan maximaal 8 scholieren afvaardigen. De Olympiade bestaat uit twee zittingen van elk 4 uren waarin de deelnemers in totaal 6 wiskundige problemen moeten oplossen. Elk ploeglid kan maximaal 40 punten behalen. Dit jaar gaf een puntentotaal van 34-40 punten een eerste prijs, 24-33 punten een tweede prijs, en 17-23 punten een derde prijs. Van de acht Nederlandse deelnemers vielen er zes in de prijzen: Hans Mulder (39 punten) kreeg een eerste prijs, Marc van Leeuwen (33 punten) en Rinus Spit (26 punten) een tweede, en Sipke-Jan Hiemstra (22 punten), René Zandbergen (22 punten) en Frank van Overbeeke (19 punten) een derde prijs.

Hierbij vind je de 6 opgaven afgedrukt, zodat je zelf je krachten er eens op kunt beproeven. De oplossingen van de nrs. 1 t.e.m. 4 zullen in het volgende nummer verschijnen; aan het einde van dit stukje staan de uitwerkingen van 5 en 6 (eerst zelf proberen!!!).



Het vinden van oplossingen van wiskundige vraagstukken is niet een kwestie van geluk, zoals sommigen denken, of van 'je ziet het of je ziet het niet (en ik zie het meestal niet)', zoals anderen zeggen, maar van systematisch en verstandig zoeken. Hierbij speelt naast aanleg vooral ook oefening een belangrijke rol. Bij de voorbereiding van onze deelnemers op de IWO door middel van lesbrieven, hebben we daarom veel opgaven als oefenmateriaal gebruikt. Daarnaast zijn er ook stukjes wiskundige theorie die buiten het normale schoolprogramma vallen, behandeld. De brede wiskundige achtergrond en de

grote vaardigheid die onze deelnemers zo verkregen, maakten dat ze met succes aan de IWO konden meedoen. Het merkwaardige is namelijk dat de opgaven van de IWO in zoverre 'elementair' zijn, dat elke goede vwo-leerling in principe voldoende voorkennis heeft om ze op te lossen (zoals ook uit de uitwerkingen zal blijken), maar dat het zelf vinden van de oplossingen binnen een beperkte tijdsduur niet alleen grote aanleg, maar ook veel oefening vereist. We zullen proberen in de uitwerkingen iets van het 'systematisch en verstandig zoeken' naar voren te laten komen.



°°XIX Internationale Wiskunde Olympiade Belgrado 1977

Eerste dag, 6 juli 1977

1. Men construeert gelijkzijdige driehoeken ABK , BCL , CDM en DAN binnen het vierkant $ABCD$.

Bewijs dat de middens van de vier lijnstukken KL , LM , MN en NK samen met de middens van de acht lijnstukken AK , BK , BL , CL , CM , DM , DN en AN de hoekpunten zijn van een regelmatige twaalfhoek.

2. In een eindige rij reële getallen is de som van elke zeven op elkaar volgende termen negatief en de som van elke elf op elkaar volgende termen positief. Bepaal het maximale aantal termen van een dergelijke rij.

3. Gegeven is een geheel getal $n > 2$.

V_n is de verzameling van alle getallen van de vorm $1 + kn$, waarbij $k = 1, 2, \dots$

Een getal $m \in V_n$ heet *onontbindbaar* in V_n als er geen getallen $p, q \in V_n$ bestaan zo, dat $pq = m$.

Bewijs dat er minstens één getal $r \in V_n$ bestaat dat op meer dan één manier geschreven kan worden als product van in V_n onontbindbare elementen.

(Schrijfwijzen die slechts verschillen in de volgorde van de elementen van V_n worden als gelijk beschouwd.)

beschikbare tijd: 4 uren.

Tweede dag, 7 juli 1977

4. Gegeven zijn de reële constanten a , b , A , B en de functie $f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x$.

Bewijs dat, indien $f(x) \geq 0$ voor alle reële waarden van x , geldt

$$a^2 + b^2 \leq 2 \text{ en } A^2 + B^2 \leq 1.$$

5. Stel a en b zijn positieve gehele getallen.

Indien men $a^2 + b^2$ deelt door $a + b$, krijgt men q als quotiënt en r als rest.

Bepaal alle paren (a, b) als $q^2 + r = 1977$.

6. De functie f is gedefinieerd op de verzameling van alle positieve gehele getallen. De functiewaarden van f zijn ook positieve gehele getallen.

Voor alle n geldt

$$f(n+1) > f(f(n)).$$

Bewijs dat $f(n) = n$ voor alle n .

beschikbare tijd: 4 uren.

Uitwerking van opgave nr. 5

Uit de probleemstelling volgt

$$a^2 + b^2 = q(a+b) + r, \quad (1)$$

met $0 \leq r < a+b$

$$q^2 + r = 1977. \quad (2)$$

Uit (2) halen we $q \leq 44$, want $44^2 < 1977 < 45^2$.

Omdat uit (1) volgt $a^2 + b^2 < (q+1)(a+b)$ betekent dit

$$a^2 + b^2 < 45(a+b). \quad (3)$$

Veel meer kunnen we niet direct uit de gegevens halen. Uit (2) volgt nog $r < 1977$; als $q = 44$ zou zijn, zou $r = 41$ zijn. Als q kleiner is, is r groter, bijv. $q = 43$ geeft $r = 128$, enz. We moeten nu door overleg een idee zien te krijgen om verder te komen. Zo'n idee is dat r niet al te groot kan zijn. Een grote waarde van r betekent namelijk ook een grote waarde van $a+b$, maar daarmee komen we in tegenspraak met (3):

$$a^2 - 45a + b^2 - 45b < 0.$$

Kwadraat afsplitsen:

$$(a - 22\frac{1}{2})^2 + (b - 22\frac{1}{2})^2 < 2 \cdot (22\frac{1}{2})^2. \text{ We werken de noemers weg:}$$

$$(2a - 45)^2 + (2b - 45)^2 < 4050.$$

Je ziet hieruit duidelijk dat a en b niet al te groot kunnen zijn. Een ruwe schatting geeft $4050 < 4225 = 65^2$, dus

$$\text{zowel } 2a - 45 < 65$$

$$\text{als } 2b - 45 < 65,$$

d.w.z. $a < 55$ en $b < 55$, dus $a+b < 110$.

Nu zijn we plotseling een heel stuk verder gekomen, want de enige in aanmerking komende waarde van r kleiner dan 110 is 41! We weten dus

$$q = 44 \text{ en } r = 41.$$

De rest is eenvoudig. We substitueren dit in (1):

$$a^2 + b^2 = 44(a+b) + 41$$

en passen dezelfde truc toe als boven:

$$(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 2 \cdot 484 + 41 = 1009.$$

1009 is dus de som van twee kwadraten van gehele getallen. Je kunt allerlei slimme trucs bedenken om snel achter die twee getallen te komen, maar het eenvoudigste is misschien wel alle kwadraten onder de 1009 even op te schrijven (het zijn er maar 31). Je ziet dan direct dat $1009 = 28^2 + 15^2$ de enige mogelijkheid is. Dit geeft de oplossingen

$a - 22 = \pm 28$, hieruit volgt $a = 50$ (negatieve waarden zijn uitgesloten),

$b - 22 = \pm 15$, en hieruit volgt $b = 7$ of $b = 37$,

of natuurlijk net andersom: $b = 50$, $a = 7$ of 37 .

Voor het vinden van de oplossing is dus alleen de bekende truc van het kwadraat-afsplitsen als voorkennis vereist.

Uitwerking van opgave nr. 6

Bij deze opgave hebben we heel weinig houvast aan de gegevens:

$$f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+ \quad (1)$$

$$f(n+1) > f(f(n)) \text{ voor iedere } n \in \mathbb{N}_+ \quad (2)$$

We kunnen proberen (2) voort te zetten: $f(n+1) > f(f(n)) > f(f(f(n)-1)) > \dots$ maar dit biedt weinig perspectieven.

Wat kunnen we uit (1) halen? De verzameling van functiewaarden $f(n)$ is een deelverzameling van de positieve gehele getallen. Zitten er bijzondere elementen in deze verzameling? Er is één voor de hand liggend bijzonder element, namelijk het *minimum*. Stel dat dit wordt aangenomen in n_0 , dus

$$f(n) \geq f(n_0) \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}_+. \quad (3)$$

Nu brengen we (2) in het spel. (2) zegt dat elke functiewaarde $f(n+1)$ groter is

dan een andere functiewaarde (namelijk $f(f(n))$). Maar dit is in tegenspraak met (3) als we zouden kunnen nemen $n+1 = n_0$. Dit is dus onmogelijk, en dat wil zeggen dat $n_0 = 1$ moet zijn. We weten nu dus dat

$$f(1) < f(n) \text{ voor alle } n > 1 \quad (4)$$

We hebben hiermee de sleutel tot de oplossing in handen. De rest is een kwestie van consequent in deze richting doordenken. f is blijkbaar een afbeelding die $\{2, 3, \dots\}$ overvoert in $\{f(1) + 1, f(1) + 2, \dots\}$ en aangezien deze laatste verzameling deel uitmaakt van $\{2, 3, \dots\}$ kunnen we hetgeen we hierboven gedaan hebben nog eens herhalen.

Als resultaat vinden we dat de op één na kleinste waarde wordt aangenomen in 2, dus

$$f(1) < f(2) < f(n) \text{ voor alle } n > 2. \quad (5)$$

Zo voortgaande bewijzen we dat in het algemeen

$$f(1) < f(2) < f(3) < \dots \quad (6)$$

De rij functiewaarden is dus een *strikt stijgende* rij.

Nu gebruiken we (2) weer om te bewijzen dat $f(n) = n$ voor iedere n .

Dit kan op vele manieren. De kortste is de volgende: omdat de rij van de functiewaarden strikt stijgt, kan (2) alleen waar zijn als ook

$$n+1 > f(n) \text{ voor iedere } n. \quad (7)$$

Maar dit geeft samen met (6) $f(n) = n$ voor iedere n .

Je ziet dat er voor deze oplossing één goed idee nodig was: het werken met het minimum van f . Bijzondere voorkennis was er verder niet nodig.

Zo is het eigenlijk ook met de opgaven 1 t.e.m. 4. Bij opgave 1 moet je een héél klein beetje weten van meetkunde, en bij opgave 4 moet je verstand hebben van sinussen, cosinussen, en misschien ook nog wat gonioformules. Echter beslist niet meer dan je op school geleerd hebt.

Voor opgave 2 en 3 is, zoals ook uit de vraagstelling wel blijkt, in het geheel geen voorkennis nodig.

Veel succes bij je oplossingspogingen!

Denkertje 1: Plan

A	L	S
A	L	S
A	L	S
A	L	S

P	L	A	N
---	---	---	---

In deze optelsom zijn 5 letters gebruikt, A, L, N, P en S. Vervang deze letters door 5 verschillende cijfers (eenzelfde letter steeds door eenzelfde cijfer), en wel op zodanige wijze, dat er een kloppende optelling gevormd wordt.

Kan dit op meer dan één manier geschieden?

Het vinden van een (de) oplossing is niet moeilijk, maar zal je toch wel enige tijd wiskundig, vooral rekenkundig, bezighouden. Een activiteit die je verstand ongetwijfeld zal scherpen.

(Ir. H. Nyon, Paramaribo)

°°Pythagoras in de vouwgreep

We bewijzen de stelling van Pythagoras door een vouwtechniek.

Knip uit stevig papier een rechthoek $PQRS$ en merk de middens M en N van de zijden PQ en RS (fig. 1a).

Vouw de hoeken bij Q en S tegelijk om, zodat de vouwlijnen door M en N gaan en de omgevouwen driehoeken precies tegen elkaar komen (fig. 1b).

De niet gevouwen gearceerde delen worden nu vliegers. Vouw ten slotte de hoeken P en R om, waardoor de rechthoek van fig. 1c ontstaat.

Als de zijden van de beide rechthoekige driehoeken in fig. 1b de lengten a , b en c hebben, dan is het niet moeilijk om te bewijzen dat de beide kleine driehoeken van fig. 1c daarmee gelijkvormig zijn.

De vergrotingsfactor is daarbij a/b . Deze factor is kleiner dan 1.

De zijden van die kleine driehoeken hebben dan maten:

$$\frac{a}{b} \cdot a; \frac{a}{b} \cdot b \text{ en } \frac{a}{b} \cdot c \text{ ofwel } \frac{a^2}{b}; a \text{ en } \frac{ac}{b}$$

De rechthoek van fig. 1c heeft een oppervlakte $c \cdot \frac{ac}{b}$ of gezien als de som van 4 driehoeken:

$$2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b} \cdot a + \frac{1}{2} ab \right) \text{ of } \frac{a^3}{b} + ab$$

Gelijkstelling geeft:

$$\frac{ac^2}{b} = \frac{a^3}{b} + ab \text{ of } c^2 = a^2 + b^2 !!$$

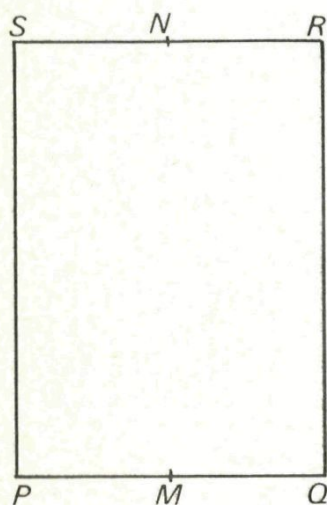


Fig. 1a.

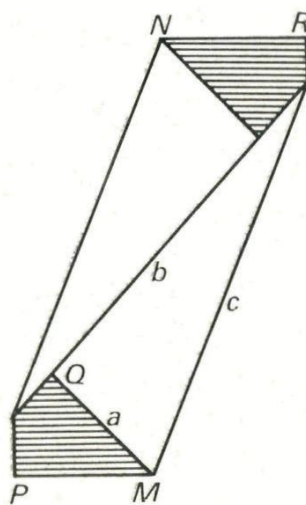


Fig. 1b.

Vouwen en meten.

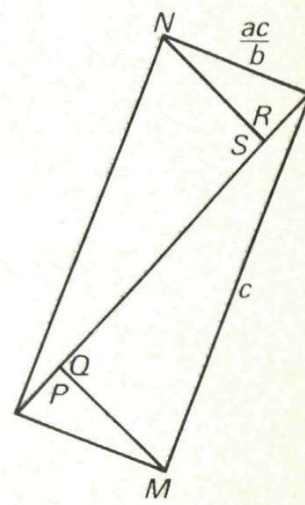


Fig. 1c.

°° Viermaal rond een riks

Een meetkundige bijzonderheid waarmee je je vrienden kunt verbazen (als je tenminste vrienden hebt die *Pythagoras* nog niet lezen) kan tot stand gebracht worden met een rijksdaalder, potlood en papier.

Trek de rijksdaalder om en doe dat nog een keer zó, dat de ontstane cirkels elkaar snijden. Teken nu een derde cirkel met behulp van de rijksdaalder die door een van de aanwezige snijpunten (H) gaat. Kortom: drie congruente cirkels door één punt. Buiten dit punt zijn er in het algemeen nog drie snijpunten (P , Q en R). Deze snijpunten liggen op een cirkel en wel precies de omtrek van een rijksdaalder! (Gestippelde cirkel in fig. 1.)

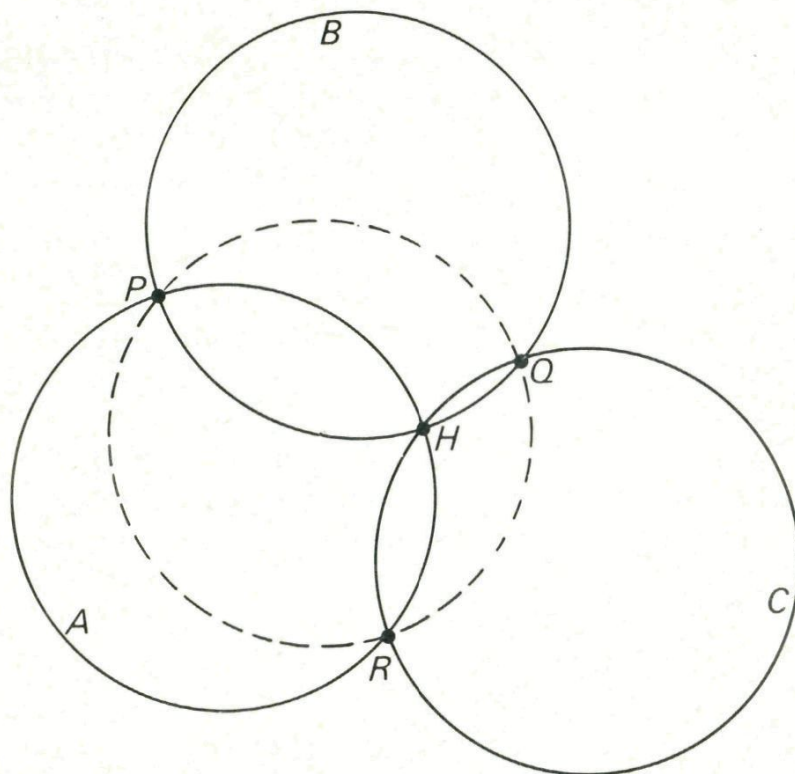


Fig. 1.

Er zijn verschillende bewijzen voor deze merkwaardigheid. Het teleurstellende is dat deze bewijzen veel moeilijker zijn dan de eenvoud van de stelling doet vermoeden. Het bewijs hangt natuurlijk ook sterk af van de stellingen waarover je kunt beschikken betreffende cirkels.

Een stelling

Het eenvoudigste bewijs berust op een moeilijke stelling die nu niet meer tot onze leerstof wiskunde op school behoort (fig. 2):

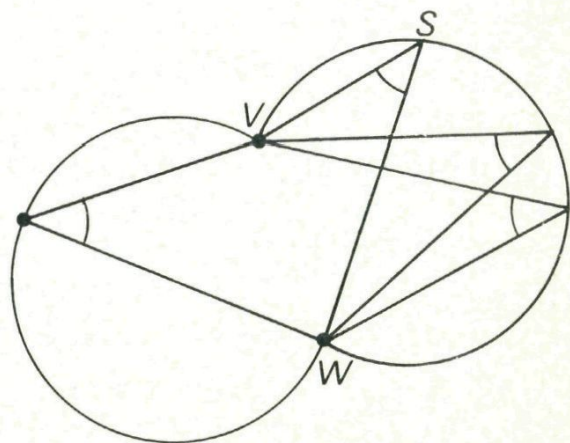


Fig. 2.

(I) gegeven de vaste punten V en W en de hoek α ; de verzameling van alle punten S waarvoor geldt dat $\angle VSW = \alpha$ bestaat uit twee cirkelbogen, symmetrisch ten opzichte van de lijn door V en W .

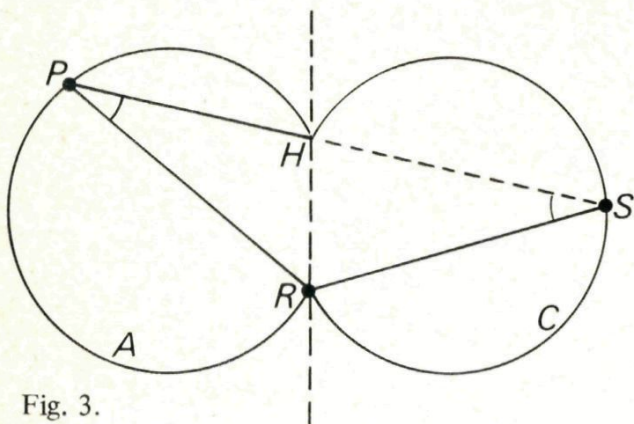


Fig. 3.

Kijk nu even uitsluitend naar de cirkels A en C die symmetrisch zijn ten opzichte van de as HR . Volgens stelling (I) geldt dat $\angle RPH = \angle RSH$. Punt S hebben we laten ontstaan door het verlengde van PH te snijden met cirkel C .

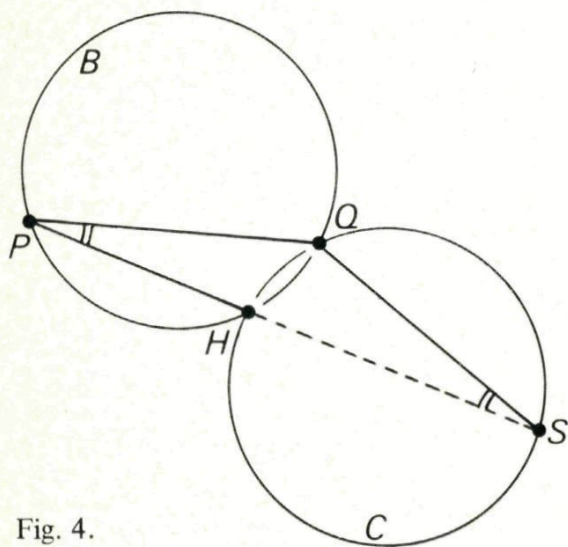


Fig. 4.

Bekijk nu cirkels B en C , symmetrisch ten opzichte van as HQ . Dus volgens (I)

$$\angle HPQ = \angle HSQ \text{ (figuur 4)}$$

$$\angle RPH = \angle RQH \quad \ddagger \text{ (zie boven)}$$

$$\angle RPQ = \angle RSQ$$

Waaruit volgt dat P en S moeten liggen op dezelfde cirkelboog door R en Q of op twee cirkelbogen symmetrisch ten opzichte van RQ .

S lag al op de rijksdaalderomtrek door R en Q , dus ligt ook P op een rijksdaalderomtrek door R en Q (fig. 5).

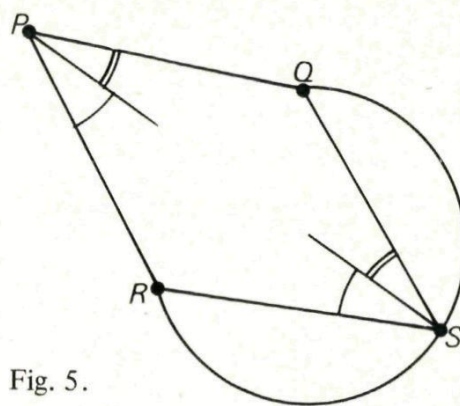


Fig. 5.

Zoals je ziet, geen moeilijk bewijs als je tenminste stelling (I) kent. Maar als je die stelling niet kent, of sterker nog die stelling in twijfel trekt, dan zijn we nog nergens.

Voor de doorzetters dan toch maar een bewijs voor stelling (I).

Een bewijs

We moeten twee kanten van de stelling aantonen, aangenomen dat M het middelpunt is van een van de cirkels en dat $\angle VMW = 2\alpha$ (fig. 6).

a. Nemen we een punt S op de cirkelbogen dan is $\angle VWS = \alpha$ (we nemen $S \neq V$ en $S \neq W$);

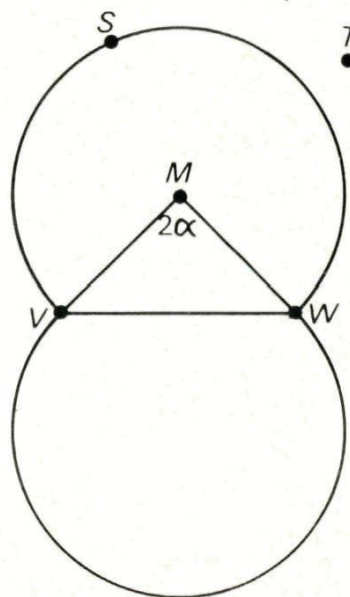


Fig. 6.

- b. Om aan te tonen dat we alle punten hebben met deze eigenschap moeten we nog laten zien dat voor een punt T niet liggend op een van de cirkelbogen, geldt $\angle VTW \neq \alpha$.

Merk op dat we de stelling ook inderdaad in beide richtingen gebruikt hebben: a in fig. 3 en 4, b in fig. 5.

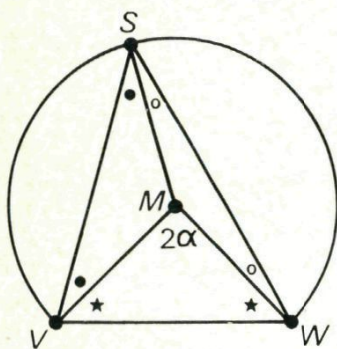


Fig. 7.

- a. Bekijk fig. 7 waarin drie gelijkbenige driehoeken voorkomen. Elk van deze driehoeken heeft, vanwege zijn symmetrie, twee gelijke hoeken, aangegeven met $\bullet$, $\circ$ en $\star$.

De som van de hoeken van $\triangle VWS$ is $2\bullet + 2\circ + 2\star = 180^\circ$

In driehoek VWM geldt dat

$$2\star = 180^\circ - 2\alpha, \text{ zodat}$$

$$2\bullet + 2\circ + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow$$

$$2\bullet + 2\circ = 2\alpha$$

$$\bullet + \circ = \alpha \Rightarrow$$

$\angle VSW = \alpha$ onafhankelijk van de plaats van S op de cirkelboog. Voor het spiegelbeeld van de cirkelboog geldt uiteraard hetzelfde.

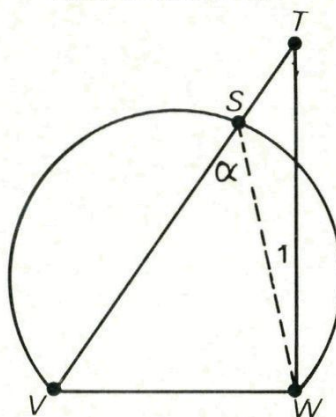


Fig. 8.

- b. In fig. 8 geldt in $\triangle WTS$ dat $\angle W_1 + \angle VTW + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ \Rightarrow \angle VTW = \alpha - \angle W_1 \neq \alpha$
Een soortgelijk bewijs geldt voor T binnen de cirkel.

Denkertje 2

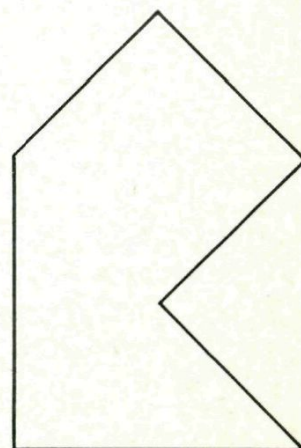
Bewijs dat in fig. 1 H het hoogtepunt is van $\triangle PQR$

Denkertje 3

Geef twee oplossingen van het volgende probleem.

Knip het figuurtje door, volgens een niet noodzakelijk rechte lijn, zó dat de twee delen aangesloten kunnen worden tot een vierkant.

Eén oplossing is erg gemakkelijk, maar nu de andere!



°° Worteltrekken zonder worteltoets

Er zijn rekenmachientjes waarmee je alleen maar kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Vaak ontbreekt daar de mogelijkheid voor worteltrekking.

Je zou natuurlijk wat kunnen gokken en door kwadrateren kijken in hoeverre de uitkomst bevredigend is.

Als op die manier enige decimalen van de wortel moeten worden gevonden, zijn we wel even bezig.

Er is een methode om, al is het met een paar aanslagen meer, een wortel vrij snel te benaderen en een uitkomst zelfs in 6 decimalen te vinden, zoals de duurdere apparaten ineens produceren.

Neem als voorbeeld $\sqrt{65}$. In 7 decimalen is de benaderde waarde: $\sqrt{65} = 8,0622577$.

Een handige werkwijze

We gaan voor $\sqrt{65}$ als volgt te werk. Maak een eerste ruwe schatting. Voor $\sqrt{65}$ zouden we 8 kunnen nemen. Het is duidelijk dat $\sqrt{65}$ iets meer dan 8 is, immers $8^2 = 64$. Deel nu met behulp van de rekenmachine 8 op 65. Dat geeft 8,125. Omdat $\sqrt{65} = 8$ een te lage benadering is, zal de werkelijke waarde van $\sqrt{65}$ tussen 8 en 8,125 liggen.

We nemen nu als nieuwe benadering het gemiddelde van 8 en 8,125 ofwel $\frac{1}{2}(8 + 8,125) = 8,0625$.

Als we kijken naar de boven vermelde uitkomst, zien we dat er al 3 decimalen goed zijn. Meestal is die benadering ruim voldoende.

Voor een volgende benadering gaan we hetzelfde proces nog eens uitvoeren.

Deel 8,0625 weer op 65. Ons machientje geeft daarvoor: 8,0620155.

Neem weer het gemiddelde $\frac{1}{2}(8,0625 + 8,0620155) = 8,0622575$.

Nu zijn al 6 decimalen goed!

De benaderingsmethode werkt dus snel.

Meetkundige verklaring

Je kunt het bepalen van $\sqrt{65}$ opvatten als het zoeken van de zijde van een vierkant met oppervlakte 65. De eerste benadering is 8. Denk nu aan een rechthoek met zijde 8 en oppervlakte 65 (fig. 1). Aan de



afmetingen zie je, dat deze rechthoek geen vierkant is. De breedte is te klein en dus de lengte te groot. Het is aannemelijk dat het rekenkundig gemiddelde van die twee dicht bij de waarheid ligt. Dus nu een rechthoek met breedte 8,0625. Enzovoort.

Wil je alvast eens nadenken over de volgende twee vragen?

1. We zijn in het voorbeeld met 8 begonnen. Gaat het met elke beginwaarde goed?
2. Hoe kun je weten hoeveel decimalen er 'goed' zijn?

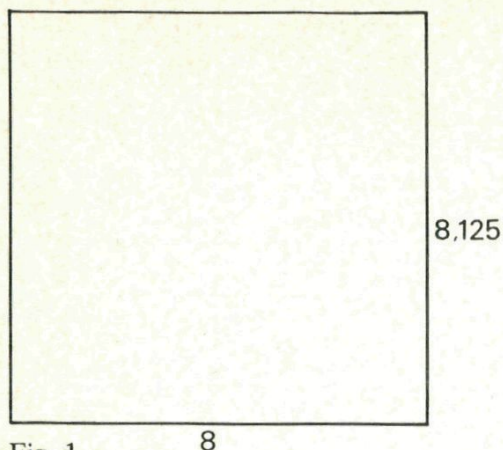


Fig. 1.

De derdemachtswortel

Op een dergelijke manier kun je ook $\sqrt[3]{65}$ benaderen: zoek de ribbe van de kubus met inhoud 65. Onze eerste schatting is 4, want $4^3 = 64$ ligt weer dicht in de buurt. Stel je nu een blok voor met inhoud 65, waarvan we als grondvlak een vierkant met zijden 4 nemen (Fig. 2). De hoogte blijkt

$$\frac{65}{4 \times 4} = 4,0625.$$

De waarheid ligt weer ergens tussen 4 en 4,0625. Laten we ook nu weer rekenkundig middelen en wel de drie afmetingen van de balk:

$$\frac{1}{3}(4 + 4 + 4,0625) = 4,0208333.$$

Een tweede benadering. Neem nu weer een balk met als grondvlak een vierkant met de tweede benadering als zijde en inhoud 65 en bereken de hoogte.

Enzovoort. We krijgen zo het lijstje:

4
4,0208333
4,0207256
4,0207256

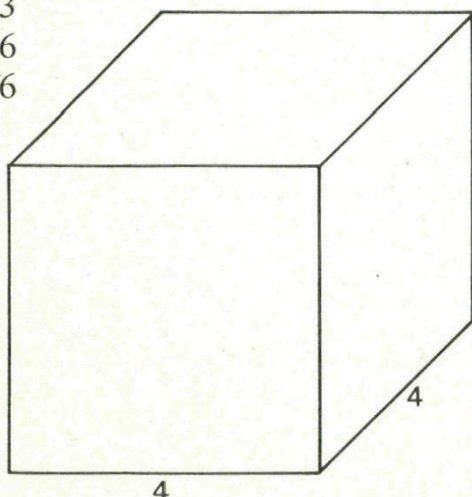


Fig. 2.

Benaderingsformules

Zo langzamerhand willen we van het voorbeeldgetal 65 afstappen en wat algemener vastleggen welke wijze van berekenen we hierboven hebben toegepast. Met opzet spreken we hier niet van één berekening, maar van een rekenwijze:

- kies een beginwaarde;
- bereken een volgende benadering;
- herhaal de voorgaande regel totdat het resultaat voldoende nauwkeurig is.

Een rekenwijze noemen we ook wel *algoritme*. Deze algoritme heeft nog wat vaagheden, die eigenlijk verbeterd dienen te worden.

Wat is in het algemeen een goede beginwaarde? Hoe weten we wanneer het resultaat voldoende nauwkeurig is? Misschien heb je je over de beginwaarde al wel een mening gevormd. We gaan eerst kijken naar de tweede regel van de algoritme.

Je kunt uit het voorgaande afleiden dat voor het benaderen van $\sqrt[3]{g}$ je een nieuwe benadering b_{i+1} berekent met behulp van de voorgaande benadering b_i volgens de volgende regel:

$$b_{i+1} = \frac{b_i + \frac{g}{b_i}}{2}$$

Wat ook geschreven kan worden als:

$$b_{i+1} = b_i - \frac{b_i^2 - g}{2 b_i}$$

Aan de laatste formule kunnen we goed zien wat van b_i moet worden afgetrokken om b_{i+1} te krijgen. Deze verandering wordt kleiner naarmate $b_i^2 - g$ kleiner wordt, dus als b_i dichterbij $\sqrt[3]{g}$ komt. En dat verbaast ons niet.

Op dezelfde wijze kunnen we een regel opstellen voor het benaderen van $\sqrt[3]{g}$ (probeer dat eens):

$$b_{i+1} = b_i - \frac{b_i^3 - g}{3 b_i^2}$$

Voor de vierdemachtswortel, hoewel we daarbij geen meetkundige voorstelling kunnen maken, kom je op dezelfde manier redenerend op:

$$\sqrt[4]{g} \quad b_{i+1} = b_i - \frac{b_i^4 - g}{4 b_i^3}$$

Zou je nu de regel voor bijvoorbeeld de zevendemachtswortel durven opschrijven?

∞∞ Afgeleide functie

Als je het begrip differentiëren al kent, geeft het volgende stukje van dit artikel voor jou een andere verklaring van de verkregen formules. Je hebt aan de voorkomende breuken misschien al gezien dat de noemer te maken heeft met de afgeleide van iets wat in de teller staat.

Netter geformuleerd:

$$b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f'(b_i)}$$

De functie f is voor het benaderen van $\sqrt{g}$ gedefinieerd als

$$f: x \rightarrow x^2 - g$$

Je kent de grafiek van deze functie (fig. 3):

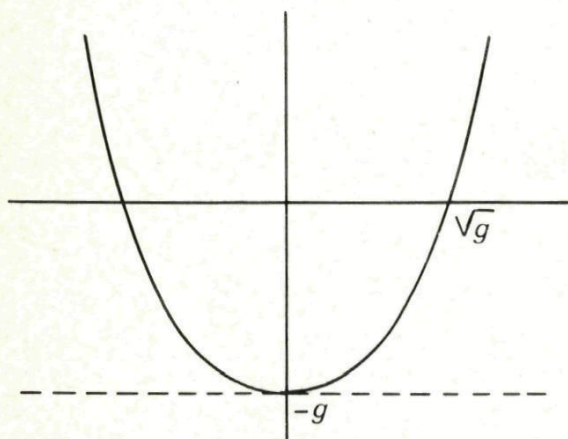


Fig. 3.

We komen hierin $\sqrt{g}$ weer tegen als ordinaat van een punt waar de grafiek de X -as snijdt. Het benaderen van $\sqrt{g}$ komt dus overeen met het benaderen van de positieve nulwaarde van f .

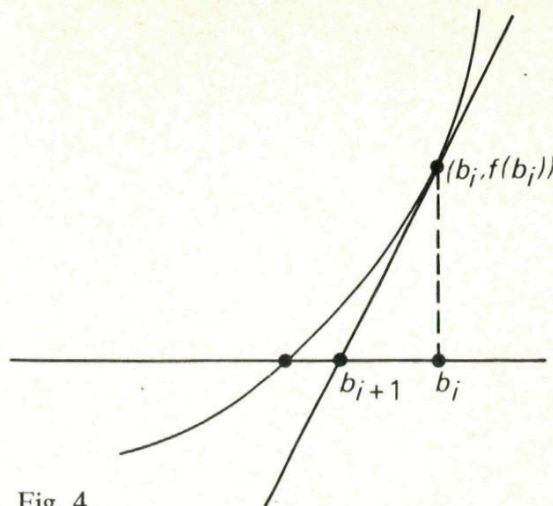


Fig. 4.

De wiskundige Euler bedacht voor het benaderen van een nulwaarde de volgende methode. Neem een benadering b_i .

Vervang nu de grafiek door de raaklijn in het punt $(b_i, f(b_i))$ en bereken het snijpunt van deze rechte met de X -as (fig. 4). Dat laatste gaat altijd gemakkelijk als we de vergelijking van de rechte maar hebben. Welnu, we weten de richtingscoëfficiënt: $f'(b_i)$. We krijgen

$$y - f(b_i) = f'(b_i) \times (x - b_i)$$

Je controleert gemakkelijk dat $(b_i, f(b_i))$ op deze rechte ligt. We willen nu ook dat $(b_{i+1}, 0)$ hierop ligt dus

$$-f(b_i) = f'(b_i) \times (b_{i+1} - b_i)$$

Als $f'(b_i) \neq 0$ kan dit worden herleid tot

$$b_{i+1} = b_i - \frac{f(b_i)}{f'(b_i)}$$

Een bekende regel. Door de procedure te herhalen krijgen we achtereenvolgende benaderingen (fig. 5).

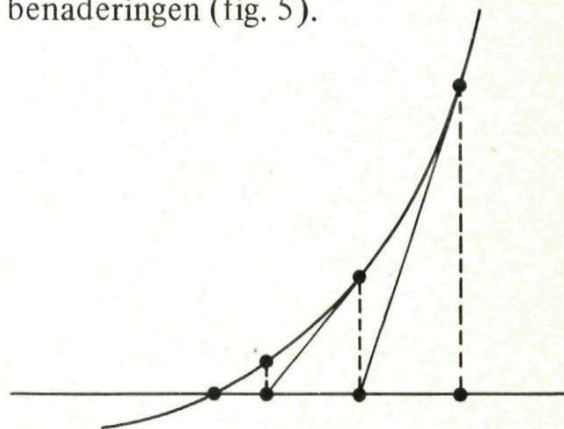


Fig. 5.

Uit de voorwaarde $f'(b_i) \neq 0$ zien we ook gelijk een gevaar van de methode: als voor $x = b_i$ de grafiek een horizontale raaklijn heeft gaat het fout. Zo mogen we voor het benaderen van $\sqrt[n]{g}$ nooit nul als beginwaarde nemen, zie stippellijn in fig. 3.

Naschrift

De beschreven methode voldoet goed voor het benaderen van wortels met be-

hulp van een rekenmachientje, waarbij je 'op het oog' besluit welke benadering voldoende nauwkeurig is. Dieper kunnen we er in dit artikel niet op ingaan. Evenmin als op de effecten van de nauwkeurigheid van de machine op het resultaat. We begeven ons dan op het gebied van de Numerieke Wiskunde, waarover heel wat boeken zijn verschenen voor de belangstellende lezer.

$$^{\circ}12 (4 + 1) = 12 \cdot 5$$

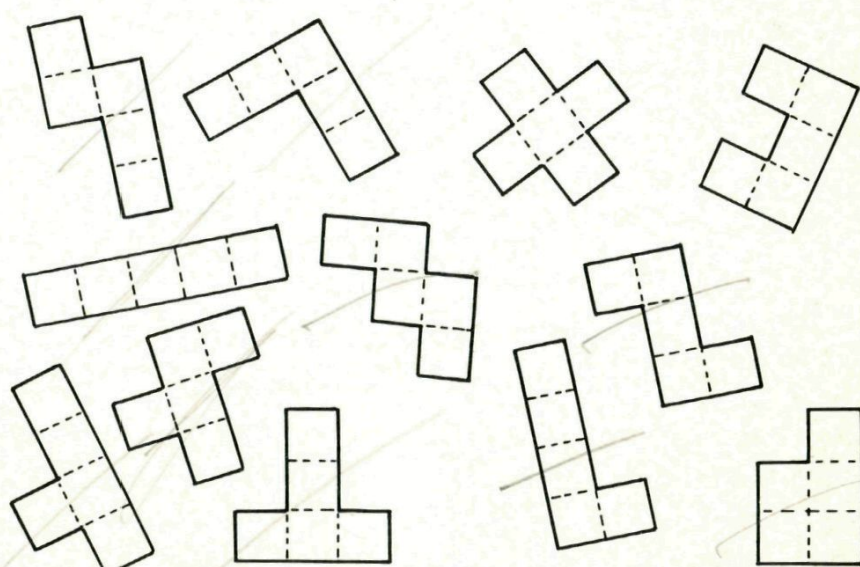
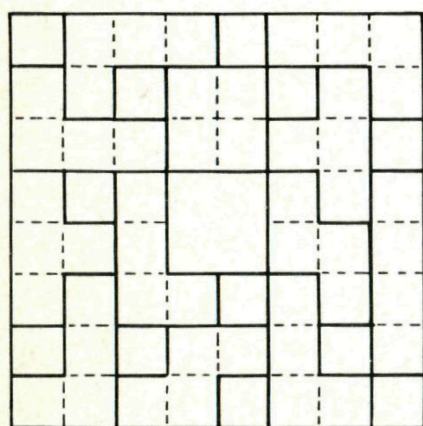
Het vierkant met het gat in het midden is gelegd met twee soorten steentjes:

- a. vierkantjes
 - b. figuren opgebouwd uit 4 vierkantjes.
- Daaronder liggen steentjes opgebouwd uit 5 vierkantjes.

De kunst is nu om de grote figuur met de onderste figuurtjes te beleggen.

Gaat het op meerdere manieren?

(Uit: *KWANT*, het Russische leerlingen-tijdschrift voor exacte wetenschappen.)



De kantelende gietpan

In een klokkengieterij hangt een gietpan met vloeibaar brons. Door de pan te kantelen loopt het metaal uit de pan in de gietvorm. Om een goed gietprodukt te krijgen en ook om veiligheidsredenen wil men dat de straal zo constant mogelijk is.

Daartoe moet in het begin snel gekanteld worden, naderhand wat langzamer en als de pan leeg raakt, weer sneller.

Als we deze wens beter kunnen formuleren en dan nog wiskundig in kaart weten te brengen, is het mogelijk een werktuigbouwer opdracht te geven een daartoe passend draaimechaniek te ontwerpen.

Het probleem

In fig. 1 staat de pan in een 5-tal standen getekend. De hoek α wordt daarbij gemeten tussen de verticaal en de as van de pan. Bij $\alpha = 0^\circ$ is de pan nog vol, bij $\alpha = 90^\circ$ is de pan leeggelopen.

We berekenen nu eerst de hoeveelheid vloeistof die uit de pan is gelopen bij een zekere draaiingshoek α .

Om de zaak niet te moeilijk te maken stellen we voor als pan een kubus te nemen met afmetingen $1 \times 1 \times 1$.

In fig. 1, de tweede stand, is dan af te lezen dat de hoeveelheid weggestroomde vloeistof een volume heeft $\frac{1}{2} \tan \alpha$.

Als we de pan met een constante straal willen leeggieten, moet de hoeveelheid weggelopen vloeistof evenredig zijn met de verlopen tijd. Dus dan moet $\frac{1}{2} \tan \alpha$ evenredig zijn met de tijd.

1. In formulevorm: $\frac{1}{2} \tan \alpha = c \cdot t$ waarbij c een nog nader te bepalen constante voorstelt.

Maar nu moeten we oppassen! Deze relatie geldt alleen maar voor het gebied $0^\circ < \alpha < 45^\circ$. Immers vóór het bereiken van de 45° -stand heeft de weggelopen vloeistof een 'driehoeks'-vorm, maar daarna een 'trapezium'-vorm.

Daar hoort dan een andere formule bij.

We hebben hier een typisch voorbeeld van een op een bepaald interval gedefinieerde functie!

Hoe gaat het verder voor $\alpha > 45^\circ$?

In de voorlaatste tekening is te berekenen dat de nu uitgestroomde hoeveelheid is:

$1 - \frac{1}{2 \tan \alpha}$ geldend voor het

interval $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Ook hier willen we weer dat, om een constante straal te krijgen, de evenredigheidsrelatie geldt.

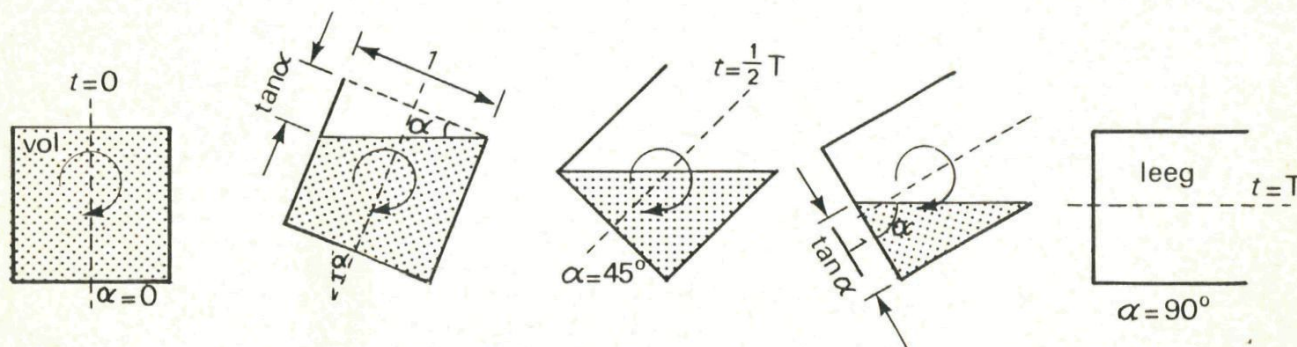


Fig. 1. Leegglopende gietpan.

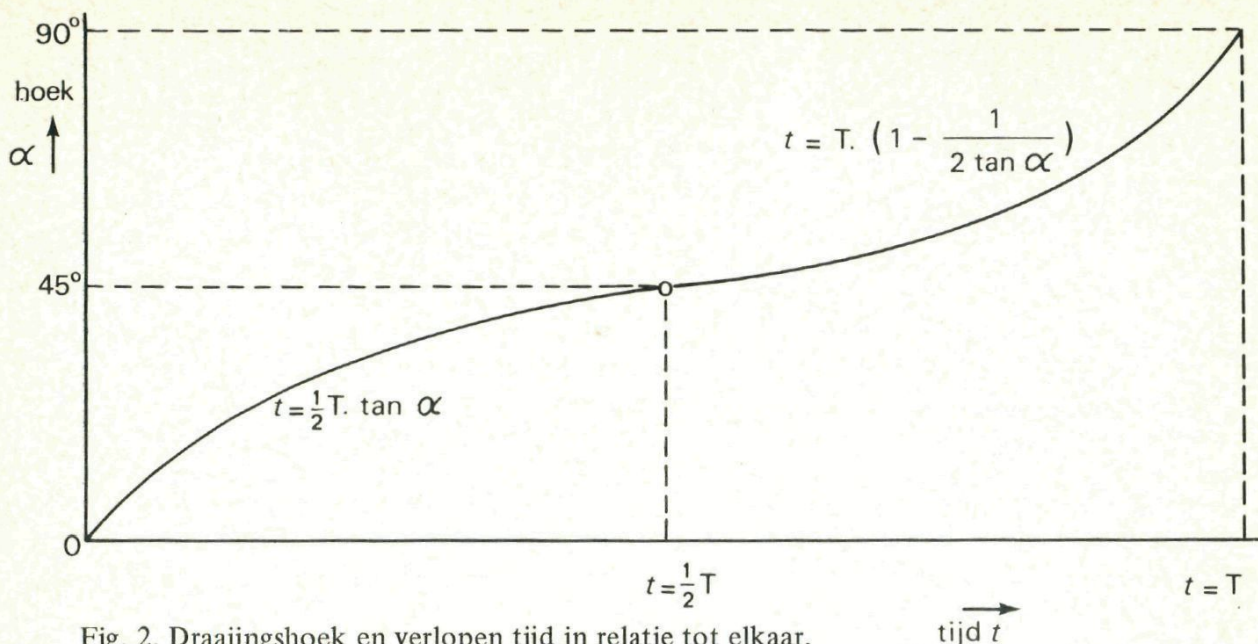


Fig. 2. Draaiingshoek en verlopen tijd in relatie tot elkaar.

Dan moet $1 - \frac{1}{2 \tan \alpha}$ evenredig zijn met de tijd.

2. In formulevorm: $1 - \frac{1}{2 \tan \alpha} = k \cdot t$ waarbij k weer een, nog te bepalen, constante voorstelt. We moeten daarbij bedenken dat deze relatie alleen geldt voor $45^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Bepaling van beide constanten c en k

De beide formules (1) en (2) moeten voor $\alpha = 45^\circ$ precies hetzelfde zijn. Dat geeft een eerste relatie tussen de constanten c en k .

Bovendien speelt de totale uitstroomtijd nog een rol. Stel de tijd waarin de pan omgekiept wordt T . Bij de klokkengieterij was $T = 5$ minuten!

Als de pan dan 45° gedraaid is, is de pan half leeg en de verlopen tijd $\frac{1}{2} T$.

Dit ingevuld in vergelijking (1) geeft: $\frac{1}{2} = c \cdot \frac{1}{2} T$ dus $c = 1/T$.

Formule (1) gaat er dan als volgt uit zien:

$$t = \frac{1}{2} T \cdot \tan \alpha \text{ voor } 0^\circ \leq \alpha < 45^\circ$$

In fig. 2 is dat in grafiek gebracht.

Om de constante k te bepalen behoeven we enkel te bedenken dat voor $\alpha = 90^\circ$ moet gelden $t = T$. Bij de grafiek zouden we zeggen: het punt met coördinaten $(T, 90^\circ)$ ligt erop. Zo vinden we ook voor k de waarde $1/T$.

Formule (2) wordt dan:

$$t = T \left(1 - \frac{1}{2 \tan \alpha} \right) \text{ voor } 45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ.$$

Ook deze grafiek is in fig. 2 getekend.

De beide stukken zijn delen van de bekende tangenslijn, $y = \tan x$, maar wel een kwartslag gedraaid.

Slotconclusie

De totale grafiek overziende, blijkt dat de pan steeds langzamer gewenteld moet worden, maar na het passeren van het midden weer vlugger.

Als we de pan met constante hoeksnelheid zouden kantelen, zou deze grafiek recht zijn geworden, maar dan hadden we geen constante straal gehad!

Nu is er nog wel puntsymmetrie rond het punt $(\frac{1}{2} T, 45^\circ)$. De helling van de raaklijn aan de kromme, bepaalt de veranderende hoeksnelheid.

In het centrale punt vertoont de kromme geen knik; het verloop is vloeiend.

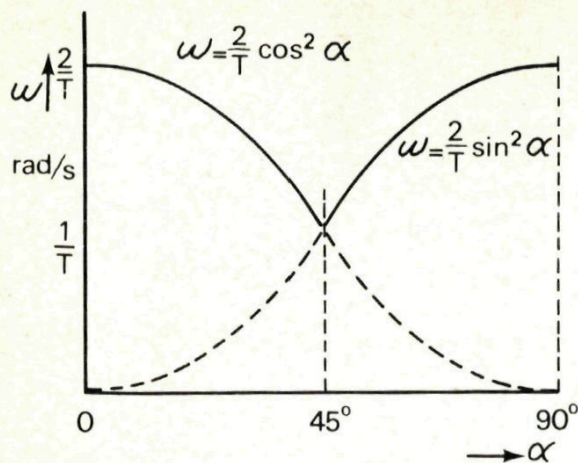


Fig. 3. De hoeksnelheid in relatie tot de tijd.

Berekening van de hoeksnelheid

Voor wie kan differentiëren is het niet moeilijk om de hoeksnelheid ω van de pan als functie van de draaiingshoek α te bepalen.

Immers er geldt: $\omega = d\alpha/dt$.

In fig. 3 staan de uitkomsten voor de beide intervallen. Tevens blijkt hieruit dat de hoeksnelheid halverwege precies de helft is van die bij de eindstanden.

Als we ω aangeven in rad/s vinden we voor ω halverwege een uitkomst die het omgekeerde is van de leeglooptijd T .

Tevens blijkt nu dat de t, α -grafiek bij $t = \frac{1}{2}T$ geen knik vertoont, de hoeksnelheid daarentegen wel.

Denkertje 4

	O	N	S
	O	N	S
	O	N	S
	O	N	S
	O	N	S
P	O	N	D
K	I	L	O

Deze optelsom zegt dat 5 ONS + 1 POND gelijk is aan 1 KILO.

De bedoeling is iedere letter door een cijfer te vervangen, dezelfde letter overal door hetzelfde cijfer, en wel op zodanige wijze, dat er natuurlijk een kloppende optelling ontstaat.

Er zijn 8 verschillende letters gebruikt.

Ter beschikking staan alleen de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 8.

De cijfers nul en 9 mogen dus niet gebruikt worden.

De opgave kan slechts op één enkele manier vervuld worden!

(Ir. H. Nyon, Paramaribo)

°° Harmonische drietallen

W. Ganzevoort

Uit de kring van Pythagoras stamt het begrip 'harmonisch gemiddelde' naast het meetkundig en het rekenkundig gemiddelde. Je kunt dat bijvoorbeeld zo formuleren:

m is het gemiddelde van a en b als

$$\text{(rekenkundig:)} \quad m + m = a + b$$

$$\text{(meetkundig:)} \quad m \cdot m = a \cdot b$$

$$\text{(harmonisch:)} \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Zo'n gemiddelde hangt dus samen met een bewerking, het rekenkundig gemiddelde met het optellen, het meetkundig gemiddelde met het vermenigvuldigen, en het harmonisch gemiddelde met, ja met wat eigenlijk? Je zou het 'harmonisch optellen' kunnen noemen: Laten we als teken voor $\oplus$ kiezen, dan:

$$a \oplus b = c \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b},$$

$$\text{dus: } \frac{1}{a \oplus b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Maar kennen we dat niet?

Bij parallelschakeling van weerstanden krijg je toch zoiets? En de lenzenformule?

$$\text{Dat wordt } v \oplus b = f \quad (H)$$

Nu komen vraagstukken met weerstanden en lenzen lang niet altijd 'mooi' uit. In dit artikel willen we nagaan wanneer het wel mooi uitkomt, of, om het wat preciezer te zeggen, wanneer (f, v, b) een drietal natuurlijke getallen is dat voldoet aan (H) . En we willen alle mogelijke dergelijke drietallen vinden; we zullen zulke drietallen *harmonisch* noemen.

Even terzijde, het harmonisch optellen is een redelijk nette bewerking in $\mathbb{R}^+$, ga maar na dat $\oplus$ wel commutatief en asso-

ciatief is, maar dat er geen eenheid is en dus ook geen inverse.

Het eerste wat we nu van harmonische drietallen kunnen opmerken is dit:

- als (f, v, b) een harmonisch drietal is en $a \in \mathbb{N}$, dan is (af, av, ab) ook een harmonisch drietal.

En het tweede:

- als (f, v, b) een harmonisch drietal is dan (f, b, v) ook.

Dat kun je gemakkelijk narekenen. Maar er zit meer achter, namelijk een stuk natuurkunde.

Wat de eerste eigenschap betreft, die geldt lang niet bij iedere wet; waarom dan wel bij de lenzenformule? Wel, omdat het hier gaat om drie grootheden *van dezelfde soort*. En als je dan de getallen verandert op de aangegeven manier, dan kan dat betekenen, dat je alleen maar een andere eenheid van lengte gekozen hebt. En daar trekken de lichtstralen zich natuurlijk niets van aan.

En bij de tweede eigenschap zul je je herinneren dat de stralengang omkeerbaar is bij een lens. En het gevolg is dat v en b verwisseld mogen worden.

Deze twee eigenschappen zullen in ons nu volgende onderzoek ook een rol spelen. Stel dat f, v, b een harmonisch drietal is.

Men noemt $\frac{b}{v}$ wel de vergroting. Deze vergroting is te schrijven als een onvereenvoudigbare breuk $\frac{p}{q}$, waarin dus GGD $(p, q) = 1$. Voor de natuurlijke getallen b, v en f geldt nu $b = pc$ en $v = qc$ en

$$f = \frac{1}{\frac{1}{pc} + \frac{1}{qc}} = \frac{pqc}{p+q} \quad (I).$$

Nu is f en dus $\frac{pqc}{p+q}$ een natuurlijk getal.

Maar $\frac{q}{p+q}$ is niet te vereenvoudigen, want als $\frac{p}{q}$ onvereenvoudigbaar is, dan

$$\text{ook } \frac{p}{q} + 1 = \frac{p+q}{q}.$$

Hetzelfde geldt voor $\frac{p}{p+q}$. Dus moet

$\frac{c}{p+q}$ een natuurlijk getal, zeg d , zijn. Dus $c = (p+q)d$. We vullen dit in in (I) en concluderen nu:

Een harmonisch drietal is te schrijven als $pqd, p(p+q)d, q(p+q)d$.

Bekijken we uitsluitend onvereenvoudigbare drietallen, dan is zo'n drietal weer te geven door $pq, p(p+q), q(p+q)$ met $\text{GGD}(p, q) = 1$.

Het omgekeerde: als $p, q \in \mathbb{Z}^+$ dan is $pq, p(p+q), q(p+q)$ een harmonisch drietal, is gemakkelijk te controleren. Doe dit zelf.

Voor het maken van een lijst harmonische drietallen kunnen we ons beperken tot de gevallen $v \leq b$, dus $p \leq q$.

Nauwkeuriger gezegd: $p < q$, want $p = q$ mag wegens de onderlinge ondeelbaarheid niet voorkomen.

Een lijst van alle onvereenvoudigbare 'kleine' harmonische drietallen:

p	q	$p+q$	$\frac{pq}{f}$	$\frac{(p+q)q}{v}$	$\frac{(p+q)p}{b}$	$N = \frac{p}{q}$
1	1	2	1	2	2	1
2	1	3	2	3	6	2
3	1	4	3	4	12	3
3	2	5	6	10	15	$1\frac{1}{2}$
4	1	5	4	5	20	4
4	3	7	12	21	28	$1\frac{1}{3}$
5	1	6	5	6	30	5
5	2	7	10	14	35	$2\frac{1}{2}$
5	3	8	15	24	40	$1\frac{2}{3}$
5	4	9	20	36	45	$1\frac{1}{4}$
6	1	7	6	7	42	6
6	5	11	30	55	66	$1\frac{1}{5}$
7	1	8	7	8	56	7
7	2	9	14	18	63	$3\frac{1}{2}$
enz.						

Een ander aspect van harmonische, niet noodzakelijk gehele, getallen is dat ze gemakkelijk als lengtes in eenvoudige figuren weer te geven zijn.

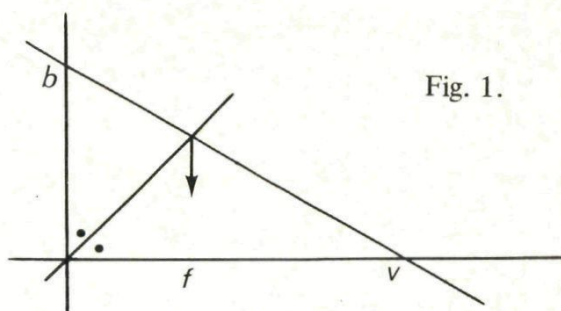


Fig. 1.

Het eerste voorbeeld is de grafiek van fig. 1. Een rechthoekig assenstelsel waarin b en v op de beide assen is afgezet. Een rechte door deze punten wordt gesneden met de rechte $y = x$. De projectie van het snijpunt op de X -as geeft f . Bewijs dit.

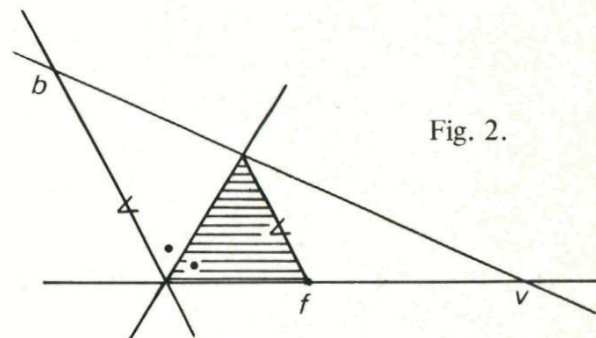


Fig. 2.

Eenzelfde resultaat krijgt men als men een schreefhoekig assenstelsel neemt (fig. 2). In het bijzonder als de hoek tussen de positieve assen 120° wordt genomen. Er ontstaat dan een gelijkzijdige driehoek (gearceerd), zodat f niet alleen op de X -as, maar ook op de bissectrice is af te lezen. Zo ontstaat een handzaam nomogram voor harmonische drietallen (fig. 3).

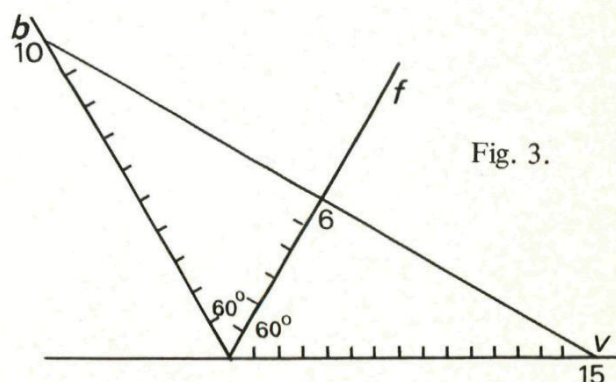


Fig. 3.

° Niet precies, maar wel ongeveer

In de natuurkundeles wordt de uitzettingscoëfficiënt van bijvoorbeeld ijzer gemeten. Men vindt dan hiervoor 0,000 012. Vervolgens wil men de kubieke uitzettingscoëfficiënt weten. Deze wordt dan niet gemeten maar berekend. Als uitkomst voor $(1,000\ 012)^3$ wordt dan gesteld 1,000 036. Dit is dan de afgeronde waarde voor de werkelijke uitkomst 1,000 036 000 432 001 728.

In plaats van zoiets normaal uit te vermenigvuldigen kun je dit afleiden uit:

$$(1+a)^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3$$

Als nu a veel kleiner is dan 1, kun je de laatste twee termen wel weglaten.

Bij benadering geldt dan:

$$(1+a)^3 \approx 1 + 3a$$

Zo kun je ook stellen (steeds onder de voorwaarde dat $a \ll 1$)

$$(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 \approx 1 + 2a$$

Toegepast op $(1,003)^2$ geeft dit ongeveer 1,006

Een uitgebreidere toepassing:

$$(2,0006)^2 = 4(1,0003)^2 \approx 4(1,0006) \approx 4,0024$$

Evenzo geldt:

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{1}{2}a$$

$$(\text{immers } (1 + \frac{1}{2}a)^2 \approx 1 + a)$$

$$\text{voorbeeld: } \sqrt{1,004} \approx 1,002$$

Zo kun je ook stellen:

$$\frac{1}{1+a} \approx 1 - a$$

$$(\text{immers } (1+a)(1-a) \approx 1)$$

$$\text{voorbeeld: } \frac{1}{1,004} \approx 1 - 0,004 \approx 0,996$$

$$\text{Evenzo natuurlijk } \frac{1}{1-a} \approx 1 + a$$

$$\text{voorbeeld: } \frac{1}{0,996} \approx 1,004 \quad \frac{1}{0,98} \approx 1,02$$

Probeer zelf nog maar soortgelijke benaderingen te vinden. Geef een formule, bewijs deze en bedenk een numerieke toepassing.

Speciaal in de natuurwetenschappen maakt men van dergelijke benaderingsmethoden vaak gebruik.

Hier nog enkele toepassingen.

$$\frac{4}{1,087} = \frac{4}{1+0,087} \approx 4(1-0,087) \approx 4(0,913) \approx 3,652$$

De exacte uitkomst is 3,679 ...

$$(10,008)^2 = 100(1,0008)^2 \approx 100(1,0016) \approx 100,16$$

De exacte uitkomst is 100,160064

$$\sqrt{4,008} = 2\sqrt{1,002} \approx 2(1,001) \approx 2,002$$

met grafieken

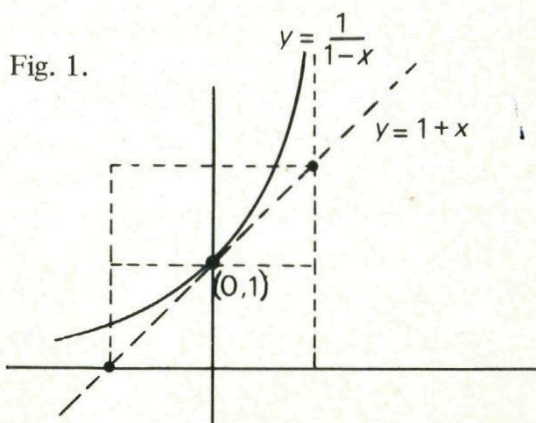
Met een rekenmachientje is gemakkelijk na te gaan in hoeverre de aangegeven benaderingen redelijk aanvaardbaar zijn.

Het vinden van benaderingsuitkomsten kan op een grafische manier gebeuren.

Als we bijvoorbeeld stellen dat $\frac{1}{0,98} \sim 1,02$ of in het algemeen:

$\frac{1}{1-x} \sim 1+x$ voor kleine waarden van x , is dit grafisch te illustreren.

In fig. 1 is een deel van de grafiek van de vergelijking $y = \frac{1}{1-x}$ getekend. Bekijk



speciaal het verloop in de buurt van $x = 0$. De vergelijking van de raaklijn daar blijkt $y = 1 + x$ te zijn. De raaklijn maakt dan een hoek van 45° met de X -as. Het is blijkbaar dus zo dat de functie $\frac{1}{1-x}$ voor x klein te vervangen is door $1 + x$.

De kromme wordt in de buurt van dat punt vervangen door een recht raaklijnstuk.

Als we dus in een bepaald geval de raaklijnrichting in een zeker punt kunnen bepalen hebben we tevens de benaderingsformule te pakken.

In fig. 2 wordt op een soortgelijke manier verklaard, dat in de omgeving van $x = 0$ de vorm $\sqrt{1+x}$ te vervangen is door

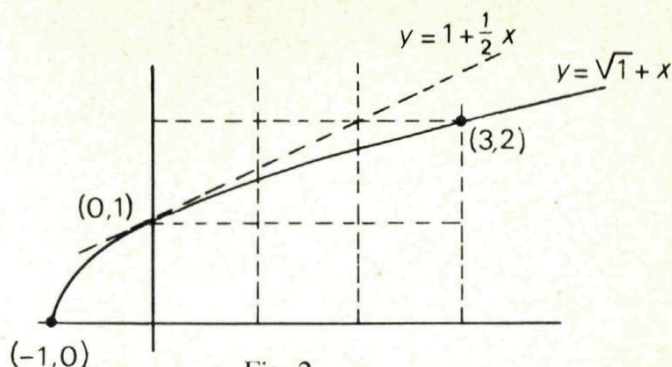


Fig. 2.

$1 + \frac{1}{2}x$. De raaklijn in het punt $(0,1)$ heeft als vergelijking $y = 1 + \frac{1}{2}x$.

Omgekeerd kunnen we uit benaderingsformules raaklijnrichtingen opsporen.

Probeer zelf nu maar eens nieuwe benaderingsformules te ontwerpen. Stuur ze aan de redactie. Wij zorgen voor publikatie.

Denkertje 5

Zoek eens met je rekenmachientje op: $e^{0,016}$

Vind je ook: 1,01613?

Welke benaderingsformule steekt daarachter?

Schrijf die algemeen op en bewijs de uitkomst met behulp van een grafiek.

Het ei is gelegd!

Wij ontvingen bijzonder veel interessante en intelligente bijdragen van lezers uit het hele land inzake de ei-kromme. Op velerlei manieren is er wiskundig geboetseerd om een ei in een x - y -schaal te stoppen.

Hans Kraayenvanger uit Voorhout wacht altijd in spanning op het nieuwe nummer van Pythagoras. Zijn ei ziet er aldus uit: $2401y^2 + 2x^4 + 70x^3 + 1078x^2 - 3430x = 57624!!$

Jan Bijvelds en Ben Heideveld uit Tilburg en Zwolle gaan uit van de gegeven constructie van Pythagoras 1.

Bob van het Baarnsch Lyceum hoopt dat we met dit ei tevreden zijn:

$$2x^2 + (y + \frac{1}{8}x^2)^2 = 8. \text{ Nou, wij wel.}$$

Ad Schenk uit Nispen gaat een cirkel aan één kant induwen:

$$100y^2 = 216x - x^4$$

Meindert Kuipers uit Leeuwarden gaat zo'n cirkel juist aan één kant uitrekken: $y = (1 + \sqrt{1 - x^2})^{1,5}$

Voor het tekenen heeft hij gebruik gemaakt van een HP-25 calculator.

Het programma voegde hij bij. Erg indrukwekkend!

Warden Schijve uit Pijnacker rekt een ellips eenzijdig uit.

En zo kwamen er ook oplossingen van het Alkuin college in Uithoorn, het gymnasium Erasmianum te Rotterdam, het Rhedens Lyceum in Velp, bijdragen uit Nijmegen en Veldhoven, teveel om op te noemen.

We hopen spoedig andere problemen te stellen aan ijverige rekenaars, tekenkundige zwoegers en intelligente schoon-schrijvers. Jullie horen nog van ons!

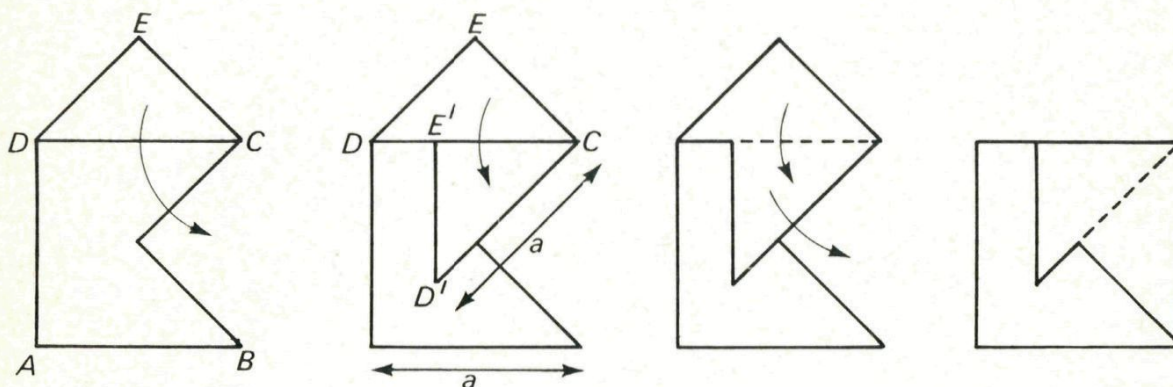
De redactie.

Oplossing kruiswoordraadsel uit het vorige nummer

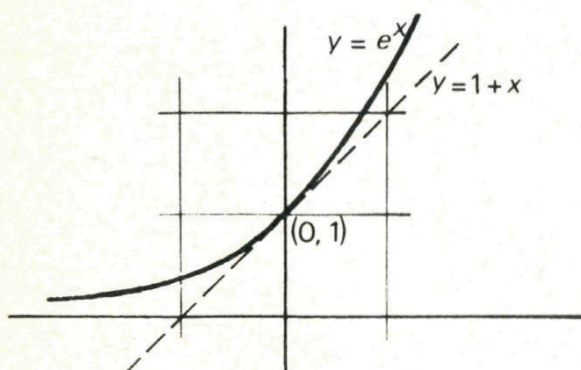
1	w	i	25	s	k	u	n	31	d	e	33	o	l	y	m	p	i	a	d	42	e	
	a		t					r		n											x	
	a		e		28	s		2	i	n	w		3	r	37	e	e	k	41	s		p
4	r	e	l	a	t	i	e		a				l					c			o	
	s		s		e				a				l					h			n	
	c		e		l		5	i	r	r	a	t	i	o	n	a	l	e				
6	h	u	l	p	l	ij	n						p				a				n	
	ij				i		7	t	a	f	35	e	l	s			l				t	
	n				n			e				l								p	i	
8	l	i	26		g		9	g	o	n	i	o	m	e	t	r	i	e				
	ij		r					r				m		e							l	
	k		i					a			10	i	n	d	u	40	c	t	i	e		
11	h	o	e	k	29	p	u	n	t	e	n		i			o					v	
	e		h			u		d			12	a	n	a	l	o	g	i	e			
	i		o		n							t		a		r					r	
13	d	e	e	l	t	30	a	l		14	t	i	e	n		d					g	
	s		k			x						e			15	r	i	b	b	e		
	r		16	e	l	l	i	p	s			36	g			n					l	
17	e	e	n				o			34	f		18	g	e	t	a	l			ij	
	k			27	f		m				u		d			t					k	
19	e	q	u	i	v	a	32	l	e	n	t				20	e	e	n			i	
	n			g			u				c			39	r		n				n	
	i		21	k	u	b	u	s		22	t	o	r	u	s		23	l	o	g		
	n			u							i			i							e	
24	g	e	o	r	d	e	n	d	e	g	e	t	a	l	l	e	n					

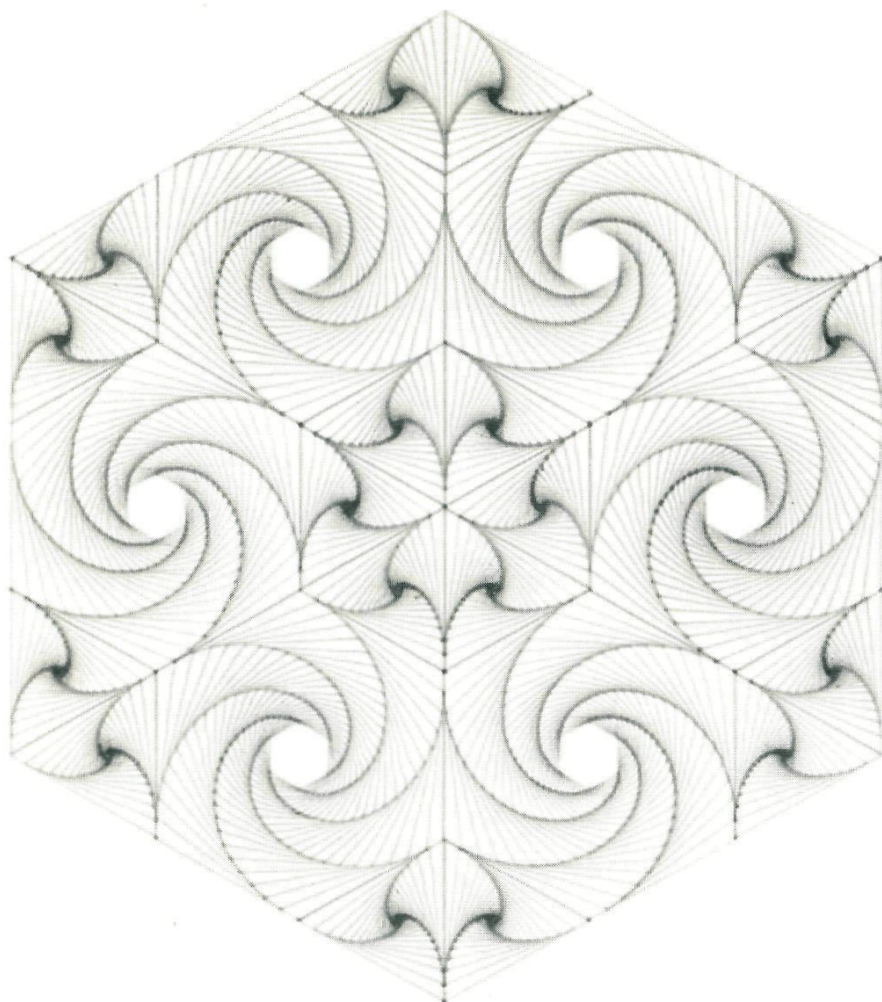
Oplossing Denkertjes

1. Het merkwaardige is dat er slechts één en niet meer dan één oplossing bestaat:
 $4 \times 821 = 3284$
2. In fig. 5 (zie het artikel: *Viermaal rond een riks*) kun je PS trekken en je ziet dan twee gelijkbenige driehoeken ontstaan. Dus is $RSQP$ een vlieger.
 Daarvan staan de diagonalen loodrecht op elkaar: $PS \perp RQ$.
 H ligt op $PS \Rightarrow PH \perp RQ$ ofwel PH is een hoogtelijn in $\triangle PQR$.
 Net zo bewijs je dat RH of QH hoogtelijnen zijn in $\triangle PQR$.
 Dus H is het hoogtepunt.
3. De eerste oplossing is eenvoudig: knip door volgens CD en roteer $\triangle CDE$ om C over 90° .
 De tweede oplossing is gebaseerd op de vorige, maar nu de rotatie uitgevoerd over 45° om C . De beeldfiguur $CD'E'$ komt dan op 'bezet gebied'. Door dit bezette gebied los te knippen en mee te roteren vult het de opening aan de rechter kant.



4. ONS = 875 POND = 1873 KILO = 6248
5. Voor kleine waarden van x geldt: $e^x \sim 1 + x$
 In de figuur staat hoe de raaklijn aan e^x in het punt $(0,1)$ als vergelijking heeft $y = 1 + x$





Computertekening van Henk Portman (H.T.S. Utrecht), plottertijd 52 minuten!

Inhoud

Gaatjes boren, moeilijker dan je denkt	49
Nederlandse successen bij de Internationale Wiskunde Olympiade	52
Denkertje 1: PLAN	55
Pythagoras in de vouwgreep	56
Viermaal rond een riks	57
Denkertje 2	59
Denkertje 3	59
Worteltrekken zonder worteltoets	60
$12(4+1)=12 \cdot 5$	63
De kantelende gietpan	64
Denkertje 4	66
Harmonische drietallen	67
Precies niet, maar wel ongeveer	69
Denkertje 5	70
Het ei is er!	70
Oplossing kruiswoordraadsel uit het vorige nummer	71
Oplossing Denkertjes	72

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

W. Kleijne, Apeldoorn.

Ir. H. Mulder, Breda.

G.A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Stationsstraat 114, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 6,75 per jaargang. Voor anderen f 11,00.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

