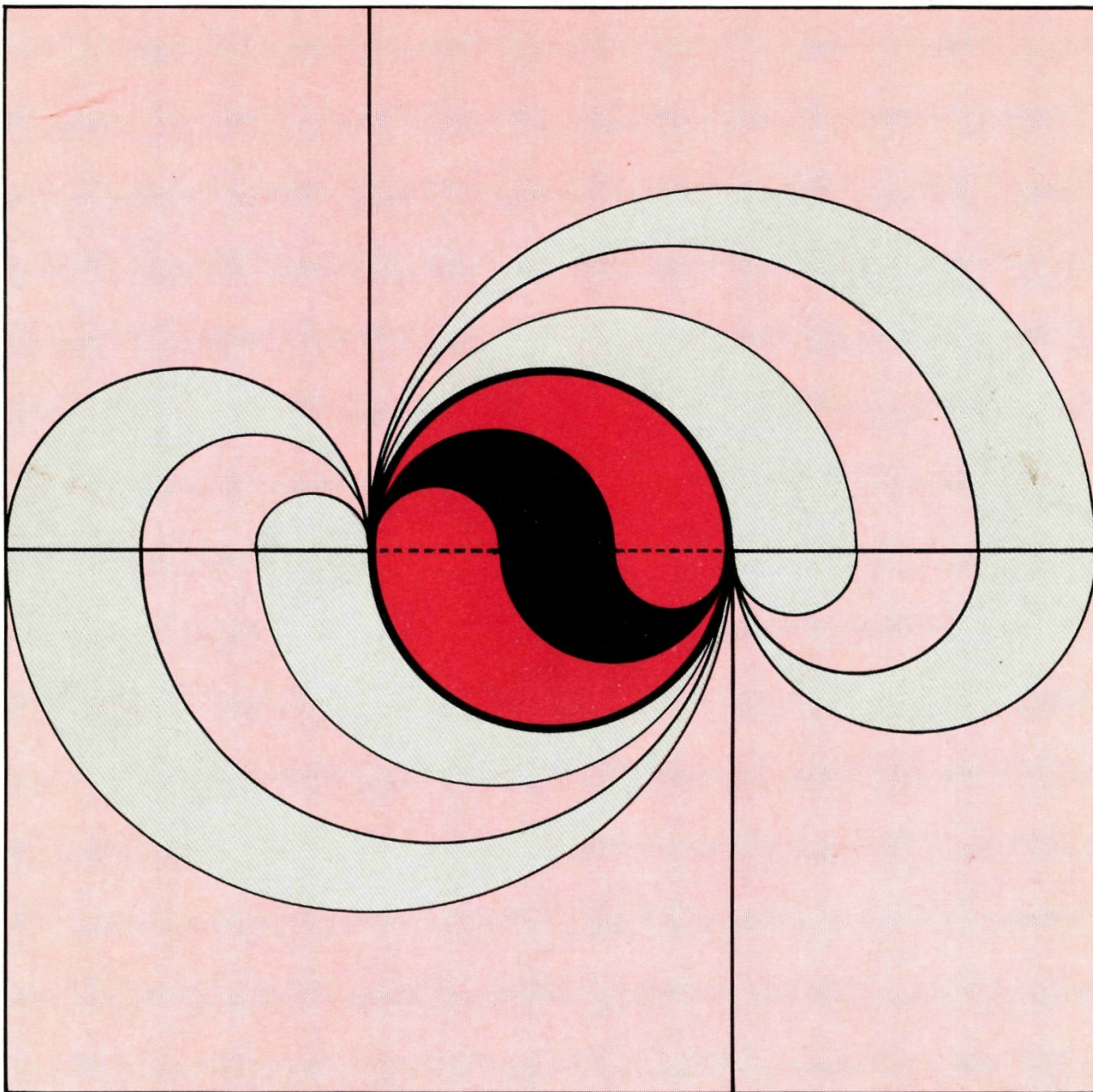


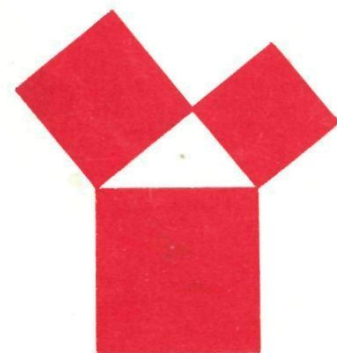


5

jaargang 17 / maart 1978

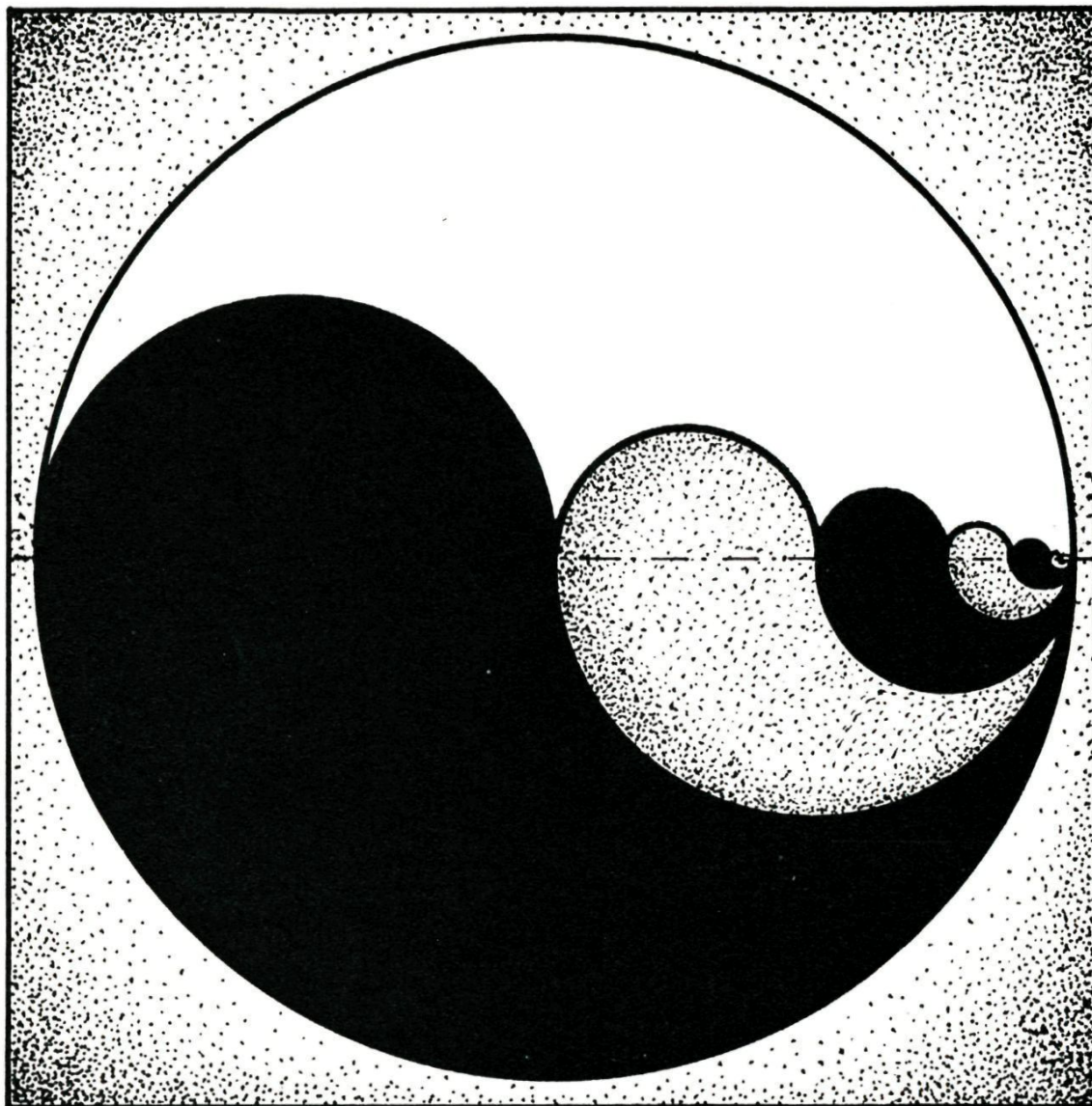
**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Deze figuur toont verwantschap met de figuur op de omslag. De middellijn van de grote cirkel is in twee gelijke delen verdeeld, het rechtse deel weer in twee gelijke delen etc. Hoe verhouden zich nu de omtrekken en oppervlakken van traanvormige figuren binnen de cirkel?

Deze figuur en die op de omslag zijn ontleend aan: A. E. Bosman, *Het wondere onderzoekingsveld van de vlakke meetkunde*.

BIJ DE FIGUUR OP DE OMSLAG:

De cirkel in het midden is in drie delen verdeeld. Deze delen hebben de bijzondere eigenschap, dat zowel hun omtrekken als hun oppervlakken gelijk zijn. Het bewijs hiervan is niet moeilijk. Dezelfde constructie kunnen we ook buiten de cirkel eindeloos voortzetten. (Hier zijn links en rechts nog maar drie figuren bijgetekend.) Ook hiervoor geldt: de omtrekken en oppervlakken zijn gelijk . . . als we tenminste alles wat in de kwadranten links boven en rechts onder ligt, negatief rekenen: puzzel maar eens uit.

Dat is 120° zul je zeggen, maar we bedoelden wat anders. We bekijken in dit artikel twee problemen waarin een rotatie van 60° een verrassende oplossing geeft.

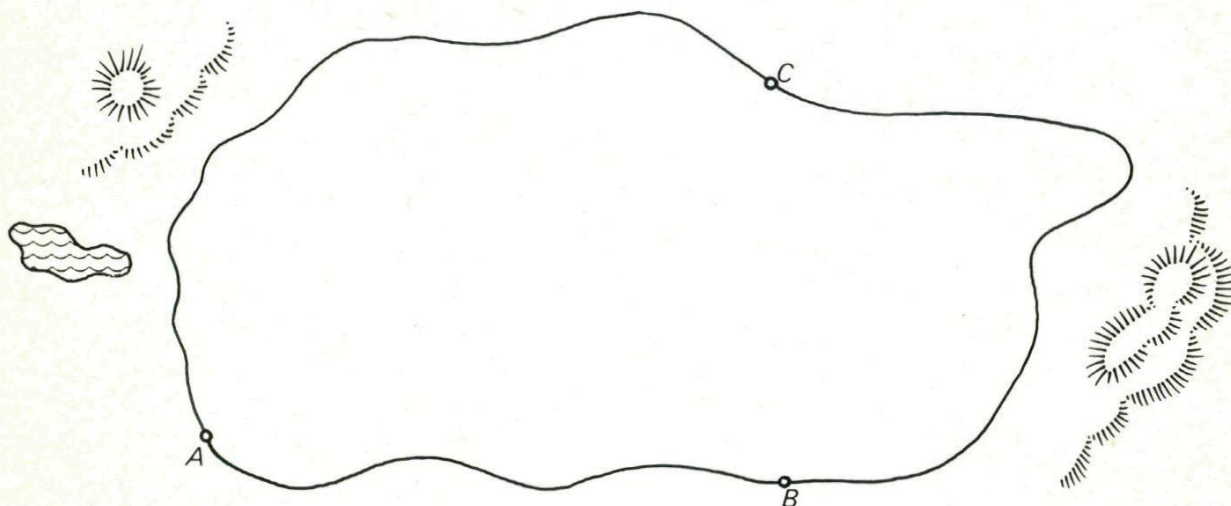
Het eerste probleem

Aan de rand van een vlakke woestijn liggen drie woningen: *A*, *B* en *C*.

De bewoners willen met elkaar verbonden worden door een telefoonlijn. Om de kosten zo laag mogelijk te houden, neemt men genoeg met een gemeenschappelijke lijn, dat wil zeggen, als *A* met *B* belt kan *C* meeluisteren, enzovoort. Verder wil men om dezelfde reden zo weinig mogelijk telefoonkabel gebruiken.

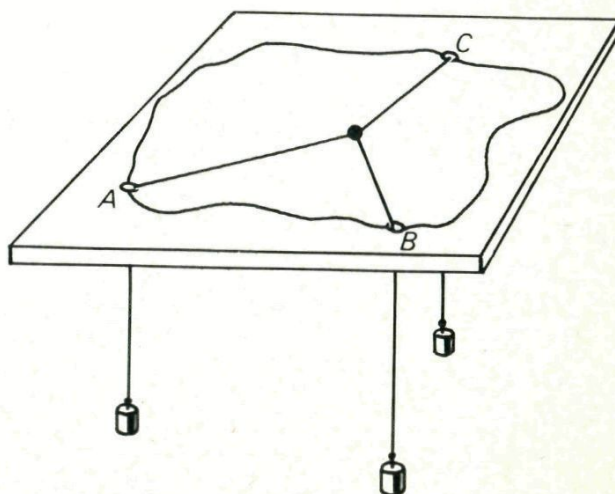
Ze trokken de kaart van het gebied over op doorzichtig papier en plakten dat op een plankje, boorden gaatjes op de plaatsen *A*, *B* en *C*, bevestigden drie koordjes aan een kraal en haalden die elk door een gaatje. Aan de andere einden van de koorden werden drie gelijke gewichten bevestigd. Ze hielden het plankje horizontaal en het kraaltje bewoog zich naar een punt ergens binnen de driehoek.

Men zette de drie koordrichtingen nauw-

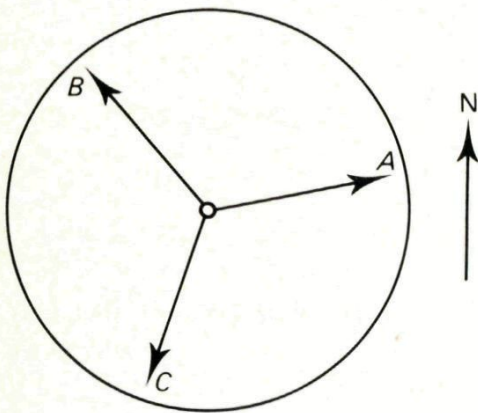


De drie bewoners vergaderen in huis *B* om de zaak te bespreken. Men kwam meestal daar bijeen, omdat van de drie huizen, samenkomen in *B* in het totaal de minste reisafstand meebrengt (ga dit na).

Eerst dachten de drie ook het telefoonprobleem zo op te lossen: een verbinding van *A* via *B* naar *C*. Maar helemaal overtuigd waren ze niet dat dit nu de minste kabel zou kosten. Daarom bedachten ze het volgende experiment.



keurig om in kompasrichtingen en ging volgens deze aanwijzingen de lijnen leggen. Het was overigens wel opvallend dat de drie richtingen zo mooi regelmatig over de kompasroos verdeeld waren.



Het tweede probleem

Een andere woestijn, waarin drie bronnen P , Q en R , door een speling van de natuur precies op onderling gelijke afstanden. Bron P kan voldoende water leveren om de behoefte van een mens te dekken, de bronnen Q en R kunnen helaas daarvoor elk maar de helft leveren.

Iemand wil zich ergens in de buurt van S vestigen. Legt hij een pijplijn naar P of legt hij twee pijplijnen naar R en Q om zijn dagelijkse watervoorraad te krijgen?

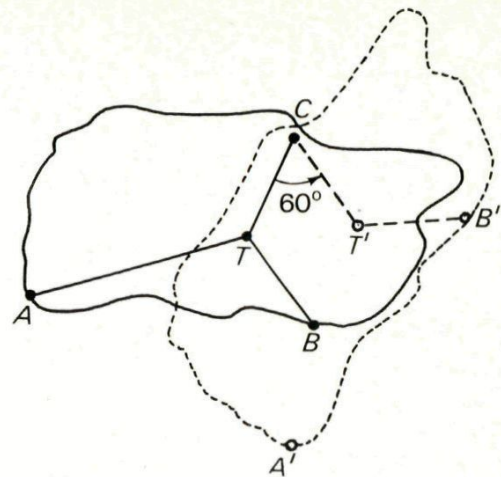
Oplossing eerste probleem

Wiskundig uitgedrukt komt het eerste probleem neer op het vinden, bij de punten A , B en C , van het punt T in het vlak waarvoor

$$TA + TB + TC$$

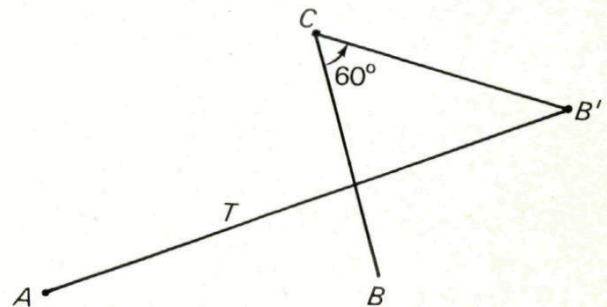
zo klein mogelijk is.

De bewoner van C ontdekte een rede-

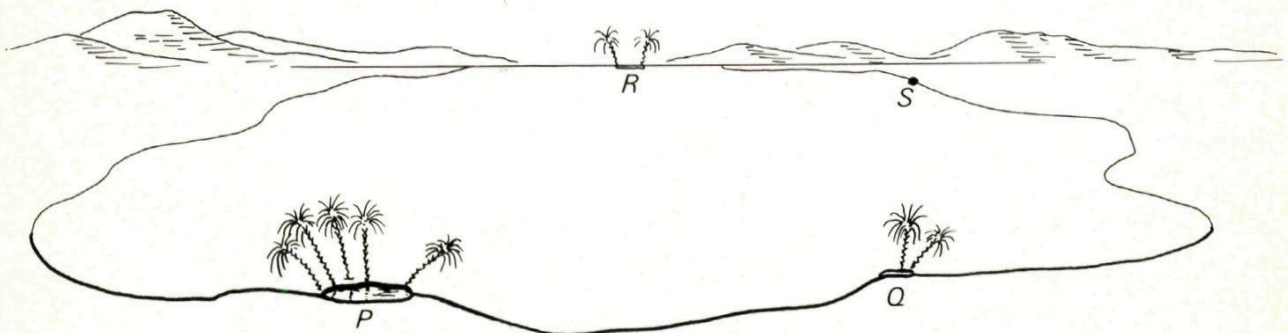


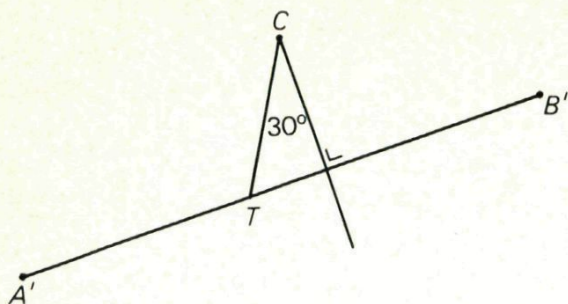
nering toen hij met de echte landkaart en de overtrektekening zat te spelen. Hij roteerde de tekening t.o.v. de landkaart over 60° om zijn eigen woonplaats en zag dat daardoor $\triangle TT'C$ gelijkzijdig werd (let op de hoek van 60° en $CT = CT'$). Maar dan is $TT' = TC$. Natuurlijk geldt al dat $TB = T'B'$, zodat $TA + TB + TC = AT + TT' + T'B'$ en dat is minimaal als AB' een rechte lijn is.

Dus T ligt op de lijn AB' . Let wel, B' is een vast punt, namelijk het beeld van B onder $R_{C, 60^\circ}$.



Maar waar op AB' ligt T nu precies? We letten nog even op gelijkzijdige $\triangle TT'C$.





De symmetrieas door C van deze driehoek is gemakkelijk te tekenen als loodlijn op AB' . Teken nu CT onder een hoek van 30° met deze as.

Naschrift op deze oplossing

Gemakkelijk is te zien dat $\angle ATC = 120^\circ$. We hebben geredeneerd uitgaande van een rotatie om C . Men kan bewijzen dat men hetzelfde punt T krijgt door te beginnen



Evangelista Torricelli, Italiaans wis- en natuurkundige, 1608–1647. Hij was assistent van Galilei in diens laatste levensjaren en volgde hem op als wiskundige van de groothertog van Toscane. Het meest is hij bekend geworden door zijn meting van de luchtdruk (buis van Torricelli). Op wiskundig gebied breidde hij de onderzoeken van Archimedes uit, terwijl hij ook onderwerpen behandelde waaruit later de differentiaal- en integraalrekening zou voortkomen. In een werk dat na zijn dood is uitgegeven komt het hier behandelde punt voor en dit punt is daarom naar hem genoemd.

met bijvoorbeeld een rotatie om A . Waaruit kan volgen dat $\angle ATB = 120^\circ$. Die gelijkmatige verdeling op de kompasroos was dus heel juist.

De oplossing is nu ook nog anders te formuleren: zet buitenwaarts passend op de zijden van $\triangle ABC$ drie gelijkzijdige driehoeken. Verbind de nieuw ontstane hoekpunten met de overstaande hoekpunten van $\triangle ABC$. De verbindingslijnen gaan door één punt en maken gelijke hoeken met elkaar. Het snijpunt is in de meeste gevallen het punt waarvan de som van de afstanden tot A , B en C minimaal is (zie een denkertje). Dit punt heet het punt van Torricelli.

Merk tenslotte nog op dat de oplossing van het probleem anders uitvalt als niet de oneindig vele punten van het vlak aan de oplossing ter beschikking staan. Voor het vergaderprobleem kwamen slechts de punten A , B en C als mogelijke oplossingen in aanmerking, omdat men niet in de open lucht wilde zitten.

$X \in$ vlak door A , B en C

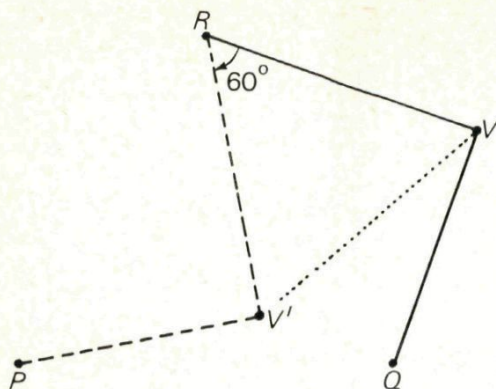
$|XA + XB + XC \text{ minimaal} \Rightarrow \text{oplossing } X = T$
 $X \in \{A, B, C\}$

$|XA + XB + XC \text{ minimaal} \Rightarrow \text{oplossing } X = B$

Dit laatste noemt men een *discreet* probleem; discreet niet in de betekenis van geheim, maar van gescheiden, omdat het hier over van elkaar gescheiden punten ging.

Oplossing tweede probleem

Zoals gezegd, ook het tweede probleem kan bekeken worden met behulp van een rotatie.



Neem een punt V in de buurt van S en roteer $\triangle RQV$ over -60° om R . Het beeld van V noemen we V' ; het beeld van Q is P . Dus $VQ = V'P$.

$\triangle RVV'$ is gelijkzijdig om dezelfde reden als $\triangle CTT'$ dat was in de vorige oplossing. Waaruit blijkt dat $RV = VV'$, zodat

$$RV + VQ = VV' + V'P.$$

De twee pijplijnen naar de bronnen R en Q komen samen in lengte overeen met een pijplijn van V over V' naar P . Dat is in ieder geval niet korter dan een pijp rechtstreeks van V naar P .

We kunnen dus veilig het advies uitbrengen om een verbinding met bron P aan te brengen, ongeacht de plaats waar de man zich precies wil vestigen.

°Het kan ook anders

Door onze opleiding, door oefening en gewenning zijn we zo verknocht geraakt aan bepaalde gebruiken, dat we bijna denken dat er geen andere mogelijkheden zijn. Dit geldt met name ook voor onze rekenmethoden. Als voorbeeld neem ik het vermenigvuldigen.

$$\begin{array}{r} 76 \\ 95 \\ \hline 380 \\ 684. \\ \hline 7220 \end{array}$$

Als we proberen na te gaan, waarop deze methode gebaseerd is, dan zien we al gauw:
 $95 \times 76 = (5 + 90) \times 76 = 5 \times 76 + 90 \times 76 = 380 + (9 \times 76) \times 10 = 380 + 6840 = 7220$.
 Het produkt 76×95 kan echter ook geheel anders uitgerekend worden:
 $76 \times 95 = (70 + 6)(90 + 5) = 70 \times 90 + 6 \times 90 + 5 \times 70 + 6 \times 5 = 6300 + (540 + 350) + 30$.
 Anders, verkort, opgeschreven:

	76	
	95	
63	54 + 35	30
63	89	30
63	92	0
72	2	0
	7220	

Ga iedere stap maar eens precies na en probeer dan ook eens andere voorbeelden soortgelijk uit te rekenen.

Een derde rekenmethode is gebaseerd op:

$$76 \times 95 = (100 - 24)(100 - 5) = 10000 - 5 \times 100 - 24 \times 100 + 120 =$$

$$100 \times 100 - 5 \times 100 - 24 \times 100 + 120 = 95 \times 100 - 24 \times 100 + 120 =$$

$$71 \times 100 + 120 = 7220.$$

Verkort opgeschreven:

$$\begin{array}{r|l} 76 & - 24 \\ 95 & - 5 \\ \hline 71 & 120 \\ \hline 7220 \end{array}$$

Tot slot nog een methode, waarvan ik een voorbeeld geef. Ze is in meerdere Arabische landen in gebruik. In tegenstelling tot 'onze' methode wordt het vermenigvuldigen niet tussentijds onderbroken door optellingen. Puzzel zelf maar uit hoe het gaat.

Zo zie je maar: het kan ook anders!

<i>onze methode :</i>	<i>alternatieve methode</i>
$\begin{array}{r} 379 \\ 5 \\ \hline 1895 \end{array}$	$\begin{array}{r} 379 \\ 5 3 4 5 \\ \hline 1895 \end{array}$
$\begin{array}{r} 379 \\ 58 \\ \hline 3032 \\ \hline 18950 \\ \hline 21982 \end{array}$	$\begin{array}{r} 379 \\ 5 3 4 5 \\ 2 4 5 7 8 \\ \hline 2 9 8 2 \end{array}$

Denkertje 1

Er zijn stomphoekige driehoeken waarbij het punt van Torricelli niet het punt is waarvoor de som van de afstanden tot de hoekpunten minimaal is. Welk kenmerk hebben deze driehoeken? Op welke plaats gaat onze afleiding met de rotatie van 60° mis voor deze driehoeken?

Tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1977

Zoals in het vorige nummer beloofd is, volgen hier de oplossingen van de vier opgaven van de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1977.

1. Op een plein staat een monument dat is opgebouwd uit meer dan duizend gelijke kubussen. Het monument is een massief, rechthoekig blok met een vierkant grondvlak. De buitenste laag kubussen is verweerd en wordt daarom vervangen. Het aantal kubussen dat vervangen moet worden is precies de helft van het totale aantal. Uit hoeveel kubussen bestaat het monument?

Oplossing

Om te beginnen was het niet voor iedereen duidelijk welke kubussen precies vervangen moesten worden. Sommigen dachten dat ook de *gehele* grondlaag verweerd was. Natuurlijk kan men zich situaties indenken dat dit inderdaad gebeurt, maar dan zou het hele monument steen voor steen afgebroken moeten worden. Bovendien geeft het woord 'verweerd' aan dat het niet gaat om een proces waarbij de constructie van het hele monument ge-

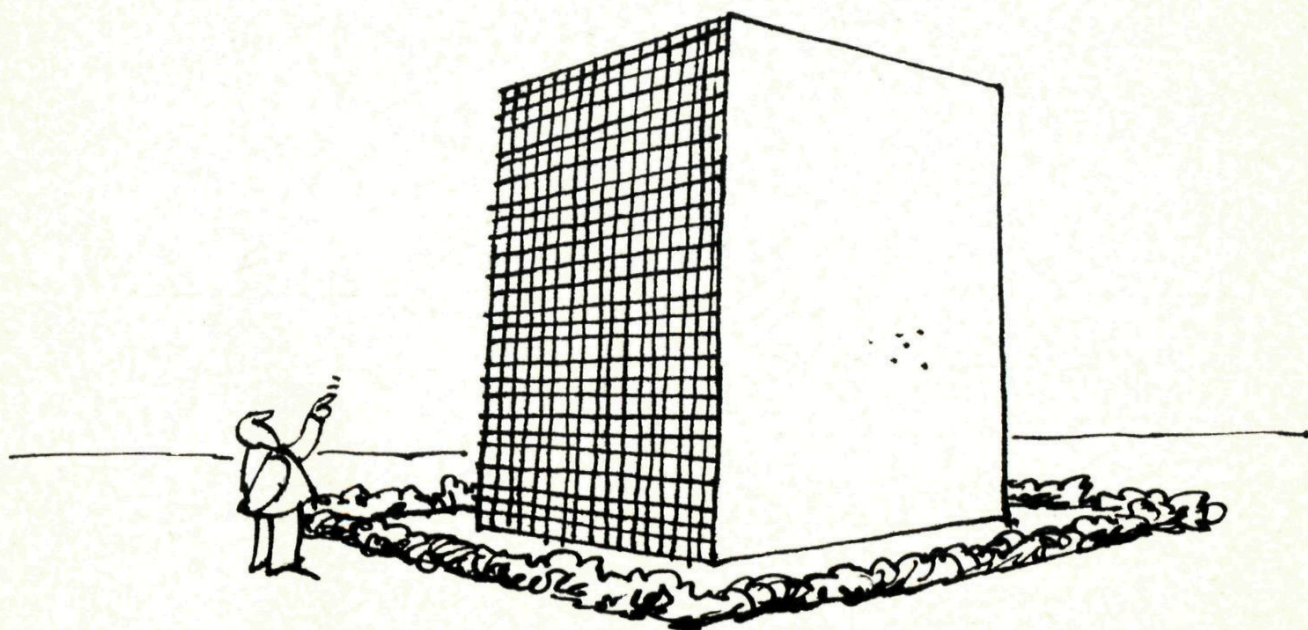
vaar loopt, maar slechts om veranderingen (ten gevolge van het weer?) die het monument een wat minder fraai uiterlijk geven. Alles pleit er dus voor om het monument niet helemaal steen voor steen af te breken. Niettemin, interpreteert men de opgave op deze manier, dan ontstaat een vraagstukje dat geheel analoog, en niets moeilijker of gemakkelijker is dan de bedoelde opgave. Alleen zijn er dan *twee* oplossingen groter dan 1000, nl. 1152 en 4900. Bij de beoordeling van de uitwerkingen van de deelnemers is daarom in dit geval geen puntenaftrek toegepast.

Na deze inleiding de eigenlijke oplossing. Stel de zijde van het grondvlak op $x + 2$, en de hoogte van het monument op $y + 1$ kubussen.

Dan geldt

$$2x^2y = (x + 2)^2(y + 1).$$

x en y moeten positieve gehele getallen zijn die aan deze vergelijking voldoen. We



kunnen de vergelijking uitwerken, en dan x uitdrukken in y . Er ontstaat dan een wortelvorm. Verder werken hiermee is wel mogelijk, maar handiger is het y uit te drukken in x :

$$y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4x - 4}$$

x en y zijn beide positief, dus de noemer moet ook positief zijn (de teller is nooit negatief), dus $x \geq 5$. $x = 5$ geeft $y = 49$.

Het totale aantal kubussen is dan $49 \cdot 50 = 2450$. Zijn er nog meer oplossingen? Als x erg groot wordt, nadert de breuk van boven tot 1. y moet geheel zijn, dus als x zo groot is dat de breuk kleiner dan 2 wordt, zijn er geen gehele oplossingen y meer mogelijk. Dit geeft de voorwaarde $x^2 - 12x - 12 \leq 0$, en hieruit volgt $x \leq 12$.

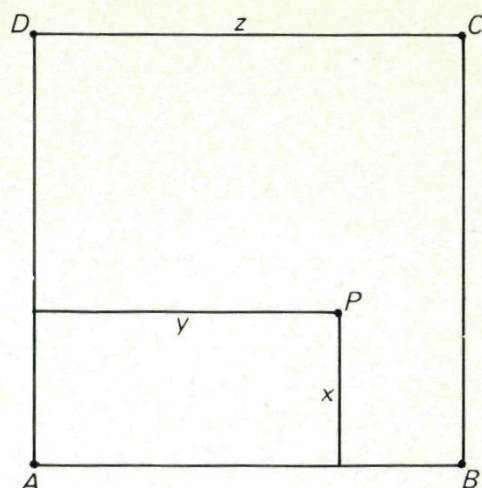
Invullen van de waarden $x = 6, 7, \dots, 12$ geeft alleen voor $x = 6$ nog een gehele y -waarde: $y = 8$. Het aantal kubussen is dan $64 \cdot 9 = 576 < 1000$. De enige oplossing van het vraagstuk is dus 2450.

2. Vier masten staan op een vlak horizontaal stuk land op de hoekpunten van een vierkant $ABCD$. De hoogte van de mast op A is 7 m, de mast op B 13 m, en de mast op C 15 m. Binnen het vierkant bevindt zich op de grond een punt P dat even ver afligt van elk van de toppen van deze drie masten.

- Welke lengte moeten de zijden van het vierkant minstens hebben opdat dit mogelijk is?
- De afstand van P tot de top van de mast op D is gelijk aan de afstand van P tot elk van de toppen van de drie andere masten. Bereken de hoogte van de mast op D .

Oplossing

- Je kunt met middelloodvlakken werken, maar ook met de stelling van Pythagoras als volgt (zie tekening):



Uit de gegevens volgt:

$$x^2 + y^2 + 7^2 = x^2 + (z - y)^2 + 13^2, \text{ en} \\ x^2 + (z - y)^2 + 13^2 = (z - x)^2 + (z - y)^2 + 15^2.$$

Deze vergelijkingen herschrijven we tot

$$x = \frac{z^2 + 56}{2z} \text{ en } y = \frac{z^2 + 120}{2z}.$$

Omdat $z > 0$ is, zijn ook automatisch $x > 0$ en $y > 0$. De voorwaarden $y \leq z$ en $x \leq z$ geven $z \geq \sqrt{120}$ en $z \geq \sqrt{56}$. Een nodige en voldoende voorwaarde opdat P binnen het vierkant ligt, is dus $z \geq \sqrt{120}$.

b. Stellen we de hoogte van de mast op D op d meter, dan is

$$(z - x)^2 + y^2 + d^2 = x^2 + y^2 + 7^2, \text{ dus}$$

$$x = \frac{z^2 + d^2 - 7^2}{2z} = \frac{z^2 + 56}{2z}.$$

Hieruit volgt $d^2 = 56 + 49 = 105$, dus $d = \sqrt{105}$.

Het is merkwaardig dat d onafhankelijk is van de lengte z van de zijde van het vierkant, en ook dat de vier toppen voor geen enkele positieve waarde van z in één vlak liggen.

3. Uit elk zevental positieve gehele getallen kan men een aantal kiezen waarvan de som een zevenvoud is. Bewijs dit.

Oplossing

Een aantal deelnemers loste deze opgave op door systematisch alle sommen van één, twee, drie, enz. termen te onderzoeken. Dit is een heel werk, maar het leidt uiteindelijk wel tot het gewenste resultaat. Anderen vonden de volgende korte oplossing, die bovendien direct gegeneraliseerd kan worden tot de uitspraak dat men uit elk n -tal positieve gehele getallen een aantal kan kiezen waarvan de som een n -voud is. Laten we de getallen $a_1, a_2, \dots, a_7$ noemen.

Beschouw de zeven sommen

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 + a_7,$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6,$$

.....

.....

$$a_1 + a_2,$$

$$a_1.$$

Als geen van hen een zevenvoud is, geven ze allemaal bij deling door 7 als rest één van de getallen 1 t.e.m. 6. Minstens één van die resten komt dus tweemaal (of vaker) voor. Het verschil van de twee bijbehorende sommen voldoet dan aan de gestelde voorwaarde.

4. In een vlak ligt een even aantal punten. Geen drietal ervan ligt op één rechte lijn. De helft van de punten is rood, de andere helft is blauw. Bewijs dat er een verbindingsrechte van een rood en een blauw punt bestaat zo, dat in elk van de door die rechte begrensde halfvlakken het aantal rode punten gelijk is aan het aantal blauwe punten.

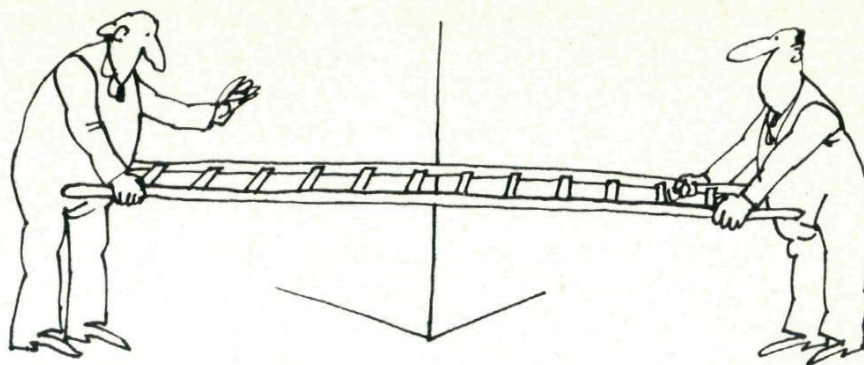
Oplossing

Deze opgave is wiskundig gezien waarschijnlijk de lastigste. Het gaat hierbij niet om het onderzoek van één concreet geval (bijv. zes gegeven rode, en zes gegeven blauwe punten, en het vinden van een verbindingslijn in zo'n concrete situatie), maar om het onderzoek van alle mogelijke situaties die aan de beschrijving voldoen. We zullen het gevraagde bewijs geven in de vorm van een *recept*: een methode om in elke mogelijke situatie zo'n verbindingslijn te vinden. Laten we dus aannemen dat er in het vlak n rode en n blauwe punten liggen (en dat geen drietal punten op één lijn ligt). Er is altijd een verbindingslijn van twee punten (al dan niet van dezelfde kleur) zo, dat alle andere punten aan één kant van die lijn liggen. Hebben die punten verschillende kleur, dan zijn we klaar. Stel daarom dat ze dezelfde kleur, bijv. rood hebben. Wentel nu die lijn om een van deze beide punten rond over een hoek van 180° zo, dat de halfrechte die in het begin vanuit het rotatiecentrum in de richting van het andere rode punt loopt, alle punten passeert. Hierbij houden we het aantal blauwe minus het aantal rode punten bij, dat op een bepaald moment is gepasseerd. Dit aantal is in het begin 0 (de 'randpunten' tellen we niet mee), en aan het einde +2. Omdat dit aantal telkens met +1 of -1 verspringt (nooit liggen er drie punten op één lijn), moet het op zeker moment voor het eerst de waarde +1 bereiken. De lijn passeert dan juist een blauw punt, en voldoet aan de gestelde voorwaarde.

Denkertje 2

Bepaal de verzameling van de punten V in het tweede probleem waarvoor $PV = QV + RV$. Raadpleeg zonodig het artikel *Viermaal rond een riks* in een eerder nummer van deze jaargang.

°De hoek om



Het komt nog al eens voor dat mensen met ladders en bedden in huis sjouwen en dan in trappenhuis of gang bij een of andere draai muurvast raken, omdat de zaak te lang is of te breed.

Wat zijn in zulke gevallen de grenzen? Wat kan nog wel en wat niet de hoek om?

Dergelijke verhuisproblemen spelen zich meestal af in de driedimensionale ruimte. Wij willen ons voor het moment uitsluitend in het platte vlak ophouden; dat lijkt al ingewikkeld genoeg.

Hier volgt een stukje wiskundige verhuis-

theorie, voor geïnteresseerde lezers verder uit te breiden.

Met een vlaggestok de hoek om

In fig. 1 is een gang getekend met een haakse hoek. Welke is de langste stok die

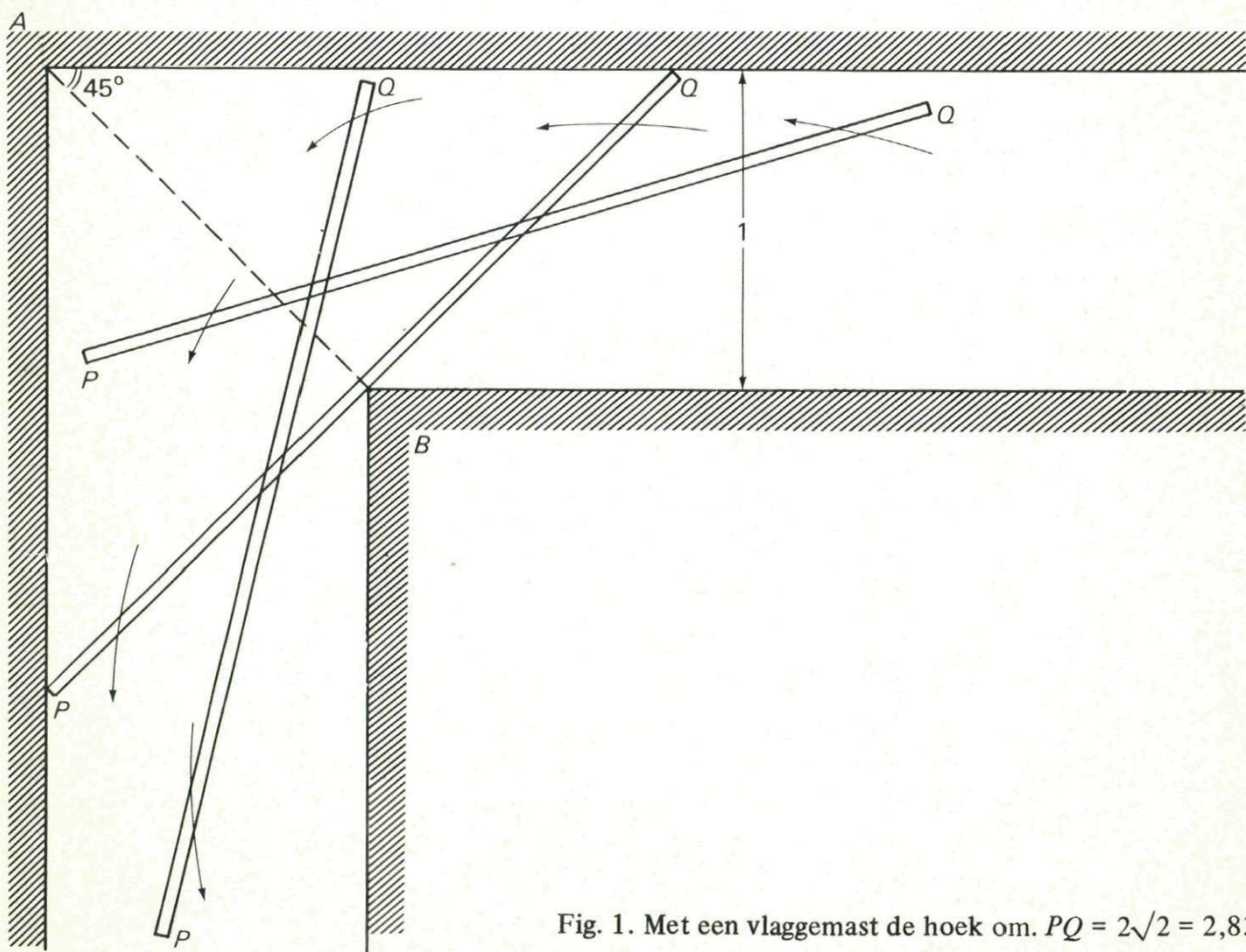


Fig. 1. Met een vlaggemast de hoek om. $PQ = 2\sqrt{2} = 2,83$.

we in het platte vlak, nog net de hoek om kunnen krijgen? We verwaarlozen hierbij de dikte van de stok en stellen de gangbreedte voor het gemak op 1.

De kritieke lengte is af te lezen in de stand waarbij de stok precies in de hoek zit en 45° maakt met de muren van de gang. We kunnen in de figuur gemakkelijk aflezen dat de kritieke lengte $2\sqrt{2}$ of 2,83 wordt.

Eigenlijk zouden we nog moeten bewijzen dat de stok vanuit de stand PBQ niet verder klem komt bij het de gang indraaien. Het bewijs komt hier op neer dat een lijnstuk, dat de ene wand met de andere verbindt via punt B , een minimale waarde bereikt in stand PBQ .

Andere vormen

Als we een gebogen staaf de hoek om willen brengen, zouden we wel een grotere lengte kunnen toelaten. We hebben het eerst met een halve cirkel, met straal 1, geprobeerd (fig. 2).

De booglengte is $\pi \times \text{de straal} = \pi \times 1 = 3,14$.

En dat is dan 11% meer dan bij de rechte stok.

Nog langer

Het lijkt best mogelijk een nog langer stuk rond te krijgen, als we het met een meer open gebogen cirkel proberen, laten we zeggen: een halve ellips (fig. 3).

We hebben in driehoek DEF (met hoogte $1 + \sqrt{2}$) gezocht naar die halve ellips, die staande op basis DE , met hoogte 1 en rakend aan de buitenmuren, de grootste booglengte heeft.

We bereikten dit bij een lengte van de halve assen $a = 2,2$ en $b = 1$. De lengte van een halve ellipsboog is in het algemeen $\frac{1}{2}\pi(a + b)$ of hier $\frac{1}{2}\pi(2,2 + 1) = 5,02$.

En dat is dan weer meer dan bij de halve cirkel.

Misschien zijn er wel lezers van ons tijdschrift die hier een uitdaging in zien en een nog langer gebogen stuk de hoek om

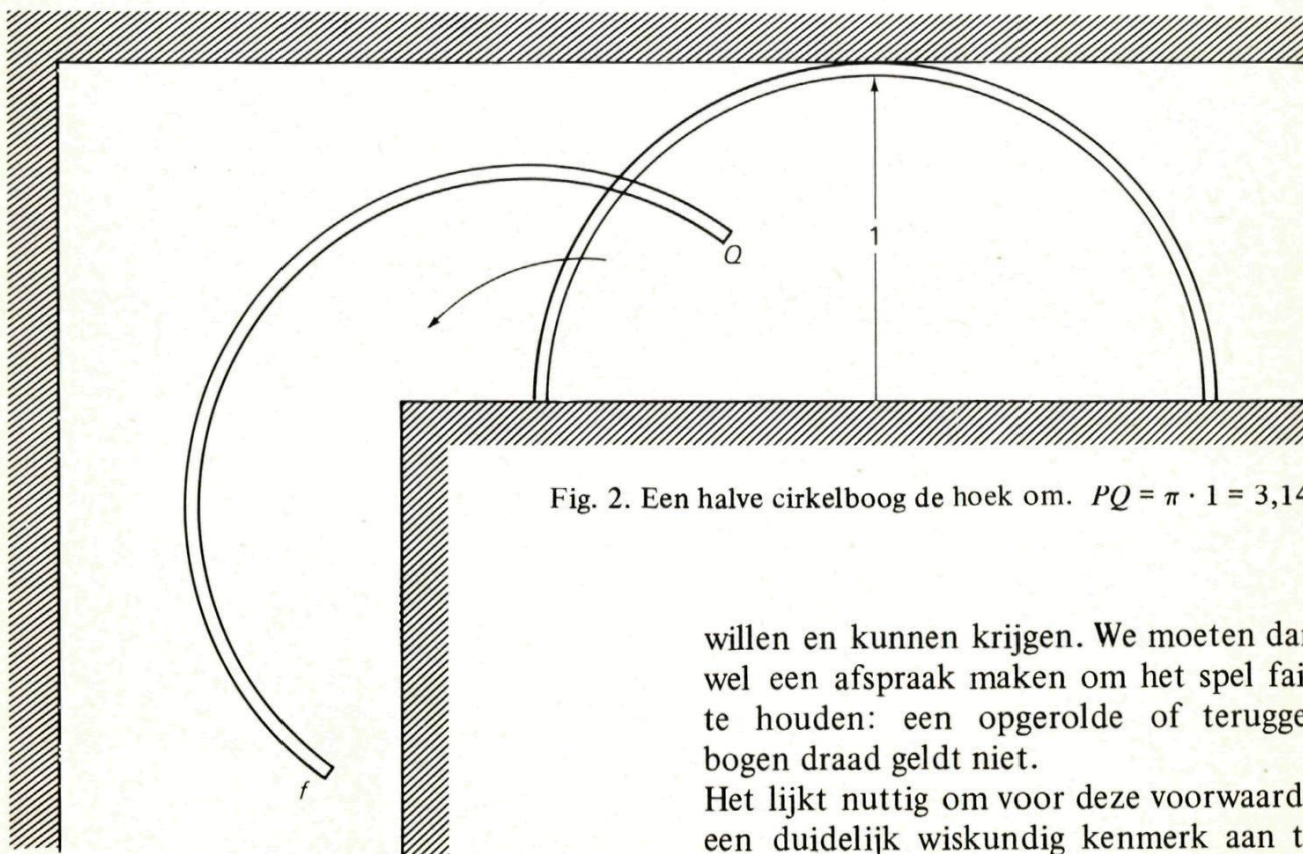


Fig. 2. Een halve cirkelboog de hoek om. $PQ = \pi \cdot 1 = 3,14$.

willen en kunnen krijgen. We moeten dan wel een afspraak maken om het spel fair te houden: een opgerolde of teruggebogen draad geldt niet.

Het lijkt nuttig om voor deze voorwaarde een duidelijk wiskundig kenmerk aan te

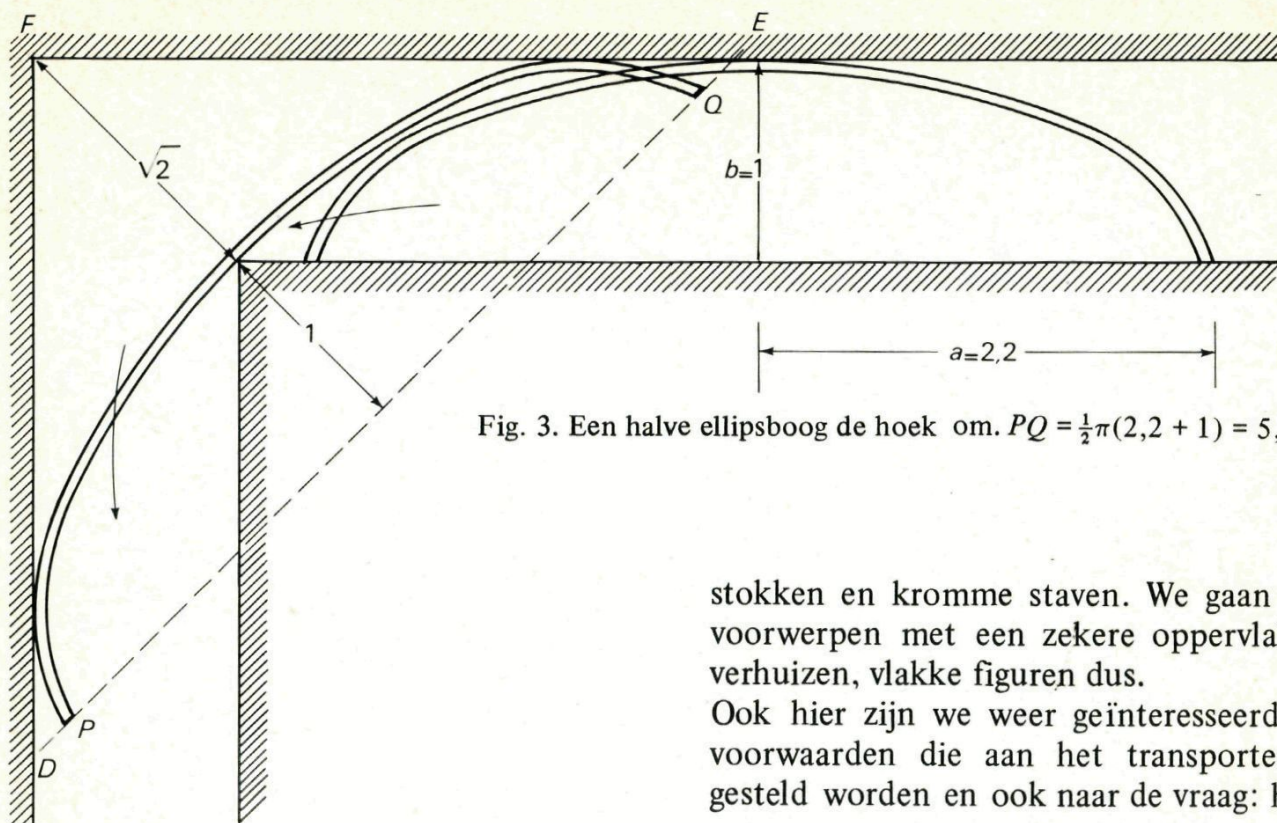


Fig. 3. Een halve ellipsboog de hoek om. $PQ = \frac{1}{2}\pi(2,2 + 1) = 5,02$.

stokken en kromme staven. We gaan nu voorwerpen met een zekere oppervlakte verhuizen, vlakke figuren dus.

Ook hier zijn we weer geïnteresseerd in voorwaarden die aan het transporteren gesteld worden en ook naar de vraag: hoe

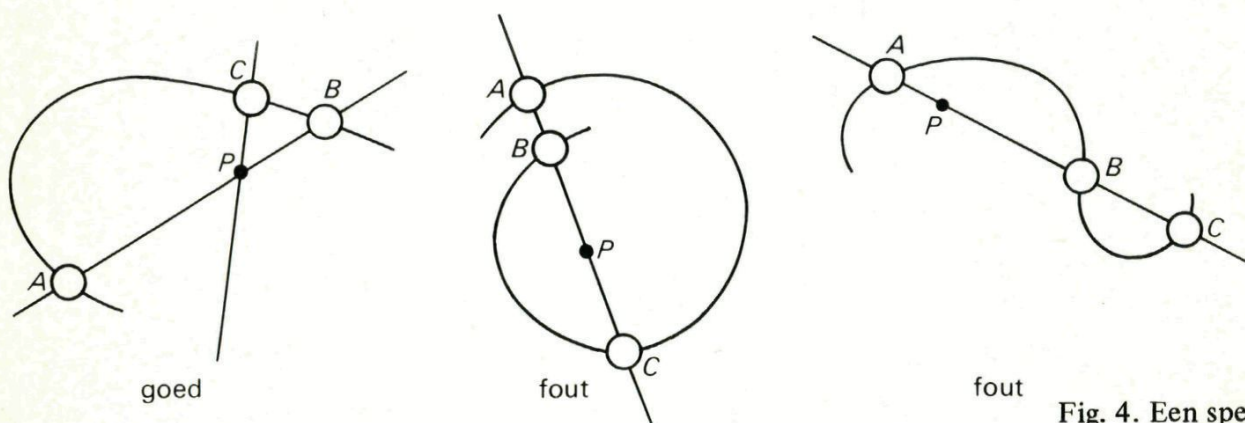


Fig. 4. Een spelregel.

geven. In fig. 4 staan drie krommen getekend. De eerste wordt als goed erkend, de laatste twee als fout.

We testen dat als volgt. Neem een willekeurig punt P en trek daardoor een lijn. Wanneer nu deze lijn de kromme in ten hoogste twee punten snijdt, wordt de kromme geaccepteerd; wanneer het aantal meer dan twee is, wordt de kromme gediskwalificeerd en telt niet mee in de 'cupfinal'.

Vlakke figuren

Tot dusver hebben we ons beziggehouden met het om de hoek brengen van vlagge-

groot is de maximale oppervlakte die nog net de hoek om kan?

We beginnen in fig. 5 met een cirkel de hoek om te rollen. De straal is 0,5 gekozen, zodat de maximale oppervlakte wordt: $\pi \times (0,5)^2$ of 0,78.

Nog groter

We hebben in fig. 6 een vierkant met zijde 1 in de gang gezet. Dat kan nog juist via de hoek de andere gang ingeschoven worden. De verplaatste oppervlakte is nu 1. Zou dat groter kunnen?

Laten we het eens proberen met een rechthoek (fig. 7). In de hoek van de gang

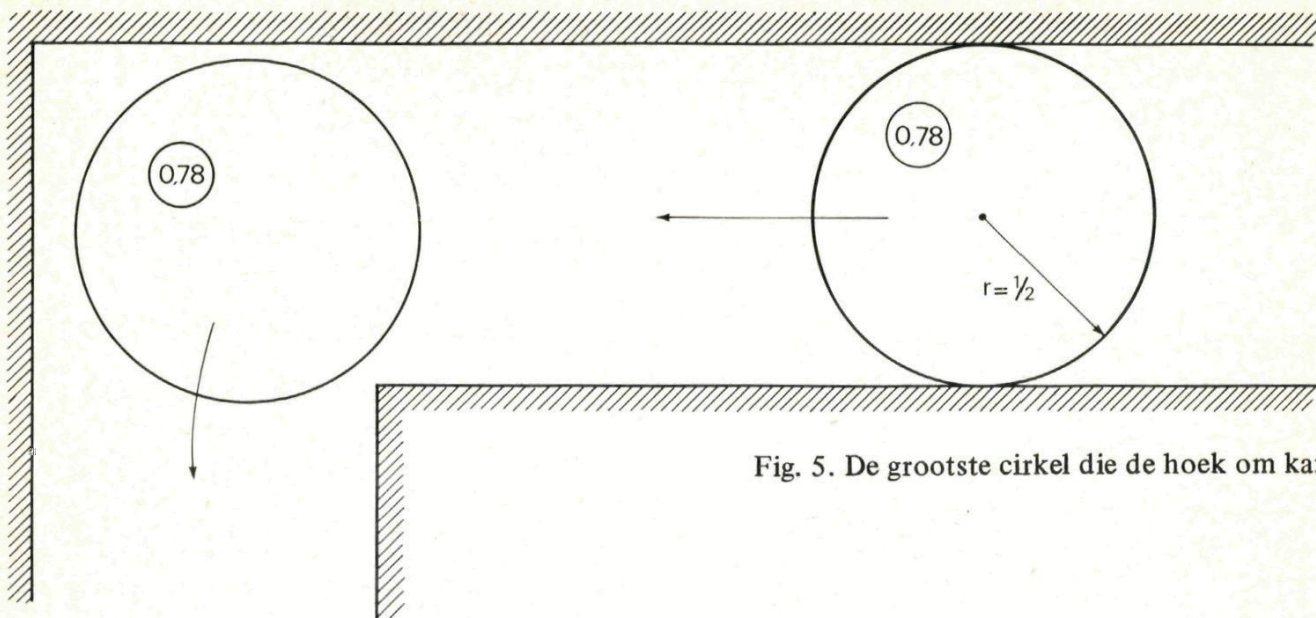


Fig. 5. De grootste cirkel die de hoek om kan.

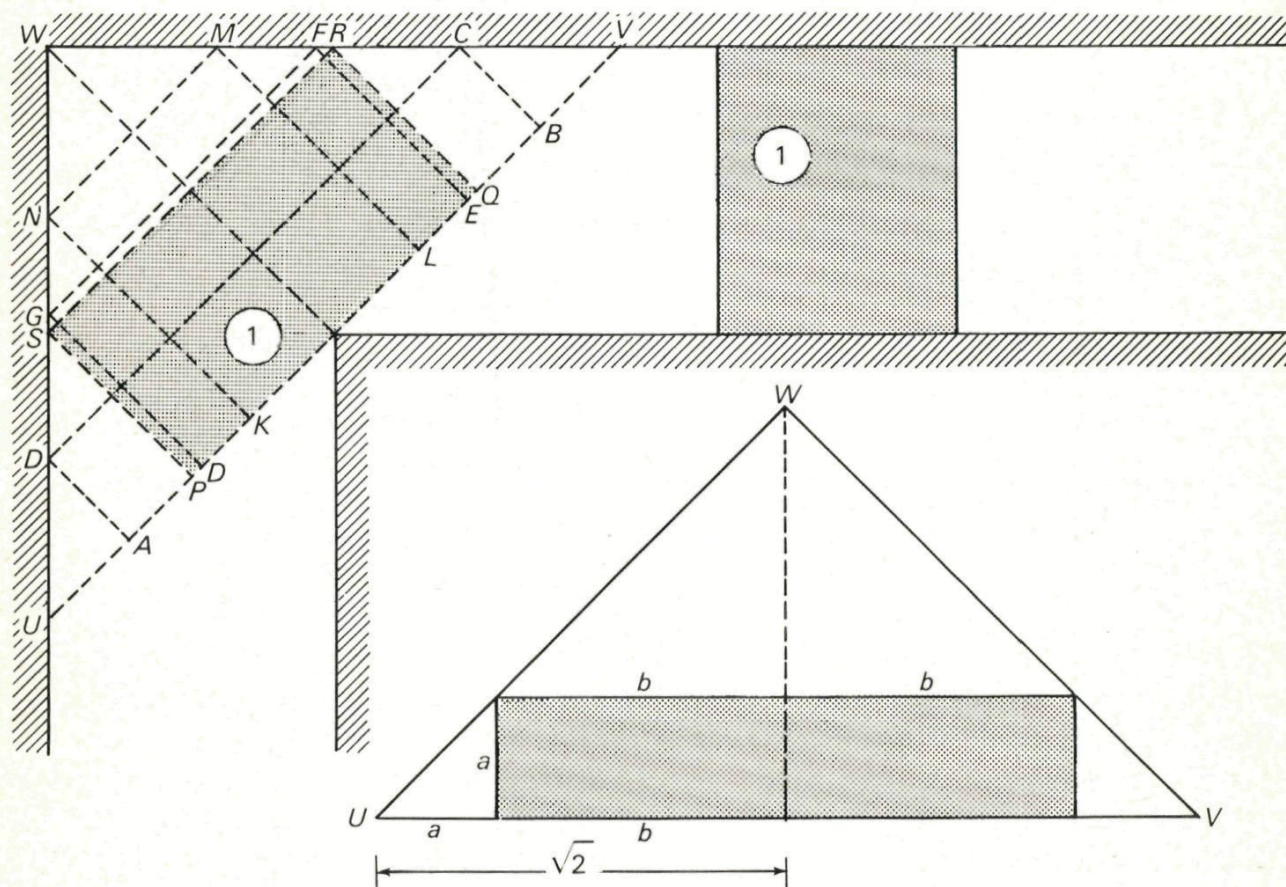


Fig. 6. Welke is de grootst verplaatsbare rechthoek?

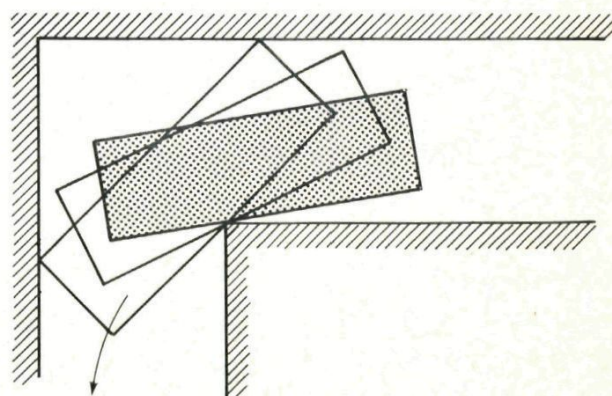


Fig. 7. We proberen het met rechthoeken.

in fig. 6 staan er een aantal getekend, waar misschien een kampioen tussen zit. Er zijn daar enkele kandidaten zoals: $ABCD$, $PQRS$, $DEFG$ en $KLMN$. Het is vrij gemakkelijk in te zien dat $KLMN$ met hoogte 1, de rechthoek met de hoogst toelaatbare hoogte is. Toch is deze al onbruikbaar, want hij draait zich klem in de richting van één van beide gangen.

Maar laten we de vraag eerst maar zo formuleren: welke van alle ingeschreven rechthoeken in driehoek UVW heeft de grootste oppervlakte en hoeveel is die dan?

In fig. 6 is gemakkelijk af te lezen dat de som van de breedte a en de halve lengte b steeds gelijk is aan $\sqrt{2}$ ofwel $a + b = \sqrt{2}$. De oppervlakte van zo'n rechthoek wordt dan $2ab$ of $2a(\sqrt{2} - a)$. Dat is een kwadratische functie met $a = 0$ en $a = \sqrt{2}$ als nulpunten. Deze functie heeft een maximum (waarom?). De grafiek wordt een parabool. Het maximum ligt bij $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ga dat maar na.

Zo wordt de maximale oppervlakte van zo'n rechthoek: $2 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}) =$

$2 \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2})(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 1$ en dat juist de gearceerde rechthoek $PQRS$. Deze is de som van twee vierkanten met zijde $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Punt R wordt gevonden door een binnenmuur door te trekken.

Maar ... de oppervlakte is precies evenveel als van het eerder genoemde vierkant met zijde 1 en oppervlakte 1! Dat is een teleurstelling: we hebben niets gewonnen.

Met een ellips

We hebben het toen nog maar weer eens met een ellips geprobeerd. Zoek de ellips met de grootste oppervlakte rakend aan de zijden van driehoek ABC en met CM als symmetrieas (fig. 8). Door wat te rekenen en te differentiëren hebben we voor de halve assen gevonden: $a = 0,82$ en $b = 0,47$. De oppervlakte van een ellips is πab of hier $\pi \times 0,82 \times 0,47 = 1,21$. Dat levert dus een geringe winst.

De kampioen?

Na enig zoeken zijn we tenslotte geëindigd bij een halve cirkel met straal 1 (fig. 9). Die kan nog net de hoek om. De

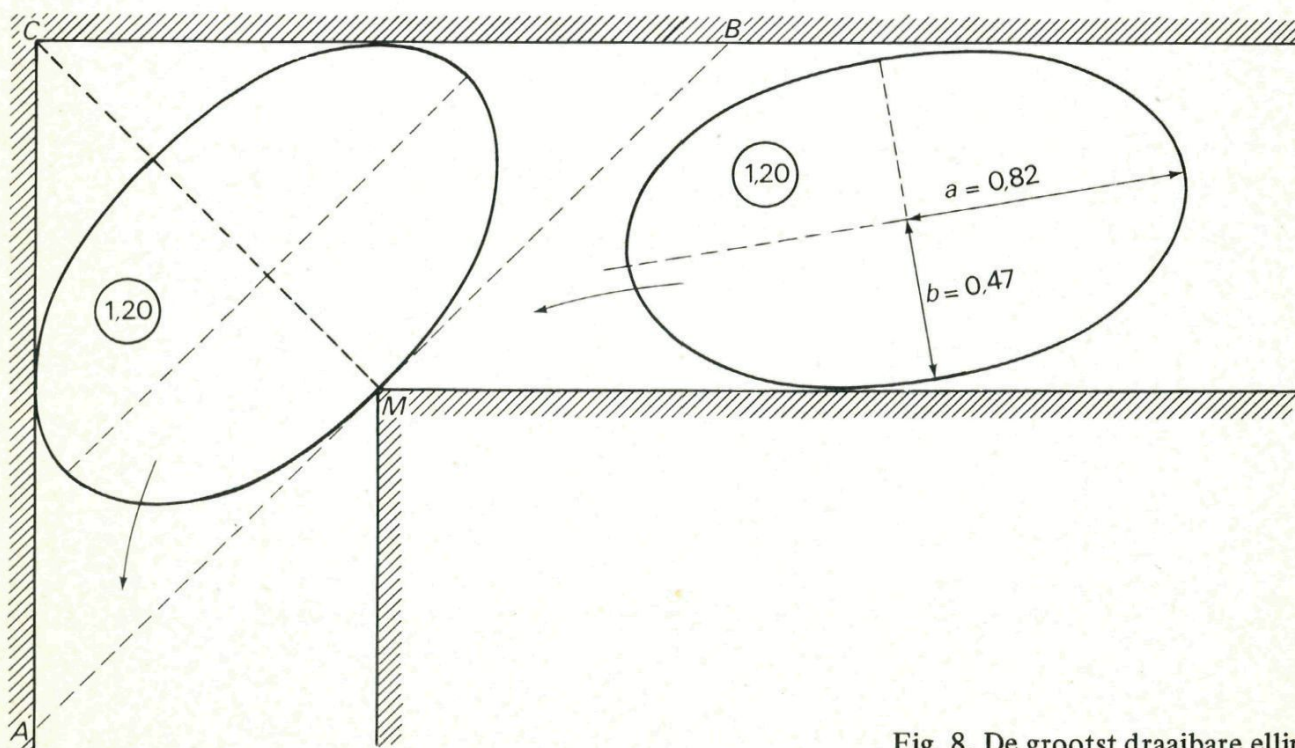


Fig. 8. De grootst draaibare ellips.

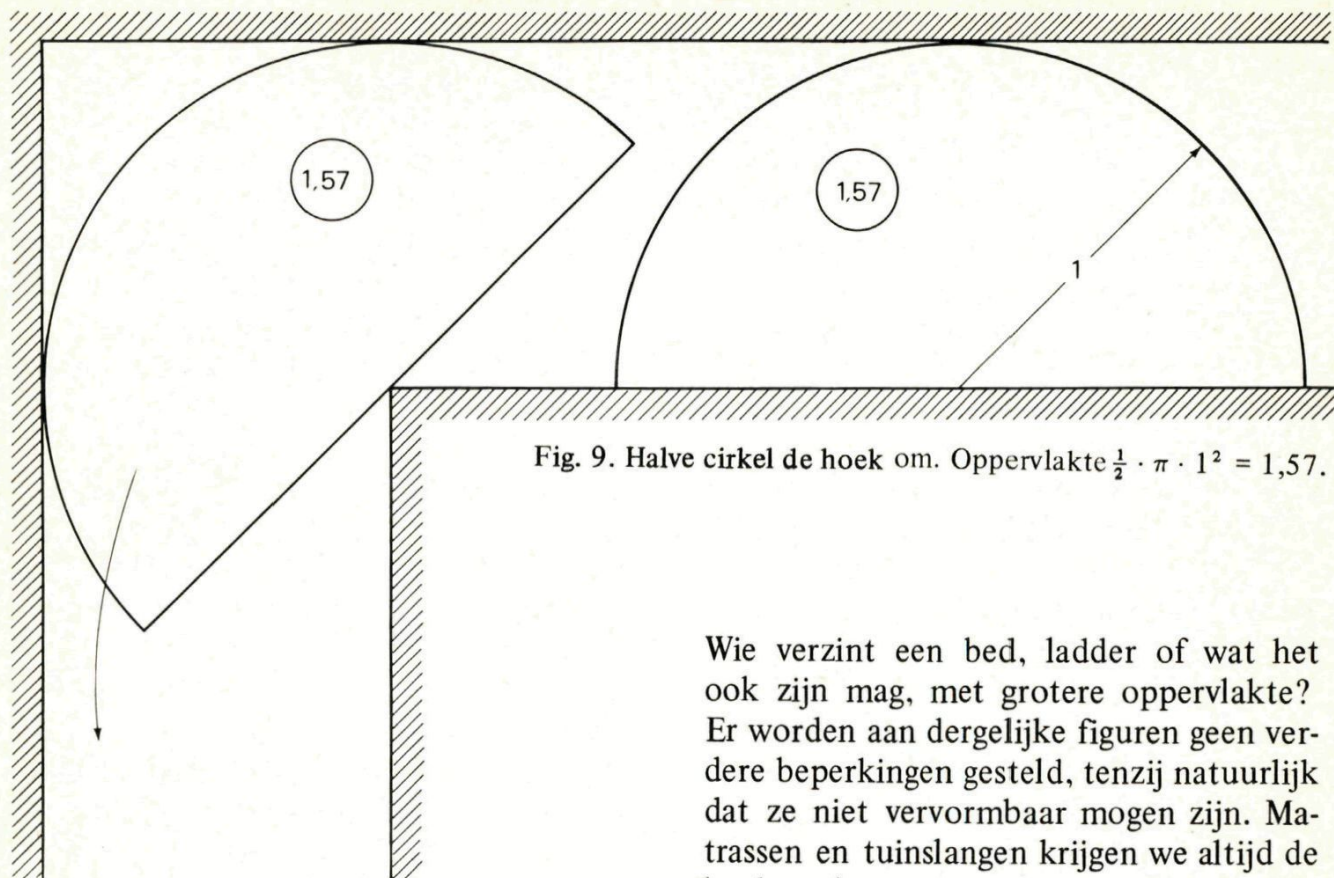


Fig. 9. Halve cirkel de hoek om. Oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = 1,57$.

oppervlakte daarvan is $\frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 = 1,57$. Dat is dan voor ons de grootste oppervlakte, die nog de hoek om kan.

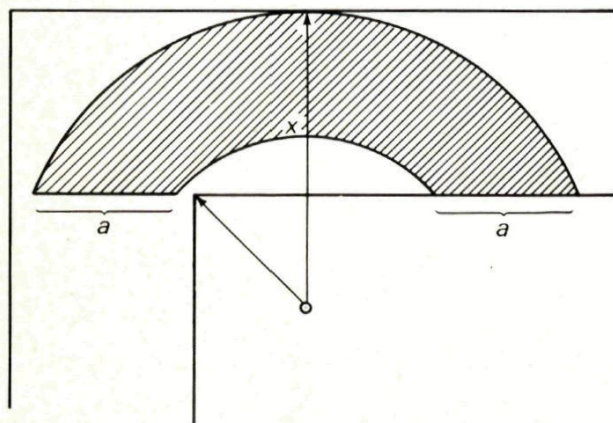
Wie verzint een bed, ladder of wat het ook zijn mag, met grotere oppervlakte? Er worden aan dergelijke figuren geen verdere beperkingen gesteld, tenzij natuurlijk dat ze niet vervormbaar mogen zijn. Matrassen en tuinslangen krijgen we altijd de hoek om!

We hopen dat verschillende lezers zullen reageren, zoals ook na de opgave van de ei-kromme is gebeurd.

°°° Nog eens de hoek om

Het probleem van 'de hoek om' is, voorzover bekend, voor het eerst gepubliceerd in 1968 door H. O. Pollak (Educational studies in Mathematics).

Hij meldt daarbij dat het probleem niet is opgelost. Zelf geeft hij als grootste hem bekende oplossing:



Een deel van een ring dus. Hij vermeldt echter geen formaat. Als de buitenstraal x is, is de binnenstraal $(x - 1)\sqrt{2}$.

De oppervlakte van het ringdeel is

$$x^2 \arccos \frac{x-1}{x} - (x-1)^2 \frac{\pi}{2} - (x-1)\sqrt{2x-1} + (x-1)^2.$$

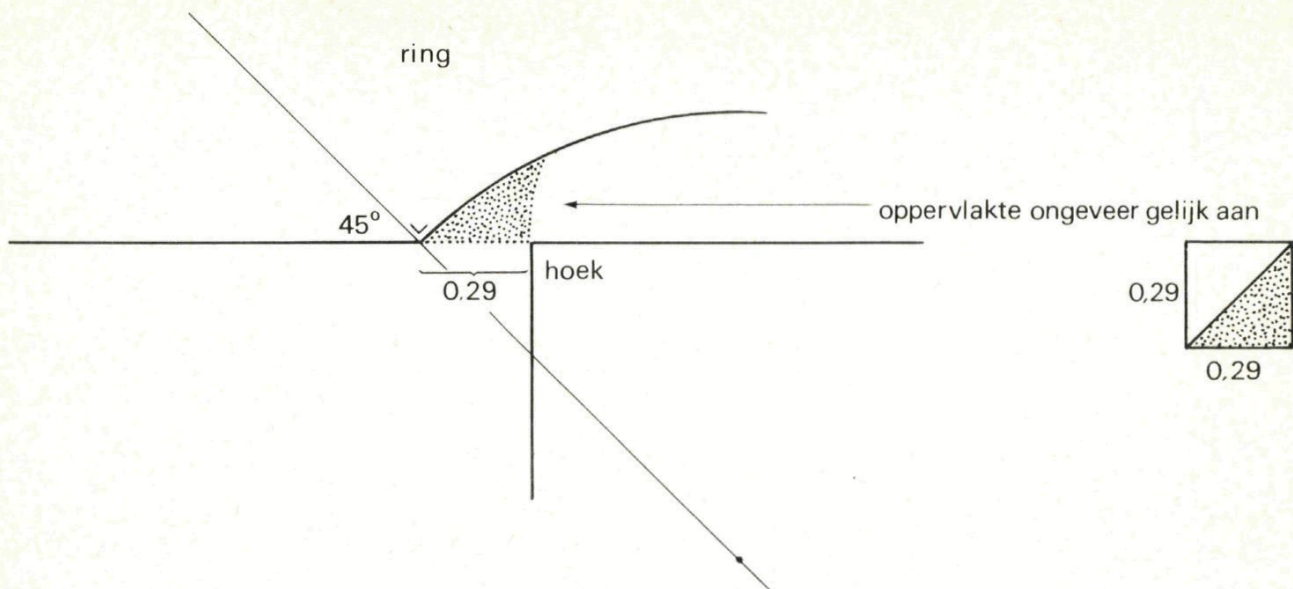
Het probleem numeriek benaderd geeft:

x	oppervlakte
1.1000	1.6753
1.1500	1.7205
1.2000	1.7614
1.2500	1.7979
1.3000	1.8303
1.3500	1.8586
1.4000	1.8829
1.4500	1.9033
1.5000	1.9199
1.5500	1.9327
1.6000	1.9418
1.6500	1.9472
1.7000	1.9489
1.7500	1.9472
1.8000	1.9419
1.8500	1.9331
1.9000	1.9208
1.9500	1.9051
2	1.8859

Nog wat preciezer in de omgeving van $x = 1,7$:

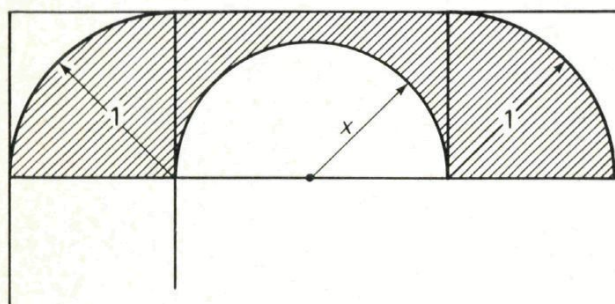
1.6500	1.9472
1.6600	1.9478
1.6700	1.9483
1.6800	1.9487
1.6900	1.9489
1.7000	1.9489
1.7100	1.9489
1.7200	1.9487
1.7300	1.9484
1.7400	1.9479
1.7500	1.9472

Kortom: voor $x = 1,7$ is de oppervlakte van het ringdeel 1,9489. Nu blijkt dat deze figuur in het begin van de hoekomgang nog wat speling heeft, omdat de platte kant a slechts 0,71 lang blijkt te zijn. Men kan aan de binnenkant er nog wat bijsnoepen, sterk vergroot:



Dit aan twee kanten geeft een oppervlaktevermeerdering van ten minste 0,084. Resultaat: oppervlakte $x = 2,03$

Een grotere oppervlakte is overigens te bereiken met de volgende figuur.



(Naar een idee van dr. Evert Wattel.)

Oppervlakte $\frac{1}{2}\pi + 2x - \frac{1}{2}\pi x^2$ met een

maximum $\frac{1}{2}\pi + \frac{2}{\pi} \approx 2,2$ voor $x = \frac{2}{\pi}$.

°De schaduwen van Studio Sport

Zondagavond 19.20 uur, Nederland 2, Studio Sport. Daar rollen fragmenten van gespeelde voetbalwedstrijden als rijpe appels over het scherm. Soms zijn het wedstrijden die 's middags gespeeld zijn. Als het winterzonnetje dan schijnen wil, tovert die schaduwbeelden van de spelers overal op het veld. Elke speler wordt steeds door zijn schaduw begeleid. De lengte daarvan is afhankelijk van de lichaamslengte van de betreffende speler en van de zonnestand. Hoe later op de middag, des te langer de schaduwen. Verder hebben langere spelers een langere schaduw. De schaduwlengte is echter onafhankelijk van de plaats van een speler op het veld. Maar spelers verschillen niet zoveel in lengte. Daarom kunnen we stellen dat alle schaduwen vrijwel even lang zijn en alle onderling evenwijdig (fig. 1).

Het lijkt sprekend op een veld van vectoren. Elke schaduw heeft immers zowel een lengte als een richting, en dat zijn juist de kenmerken van een vector.



Fig. 1.
Bij schuinstaande zon
wordt elke speler bege-
leid door zijn schaduw.
Zo ontstaat een veld
van vectoren.

Fig. 2. Elke speler wordt tijdens de wedstrijd voortdurend begeleid door vier schaduwen,
afkomstig van elke lampenset.



Vier vectoren

Interessanter wordt het nog in het geval van een voetbalwedstrijd bij kunstlicht. Meestal staan dan vier lichtmasten hoog boven de hoekpunten van het veld.

Elke speler wordt tijdens de wedstrijd voortdurend begeleid door vier schaduwen, afkomstig van elke lampenset (fig. 2).

In fig. 3 is een voetbalveld getekend. De maten van zo'n veld zijn 70 bij 105 m; de zijden verhouden zich dus als 2 : 3. We veronderstellen nu maar even voor het gemak dat de lampen recht boven de hoekpunten van het veld hangen. Op het veld zijn acht posities van spelers aangegeven, met hun schaduwen.

Neeskens staat op de middenstip; zijn vier schaduwen zijn even lang omdat hij even ver van alle lampen afstaat. Immers, hoe verder weg van een lichtmast, des te langer wordt de schaduw. Erkens staat bij een hoekvlag; een van zijn schaduwen is

nul geworden, omdat hij recht onder een lamp staat. Piet Schrijvers in het doel en Ruud Krol halverwege de lange zijde, hebben, vanwege de symmetrie, telkens twee schaduwen even lang.

Ook van Geels, broer Willy en Zuidema zijn de vier schaduwen correct getekend. Ga maar na of het zo'n beetje kan kloppen.

Als je buiten het veld komt, gaan de vectoren eenzelfde kant uitwijzen, zoals bij Johan Cruyff, die iets buiten de cornervlag klaar staat voor de hoekschop.

Werk aan de winkel

Aan zulke punten met hun vier schaduwvectoren is wel het een en ander uit te zoeken. Vragen genoeg.

Hoe is de structuur van zo'n schaduwkwartet?

Hoe is dat voor punten binnen het veld, op de randen, op een hoek en buiten het veld?

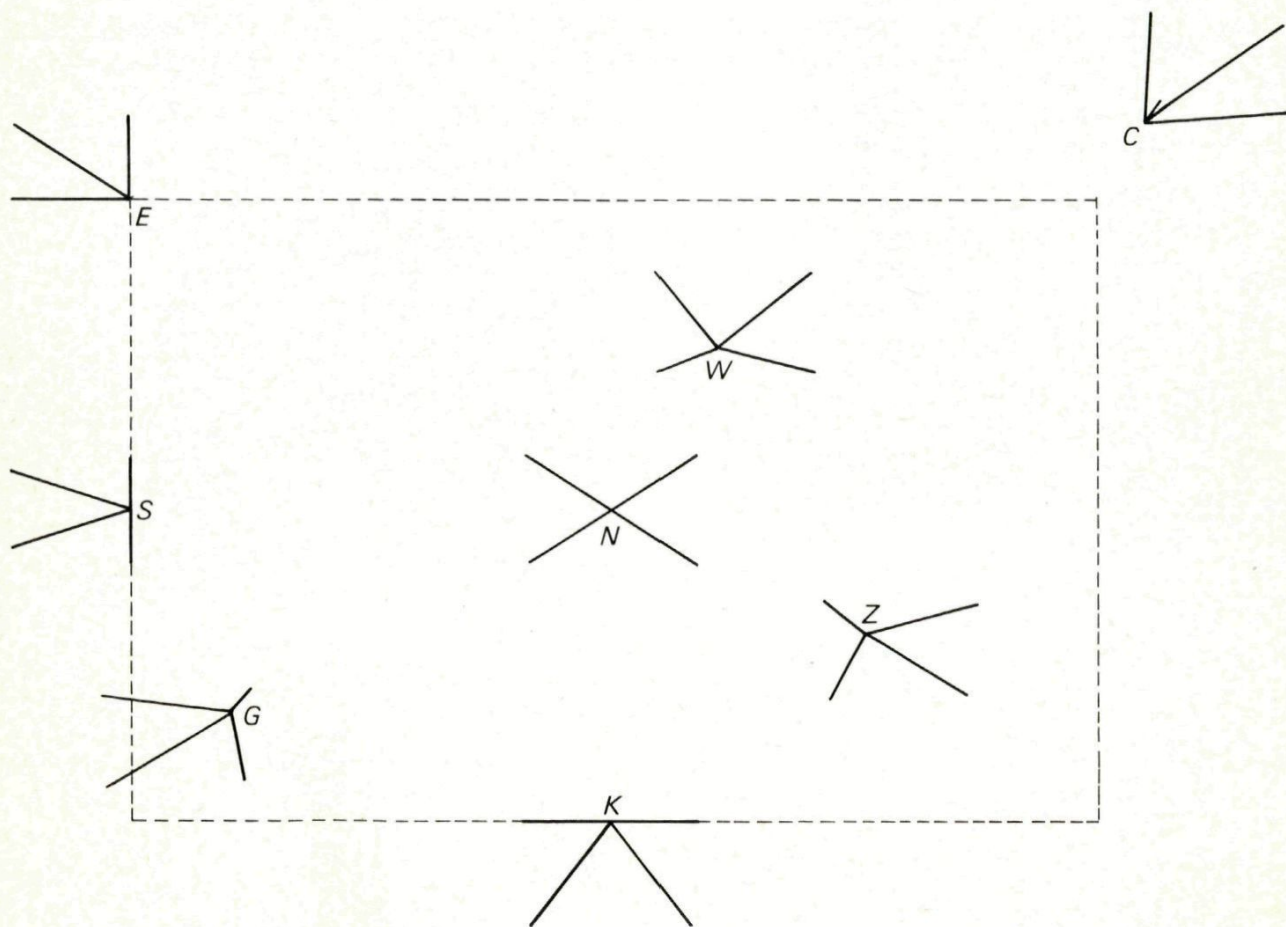


Fig. 3. De posities van acht spelers en hun bijbehorende schaduwen.

Zijn er relaties tussen de vier vectoren?
 Is uit zo'n schaduwpatroon de positie van een speler af te leiden?
 Hoe zit het met de vier hoeken? ?
 Kortom, is zo'n schaduwkwartet aan bepaalde wetten onderworpen, en zo ja, welke?

Eén enkele schaduw

In fig. 4 is een speler getekend met hoogte s , op een afstand d van een lichtmast, met hoogte h .

De schaduwvector heeft daarbij een lengte v .

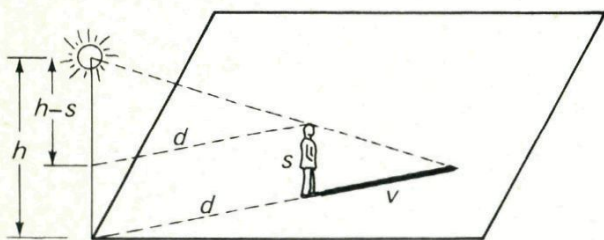


Fig. 4. Relatie tussen schaduw en afstand.

In de figuur trekken we een hulplijn, evenwijdig met de grond, op een hoogte s . Vanwege gelijkvormigheid geldt de volgende evenredigheid:

$$v : d = s : (h - s) \text{ of } v(h - s) = ds$$

$$\text{of } v = \left(\frac{s}{h - s} \right) d.$$

De lengte van de schaduwvector is dus een bepaald deel van de afstand d tot de mast. Merk op dat deze factor constant is en onafhankelijk van de plaats van de speler op het veld!

De lichtmasten bij PSV zijn 45 m hoog en de spelers gemiddeld 1,80 m. De factor $s/(h - s)$ wordt hier dan $1/24$.

Dat betekent dat de schaduw van een speler op dit veld steeds $1/24$ deel is van zijn afstand tot de betreffende lichtmast. En dat geldt voor alle vier de masten. Elke schaduw is $1/24$ deel van de bedoelde afstand.

Constructie van de schaduwen

In fig. 5 is het veld weer getekend in de vorm van een rechthoek $PQRS$. Een speler bevindt zich in punt F .

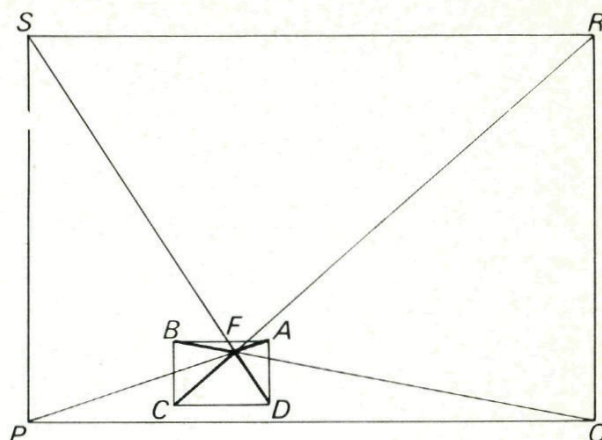


Fig. 5. Constructie van het schaduwkwartet.

We hebben de vier schaduwen geconstrueerd. Als verkortingsfactor hebben we maar $1/7$ gekozen, anders werd de tekening te onduidelijk. De schaduw FA , veroorzaakt door het licht van mast P , wijst in een richting tegengesteld aan FP en heeft een grootte $1/7 FP$. Evenzo is de schaduw FB gevonden als $1/7$ van FQ en tegengesteld aan FQ .

Zo worden ook de laatste twee schaduwen gevonden.

We ontdekken nu een bekende transformatie!

We hebben het voetbalveld $PQRS$ vanuit F vermenigvuldigd met de factor $-1/7$ (waarom is de factor negatief?).

Zo hebben we dan onze eerste ontdekking gedaan betreffende de vier schaduwvectoren van Studio Sport.

Speler als fototoestel

Als we de eindpunten van de vier schaduwpijlen verbinden, krijgen we altijd een figuur, gelijkvormig met het rechthoekige voetbalveld, met verhouding van zijden $2 : 3$.

Kijk nog maar eens in fig. 3 hoe voortreffelijk dat uitkomt. Alle 'omgeschreven' rechthoekjes staan nog in dezelfde stand ook.

Voor Neeskens vallen de schaduwen samen met de beide diagonalen van de rechthoek; voor Schrijvers, Erkens en Krol met een korte of lange zijde.

Bevreemdend lijkt het geval Johan Cruyff. Hij staat buiten het veld. We hebben die situatie in fig. 6 nog eens vergroot uitgetekend. Ook hier vormen de eindpunten van de schaduwen weer dezelfde rechthoek.

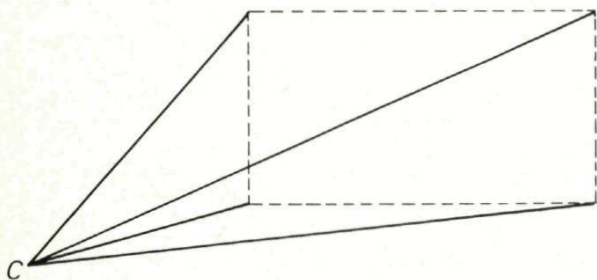


Fig. 6. Snijpunt van schaduwvectoren buiten de mini-rechthoek.

Samenvattend kunnen we stellen: voor spelers in het binnengebied van het veld ligt het gemeenschappelijke punt van de vier schaduwvectoren binnen die mini-rechthoek, voor spelers op de grenslijnen ligt dat punt op een zijde of in een hoekpunt en tenslotte voor spelers buiten de lijnen komt dat snijpunt buiten de bedoelde rechthoek te liggen.

Al met al een wonderlijke zaak. De spelers ontwerpen door hun schaduwen een verkleind omgekeerd beeld van het voetbalveld en gedragen zich zo eigenlijk als ... een fototoestel.

Hoe zit het met de hoeken?

De vier hoeken samen zijn natuurlijk steeds 360° . Er kunnen daarbij scherpe, rechte, stompe en gestrekte hoeken voorkomen. Het blijkt dat we hiervoor het veld in elf sectoren moeten verdelen. In zo'n vak hebben we dan steeds dezelfde hoekencombinatie. De verdeling wordt gemaakt door vier halve cirkels te tekenen met hun middelpunten gelegen halverwege de vier zijlijnen van het veld en met stralen de halve lengte daarvan (fig. 7).

De nemen die cirkels als grenzen, omdat daarop steeds één of meer hoeken recht worden.

We hebben een tiental posities in deze vakken of op hun grenslijnen uitgewerkt. In het middelste vak (punt G) worden tegenover elkaar gelegen hoeken stomp en de beide andere scherp.

In het doelvak (punt K) wordt één hoek stomp en de drie andere scherp.

In D worden twee nevenhoeken recht, in E twee tegenover elkaar liggende. Onderzoek deze zaak verder zelf maar.

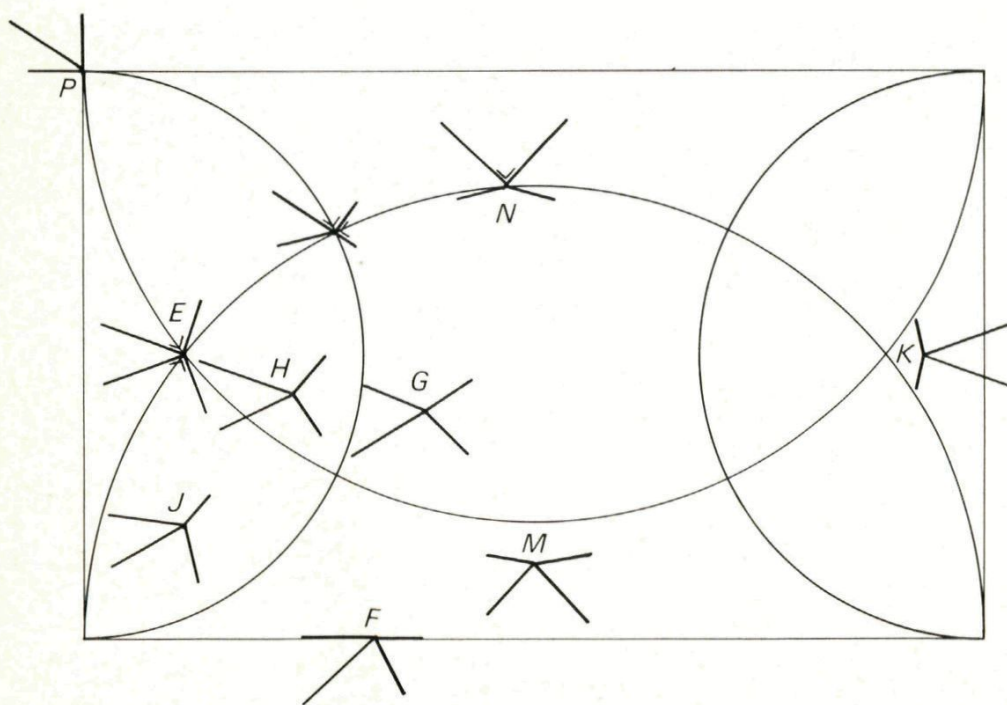


Fig. 7. Veld verdeeld in elf sectoren in verband met de hoeken.

Nog meer bijzonderheden

Is over de vectoren zelf, waarvan de beginpunten gemeenschappelijk zijn en waarvan de eindpunten samenvallen met de hoekpunten van een rechthoek, niet meer te bedenken?

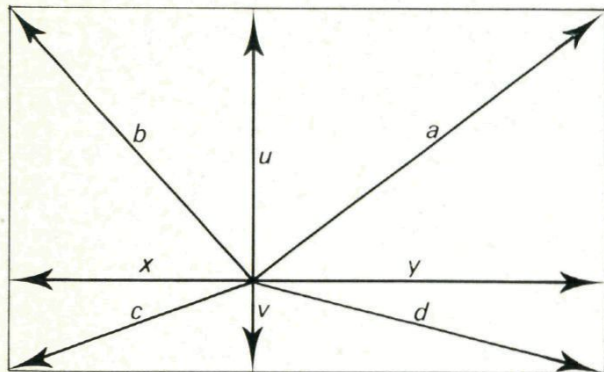


Fig. 8. Schaduwwectoren ontbonden in componenten.

In fig. 8 is elke schaduwwector ontbonden in twee componenten, evenwijdig met de lange en korte zijde van de rechthoek.

Zo geldt dan:

$$\bar{a} = \bar{u} + \bar{y}, \bar{b} = \bar{u} + \bar{x}, \bar{c} = \bar{v} + \bar{x} \text{ en } \bar{d} = \bar{v} + \bar{y}.$$

Hieruit volgt dat altijd geldt: $\bar{a} + \bar{c} = \bar{b} + \bar{d}$.

In woorden: de som van twee overstaande schaduwwectoren is steeds gelijk!

Ook voor de grootten van de vectoren valt in dezelfde figuur nog iets bijzonders af te lezen.

Als we onder a de grootte van vector $\bar{a}$ verstaan, geldt: $a^2 = u^2 + y^2$, $b^2 = x^2 + u^2$,

$$c^2 = v^2 + x^2 \text{ en } d^2 = y^2 + v^2.$$

Hieruit volgt: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

Constructie van de positie

In het begin van dit onderzoek hadden we onszelf de vraag gesteld: is het mogelijk uit het schaduwpatroon de positie van een speler te bepalen? Dat kan ook. In fig. 9 is een schaduwpatroon $ABCD$ gegeven.

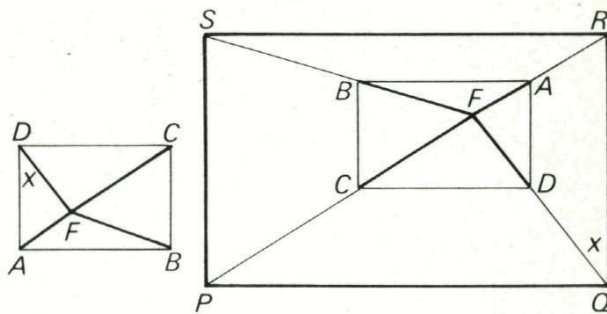


Fig. 9. Constructie van de positie van de speler.

Vermenigvuldig $ABCD$ t.o.v. F met -24 (of zoals in de rest van het verhaal is aangenomen met -7) en je vindt de speler F in zijn voetbalveld.

Overigens, de PSV-spelers zullen met hun gedachten wel meer bij het landskampioenschap vertoeven dan bij hun schaduwkwartet. Ze zullen dat alleen maar lastig vinden. Maar voor wiskundigen is dat misschien interessanter dan menige wedstrijd.

°Palindromen en halssnoeren

Gaspard Bosteels

Palindromen

Het woord palindroom komt van het Grieks *palin* = terug en *dromos* = loop. Een palindroom is een woord (of zin), dat (die) van achter naar voor precies zo luidt als van voor naar achter, of een ander zinvol woord (of zin) oplevert. Bekende voorbeelden zijn: *lepel* en *droom-moord, regen-neger*.

Getallen heten palindromen als ze van rechts naar links hetzelfde resultaat opleveren als van links naar rechts, zoals 12 321 en 44 144. In wat volgt, sluiten we de palindromen uit die uitsluitend uit hetzelfde cijfer bestaan. 11 is een palindroom en ook $11^2 = 121$. Het kwadraat van een palindroom is niet noodzakelijk een palindroom.

Bereken de kwadraten van 22, 101, 111, 121, 202, 212, 1001, 1111, 2002, 10 001, 10 101, 10 201, 11 011, 11 111, 11 211, 20 002, 20 102.

De kwadraten van de volgende getallen, die zelf geen palindromen zijn, zijn palindromen: 26, 264, 307, 836, 2 285, 2 636, 22 865.

Bereken de vierkantswortels uit 1 002 003 002 001 en 1 232 346 432 321. Wat constateer je?

Als we van een getal, zoals 32 514 de volgorde van de cijfers omkeren, krijgen we een nieuw getal 41 523 dat we het keergetal van het oorspronkelijke noemen.

Spelletjes

1. Tel bij een getal zijn keergetal op; je verkrijgt een som en daarbij tel je het keergetal van die som op en je gaat zo door tot je een palindroom vindt. Ga bijvoorbeeld uit van het nieuwe jaartal 1978. Na minder dan twintig optellingen krijg je een palindroom!

2. Neem een getal en trek daarvan het keergetal af (trek van het grootste van de twee het kleinste af). Je kunt zoals bij het eerste spelletje de regel herhaald toepassen. Ga je uit van 1978, dan zul je na minder dan tien aftrekkingen een palindroom vinden.

3. Schrijf de cijfers van 1978 in dalende volgorde als 9871 en trek daarvan het keergetal af. Ga je zo door, dan krijg je na een beperkt aantal bewerkingen de zogenaamde Kaprekar-constante 6174. In ons voorbeeld krijg je die na minder dan vijf aftrekkingen.

4. Maak de som van de kwadraten van de cijfers van het jaartal 1978; daarna doe je hetzelfde voor de verkregen som. Zo moet je doorgaan, tot je in herhaling valt. Je verkrijgt eerst een rijtje getallen, daarna een repetent. Hoe lang is die repetent? Na vijftien bewerkingen heb je de periode te pakken en de repetent telt acht getallen.

5. Vervang in het vierde spelletje de som van de kwadraten door een som van derde machten. Bij de negende bewerking kom je tot een constante som. Wat is ze en hoe lang is de repetent?

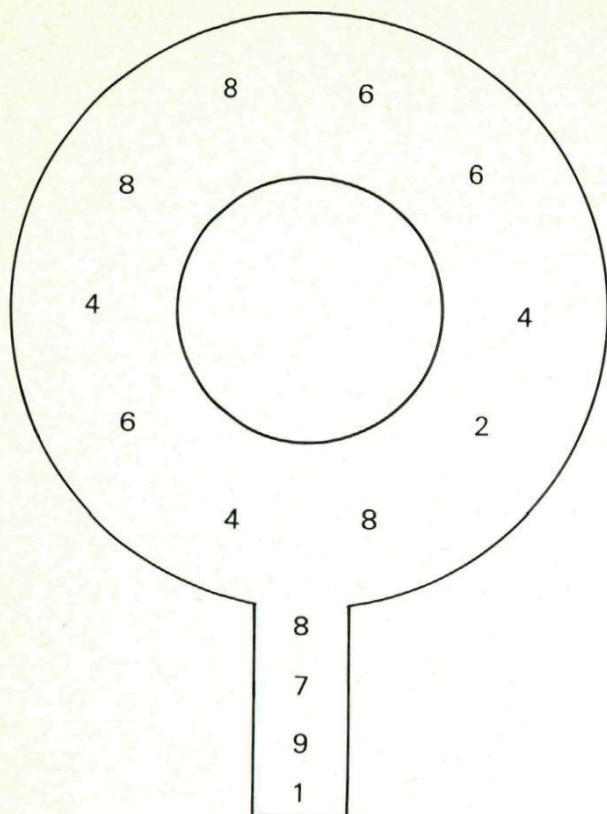
6. Vervang in het vierde spelletje de som van de kwadraten door een som van vierde machten en beantwoord dezelfde vragen.

7. In het zevende spelletje werk je met vijfde machten en in het achtste spelletje met de zesde machten. Telkens kun je de gestelde vragen beantwoorden. Het eerste stuk kan vrij kort zijn (voor de vijfde machten is het twee; de periode kan wel lang uitvallen: 38 voor de vijfde machten).

Halssnoeren

Steeds met ons jaartal 1978 kun je eenvoudige sommetjes maken. Neem $a = 1$, $b = 9$, $c = 7$, $d = 8$, zodat je het getal 1978 als $abcd$ kunt schrijven. Neem nu het eindcijfer van het produkt $a \cdot b \cdot c \cdot d$ en schrijf dit na 1978. Neem nu weer het produkt van de laatste vier cijfers (dus van 9784) en schrijf het cijfer der eenheden van dit produkt na 19784; je verkrijgt 197846. Herneem nu de opgelegde rekenwijze en ga zo door tot je een periodiek verschijnsel waarneemt. Met de cijfers van de periode maak je een halssnoer (waarbij je één of meer perioden kunt nemen); wat aan de periode voorafgaat neem je als hangertje!

Nieuw halssnoer: maak eerst het produkt $a \cdot b \cdot c \cdot d$ en neem daarvan het eindcijfer e ; daarna maak je de som $b + c + d + e$ met eindcijfer f . Je krijgt zo het getal met opvolgende cijfers a, b, c, d, e, f . Begin opnieuw de bewerking op het getal van de laatste vier cijfers c, d, e, f en ga zo door. Je krijgt een nieuw halssnoer, met een langer hangertje (197848228) gevolgd door een zeer merkwaardig snoer.



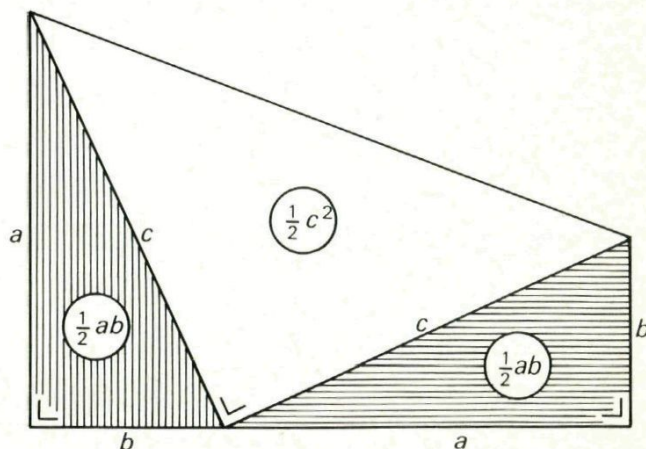
Je kunt de voorgaande rekenregel herhalen maar daarbij de volgorde omwisselen (eerst het eindcijfer van de som, daarna het eindcijfer van het produkt). Het hangertje is zeer klein (1978). Het snoer zal je wel bevallen.

Er zijn vanzelfsprekend nog verdere mogelijkheden: laat 1978 volgen door het eindcijfer van de bewerking $a(b + c + d)$ en ga zo door; laat 1978 volgen door het eindcijfer van $(a + b + c) \cdot d$ en ga zo verder; laat 1978 volgen door het eindcijfer van $(a \cdot b + c \cdot d)$ en zo verder; laat 1978 volgen door het eindcijfer van de som $a + b + c + d$ en het eindcijfer van het produkt $a \cdot b \cdot c \cdot d$ en zo verder.

Laat je verbeelding werken en kom tot een rijtje van mooie halssnoeren. Bij al die berekeningen, die zeer vlot verlopen, kun je best je zakrekenmachientje gebruiken. Maak echter geen nodeloze bewerkingen.

°Pythagoras en de Amerikaanse president

We hebben in ons tijdschrift, genoemd naar de meest bekende wiskundige aller tijden, al op velerlei manieren bewijzen aangevoerd voor zijn bekende stelling. Het zal menigeen bekend zijn dat de Amerikaanse staatsman Benjamin Franklin met een vlieger in een onweersbui zat, om de bliksemafleider uit te vinden. Dat een Amerikaanse *president* in zijn vrije tijd een origineel bewijs voor de stelling van P. bedacht, zal weinigen bekend zijn.



Een presidentieel bewijs voor de stelling van P.

Een beetje rekenen

De bedoelde president is Garfield, die in 1882 de stelling aldus bewees.

We nemen een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden a en b en schuine zijde c .

Neem vervolgens nog zo'n driehoek en schuif die 90° gedraaid ten opzichte van de eerste, daar tegen aan (fig. 1).

De tussenliggende driehoek, die ontstaat door een extra verbindingslijn te trekken, is gelijkbenig en rechthoekig.

De totale figuur heeft nu de vorm gekregen van een rechthoekig trapezium met een oppervlakte gelijk aan de hoogte keer de gemiddelde lengte van de evenwijdige zijden.

Deze oppervlakte is dan weer gelijk aan de drie oppervlakten van de drie rechthoekige driehoeken samen, aldus:

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

Verdubbeling links en rechts en uitwerking geeft:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2 \\ \text{of} \quad a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

en zo zijn Pythagoras en de president het roerend met elkaar eens geworden.

Van de redactie: ei, ei!

Op het artikel over de ei-kromme in no. 1 zijn bij het ter perse gaan van dit laatste nummer van deze jaargang 153 reacties binnengekomen. Henk Mulder (die het artikel schreef), heeft ongeveer de eerste 50 inzenders persoonlijk een antwoordje gestuurd. Toen de stroom bleef aanhouden, is hij daarmee gestopt wegens tijdgebrek. Behalve redacteur van *Pythagoras* is Henk Mulder ook redacteur van *Archimedes*, schrijft artikelen voor het blad *De jonge*

onderzoeker; werkt mee aan de televisieserie: *Hoe bestaat het* en ... heeft daarbij nog een volledige betrekking op school. Als je dus tot de inzenders behoort die geen antwoord ontvingen, wees dan niet al te teleurgesteld. Je hebt zelf plezier gehad in het bezig zijn met het probleem en we hebben je inzending met belangstelling gelezen.

Bruno Ernst.

Oplossing van de denkertjes

1. Heeft de driehoek een hoek van 120° , dan valt het punt van Torricelli samen met dat hoekpunt. Is de stompe hoek groter dan 120° , dan is dat hoekpunt het punt met de verlangde eigenschap. Het punt van Torricelli ligt dan echter buiten de driehoek. Neemt men hoek C als stompe hoek en dezelfde rotatie als in het verhaal, dan liggen T en T' in omgekeerde volgorde op AB' , zodat niet meer opgaat dat $AB' = AT + TT' + T'B$.
2. In de figuur van de tweede oplossing moet $PV'V$ gestrekt zijn, dus $\angle PVR = 60^\circ$. De verzameling van de punten V waarvoor dit geldt is een cirkelboog, namelijk van de omgeschreven cirkel van $\triangle PQR$. In het probleem voldoet slechts een deel aan de eis, namelijk boog QR .

Oplossing van het kruiswoorddubbelraadsel uit no. 4

1	z	13	w	a	a	17	r	t	e	18	p	u	n	19	t
			o				o				u				e
2	i		r	r	a		t	i	o		n	e	e		l
			t				a				t				l
3	l		e	n	g		t	e			s				e
			l				i				4	p	a	a	r
				5	t	15	w	e	e			i			
6	p		14	i			ij				7	b	e	e	l
			n				8	z	e	s		g			
			v					e			9	g	e	l	ij
			e				r					l			20
															k
			10	r	ij			11	r	a	d	i	a	a	l
			s				e					n			o
12	v		e	n	n		d	i	a	g	r	a	m		

Inhoud

2 x 60° 97

Het kan ook anders 100

Tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 102

De hoek om 105

Nog eens de hoek om 110

De schaduwen van Studio Sport 112

Palindromen en halssnoeren 117

Pythagoras en de Amerikaanse president 119

Van de redactie: ei, ei! 120

Oplossing van de denkertjes 120

Oplossing van het kruiswoorddubbelraadsel uit no. 4 121

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

W. Kleijne, Apeldoorn.
Ir. H. Mulder, Breda.
G.A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Stationsstraat 114, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 6,75 per jaargang. Voor anderen f 11,00.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

