

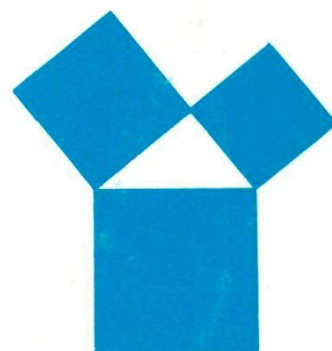


1

jaargang 18 / oktober 1978

wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 x per schooljaar

Pythagoras



De letters vertonen een systematische vervorming naar de rand toe. In deze tekening is deze vervorming bewust toegepast om ons de indruk te geven dat dit een bol voorstelt.

Soms zijn deze vervormingen lastig, zoals bij het bestuderen van het maanoppervlak: een sterk langgerekte ellips aan de rand is in feite een vrijwel cirkelvormig gebied. Het geeft ook zijn problemen bij de getallen op de lottoballetjes. Zie het artikel op pagina 7.

BIJ DE FOTO OP DE OMSLAG:

De vorm van een beiaardklok heeft iets sierlijks, zoals ook de vorm van een viool. Zulke vormen zijn in de loop der eeuwen empirisch gevonden en men kan ze niet ongestraft veranderen zonder dat de kwaliteit van de voortgebrachte tonen aanzienlijk slechter wordt. (Foto: Nationaal Beiaardmuseum te Asten, Noord-Brabant.)

In het artikel *Hoeveel weegt die klok*, zullen we nagaan hoe uit de vorm van de klok zijn gewicht kan worden bepaald.

°Hoeveel weegt die klok?

De zwaarste klok in Nederland weegt 9 ton. Hij hangt in de Grote Kerk in Delft, heeft van onderen een middellijn van 2,30 m en werd door H. van Trier in 1570 gegoten. De zwaarste klok van de Utrechtse dom weegt $8\frac{1}{4}$ ton en werd in 1505 door Geryt van Wou gegoten.

Deze gewichten vinden we in de archieven opgegeven en ze stammen van de gieters zelf: zij wogen de hoeveelheid tin en koper die ze bij het gieten gebruikten.

Nauwkeuriger gewichtsbepalingen

Er zijn ook heel wat klokken die door de bestellers op hun waag nagewogen zijn, om te controleren of de klokkegieter werkelijk ook leverde wat hij aan materiaal in rekening bracht. Maar deze wegingen waren verre van nauwkeurig. Als iemand voor een bepaald onderzoek het gewicht van zo'n zware klok wil weten, kan hij beter zelf een methode bedenken om achter het gewicht te komen. Een interessante methode vond ik in een proefschrift uit 1909, door Vas Nunes, getiteld: *Experimenteel onderzoek van klokken van F. Hemony*. Hij onderzocht klokken uit de Zuiderkerktoren te Amsterdam en er was geen sprake van, dat hij deze klokken op een conventionele manier zou kunnen wegen: ze bleven gewoon in de toren hangen! Zijn methode berust op een meetkundige stelling. Via een aantal metingen om de vorm van de klokken te bepalen en deze stelling was hij in staat de inhoud van deze klokken te berekenen en dit zullen wij hier bespreken. Natuur-

lijk moet voor een gewichtsberekening ook nog de dichtheid van de gebruikte klokkespijs (de gebruikelijke naam voor het tin-koppermengsel, meestal rond de 80% koper en 20% tin) bepaald worden. Dit was een fysisch-chemisch onderzoek, waarop wij niet verder zullen ingaan.

De stelling van Paul Guldin

De stelling die Vas Nunes gebruikte wordt meestal genoemd naar Paul Guldin (1577–1643), die hem herontdekte, want de stelling komt al voor bij de Griekse wiskundige Pappus (ca. 350 na Chr.) en zij was al vóór Pappus bekend en bewezen, want Archimedes maakte er reeds gebruik van.

De stelling gaat over de inhoud van een omwentelingslichaam en luidt (zie figuur 1): indien men een gesloten kromme met de oppervlakte O en het zwaartepunt Z wentelt om een as a , zal de inhoud van het beschreven omwentelingslichaam gelijk zijn aan: $2 \pi r O$, waarin r de afstand van het zwaartepunt van O tot a is.

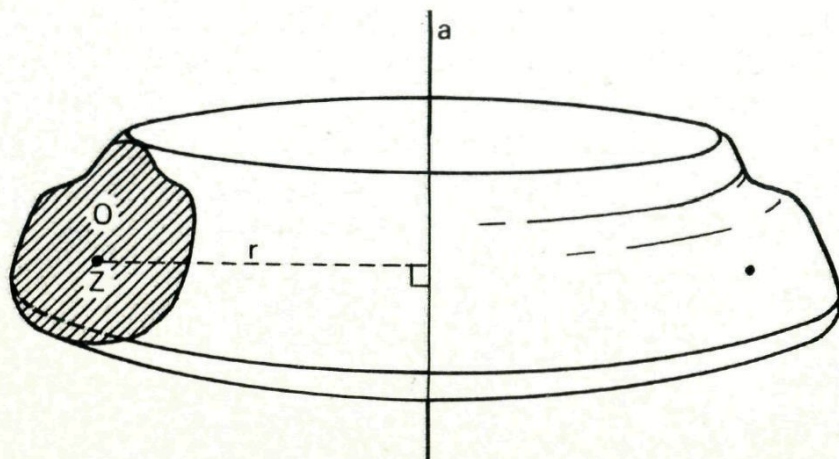


Fig. 1.
De regel van Guldin:
 $I = 2 \pi r O$.

Fig. 2.

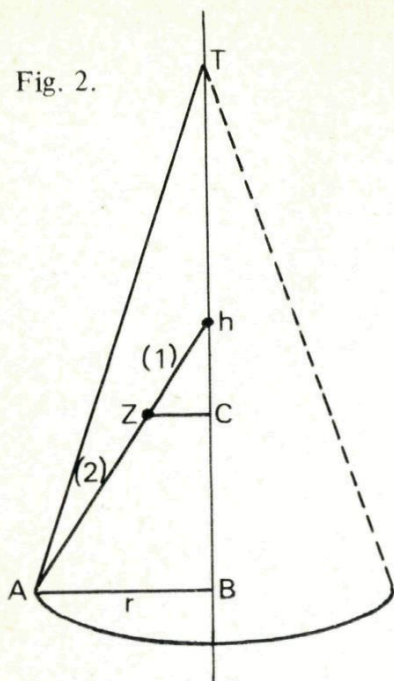
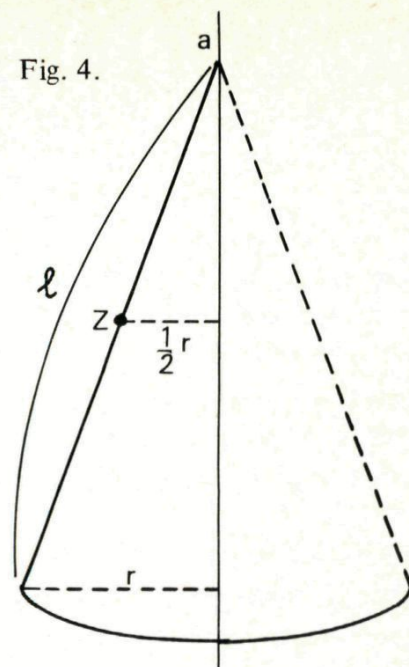


Fig. 3.



Fig. 4.



We passen deze stelling meteen toe om de inhoud van een kegel te bepalen (figuur 2). Deze kegel laten we ontstaan door de rechthoekige driehoek ABT , met hoogte h en basis r om de rechthoekszijde h te laten wentelen. Je kunt zelf gemakkelijk berekenen, dat $ZC = \frac{1}{3} r$, zodat volgens de stelling van Guldin de inhoud van de kegel wordt: $I = 2 \pi \frac{1}{3} r \cdot \frac{1}{2} h r = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

De inhoud van een bol?

Dapper geworden door dit goede resultaat proberen we de stelling toe te passen op de inhoudsbepaling van een bol. We laten een halve cirkel om zijn middellijn wentelen (figuur 3). De oppervlakte van de halve cirkel is $\frac{1}{2} \pi r^2$. Maar waar ligt het zwaartepunt van de halve cirkel? Dit is helemaal geen eenvoudig probleem.

Laten we het liever omkeren en proberen de plaats van het zwaartepunt van een halve cirkel berekenen door uit te gaan van de inhoud van een bol: $\frac{4}{3} \pi r^3$.

Noemen we de afstand van het zwaartepunt van de halve cirkel tot de as x , dan is volgens Guldins regel:

$I = 2 \pi x \cdot \frac{1}{2} r^2$ en dit moet gelijk zijn aan: $\frac{4}{3} \pi r^3$.

Hieruit berekenen we $x = \frac{4 r}{3 \pi}$.

De oppervlakte van omwentelingslichamen

Misschien kom je op het idee de stelling van Guldin toe te passen op een lijnstuk, dat om een as gewenteld wordt. Dan wordt geen inhoud beschreven, maar een oppervlakte. Zou de stelling dan ook opgaan?

Laten we hem eens toepassen op het lijnstuk l , dat om de as a wentelt (figuur 4) en zo een kegelmantel beschrijft. Hier is Z het midden van l . Volgens de stelling van Guldin is dan

Opp. = $2 \pi \cdot \frac{1}{2} r \cdot l$ en dat is inderdaad de oppervlakte van een kegelmantel. Deze variatie op de stelling van Guldin is niet nieuw: ze was ook al aan Pappus bekend! Bij een poging om op deze wijze de oppervlakte van een bol te bepalen, komen we weer bedrogen uit, omdat het zwaartepunt van een halve cirkel niet op de cirkelomtrek ligt, en weer niet op zo'n eenvoudige wijze te bepalen is. Toch zijn er wel op eenvoudige wijze aardige resultaten te krijgen, als we lijnstukken kiezen waarvan de lengte gemakkelijk te bepalen is en de ligging van het zwaartepunt ook. In figuur 5 bestaat de wentelende lijn uit twee kwartcirkels. De oppervlakte van deze klokvorm die bij wenteling van beide kwartcirkels ontstaat is eenvoudig te bepalen. Doe het maar eens.

Terug naar de echte klokken

Om de doorsnede van een klok in de Zuiderkerk in Amsterdam te bepalen, moest Vas Nunes een groot aantal metingen doen om zowel het binnen- als het buitenprofiel van de klok te bepalen. Ook het vastleggen van de ligging van de as was niet eenvoudig.

Het resultaat zie je in figuur 6. Om de ligging van het zwaartepunt te vinden plakte hij de op papier getekende figuur op blad-tin en sneed die nauwkeurig uit. Het zwaartepunt vond hij door de figuur op

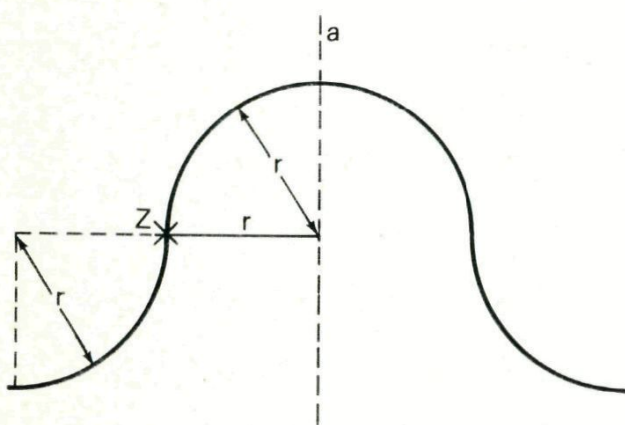


Fig. 5.

twee verschillende punten op te hangen en beide keren een verticale lijn door het ophangpunt te tekenen (een bekende methode uit de natuurkunde), zie figuur 7.

Het zwaartepunt bleek binnen de figuur te vallen.

De oppervlakte van de figuur bepaalde hij door die over te trekken op ruitjespapier en daarna de hokjes te tellen.

Voor de klok, die in figuur 6 is weergegeven vond hij $O = 585 \text{ cm}^2$. De afstand van het zwaartepunt tot de as was hier 37,7 cm. De stelling van Guldin gaf dan als volume:

$V = 2 \pi r \cdot O = 138502 \text{ cm}^3$. (Het gewicht was 1205 kg).

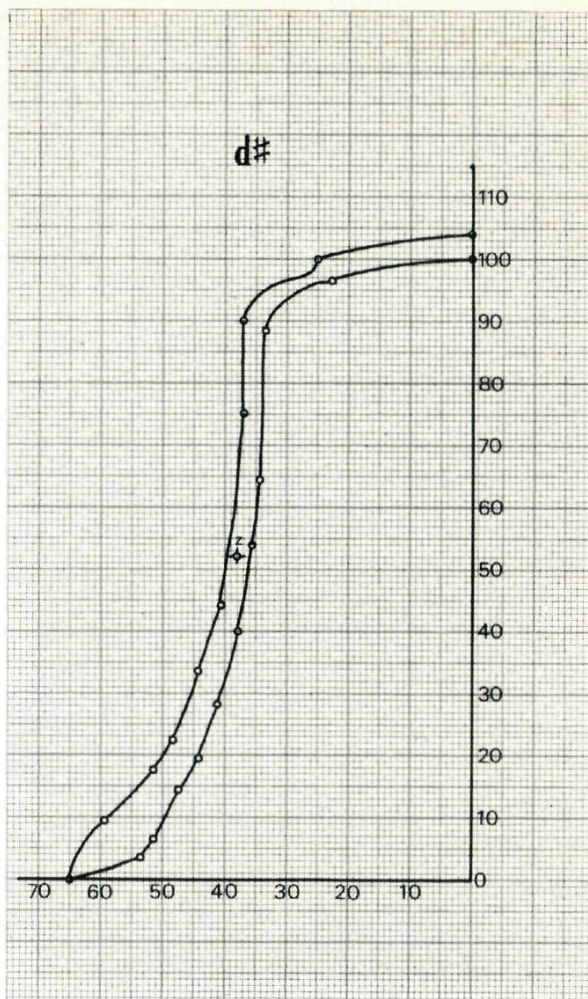


Fig. 6.

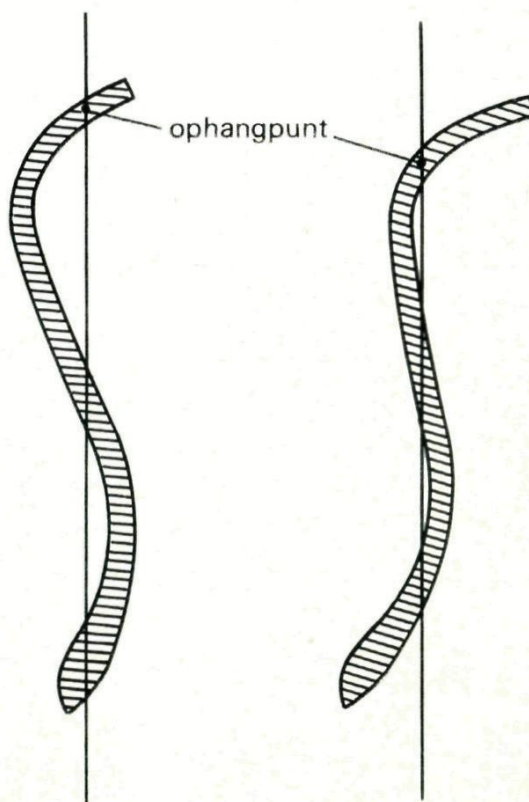


Fig. 7.

°Het verschil van een getal en zijn omgedraaide

Een getal stellen we voor d.m.v. de notatie $\overline{ab}$, $\overline{abc}$, enz., waarbij de letters $a, b, c, \dots$ de cijfers van het getal voorstellen. Dus in $\overline{ab}$ worden a en b niet vermenigvuldigd, maar gewoon naast elkaar gezet, zoals 97. Met het omgedraaide getal van $\overline{ab}$ bedoel ik $\overline{ba}$ d.w.z. het omgedraaide van 97 is 79. Het verschil van deze twee is $97 - 79 = 18$. Het blijkt gelijk te zijn aan $9 \times$ het verschil van het eerste en het laatste cijfer ($9-7$). Dit is zelfs in het algemeen waar voor getallen van twee cijfers:

Het verschil van twee getallen van twee cijfers is 9 keer het verschil van de cijfers

Bewijs

$$\begin{array}{l} \overline{ab} \quad (a > b) \\ \overline{ba} \quad - \\ \hline \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} (a-1)(b+10) \\ \overline{b \quad a} \\ \hline \end{array} \quad -$$

$$\begin{aligned} \overline{(a-b-1)(b-a+10)} &= 10(a-b-1) + (b-a+10) \\ &= 10a - 10b - 10 + b - a + 10 \\ &= 9a - 9b \\ &= 9(a-b) \end{aligned}$$

Een dergelijke stelling geldt ook voor een getal van drie cijfers:

Het verschil van twee getallen van drie cijfers is 99 keer het verschil van het eerste en het derde cijfer.

Bewijs

$$\begin{array}{l} \overline{abc} \quad (a > c) \\ \overline{cba} \quad - \\ \hline \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} (a-1)(b+9)(c+10) \\ \overline{c \quad b \quad a} \\ \hline \end{array} \quad -$$

$$\overline{(a-c-1)9(c-a+10)} =$$

$$\begin{aligned} &= 100(a-c-1) + 9 \cdot 10 + (c-a+10) \\ &= 100a - 100c - 100 + 90 + c - a + 10 \\ &= 99a - 99c \\ &= 99(a-c) \end{aligned}$$

Denkertje 1

Een gouden ring heeft een cirkelvormige doorsnede, waarvan de middellijn 4 mm is. De buitenmiddellijn van de ring is 22 mm. Bereken de inhoud van deze ring.

Je zou nu verwachten, dat voor getallen van vier cijfers het verschil 999 keer het verschil van het eerste en het vierde cijfer is. Dit is in het algemeen niet waar. De uitspraak geldt echter wel in het geval het tweede en het derde cijfer gelijk zijn.

Bewijs

$$\frac{\overline{abcd} (a > d)}{\overline{dcba}} \iff \frac{\overline{(a-1)(b+9)(c+9)(d+10)}}{\overline{d \quad c \quad b \quad a}} = \frac{\overline{(a-d-1)(b-c+9)(c-b+9)(d-a+10)}}{1}$$

$$\begin{aligned} &= 1000(a-d-1) + 100(b-c+9) + 10(c-b+9) + (d-a+10) \\ &= 1000a - 1000d - 1000 + 100b - 100c + 900 + 10c - 10b + 90 + d - a + 10 \\ &= 999a - 999d + 90b - 90c \\ &= 999(a-d) \text{ als } b=c \end{aligned}$$

Ga nu zelf eens na hoe het verder gaat met getallen die bestaan uit meer dan vier cijfers.

°°Fibonacci's konijnenprobleem

H. J. Sliker

Leonardo Fibonacci van Pisa was een Italiaanse wiskundige die leefde rond 1200. Omdat zijn vader Bonacci (fi-bonacci: zoon van bonacci) een koopman was en Leonardo ook dat vak in moest, reisde hij door vele landen. Tot ergernis van zijn vader nam zijn interesse voor de wetenschap toe en die voor het vak af. Toen hij in 1202 terugkwam van een reis publiceerde hij het boek *Liber Abaci* (hierin gebruikt hij onze Arabische cijfers, wat voor toen niet erg gewoon was).

Op een wiskundetoernooi van Frederik II, zo vertelt men, werden de bekendste wiskundigen problemen voorgeschoteld die bedacht waren door Giovanni van Palermo. Een van die problemen was het konijnenprobleem:

'Elk paar konijnen baart elke maand een nieuw paar konijnen die op hun beurt zich vanaf de *tweede* maand voortplanten met weer een paar.

Geef het een aantal (paren) aan na x maanden.'

00	Leonardo vond dit pro-
00	bleem gezien zijn algebra-
00.00	ische achtergrond erg ge-
00.00.00	makkelijk:
00.00.00.00.00	
.....	

1e maand: 1
 2 $1 + 1 = 2$
 3 $1 + 2 = 3$
 4 $2 + 3 = 5$
 5 $3 + 5 = 8$ etc.

We krijgen zo de reeks: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584,

Denkertje 2

Noem de eerste term x_1 , de tweede x_2 etc. (dus $x_{15} = 610$). Druk de reeks uit in x_i .

We gaan nu verder 'spelen' met deze reeks.

Tel de eerste 5 termen op en kijk hoeveel dat minder is dan de zevende term: je ziet dat scheelt er maar eentje!: $13 - 12 = 1$. Tel de eerste 8 termen op en kijk hoeveel dat scheelt met de tiende term: ook dat scheelt er maar eentje!: $55 - 54 = 1$. Zie je al een regelmaat? Zo niet, tel dan de eerste 13 termen op en trek dat af van de vijftiende; weer eentje verschil: $610 - 609 = 1$.

Denkertje 3

Druk deze regelmaat uit in x_i .

Ook de kwadraten van de fibonaccireeks zijn interessant:

1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, 441, 1156, 3025, 7921,

Tel de eerste twee termen op: $1 + 1 = 1$. tel de eerste drie termen op: $1 + 1 + 4 = 2 \cdot 3$ (6), tel de eerste vier termen op: $1 + 1 + 4 + 9 = 3 \cdot 5$.

Wat verwacht je dan voor de som van de eerste vijf kwadraten? $5 \cdot 8 = 40$.

Denkertje 4

Druk de gevonden regel uit in x_i .

Als je de kwadraten 'paarsgewijs' optelt krijg je het volgende:

$1 + 1 = 2$; $1 + 4 = 5$; $4 + 9 = 13$; $9 + 25 = 34$; Zie je de regelmaat?

Denkertje 5

Druk die regelmaat uit in x_i .

Tot slot kunnen we ook van de derde macht iets leuks zeggen.

$2^3 + 3^3 - 1^3 = 34$; $3^3 + 5^3 - 2^3 = 144$; $5^3 + 8^3 - 3^3 = 610$

Wat verwacht je voor de uitkomst van $8^3 + 13^3 - 5^3 = \dots\dots\dots$: 2584.

Denkertje 6

Druk deze regel uit in x_i .

°De afleesbaarheid van de lottoballetjes

Als op zondagavond rond de klok van acht de uitslag van de toto valt, wordt er een fraaie machine in actie gezet (fig. 1). De balletjes gaan rollen (fig. 2). Telkens wordt er dan een volgend balletje met een of ander getal erop in een plastic cilinder gedeponneerd, 6 in totaal en 1 voor het reservegetal.

Het apparaat is dermate ingenieus en aantrekkelijk van vorm, dat het alleen al een plezier is om het aan het werk te zien.

Waarschijnlijk ervaren de meeste kijkers meer de sensatie, of het misschien toch vanavond is dat ze zonder inspanning plotsklaps rijk worden. De waarschijnlijkheidsrekening voorspelt echter dat desillusie meestal de overhand neemt. Als meer Nederlanders deze tak van wiskunde zouden bestuderen, zou de totopot er beslist magerder bijstaan!

Wat ons fascineert, zijn de getallen op de balletjes. Volgens welk schema zijn die erop gezet? Hoeveel keer telkens? Waarom juist zoveel keer? Natuurlijk is er voor

een zekere regelmaat gekozen, maar welke?

Eerst moeten we ons realiseren wat er precies moet gebeuren; misschien is er dan wel een beter ontwerp te maken. Wie weet. Het vliegt allemaal nogal vlug voorbij; daarom hebben we maar wat foto's gemaakt. Dat is een truc om de tijd stil te zetten.

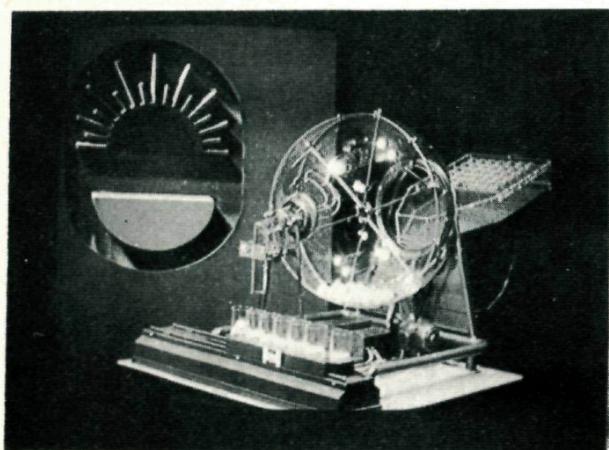


Fig. 1. De lottomachine.

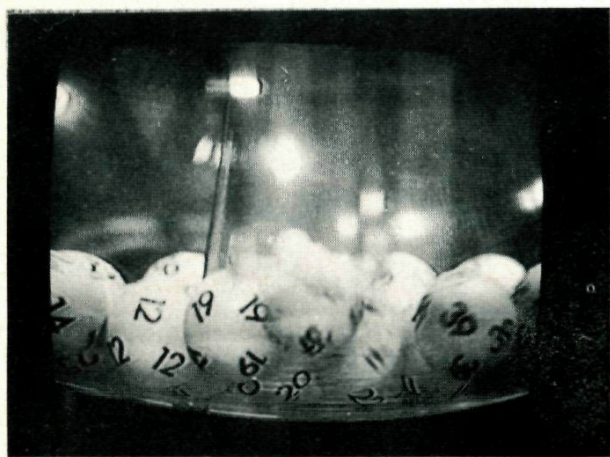


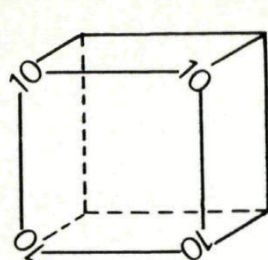
Fig. 2. De balletjes kunnen vreemd rollen.

Een halfregelmatig veelvlak

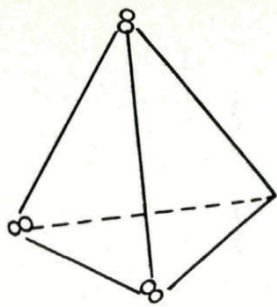
Iemand heeft ongetwijfeld van de NOS de opdracht gekregen: maak de becijfering zo dat de zaak er aantrekkelijk uitziet, maar vooral zo dat het aangegeven getal, hoe het balletje er ook bij komt te liggen, duidelijk afleesbaar is.

De ontwerper heeft uiteindelijk gekozen voor een compositie waarbij de getallen op de hoekpunten van een halfregelmatig veelvlak zijn geplaatst. De zijvlakken daarvan zijn vierkanten en driehoeken. Alle ribben hebben een gelijke lengte.

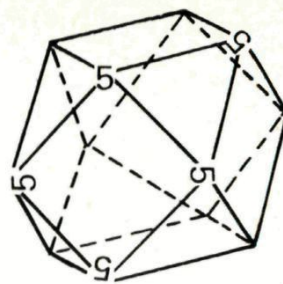
In fig. 3c staat dat veelvlak getekend. Het heeft 12 hoekpunten en daarom komen op alle lottoballetjes de getallen steeds in twaalfvoud voor. Je kunt dit veelvlak uit een kubus laten ontstaan (zie Denkertje). Waarom heeft men juist voor dat veelvlak gekozen? Het is begrijpelijk dat we, in verband met de regelmaat, voor zo'n regelmatig of halfregelmatig veelvlak kie-



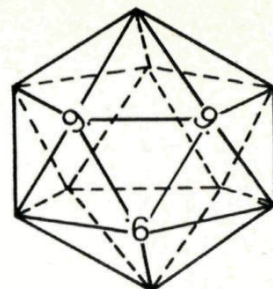
6-vlak



4-vlak



14-vlak



20-vlak

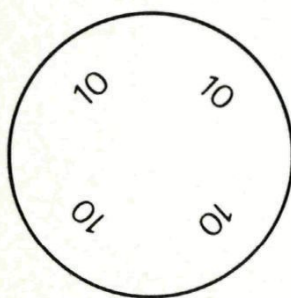
Fig. 3.

a.

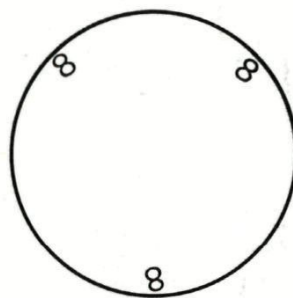
b.

c.

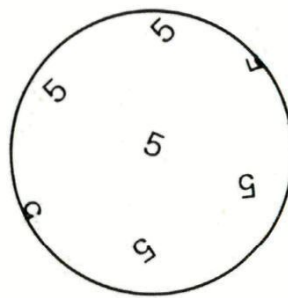
d.



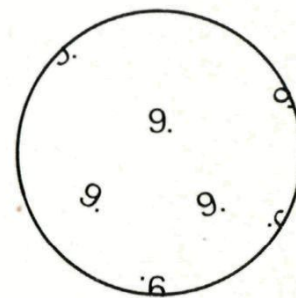
a. 8 cijfers



b. 4 cijfers



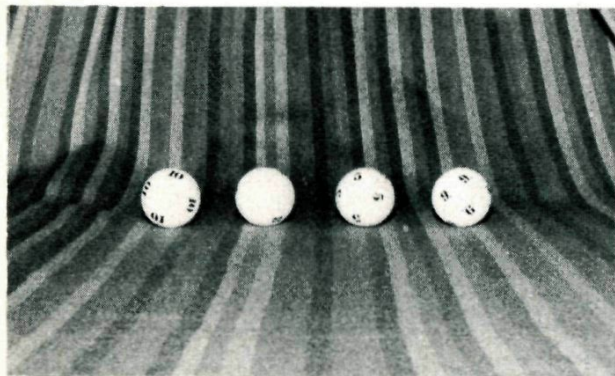
c. 12 cijfers



d. 12 cijfers

Fig. 4.

Ontwerpen voor becijfering van lottoballetjes.



zen. Dat is nog artistiek ook. Maar waarom juist dat 14-vlak?

We kunnen de getallen toch ook op de hoekpunten van een kubus zetten. De getallen zouden dan in vierkantvorm verschijnen (fig. 3a en 4a).

Dat lijkt meer voor de hand liggend.

De afleesbaarheid

Het heeft met de afleesbaarheid te maken. Stel dat we slechts één getal op zo'n

balletje zouden zetten en dat zou zich toevallig voor de kijker op de achterkant bevinden, dan zou hij thuis het getal niet kunnen aflezen.

Als we voor 2 getallen kiezen, zouden ze diametraal tegenover elkaar op het einde van een middellijn komen. Maar dan is het risico nog groot, dat het balletje zo rolt, dat deze middellijn evenwijdig met het scherm van het televisietoestel komt en dan zijn de getallen evenmin herkenbaar.

Als we voor 3 getallen kiezen, dan zetten we ze in de vorm van een gelijkzijdige driehoek, waarvan het vlak door het centrum van het balletje gaat. Maar het risico bestaat, dat ook nu nog geen van de 3 getallen herkenbaar wordt, als dit vlak weer evenwijdig met de opnamelens en dus met het tv-scherm komt.

Formule voor afleesbaarheid

De eerste serieuze oplossing lijkt een combinatie van 4 cijfers in de vorm van een regelmatig viervlak (fig. 3b). Nu komt er altijd tenminste één getal op de voorhelft van het balletje terecht, maar misschien toch nog zo dicht bij de 'horizon' dat de herkenbaarheid te wensen overlaat.

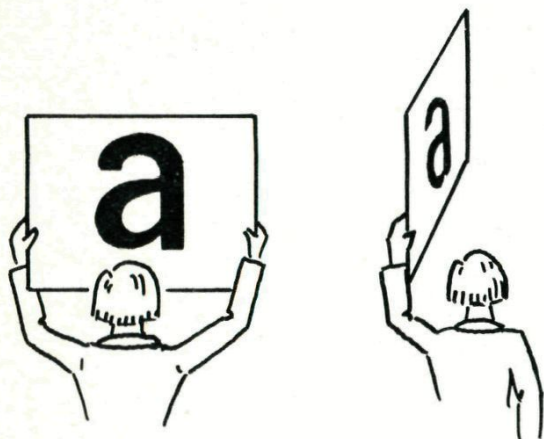


Fig. 5.

Het wordt tijd dat we een maat voor de leesbaarheid bedenken. Als we iets dat op een stuk papier staat goed willen lezen houden we dit evenwijdig met de driehoek ogen, kin. Als je oog of de camera-lens juist in het verlengde van het blad komt (fig. 5), dan wordt de tekst volledig onleesbaar. Bij andere standen worden de letters schijnbaar versmald en dat bemoeilijkt de herkenbaarheid aanzienlijk.

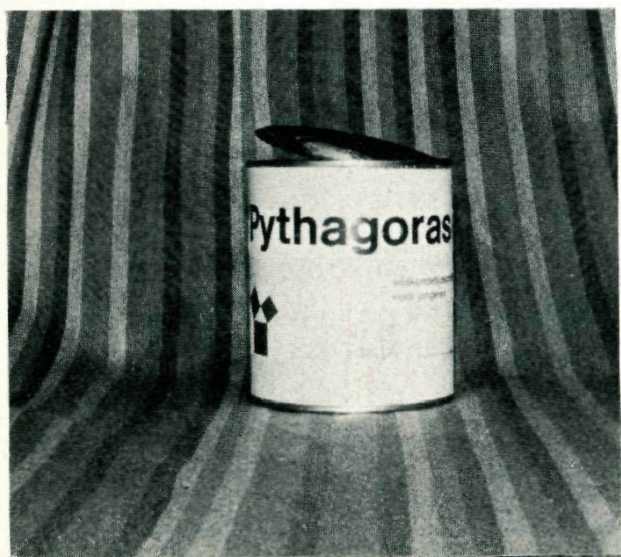


Fig. 6.

Hoe die versmalling verloopt is te zien in fig. 6. In het woord 'Pythagoras' staat tweemaal de letter 'a', eenmaal in het midden en eenmaal op het eind. De laatste letter lijkt smaller dan de eerste. Toch zijn beide letters even breed gedrukt. Maar we hebben de strook op een cilinder geplakt!

Voor de verhouding van schijnbare en werkelijke breedte kunnen we gemakkelijk een uitkomst opschrijven. Kijk in fig. 7.

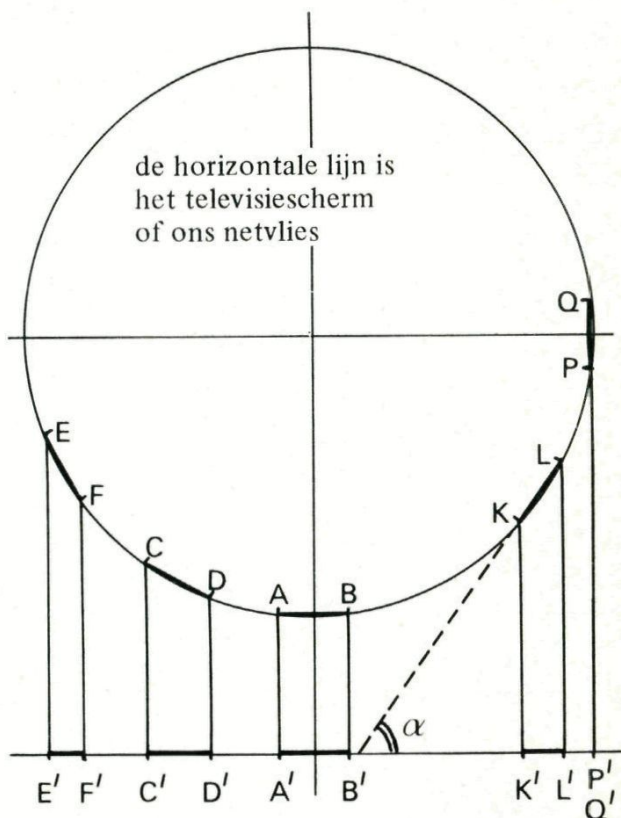


Fig. 7. Versmalling bij aflezing op een cilinder $K'L' = KL \cos \alpha$.

Een lijnstuk AB , midden voor, krijgen we op ons netvlies als $A'B'$ te zien. Het blijft even lang als het was. CD , die overigens even lang is, krijgen we verkort als $C'D'$ te zien. EF lijkt nog korter te worden en van PQ houden we helemaal niets meer over. Die wordt bij projectie nul lang en daarmee volkomen onherkenbaar. De verhouding van genoemde lijnstukken staat in de wiskunde bekend als de cosinus van de hoek die het betreffende lijnstuk met het projectiescherm maakt.

Zo kunnen we lijnstuk AB een leesbaarheid 1 geven en PQ een leesbaarheid 0. De waarden voor CD en EF liggen dan tussen 0 en 1. Zo hebben we dan een maat voor leesbaarheid gevonden en kunnen daarmee diverse ontwerpen testen.

Mogelijkheden

Laten we eens met elkaar vergelijken: het kubusmodel, het viervlak en het toto-14-vlak. Als we oppervlakkig kijken, lijkt dat ontwerp, waarbij het aantal cijfers hoger is, altijd gunstiger. Des te lager de kans dat de aanduiding onleesbaar wordt. Maar daar kunnen we natuurlijk niet onbeperkt

mee doorgaan. Eigenlijk willen we juist een ontwerp dat voldoende safe is en toch . . . weinig getallen heeft.

Als we het kubusmodel van fig. 4a op zijn kwaliteit willen testen, moeten we uitgaan van de ongunstigste stand van het balletje. Dat is die stand waarbij juist één van de 6 vierkanten evenwijdig met het scherm komt. In alle andere standen zal er minstens één getal zijn, waarvan het vlak meer evenwijdig met het scherm komt en dus duidelijker afleesbaar wordt. Onder het vlak van een getal verstaan we daarbij: het raakvlak ter plaatse aan het pingpongballetje.

°°° Berekening van de afleesbaarheid bij het kubusmodel

Denk door de hoekpunten van de kubus van fig. 3a een bol (het lottoballetje). Het raakvlak aan de bol in F loopt evenwijdig met het driehoeksvlak EBG (fig. 8). We stellen het tv-scherm evenwijdig met het vlak $ABFE$. We moeten nu de hoek bepalen tussen beide vlakken. Het is hoek GSF . In fig. 8 hebben we die hoek geconstrueerd. Je kunt hem ook berekenen. Vind je ook 55° ?

Maar dan geven we het kubusmodel een leesbaarheid $\cos 55^\circ$ of 0,58.

Bij het viervlak

We zullen de lezer niet verder vermoeien. Wie zin heeft kan het zelf op een soortgelijke manier in andere gevallen nachecken. We vonden bij een viervlak (fig. 3b en 4b) een overeenkomstige hoek van ruim 70° en een afleesbaarheid 0,33.

Hierbij hebben we het viervlak zo geplaatst dat één van de 4 driehoeken weer evenwijdig met tv-scherm of netvlies komt. In dat geval zien we zo'n driehoek ook echt als gelijkzijdig. Het viervlaksmodel is dus beslist slechter. De getallen dreigen te dicht bij de horizon te komen

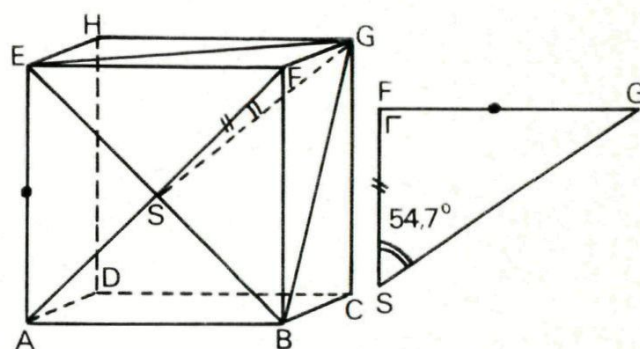


Fig. 8. De hoek in het geval van de ongunstigste stand van de kubus is 55° .

De afleesbaarheid wordt: $\cos 55^\circ = 0,58$.

en dat maakt het de kijker bar moeilijk zijn totoformulier goed te controleren.

Bij het lottoveelvlak

Het is niet moeilijk om nu zelf te onderzoeken dat de betreffende hoek bij het halfregelmatige 14-vlak van fig. 3c en 4c, dat we voor het gemak maar het lottoveelvlak zullen noemen, 45° wordt.

Deze hoek betreft dan weer het geval waarbij de cijfers het ongunstigst terecht komen. Dat is hier de stand waarbij een vierkant vóór komt.

Als een driehoek vóór komt is de stand al gunstiger.

De leesbaarheid wordt nu $\cos 45^\circ$ of 0,7 en dat is tot dusver de hoogste score!

Een ander ontwerp

Wie eenmaal de smaak te pakken heeft, gaat op verder onderzoek uit. Zouden we geen hogere afleesbaarheid kunnen bereiken . . . zonder het aantal getallen te vergroten? Teveel cijfers bevordert noch de artistieke afwerking, noch de duidelijkheid. Is er een regelmatig of half-regelmatig veelvlak met 12 hoekpunten en een hogere afleesbaarheidsgraad.

We hebben dat gevonden in het 20-vlak (fig. 3d en 4d). Eigenlijk is het al direct in te zien dat zo'n combinatie van louter driehoeken gunstiger zal uitpakken dan een combinatie van driehoeken en vierkanten.

Voor de hoek hebben we 37° berekend en een leesbaarheid 0,8 en dat is meer dan 0,7!

Vervolgens hebben we ijverig speurend in het politiedossier van de veelvlakken (totaal 18 stuks!) de exemplaren met 12 hoekpunten 'nagetrokken', maar we hebben er niet meer gevonden.

Waarom kiezen we toch voor het 14-vlak?

Wel, eerstens zou de NOS kunnen aanvoeren dat het 14-vlak met zijn verzameling van driehoeken en vierhoeken afwisselender en speelser is. Het twintigvlak lijkt er maar een saai ding bij. Het is alleen jammer dat woorden als speels, saai en artistiek wiskundig niet gedefinieerd zijn.

Maar er is nog iets.

We hebben ons tot dusver alleen maar bezig gehouden met de vraag: hoeveel cijfertjes plakken we op de balletjes en waar?

Maar er is nog een vraag: in welke stand? Kijk eens in fig. 9b naar de 'vierkantscombinatie', dan zien we dat de as van elk ge-

tal door het middelpunt van het vierkant gaat. We zeggen ook wel: radiaal gericht is. Bij de driehoekscombinatie van fig. 9a raakt de as van een getal juist aan de omgeschreven cirkel van de driehoek. Dat heet: tangentieel gericht.

Bij het twintigvlak krijgen we een dergelijke regelmaat helemaal niet klaar. Je mag het zelf proberen! De getallen komen er schots en scheef op te staan.

Is het lotto-ontwerp volmaakt?

Na alle lof voor het NOS-ontwerp, rest nog één vraag: wat deugt er eigenlijk niet aan?

Kijk eens naar de stand van de getallen '10' in fig. 9a. Bij twee ervan staat het cijfer 1 aan de buitenkant en bij één ervan juist aan de binnenkant.

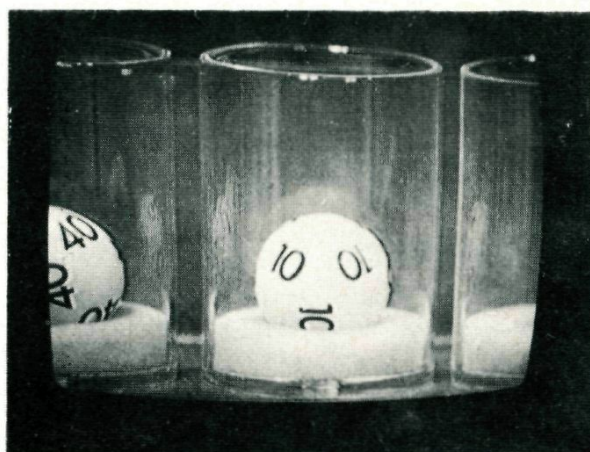
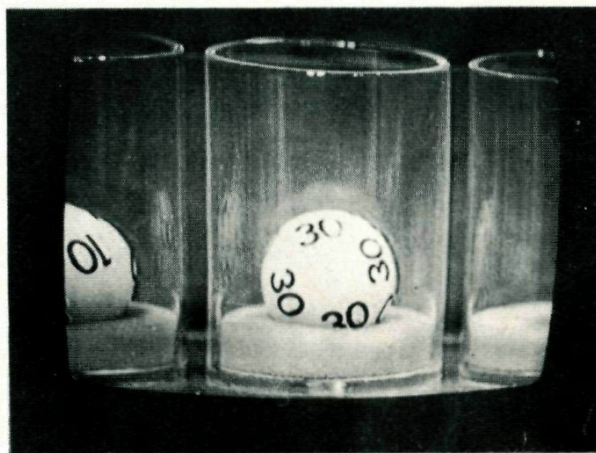


Fig. 9. a Driehoekscombinatie

b Vierkantscombinatie.



En kijk nu naar fig. 9b. Als we de vierhoek tegen de wijzers van de klok, dus in positieve richting, doorlopen, komen we drie keer het cijfer 3 eerst tegen en eenmaal de 0. Dat is de onvolmaaktheid van het ontwerp. We doen het er maar mee, maar de rotatiesymmetrie rammelt. Maar wij, noch de NOS, weten beter. Alleen het getal '8' heeft geen last van deze problemen. Dat getal heeft een symmetrieas, alle andere niet.

Rest ons nog om op te merken dat 6 en 9 nog aanleiding tot verwarring kunnen geven. Ze hebben dat opgelost door te schrijven: 6. en 9.

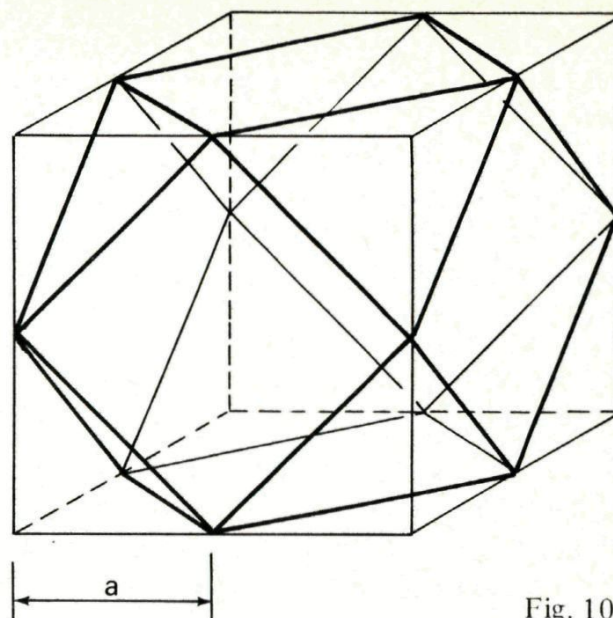


Fig. 10.

Denkertje 7

De lotto-pingpongballetjes hebben een diameter 38 mm. Men wil met een passer uitmeten hoever de getallen van elkaar moeten komen. Vat het 14-vlak op als ontstaan uit een kubus (fig. 10), waar diverse middens van ribben met elkaar verbonden zijn. Bereken nu die afstand.

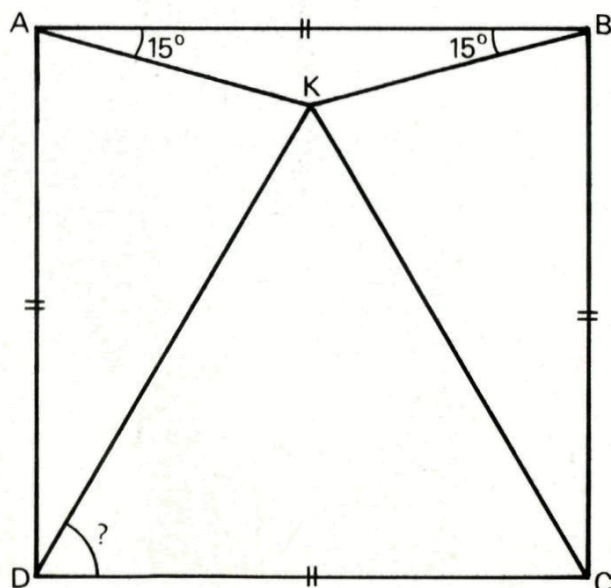
Denkertje 8

Dit is op het eerste gezicht een zeer simpel meetkundig probleempje; maar je bent knap als je het oplost!

Gegeven: Vierkant $ABCD$

$\angle BAK = \angle ABK = 15^\circ$.

Te berekenen: $\angle CDK$.



°Dit is logisch

Een cryptaritmetrische opgave van Ir. H. Nijon.

T	W	E	E
P	L	U	S
T	W	E	E
V	I	E	R

Het is niet moeilijk de 10 verschillende letters in dit schema te vervangen door passende cijfers (op de normale wijze, iedere letter steeds door eenzelfde cijfer en verschillende letters natuurlijk ook door verschillende cijfers), waardoor er een kloppende optelling ontstaat, waarin alle 10 verschillende cijfers voorkomen.

Na enig zoeken vind je wel een goede optelsom.

De opgave is thans echter een zeer speciale:

TWEE moet natuurlijk *even* zijn.

Bovendien eisen we dat de getallen voor PLUS en voor IS beide ondeelbaar (priem) zijn.

Er is slechts één oplossing die hieraan voldoet.

Kun je deze vinden? Oplossingen kun je vóór het verschijnen van no. 2 van de jaargang op een briefkaart sturen naar Ir. H. Nijon, 18 Van Brussellaan, Paramárido — Suriname.

°Scharnierende vierhoek

Om een kastdeur open en dicht te draaien, maken we meestal gebruik van een scharnierconstructie, waarbij de deur om één punt, de scharnierpen, draait (fig. 1).

We zien tegenwoordig vaak bij allerlei dure keukenkastjes een nieuw opmerkelijk scharnier in gebruik, waarbij draaiing om 4 punten plaats heeft. De werking daarvan is vanuit het oogpunt van transformaties bepaald fascinerend. Er treedt een combinatie op van een translatie en een rotatie.

Misschien zijn er bij jullie thuis in de keuken ook wel zulke scharniertjes te zien. Bekijk ze maar eens goed. Het ontwerp is heel bijzonder.

Draaien met 4 punten

Bij dergelijke kastjes wordt met opdek-

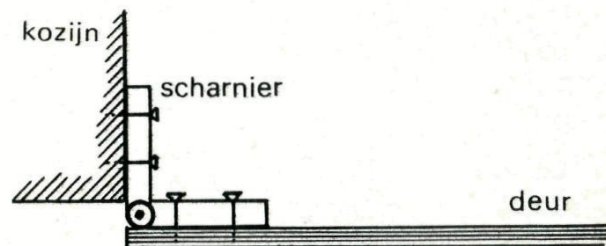
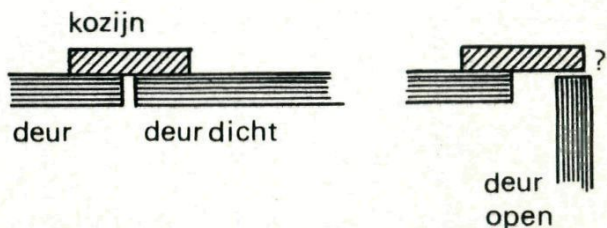


Fig. 1. Scharnieren om één punt.

Fig. 2. Draaiende opdekdeur.



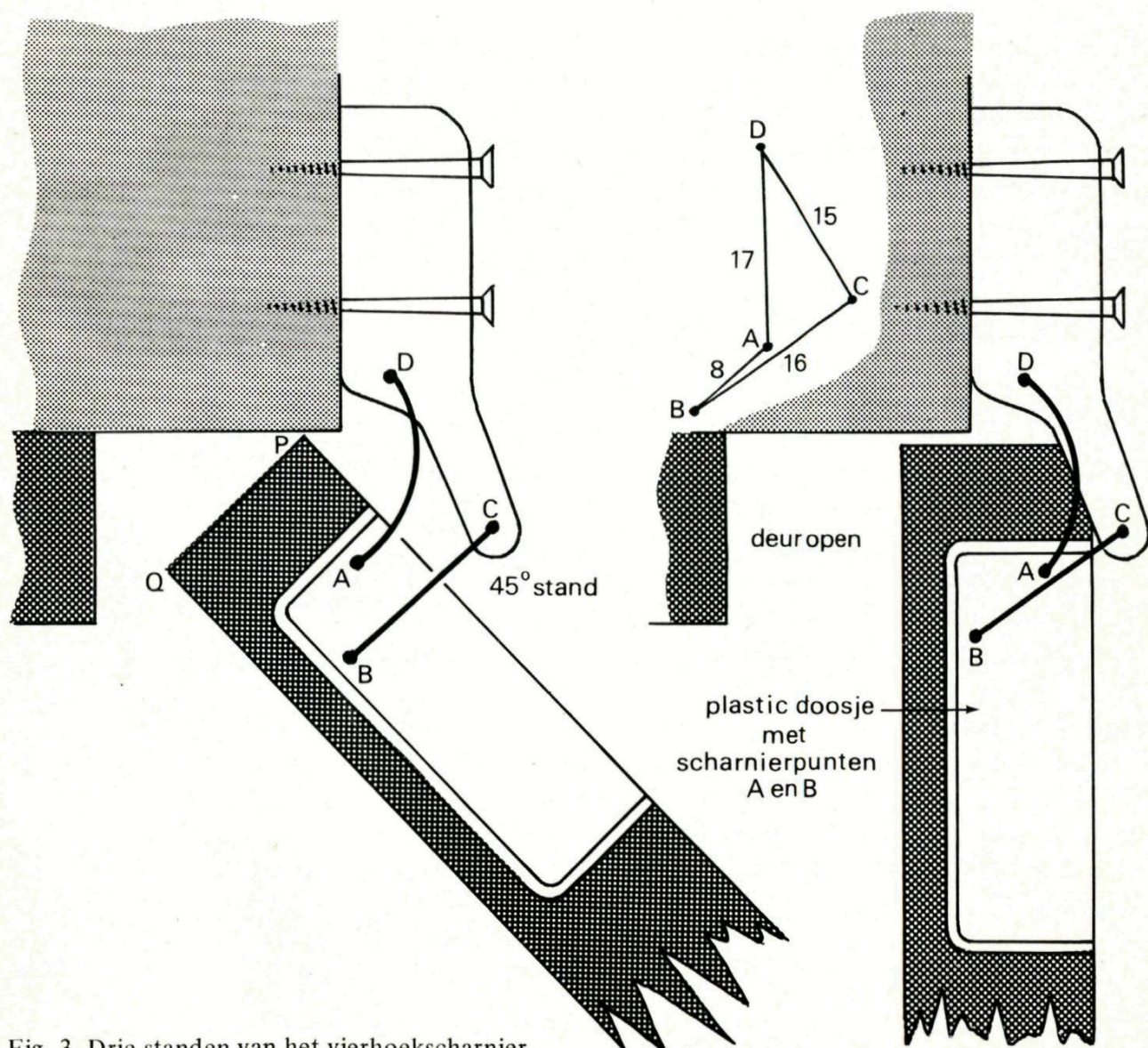
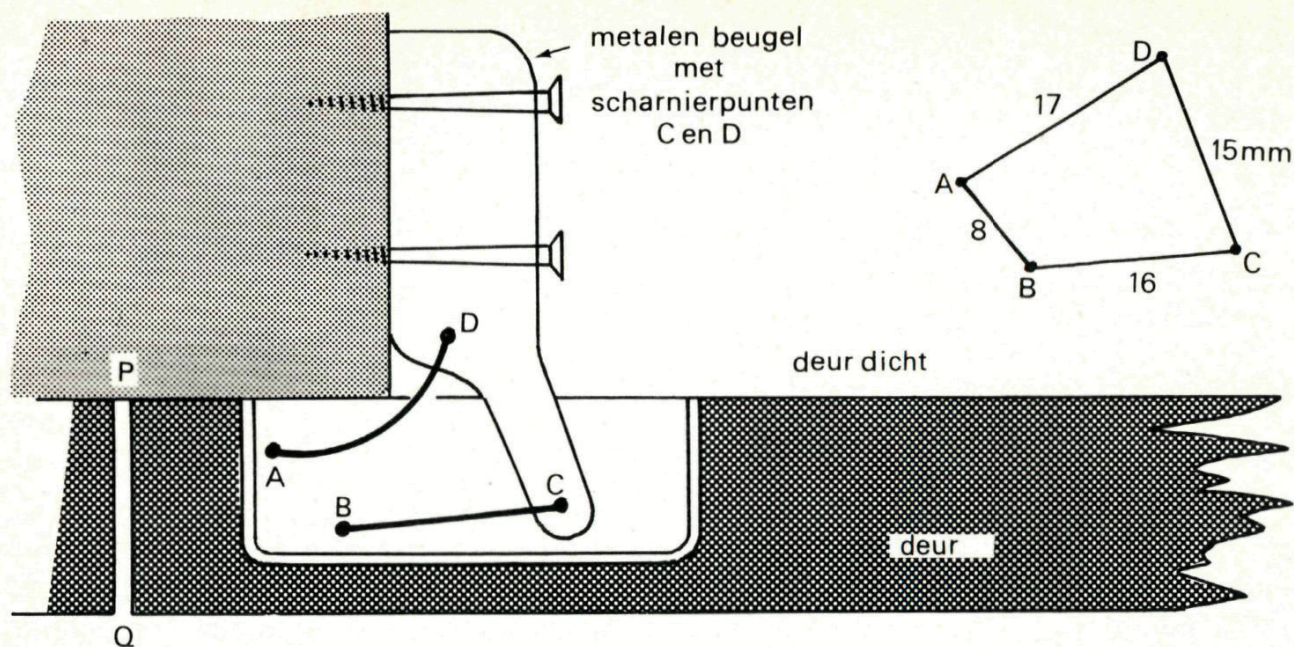


Fig. 3. Drie standen van het vierhoekscharnier.

deuren gewerkt (fig. 2). De deuren worden daarbij buiten tegen de voorkant van de kast gebouwd. Tevens wordt ervoor gezorgd dat 2 naburige deuren nauw tegen elkaar sluiten.

Als zo'n deur wordt opengedraaid, moet er enerzijds een translatie plaatshebben, langs de kastrand van het naburige deurtje af, anderzijds moet er nog 90° gedraaid worden. Dat is natuurlijk met één draaipunt onmogelijk te bereiken.

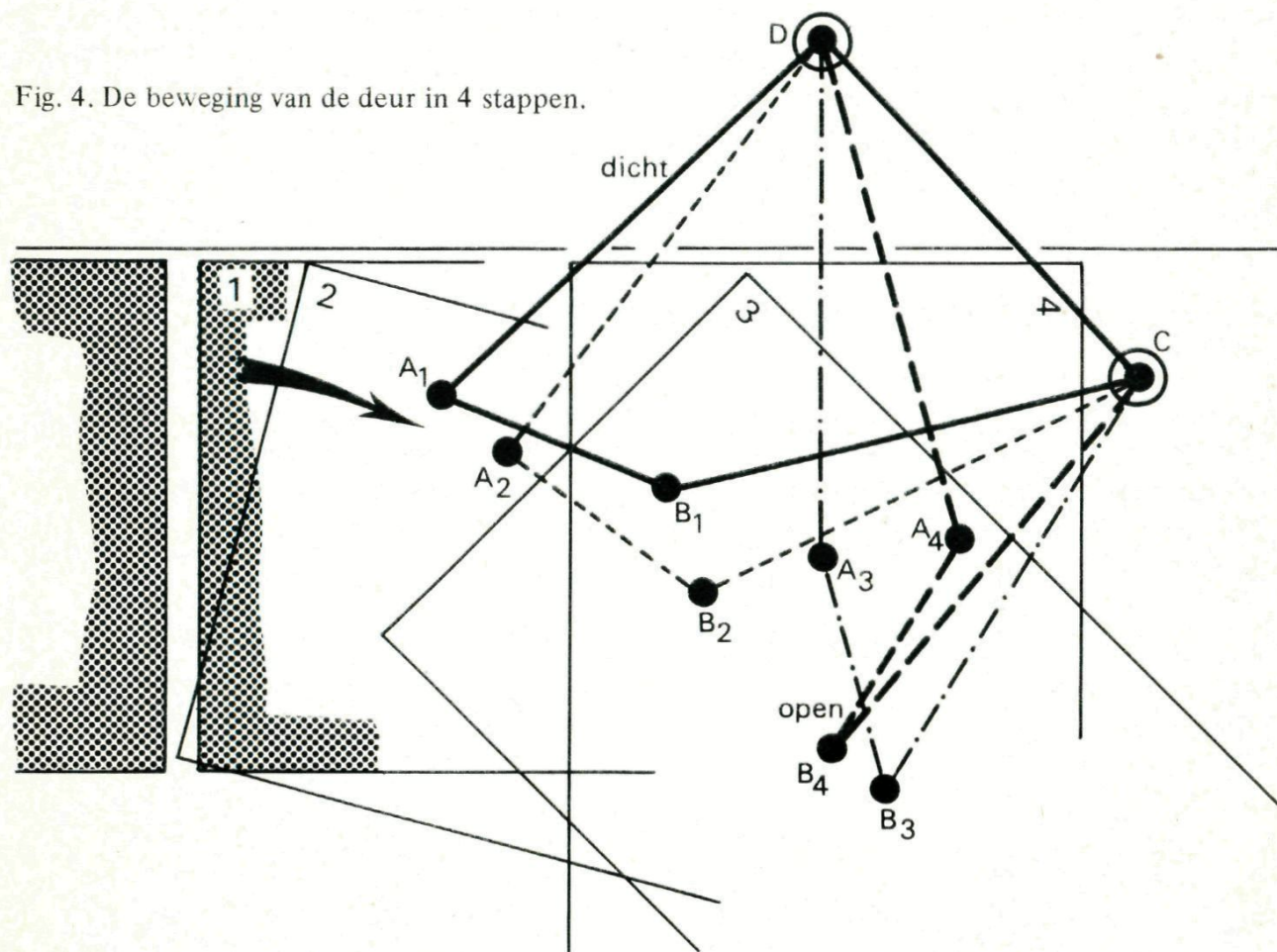
te krijgen in het draaiproces van deze vierhoek.

Onderzoek van de translatie en de rotatie

De punten C en D zijn vaste punten. Ze bevinden zich op het scharnierdeel dat vast aan het kozijn geschroefd zit. De punten A en B zijn draaipunten aan het deurtje.

Dat betekent dus: als het deurtje 90° open moet draaien, lijnstuk AB dat moet

Fig. 4. De beweging van de deur in 4 stappen.



Het blijkt wel te lukken met een vierhoek van draaipunten.

In fig. 3 zijn 3 standen van het vierhoeks-scharnier getekend, waarbij de deur eerst dicht, dan half open en ten slotte helemaal open is.

We hebben zo'n scharnier losgeschroefd en de maten van de vierhoek bepaald. $ABCD$ heeft lengten van zijden: 8, 16, 15 en 17 mm.

Vervolgens hebben we geprobeerd inzicht

doen. Dit blijkt bij bovengenoemde maten uitstekend te lukken. Vergelijk maar de standen van AB in fig. 3 waarbij de deur dicht en open is.

Nabouwen

Om de beweging van de deur beter voor te stellen, kunnen we vierhoek $ABCD$ vergroot met meccanostaafjes nabouwen. De punten C en D spijkeren we vast op een plankje en bevestigen aan het draaiende

lijnstuk AB een rechthoekig stuk karton, om het deurtje te verbeelden (fig. 4).

Als we de vierhoek nu draaien om het vaste lijnstuk CD , kunnen we beter zicht op de beweging krijgen.

Aanvankelijk glijdt de deur langs de voorkant van de kast iets af, om ruimte voor de draaiing te krijgen. Daarna draait de deur 90° , waarbij de smalle kant weer vrijwel passend tegen de voorzijde van de kast aankomt.

Arm BC zwaait dan wat heen en weer. AD draait constant door en AB klapt 90° om. Een hoekpunt van het deurtje beweegt langs een nagenoeg rechte lijn. Aanvankelijk gaat het iets af van de voor-

zijde van de kast om er ten slotte weer keurig tegen aan te komen.

Een meetkundig kunstwerk

Zonder enige twijfel heeft de ontwerper van dit scharnier urenlang met staafjes en stangetjes gespeeld, vierhoeken getest en uitgetekend om dit optimale effect te bereiken.

Waarschijnlijk is hij dan ook zuiver experimenteel tot dit ontwerp en de keuze van de maten van de vierhoek gekomen.

Of zijn er lezers die voorwaarden nader kunnen aangeven, waardoor dergelijke maten berekend zouden kunnen worden?

°°Redeneren en verzamelingen

Een wezenlijk bestanddeel van de wiskunde is redeneren d.w.z. logische gevolgtrekkingen maken uit een aantal vooronderstellingen. Vaak liggen de conclusies voor de hand, maar soms ook niet. In het navolgende voorbeeld van het trekken van een conclusie uit een aantal gegevens. Hierbij zullen we gebruik maken van de taal der verzamelingen. E.e.a. is afkomstig uit het boek *Symbolic Logic* van Lewis Carroll.

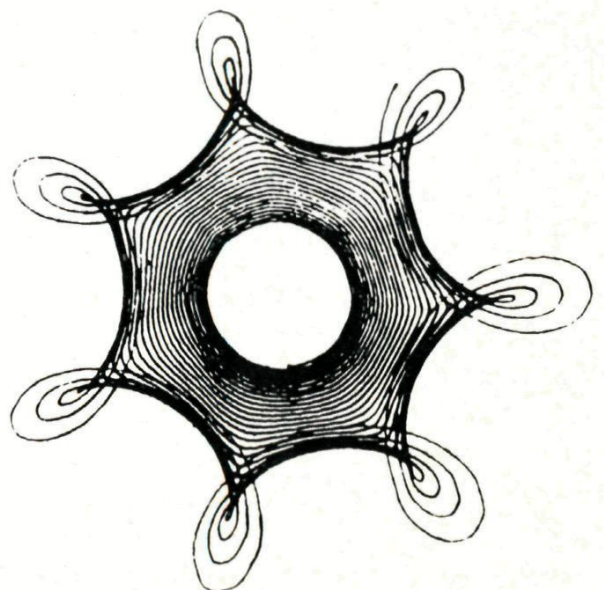
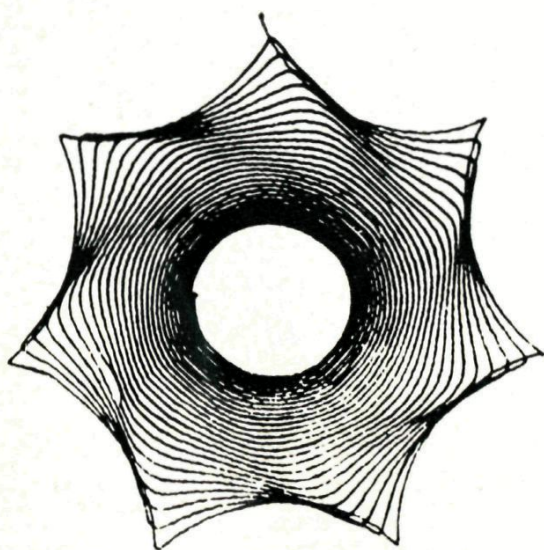
Welke conclusie kan men trekken uit de volgende vijf uitspraken:

1 Alle schrijvers die de menselijke natuur begrijpen zijn knap.

2 Men is geen echte dichter, als men de harten der mensen niet kan ontroeren.

3 Shakespeare schreef Hamlet.

4 Geen enkele schrijver die de menselijke



natuur niet begrijpt, kan de harten van de mensen ontroeren.

5 Slechts een echte dichter kon Hamlet schrijven.

Oplossing:

Voer de volgende verzamelingen in:

A : de verzameling van diegenen die de harten van de mensen kunnen ontroeren

B : de verzameling knappe schrijvers

C : de verzameling bestaande uit Shakespeare

D : de verzameling schrijvers, die echte dichters zijn

E : de verzameling schrijvers, die de menselijke natuur begrijpen

H : de verzameling bestaande uit de schrijver van Hamlet

U : (de universele verzameling) de verzameling van alle schrijvers

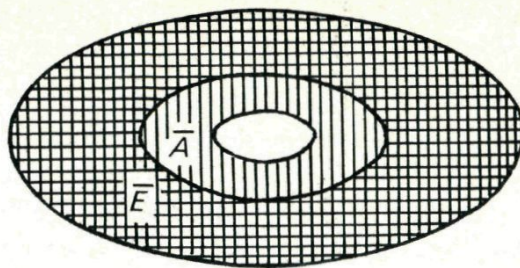
De beweringen 1 t.e.m. 5 kunnen we nu in verzamelingentaal als volgt vertalen:

1: $E \subset B$; 2: $D \subset A$; 3: $C = H$; 4: $\bar{E} \subset \bar{A}$;

5: $H \subset D$

(Met $\bar{V}$ bedoelen we de elementen die niet tot V behoren). I.p.v. 4 kunnen we ook schrijven $A \subset E$. Zie het Venn-diagram:

$\equiv: \bar{E}$. Dus $\bar{E} \subset \bar{A}$
 $|||: \bar{A}$ maar ook $A \subset E$.



Nu kunnen we 1 t.e.m. 4 als volgt in één keer opschrijven

$$C = H \subset D \subset A \subset E \subset B$$

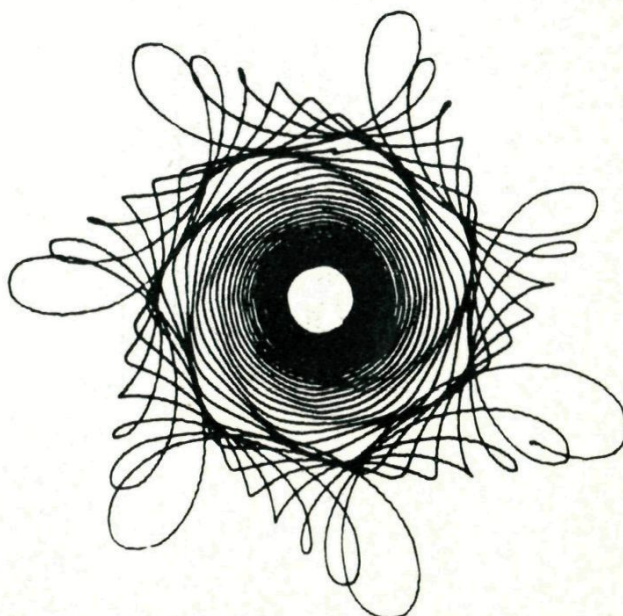
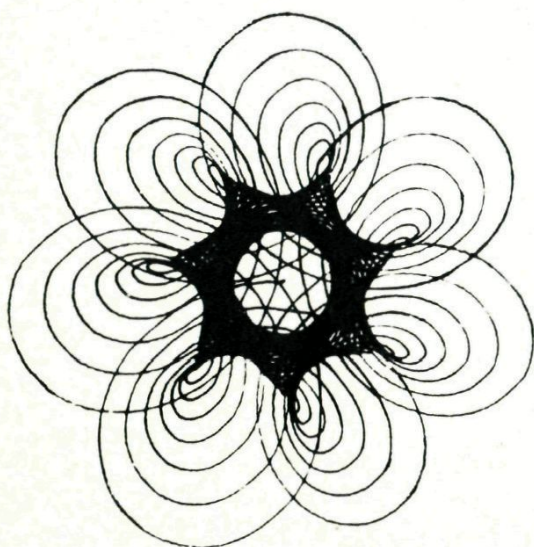
(Controleer maar met een Venn-diagram)

Dus geldt $C = H \subset B$ d.w.z.

Shakespeare was een knap schrijver

Probeer nu zelf eens op soortgelijke wijze uit de volgende tien beweringen een conclusie te trekken:

- 1 De enige dieren in dit huis zijn katten.
- 2 Elk dier kan een lievelingsdier zijn, dat er van houdt naar de maan te staren.
- 3 Als ik een hekel heb aan een dier, ga ik het uit de weg.
- 4 Geen enkel dier is carnivoor, tenzij het 's nachts rondsluip.
- 5 Geen enkele kat zal nalaten om muizen te doden.
- 6 Geen enkel dier komt naar mij toe, behalve de dieren die zich in dit huis bevinden.



- 7 Kangoeroe's zijn niet geschikt als lievelingsdieren.
- 8 Alleen carnivoren doden muizen.
- 9 Ik verafschuw dieren die niet naar me toe komen.
- 10 De dieren die 's nachts rondsluipen houden ervan om naar de maan te staren.

(Als oplossing kun je vinden: Ik mijd kangoeroe's).

Bron: Dan Pedoe, *De speelse wiskunde* (Aula).

°Ruitjesbiljart

H. J. Sliker

We hebben allemaal wel eens de biljart-tafel gezien met in elke hoek een gat en waarop gespeeld wordt met veel gekleurde ballen.

We gaan eens de afmetingen van zo'n tafel bekijken.

Schieten we de bal vanuit een hoekpunt onder een hoek van 45° dan is het natuurlijk interessant hoe de bal loopt en wanneer hij in een gaatje valt! (fig. 1).

In fig. 2 zien we drie tafels getekend. Op elk van deze tafels is de tweede 'tik' tegen de tafelwand precies in het gaatje. Al deze tafels hebben een lengte die tweemaal zo groot is als de breedte — de verhoudingen zijn:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$$

In fig. 3 gaan we nog eens onderzoeken of dat aantal tikken (totdat de bal in het

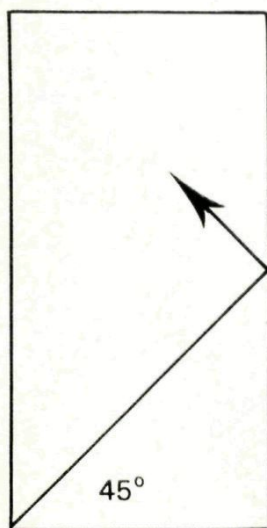


Fig. 1.

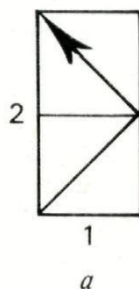
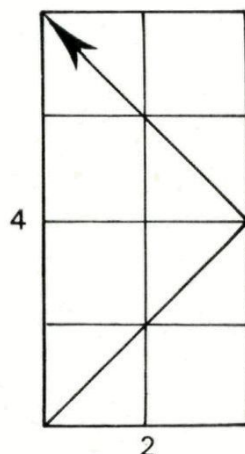
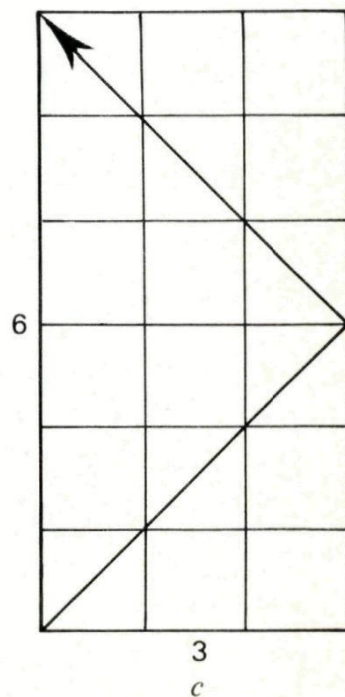


Fig. 2.



b



c

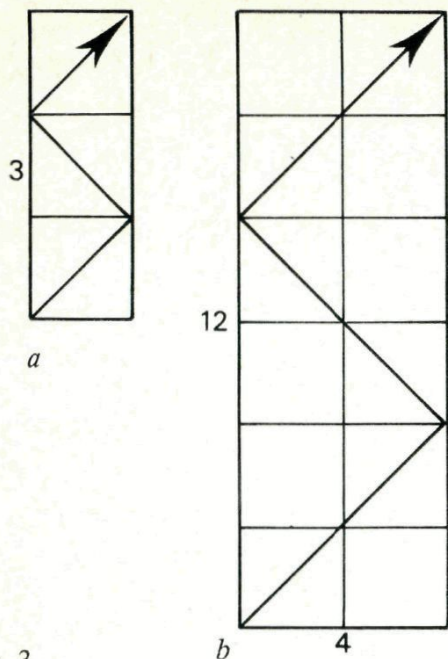


Fig. 3.

gaatje rolt) afhankelijk is van de verhouding van de lengten van de zijden van de tafel:

fig. 3a $3 : 1 = 3$ (klopt!)

fig. 3b $12 : 4 = 3$ (klopt!)

De grote vraag is natuurlijk: wat gebeurt er als die verhouding niet een natuurlijk getal (1, 2, 3, 4, ...) oplevert!!

In fig. 4a zien we dat de verhouding 4 : 3 is en het aantal tikken 6! Wat jammer – onze theorie valt in één klap in duigen. In fig. 4b is de verhouding 12 : 7 en het aantal tikken is 18! Weer een tegenvaller.

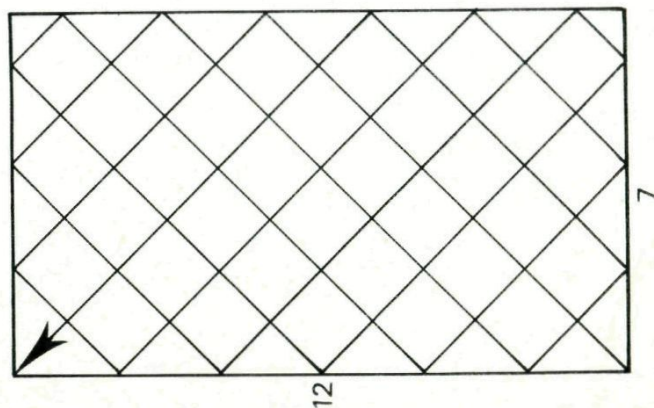
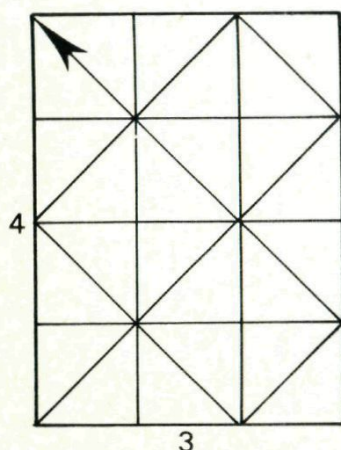


Fig. 4.

We zitten dus op een vals spoor.

Tóch moet het aantal tikken wel iets te maken hebben met de lengten van de zijden: als de verhouding 'netjes uitkomt' lukt onze theorie wél; wat doen we eigenlijk als we de verhouding uitrekenen: we delen de lengte en de breedte door het kleinste gemene veelvoud van deze twee getallen.

(Zie fig. 2.). Daar is overal de verhouding $2 : 1$ en het aantal tikken: $(2 + 1) - 1$.

In fig. 3 is de verhouding $3 : 1$ en het aantal tikken $(3 + 1) - 1$.

Proberen we nu onze nieuwe 'formule' in fig. 4a: de verhouding is $4 : 3$ en het aantal tikken: $(4 + 3) - 1 = 6$.

fig. 4b: de verhouding is $12 : 7$ het aantal tikken is $(12 + 7) - 1 = 18$.

Wat kunnen we nu verwachten voor een biljarttafel met afmetingen 96 bij 212? De G.G.D. van 96 en 212 is 4. De verhouding is dus $96 : 212 = 24 : 53$ dus het aantal tikken is $(24 + 53) - 1 = 76$.

Onze 'formule' berust natuurlijk op waarnemingen; er zat geen enkel bewijs aan vast.

Zou jij dat kunnen?

Literatuur: A. Jacobs, *A human Endeavour*.

In *Pythagoras* nr. 4 van vorig jaar stond een stukje over de 'zesbladige bloem' die je kunt tekenen met een passer met een vaste openingshoek. Er wordt daarin op twee manieren bewezen dat bij het construeren van de bloem de zesde cirkelboog inderdaad weer in het uitgangspunt terugkeert (fig. 1).

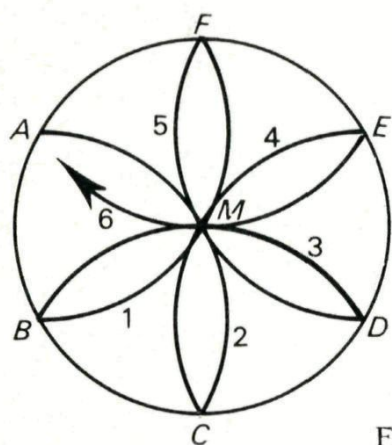


Fig. 1.

In beide bewijzen worden de punten M , A , B , C , D , E , F verbonden door rechte lijnstukken die allemaal even lang zijn, omdat we ze zo met de passer hebben geconstrueerd (fig. 2). Alleen van AF weten we niet of het de goede lengte heeft. Er moet immers juist *bewezen* worden dat cirkelboog 6 weer in A terugkeert.

Het eerste bewijs gebruikt dat de som van de hoeken van elke driehoek gelijk is aan een gestrekte hoek, d.w.z. 180° . Zijn van een driehoek alle zijden gelijk,

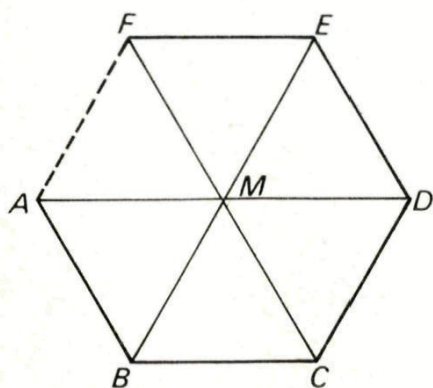


Fig. 2.

dan zijn ook alle hoeken gelijk. Drie van zulke driehoeken bij één punt M tegen elkaar gelegd geven dus een gestrekte hoek, en twee maal zo'n drietal vult daarom de ruimte rond M precies op.

Bij het tweede bewijs komen we op een andere manier tot de conclusie dat drie gelijke gelijkzijdige driehoeken die aan één punt tegen elkaar liggen, precies een gestrekte hoek vormen. We leggen hiertoe één zo'n driehoek ABM langs een lijn l (fig. 3), en verschuiven hem langs l tot de positie FME . Bij dit verschuiven is A naar F verplaatst.

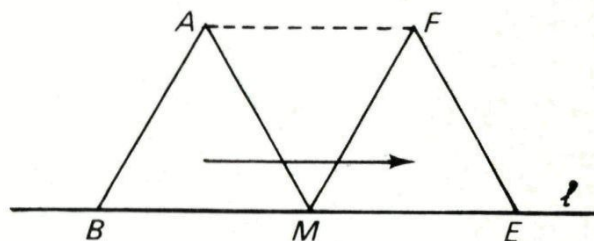


Fig. 3.

Daarbij heeft A een afstand afgelegd die natuurlijk gelijk is aan het stuk dat B heeft overbrugd om in M te komen, dus $AF = BM$. Driehoek AFM is daarom net zo'n gelijkzijdige driehoek als ABM en FME . Drie gelijkzijdige driehoeken die bij één punt tegen elkaar liggen, vormen dus inderdaad een gestrekte hoek.

Ik weet niet hoe het jullie vergaat bij het lezen van dit soort bewijzen, maar het zou me niets verbazen wanneer je zegt, waarom maak je je zo druk om iets dat vanzelf spreekt. De dingen die je

aanvoert om je bewijs te geven, zijn veel ingewikkelder dan hetgeen je bewijzen wilt. Iedereen weet toch dat er zes gelijkzijdige driehoeken om één punt passen. Heb je soms nog nooit een halmabord gezien, of een tegelvloer die met gelijkzijdige driehoeken gevuld is?

Zo dadelijk wil je nog gaan bewijzen dat er ook vier vierkanten om één punt passen!

Natuurlijk heb je volkomen gelijk wanneer je zo redeneert. Waarom zou je iets willen bewijzen dat zo vanzelfsprekend is?

De hier gegeven bewijzen van het feit dat de zesbladige bloem zich sluit, kunnen ons echter op het spoor brengen van een aantal andere zaken die lang zo vanzelfsprekend niet zijn.

Hiertoe gaan we de omstandigheden bij de constructie van de bloem een klein beetje veranderen. Let wel, we doen dit alleen in gedachten. Je moet je namelijk indenken dat we gaan werken met een gigantische passer. Het moet er een zijn met een afstand tussen zijn punten van, laten we zeggen, die tussen Amsterdam en Parijs. Voor de eenvoud zullen we maar net doen alsof onze aarde een volkomen zuivere gladde bol is, waar we met deze reuzenpasser op kunnen tekenen.

We construeren weer zo'n zesbladige bloem. Zou hij zich sluiten? Gelukkig hoeven we dit experiment niet echt uit te voeren om het antwoord te weten te komen.

We kunnen het op een globe met een normale passer nabootsen. En wat blijkt? De bloem sluit zich niet! De zesde cirkelboog komt voorbij het punt *A* uit!

Onmiddellijk, of misschien na enig nadenken, zul je zeggen: Ja, maar dat komt omdat de globe niet vlak is! Je hebt alweer volkomen gelijk, maar hoe zit dat dan precies? Waarom speelt het bol zijn van de globe zo'n belangrijke rol?

We zullen dit duidelijk maken aan de

hand van de twee bewijzen van het sluiten van de bloem in het 'platte' vlak. Daarbij verbonden we de punten door rechte lijnen.

Wat is op de aardbol, of op de globe, een 'rechte lijn' tussen twee punten? Het ligt voor de hand hiervoor de *kortste verbindingslijn* te nemen, dat wil zeggen de lijn die je krijgt door tussen die twee punten een touwtje strak over de bol te spannen. Je kunt laten zien dat zo'n kortste verbindingslijn op een bol altijd loopt langs een *grote cirkel*, dat wil zeggen een cirkel die optreedt als snijfiguur van de bol met een vlak *door het middelpunt van de bol*. Op de globe zijn bijvoorbeeld de meridianen zulke cirkels. De breedtecirkels, met uitzondering van de evenaar, zijn echter *geen* grote cirkels.

We gaan dus op de bol een gelijkzijdige driehoek vormen van drie gelijke grote cirkelbogen. Passen er zes van zulke driehoeken om één punt? Klaarblijkelijk niet! Laten we eerst het tweede bewijs volgen. Leg zo'n boldriehoek *ABM* langs een 'rechte lijn', d.w.z. langs een grote cirkel, bijvoorbeeld de evenaar. Verschuif hem langs deze lijn zo dat *B* in *M* komt. Wat doet *A*? *A* loopt langs een *breedtecirkel*, en dit is geen 'rechte lijn'. Bovendien is de afstand die *A* aflegt *korter* dan de afstand die *B* aflegt! Zouden we driehoek *ABM* zo groot hebben gemaakt dat *A* in de noordpool ligt, dan zou *A* zelfs helemaal niet van plaats veranderd zijn! We zien dus dat parallelverschuiving op de bol heel andere eigenschappen heeft

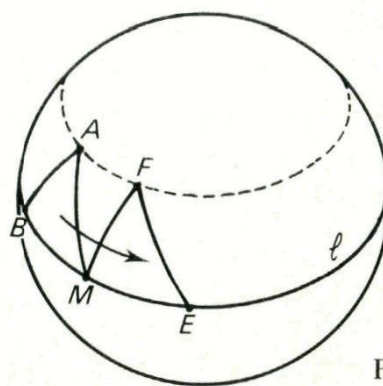


Fig. 4.

dan in het platte vlak, en duidelijk blijkt ook dat er in het stuk *AFM* te weinig plaats is voor een derde gelijkzijdige driehoek.

Hoe zit het met het eerste bewijs? Ook op de bol zijn alle hoeken van elke gelijkzijdige driehoek gelijk. Maar de som van de hoeken van een driehoek is op de bol geen 180° ! Kijk maar eens naar een driehoek gevormd door een stuk evenaar en twee meridianen die elkaar onder een hoek van, bijvoorbeeld, 20° snijden. De meridianen snijden de evenaar loodrecht, dus de som van de hoeken van deze driehoek is $20^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 200^\circ$!

We zullen laten zien dat de som van de hoeken van *elke* boldriehoek groter is dan 180° , en een precieze uitdrukking voor deze som afleiden. Het zal blijken dat er een verband is tussen de hoeken-som van een driehoek en zijn *oppervlakte*.

° De oppervlakte van een boldriehoek

Stel dat de totale oppervlakte van een vast gekozen globe T is. Trekken we alle 360 meridianen van noordpool naar zuidpool op deze globe, dan wordt daarvoor het boloppervlak in 360 gelijke partjes verdeeld, allemaal met een oppervlakte van $\frac{1}{360} T$, en een 'tophoek' van één graad. Een partje met een tophoek van x graden heeft dus een oppervlakte van $\frac{x}{360} T$. Dit geldt natuurlijk ook voor alle andere 'boltweehoeken' gevormd door twee halve grote cirkels die antipodale punten verbinden, en elkaar onder een hoek van x graden snijden.

Worden de grote cirkels helemaal doorgetrokken dan verdelen ze de bol in vier stukken: twee met een oppervlakte van $\frac{x}{360} T$, en twee met een oppervlakte van $\frac{180-x}{360} T$.

Een boldriehoek ABC wordt gevormd door drie bogen van grote cirkels. Trekken we die cirkels door, dan wordt de

bol door die drie grote cirkels a , b en c in 8 stukken verdeeld. De cirkels snijden elkaar nogmaals in drie punten A' , B' , C' , diametraal tegenover A , B en C . A' , B' en C' vormen een tweede boldriehoek, die net zo groot is als ABC , want ABC en $A'B'C'$ zijn puntsymmetrisch ten opzichte van het middelpunt van de bol. Stel dat de hoeken van ABC x , y en z graden groot zijn.

De oppervlakte van elk van de twee tweehoeken ingesloten tussen de grote cirkels b en c met tophoek x is $\frac{x}{360} T$, die tussen a en c met tophoek y is $\frac{y}{360} T$, en die tussen a en b met tophoek z is $\frac{z}{360} T$. De totale oppervlakte van die zes tweehoeken is dus $\frac{2x + 2y + 2z}{360} T$.

Maar deze 6 tweehoeken bedekken samen ook elk van de acht stukken van de bol,

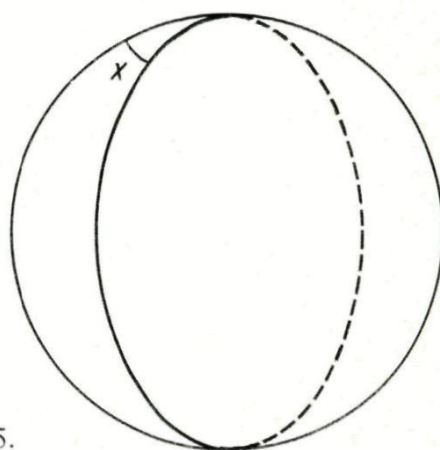


Fig. 5.

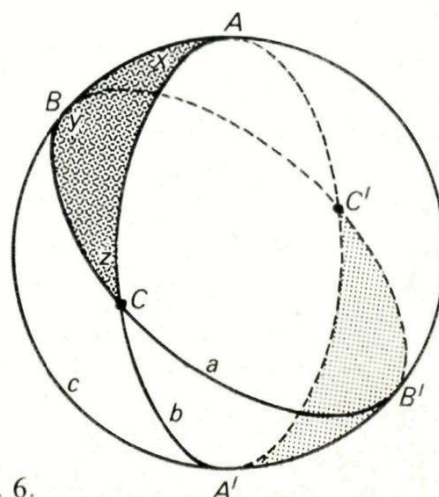


Fig. 6.

en wel ABC en $A'B'C'$ elk driemaal, en de andere zes stukken elk éénmaal. Heeft ABC een oppervlakte O (en $A'B'C'$ dus ook) dan geldt blijkbaar dat de totale oppervlakte van de 6 tweehoeken ook gelijk is aan de gehele oppervlakte T van de bol plus 4 O . Er geldt dus

$$\frac{2x + 2y + 2z}{360} T = T + 4 O.$$

We werken dit om tot

$$\frac{720}{T} \cdot O = x + y + z - 180.$$

Hieruit concluderen we:

1 De hoekensom $x + y + z$ van *elke* boldriehoek is *groter* dan 180° (want O en T zijn altijd positief).

2 Op de constante factor $\frac{720}{T}$ na is het bedrag $(x + y + z) - 180$ gelijk aan de oppervlakte van de boldriehoek. We noemen dit verschil $(x + y + z) - 180$ het *sferisch exces* (vertaald: het bolle overschot) van de boldriehoek.

Zouden we onze hoeken niet in graden, maar in radialen gemeten hebben ($180^\circ = \pi$ radialen), dan zou de formule luiden:

$$\frac{4\pi}{T} O = x + y + z - \pi$$

Het is bekend dat T voor een bol met straal R gelijk is aan $4\pi R^2$. Hieruit volgt dus:

$$O = (x + y + z - \pi) R^2.$$

Op een bol met straal 1 is het sferisch exces 1 dus precies gelijk aan de oppervlakte.

Aan de formule voor het sferisch exces kunnen we nog iets zien, en daarmee keren we naar ons uitgangspunt terug, namelijk dat het sferisch exces voor *hele kleine driehoeken* vrijwel nul is. Zulke boldriehoeken hebben een hoekensom die nauwelijks meer is dan 180° . De driehoeken waarmee we in het dagelijks leven werken, zijn zo klein in vergelijking met de totale oppervlakte van de aardbol, dat

we in de praktijk rustig kunnen doen alsof de driehoeken die we op een horizontaal stuk land tekenen een hoekensom van 180° hebben, en de zesbladige bloemen die we daar construeren zich netjes sluiten.

Ten slotte nog een opmerking. Op de bol heeft elke driehoek gevormd door kortste verbindingslijnen een hoekensom groter dan 180° .

Er zijn ook oppervlakken waarop de som van de hoeken van elke driehoek van kortste verbindingslijnen *kleiner* is dan 180° .

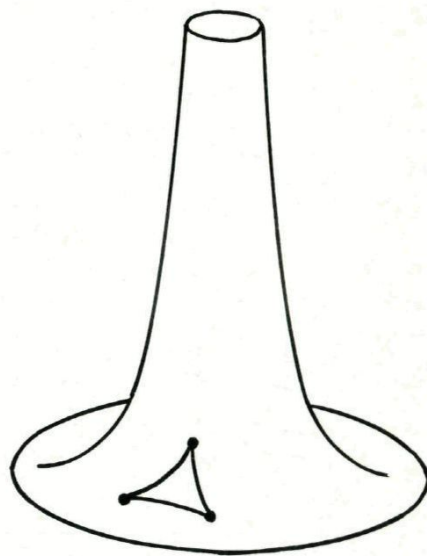
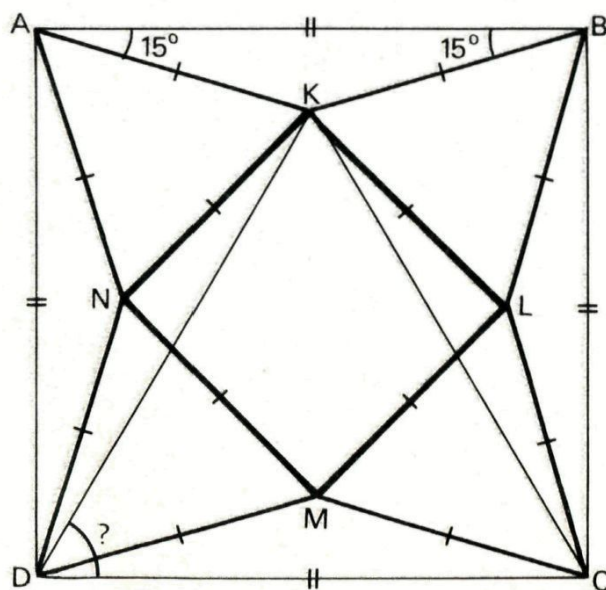


Fig. 7.

Een voorbeeld hiervan is het 'trompetachtige' oppervlak dat je hierboven ziet. Er zijn meetkundige stellingen die op de bol, in het platte vlak en ook op de 'trompet' gelden. Een voorbeeld is de stelling dat elke gelijkzijdige driehoek ook gelijke hoeken heeft. Er zijn echter ook stellingen uit de meetkunde van het platte vlak die niet op de bol of de 'trompet' gelden. Alleen in het platte vlak is de som van de hoeken van elke driehoek 180° . Alleen in het platte vlak geldt dat bij parallelverschuiving van elke driehoek langs elke kortste verbindingslijn ('rechte lijn') het vrije hoekpunt weer een 'rechte lijn' beschrijft. En alleen in het platte vlak is het ook zo, dat elke 'zesbladige bloem' zich sluit.

Oplossing van de denkertjes

1. De inhoud van de ring is $I = 2 \pi \cdot 9 \cdot \pi \cdot 4 \text{ mm}^3 \approx 720 \text{ mm}^3 = 0,72 \text{ cm}^3$.
2. $(i \geq 2) x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$.
3. Noem $V = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ (fibonaccireeks) dan geldt voor $p \in V$, $\sum_{i=1}^p x_i = x_{p+2} - 1$.
4. $\sum_{i=1}^n x_i^2 = x_n \cdot x_{n+1}$.
5. $x_i^2 + x_{i+1}^2 = x_{2i+1}$.
6. $x_i^3 + x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3 = x_{3i+1} \ (i \geq 2)$.
7. Stel de halve ribbe van de kubus a , dan wordt een vlaksdiaagonaal $2a\sqrt{2}$ en een lichaamsdiaagonaal $2a\sqrt{3}$. De straal van de omgeschreven bol wordt daar dan de helft van: $R = a\sqrt{3}$.
De zijden van het 14-vlak krijgen lengten gelijk aan de helft van een vlaksdiaagonaal ofwel $a\sqrt{2}$.
Hieruit volgt dat de zijde zich verhoudt tot de straal als $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. Omdat het ping-pongballetje een straal 19 mm heeft, worden de afstanden tussen de getallen $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 19$ of 15,5 mm.
8. Neem $\angle DAN = \angle ADN = 15^\circ \Rightarrow \angle KAN = 90^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 60^\circ$.
 $\triangle ABK \cong \triangle ADN \Rightarrow AK = BK = AN = DN$.
 $\angle KAN = 60^\circ$
 $AN = AK \quad \} \Rightarrow \angle ANK = 60^\circ$
 $\angle AND = 150^\circ \Rightarrow \angle DNK = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$.
 $\angle DNK = 150^\circ$
 $DN = NK \quad \} \Rightarrow \angle KDN = 15^\circ$
 $\Rightarrow \angle ADK = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$
 $\Rightarrow \angle CDK = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
Opmerking: $\square KLMN$ is een vierkant.





Inhoud

Hoeveel weegt die klok?	1
Het verschil van een getal en zijn omgedraaide	4
Fibonacci's konijnenprobleem	5
De afleesbaarheid van de lottoballetjes	7
Dit is logisch	13
Scharnierende vierhoek	13
Redeneren en verzamelingen	16
Ruitjesbiljart	18
De zesbladige bloem	20
Oplossing van de denkertjes	24

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

W. Kleijne, Apeldoorn.

Ir. H. Mulder, Nieuw Ginniken

G.A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Stationsstraat 114, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,— per jaargang. Voor anderen f 11,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

