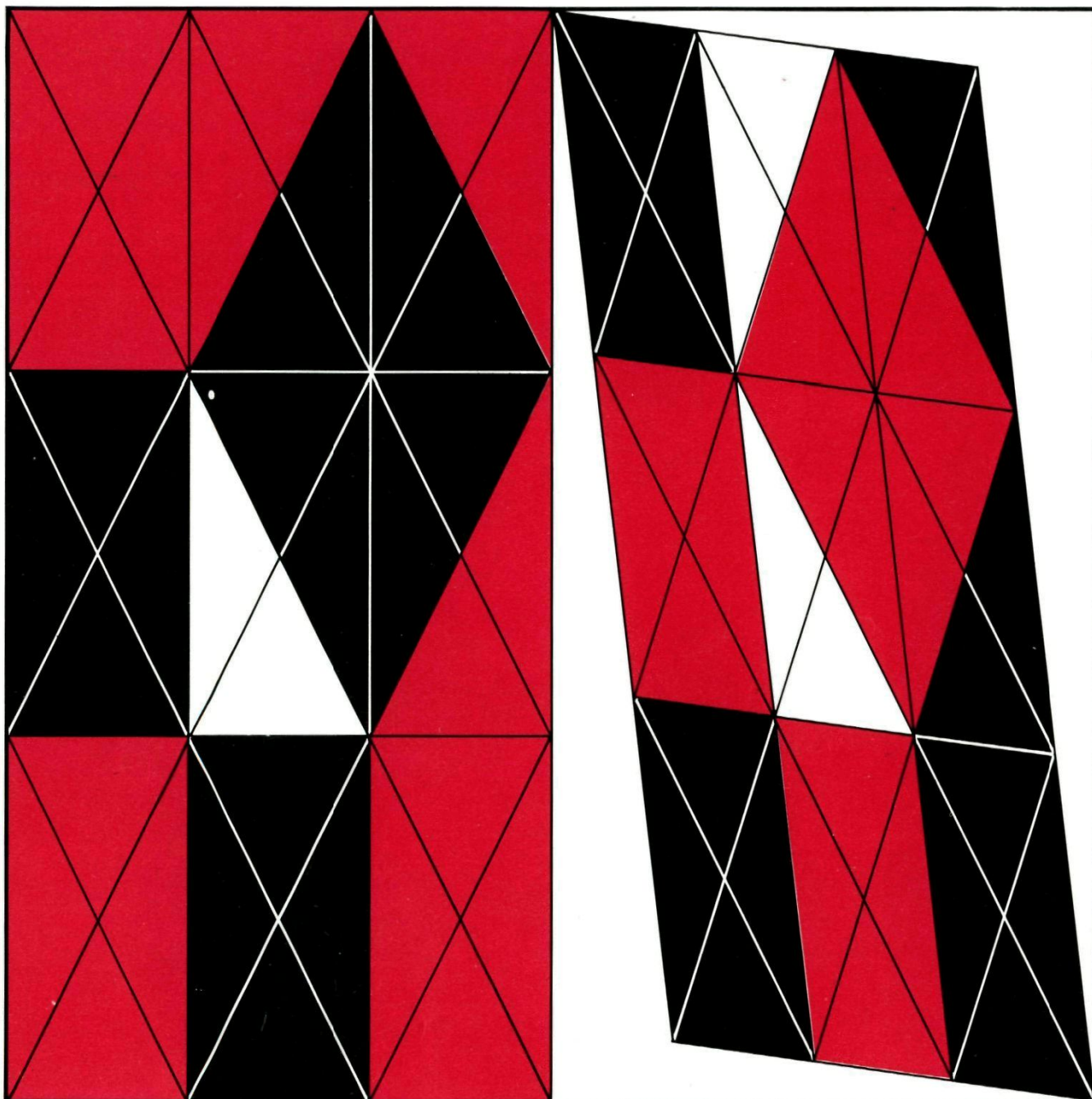


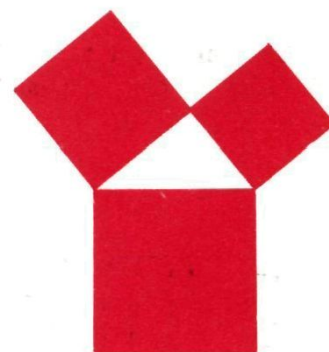


2

jaargang 18 / november 1978

**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



De voetbal staat over de hele wereld in de belangstelling. In het artikel *Een bol beleggen met cirkels* zullen we die belangstelling naar de wiskundige kant richten.

BIJ DE FIGUUR OP DE OMSLAG:

Een tegelvloertje bestaat uit 9×9 vierkanten, en elk vierkant is gelegd van vier gelijkbenig rechthoekige driehoeken. Met zo'n tegelvloertje kun je gemakkelijk de stelling van Pythagoras demonstreren. De linkse figuur op de omslag is een deformatie, of zo je wilt een bepaalde afbeelding van het beschreven tegelvloertje. Hoe is dat hier gedaan? Welke overeenkomsten zijn er tussen het tegelvloertje en de linkse omslagtekening?

In de rechter figuur is de deformatie nog verder voortgezet; hoe? Welke overeenkomsten vertoont de afbeelding nog met het origineel? Heb je nog andere ideeën voor transformaties van het origineel?

Entierfuncties; grafieken als trappen en zaagtanden

Als we de grafieken van functies tekenen, beelden we daarmee uit hoe aan waarden van x , volgens een zeker voorschrift, waarden worden toegevoegd.

De eerste waarden noemen we originelen, de tweede beelden.

Zo'n grafiek kan een rechte door de oorsprong zijn, zoals bij $f: x \rightarrow x$. De hellingshoek met de positieve x -as is daar 45° en de richtingscoëfficiënt (rico) hier 1. In het geval van $f: x \rightarrow -2x + 4$ is dat weer een andere rechte, niet door de oorsprong met rico = -2.

Zo zijn er ook kwadratische functies, uitgebeeld door parabolen. Het aantal functies is eindeloos en evenzo hun grafieken.

Onder deze neemt de entierfunctie, aangeduid met E , een bijzondere plaats in. 'Entier' komt van het Frans en betekent 'geheel'.

Wat de bedoeling is, staat te zien in fig. 1.

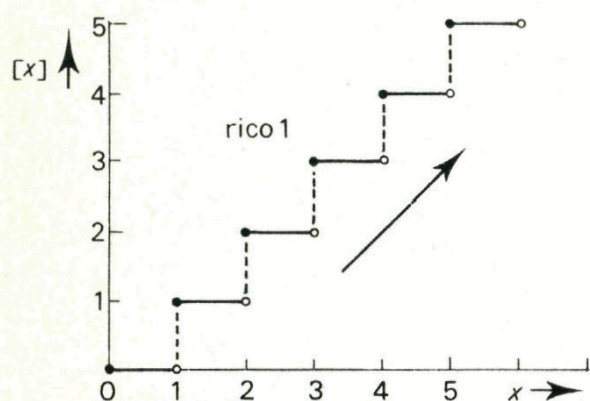


Fig. 1. De entierfunctie.

E beeldt x af op het gehele getal z , waarvoor geldt $z \leq x < z + 1$.

Zo bedoelen we met $E(1,9) = 1$. Verder $E(2) = 2$ en $E(2\frac{1}{2}) = 2$. Telkens als we x een eenheid laten stijgen, neemt $E(x)$ ook met een eenheid toe. Tussen twee gehele waarden van x blijft E constant.

We zouden de E -functie ook een soort richtingscoëfficiënt kunnen toekennen. De grafiek is als een trap met een hellingshoek van 45° . In het vervolg van dit artikel schrijven we $[x]$ in plaats van $E(x)$. Het is allemaal even wennen.

Nog even oefenen: $[0,598] = 0$; $[\pi] = 3$; $[\sqrt{2}] = 1$.

Andere trapfuncties

We kunnen zo'n trap steiler maken of flauwer laten hellen. Zo staat in fig. 2 de grafiek van $x \rightarrow \frac{1}{2}[x]$. De optrede is telkens de helft van de aantrede.

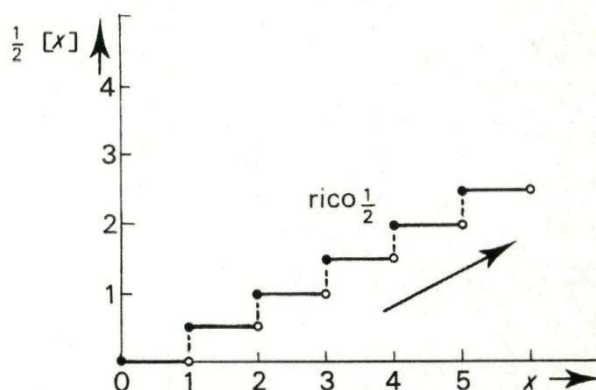


Fig. 2. Een variatie.

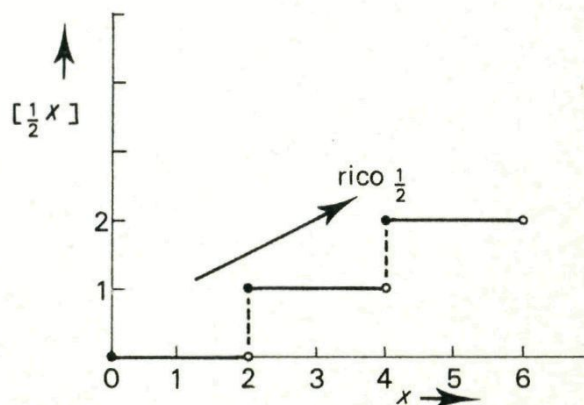


Fig. 3. Een andere variatie.

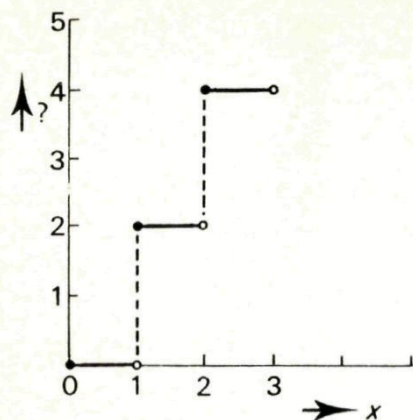


Fig. 4a.

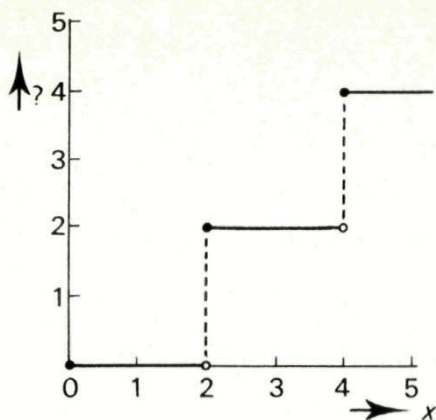


Fig. 4b.

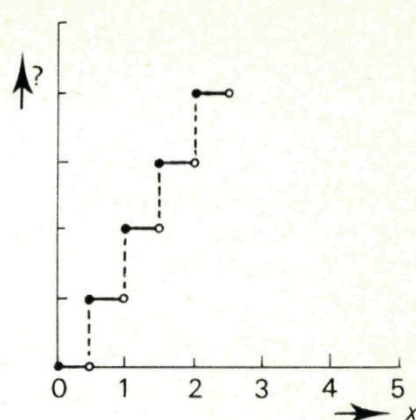


Fig. 4c.

Hoe ziet de functie eruit als er steeds na twee eenheden van x een sprong verticaal van één eenheid optreedt? Wel, dat heeft dan de vorm $x \rightarrow [\frac{1}{2}x]$ (fig. 3).

Ga zelf maar na wat het verschil is tussen $x \rightarrow [\frac{1}{2}x]$ en $x \rightarrow \frac{1}{2}[x]$. Overigens, de richtingscoëfficiënt is beide keren $\frac{1}{2}$.

In fig. 4 staan nog de grafieken van drie andere trapfuncties. Probeer zelf uit te vinden hoe die geschreven moeten worden. De oplossingen staan op pag. 48.

Samengestelde functies

Interessanter wordt het als we de entierfuncties samenvoegen met andere reeds bekende functies. In dit verhaal beperken we ons daarbij uitsluitend tot lineaire.

In fig. 5 staat de grafiek van $f: x \rightarrow x + [x]$. De richtingscoëfficiënt van de zaagtand wordt 2 zoals uit de figuur gemakkelijk is af te leiden. We mogen blijkbaar de richtingscoëfficiënten optellen.

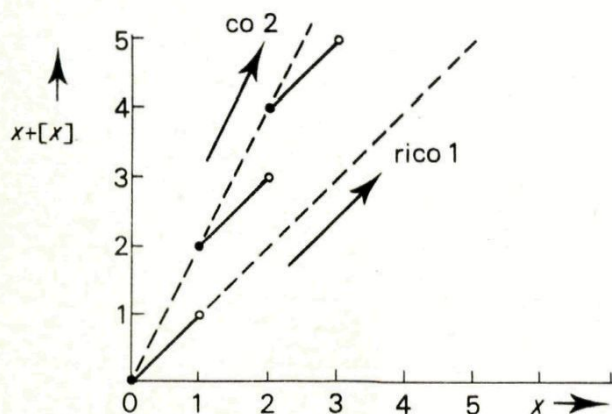


Fig. 5. $f: x \rightarrow x + [x]$.

In fig. 6 voegen we de entierfunctie samen met $x \rightarrow -x + 4$. Er ontstaat een horizontaal lopende zaagtand.

In fig. 7 vervolgens de grafiek van $x \rightarrow -\frac{1}{2}x + 3 + [x]$. We zouden steeds ingewikkelder voorbeelden kunnen bedenken, maar de lezer is ongetwijfeld toe aan de vraag: wat is het nut van al die wijsheid, waar kom je zoiets tegen?

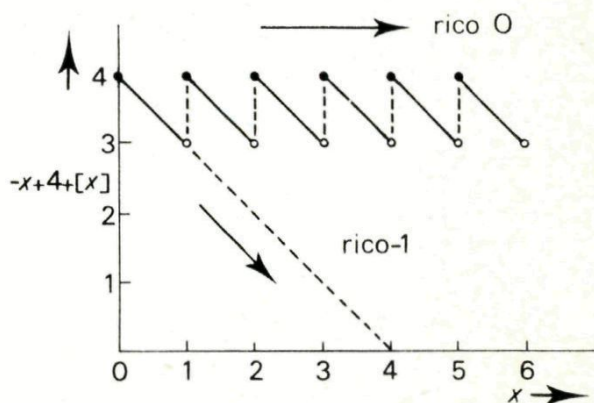


Fig. 6. $f: x \rightarrow -x + 4 + [x]$.

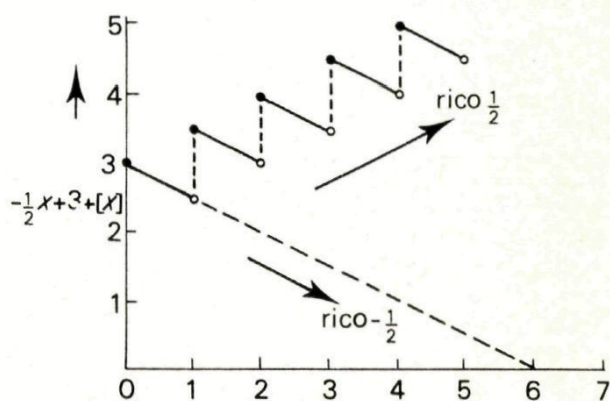


Fig. 7. $f: x \rightarrow -\frac{1}{2}x + 3 + [x]$.

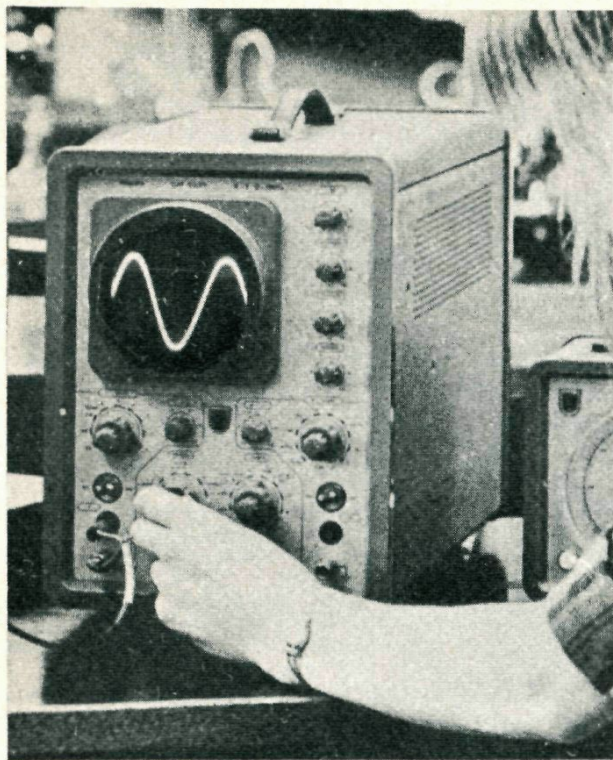


Fig. 8.
In een oscilloscoop zit een zaagtandspanning.

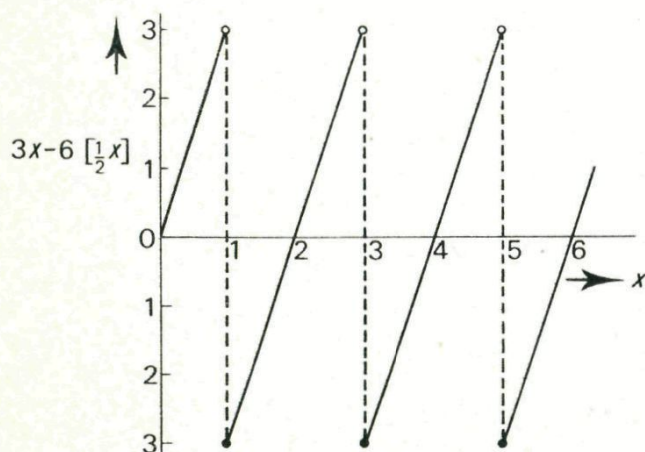


Fig. 9. $f: x \rightarrow 3x - 6 [\frac{1}{2}x]$.

Op de foto van fig. 8 zijn een paar jongelui bezig een onderzoek te doen aan geluid met behulp van een oscilloscoop. Daar verschijnt een sinus als beeld van een zuivere toon. Een elektronenstraal schrijft de kromme op een fluorescerend scherm. Horizontaal staat de tijdbasis. De elektronen worden door middel van een lineair toenemende spanning steeds verder naar rechts getrokken. In de uiterste

stand springt de spanning formidabel snel op een tegengestelde waarde, waardoor de straal weer naar de beginpositie terugschiet. Dat alles herhaalt zich periodiek. De grafiek ziet eruit zoals in fig. 9; de periode is 2 en de maximale uitwijking 3. De grafiek van deze zaagtandspanning hoort bij de samengestelde functie $3x - 6 [\frac{1}{2}x]$.

Het verhaal van de sloper en de bikker

De fotoreportage van fig. 10 heeft de volgende geschiedenis.

Bij een huis wordt een muur gesloopt. Stenen worden zorgvuldig uit de muur losgemaakt, waarna een ander ze keurig schoon bikt, zodat ze opnieuw gebruikt kunnen worden. Omdat er met kalk en zelfs nog met leem gemetseld was, ging dat laatste nogal vlot. De sloper had in ieder geval meer werk om de stenen los te maken dan de bikker om ze schoon te krijgen, waardoor de bikker met zijn armpjes over zijn darmpjes dreigde te komen.

Op een morgen verliepen de zaken aldus. Er lagen nog 110 stenen van de vorige dag om gebikt te worden. Elke 8 minuten werden er door de sloper 10 stenen aangevoerd. In die tijd kon de bikker er echter 40 schoonmaken. Bikker en sloper startten gelijk. Nu onze vragen.

Maak een grafiek van de stapel stenen als functie van de tijd in minuten. Gebruik daarvoor het ruitjespatroon van fig. 11. Beschouw het stenen bikken als een continu, dus lineair verlopend, proces.

Lees uit de correct getekende grafiek af: na hoeveel minuten zit de bikker zonder stenen; hoeveel minuten moet hij dan wachten voor een volgend tiental weer wordt afgeleverd; hoeveel stenen heeft hij dan klaar?

Beschrijf hoe de grafiek verder verloopt. Kies als domein één uur.

Geef ten slotte de samengestelde functie volgens welke het bikken verloopt. De oplossingen staan weer op pagina 48.

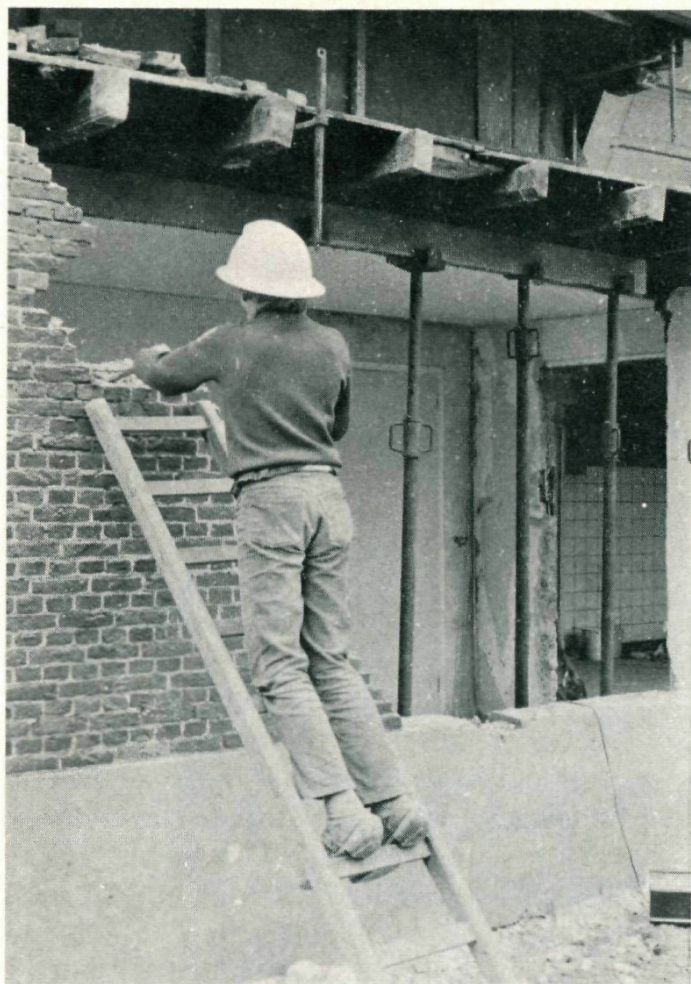
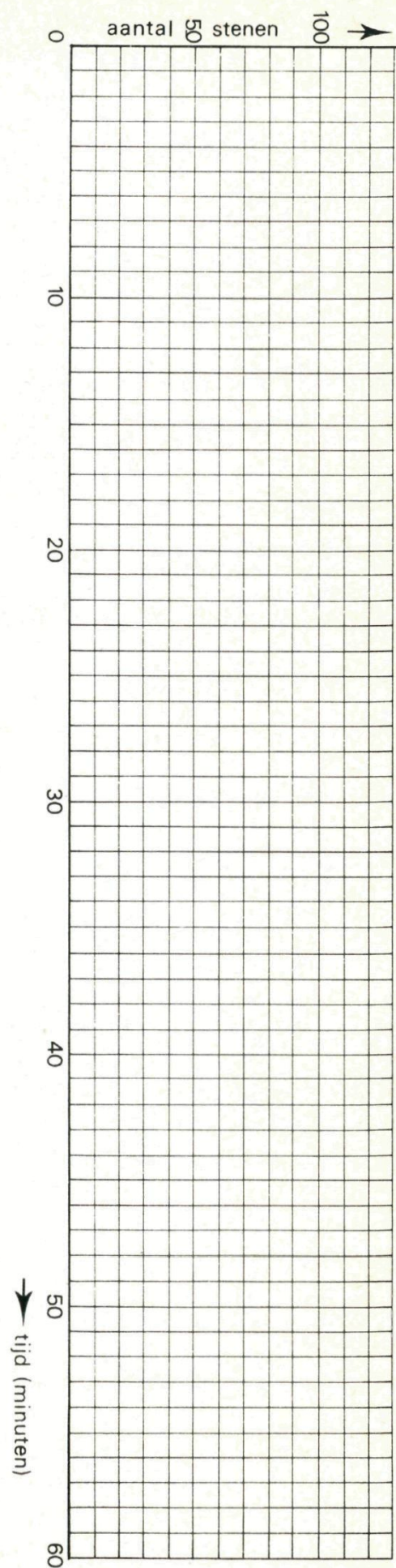


Fig. 10.

Fig. 11. Teken de grafiek hier. →



°Wie zoekt, die vindt

W I E
Z O E K T
D I E

V I N D T

In deze zegswijze, hier bedoeld als stimulans voor de puzzelaar, zijn 10 verschillende letters gebruikt.

Welke cijfers moet je in dit schema voor deze letters substitueren, om een kloppende optelling te verkrijgen *waarin de som der cijfers van 'VINDT' deelbaar is door 7?*

Zulks, naar de oorsprong, dat deze zegswijze in het zevende hoofdstuk van Mattheus voorkomt! Beredeneerde oplossingen kun je sturen aan de ontwerper van deze puzzel, Ir. H. Nijon, 18 Van Brussellaan — Paramaribo, Suriname, Zuid-Amerika.

°°Parabool en paraboloïde, meten met zand en water

In fig. 1 staat de rechthoek $ABCD$, met breedte $2r$ en hoogte h . Daarin is de driehoek DOC getekend. Het is niet moeilijk om in te zien dat de oppervlakte van die driehoek de helft is van de rechthoek.

Zou er een kromme te vinden zijn, gaande door dezelfde drie punten, die een derde deel van de rechthoek afsnijdt?

Een parabool

Het blijkt de parabool te zijn met de y -as als symmetrieas. Het deel dat boven de parabool ligt beslaat $2/3$ deel van de rechthoek, het deel eronder $1/3$ deel. Door berekening is dat wel aan te tonen, maar dan moet je wel kunnen integreren. Zou er geen andere manier te verzinnen zijn om aan te tonen dat (fig. 2) de oppervlakte P samen met Q evenveel is als R , want daar komt het op neer?

We gaan een voor wiskundigen wat vreemd bewijs geven, met zand!

Als we doosjes met zand vullen, is de hoeveelheid zand daarvoor nodig, een maat voor de oppervlakte van de bodem,

als al die doosjes tenminste dezelfde hoogte hebben.

Zo zouden we met behulp van fijn zand kunnen 'bewijzen' dat de oppervlakte onder de parabool een derde deel van de rechthoek is.

We vonden thuis een rechthoekig doosje met maten 8 en 12 cm (fig. 3). Ga zelf maar na dat hierin de parabool $y = \frac{3}{4} x^2$ past. In het algemeen past in zo'n doosje een parabool $y = \frac{h}{r^2} \cdot x^2$ (fig. 1).

Construeer enkele punten van de parabool op de bodem van het doosje en plak een rechthoekige strook papier erin met de vorm van de parabool. Plak ook een

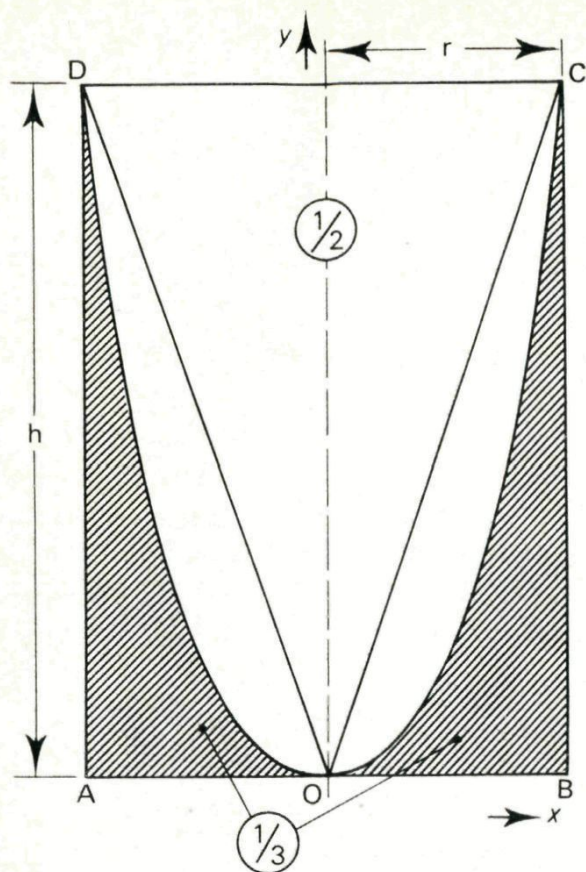


Fig. 1. Van de rechthoek snijdt de driehoek de helft af, de parabool een derde deel.

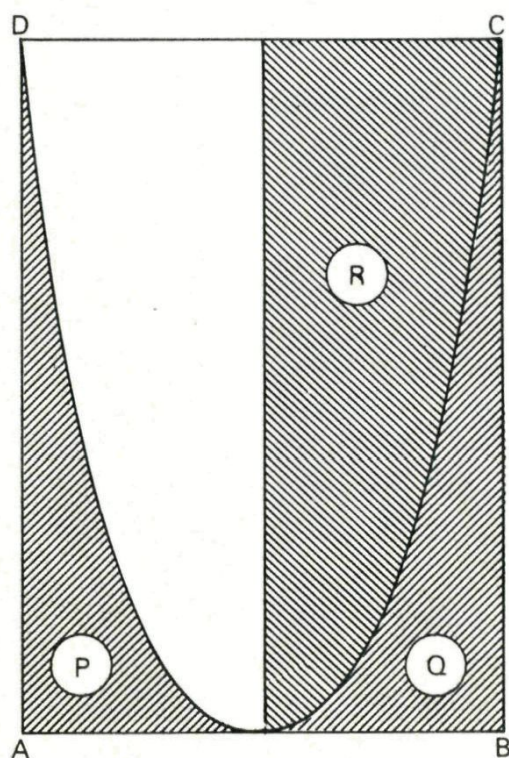


Fig. 2. $P + Q = R$.

schot halverwege, dat is de y -as. We hebben op die manier vier vakjes gemaakt. Vul nu de vakjes P en Q , vlak afgestreken met fijn zand. Schud dan die hoeveelheid zand uit op een stuk papier en onderzoek nu of deze zelfde hoeveelheid vak R precies kan vullen.

Daarmee is dan, op een voor wiskundigen ongewone wijze, aangetoond dat de vakjes P en Q samen een derde deel van het doosje vormen.

Paraboloïde

Een soortgelijk onderzoek kunnen we doen bij een paraboloïde.

Laat fig. 1 draaien om de y -as. De rechthoek wordt dan een cilinder, de driehoek een kegel en de parabool een paraboloïde (fig. 4). Een paraboloïde is dus een lichaam dat ontstaat door een parabool om zijn as te laten wentelen.

In dit ruimtelijke geval blijkt de zaak anders te zijn als bij het platte vlak.

De kegel beslaat nu een derde deel van de totale cilinder en de paraboloïde halveert deze.

Ook hier zouden we weer met behulp van integreren uitkomsten kunnen vinden. We kiezen weer voor een experimentele methode, nu niet met zand, maar . . . met water!

Als we een bakje met water op een draaitafel laten roteren (fig. 5), gaat het water in het midden omlaag en stijgt aan de rand. Uit de natuurkundige wetten omtrent de rotatie is af te leiden dat het water de vorm van een paraboloïde kiest. Stel nu dat we een cilindrisch glas nemen en het half vol water doen. Als we het dan laten roteren, zal blijken dat het aan de rand evenveel stijgt als het in het midden daalt. Als je dat kunt constateren, volgt daaruit onmiddellijk, dat de inhoud van de paraboloïde juist de helft is van die van de cilinder. Als je dit zelf wilt waarnemen, moet je over een draaitafel beschikken. Het zou een oude pick-up kunnen zijn die we op 78 toeren per mi-

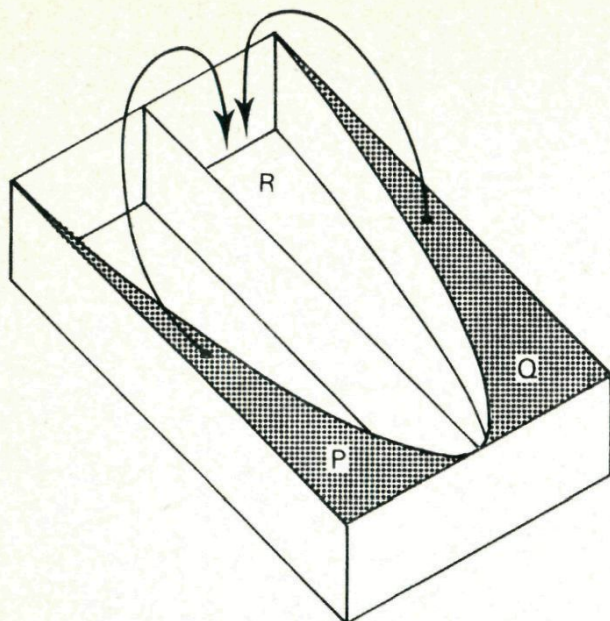


Fig. 3. In vak *R* kan evenveel zand als in *P* en *Q* samen.

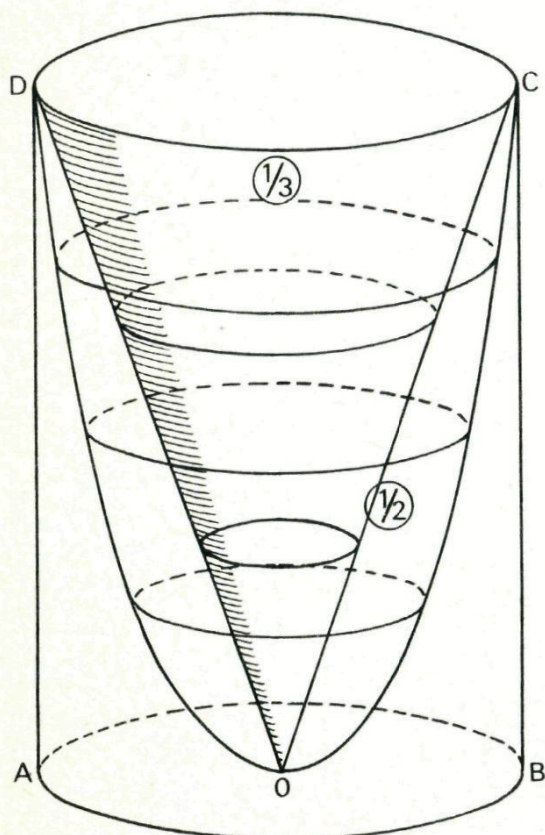
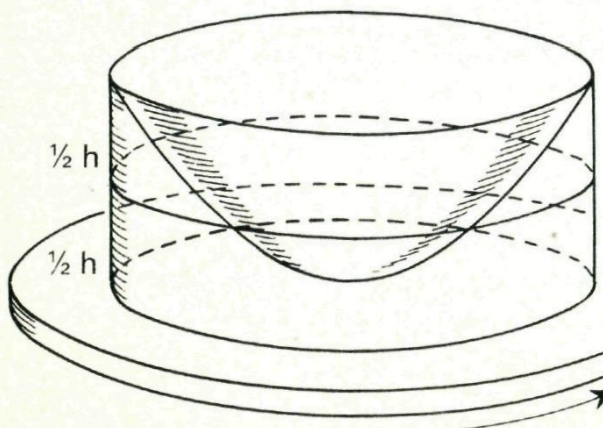


Fig. 4. Paraboïde en kegel in een cilinder.



nuut zetten. Als we dan een melkfles pakken met een straal van 4 cm, zou er slechts ruim 1 mm daling in het midden en ruim 1 mm stijging aan de kant optreden. Daar is zo dus weinig van te zien. Je moet of meten aan een wijder vat of over hogere toerentallen kunnen beschikken. Het blijkt dat het hoogteverschil zowel evenredig is met het kwadraat van de toeren als met het kwadraat van de middellijn. Dat zet dus goed aan!

Wij experimenteerden met een motortje met 300 toeren per minuut. De diameter van de cilinder was 12 cm. Als we het vat half vullen, gaat het water bij draaiing aan de rand 4,5 cm omhoog en zakt in het midden evenveel.

°°° Door integreren

Wie in de hoogste klas zit, kan door integreren oppervlakte en inhoud bepalen.

De vergelijking van de parabool in het algemeen is $y = a \cdot x^2$ waarin $a = h/r^2$.

De oppervlakte onder de parabool (zie fig. 1) is dan:

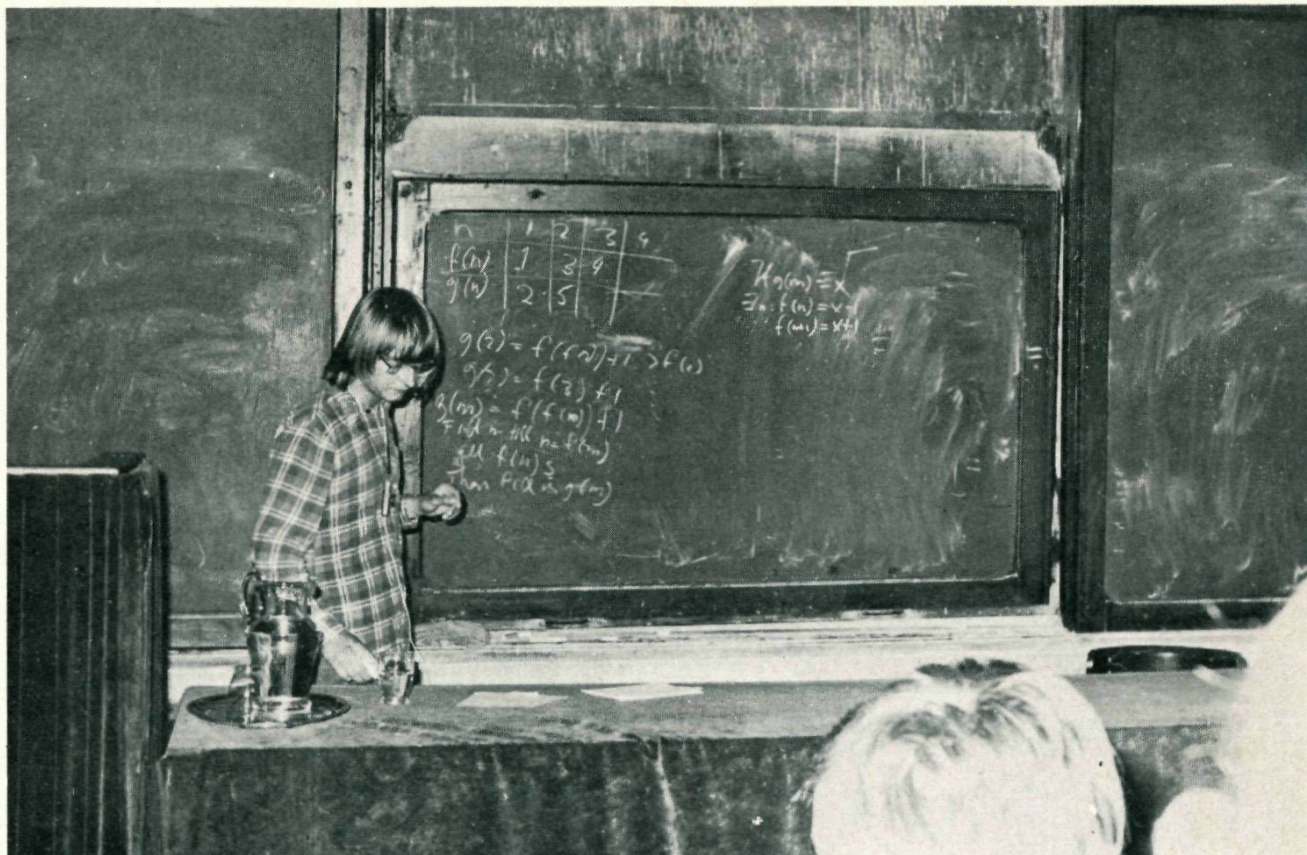
$$2 \int_{-r}^{+r} \frac{h}{r^2} \cdot x \cdot x^2 dx = 2 \left[\frac{1}{3} \frac{h}{r^2} \cdot x^3 \right]_{-r}^{+r} = 2/3 hr.$$

De oppervlakte van de rechthoek is $2hr$ en dus is het deel onder de parabool een derde deel van de rechthoek.

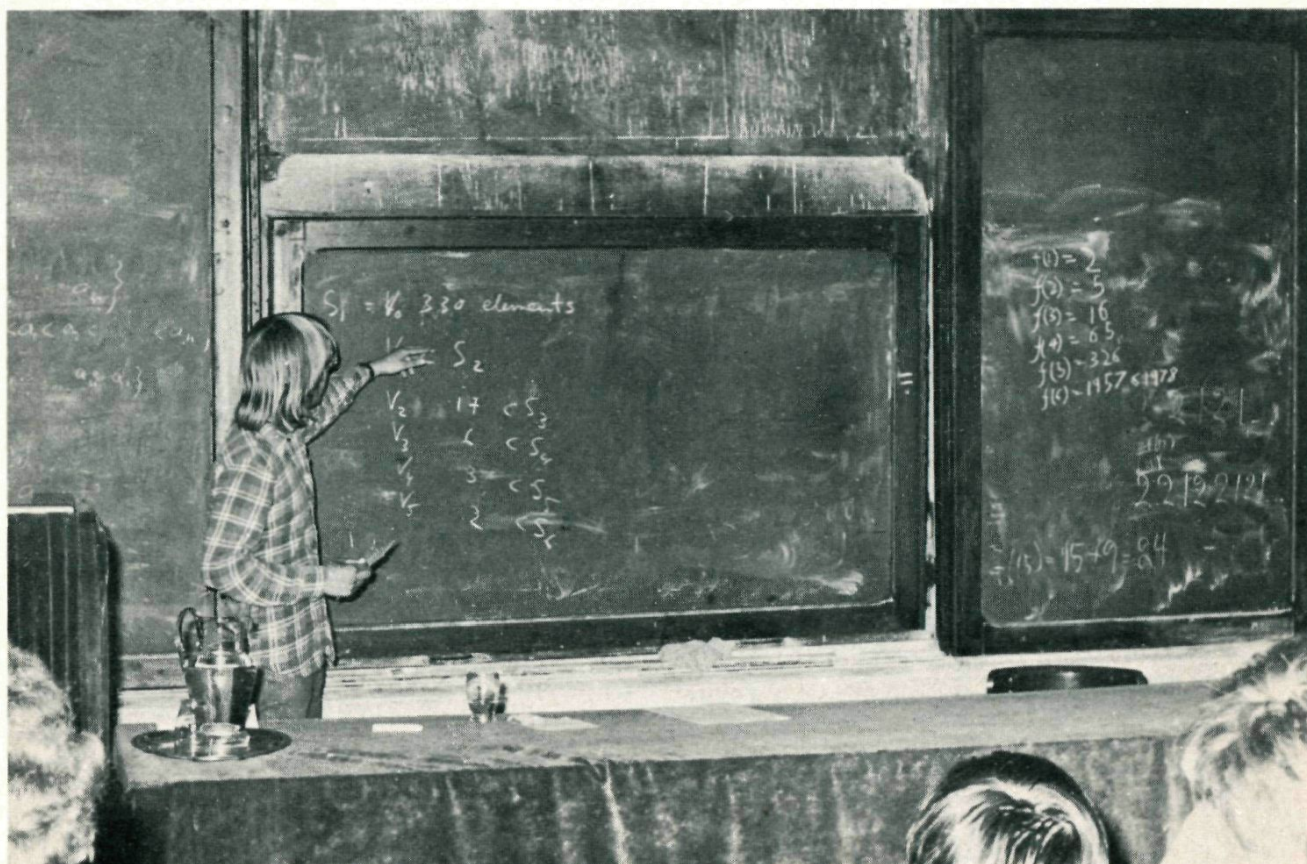
Als we dezelfde parabool roteren om zijn as, wordt de inhoud van het deel binnen de paraboloid:

$$\begin{aligned} \int_0^h \pi x^2 \cdot dy &= \pi \int_0^h y \cdot \frac{r^2}{h} \cdot dy = \frac{\pi r^2}{h} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^h = \\ &= \frac{1}{2} \pi r^2 h \text{ (halve cilinder).} \end{aligned}$$

Fig. 5. Op een roterende tafel stijgt het water aan de kant evenveel als het in het midden daalt.



Marc van Leeuwen presenteert zijn bekroonde oplossing van opgave 3 aan jury en deelnemers.



Marc van Leeuwen presenteert zijn bekroonde oplossing van opgave 6 aan jury en deelnemers.

foto's 1 en 2: Ineke van de Craats

°De 20e Internationale Wiskunde Olympiade

Bij de 20e Internationale Wiskunde Olympiade, gehouden van 3 tot 13 juli 1978 in Boekarest, heeft de 18-jarige Marc van Leeuwen uit Pijnacker een tweede prijs en twee speciale prijzen behaald. De 17-jarige Hans Mulder uit Rhenen ontving een derde prijs. Hans en Marc waren eerste en tweede bij de finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1977.

Het landenklassement van de Internationale Wiskunde Olympiade werd aangevoerd door het organiserende land Roemenië, gevolgd door de Verenigde Staten en Groot-Brittannië. Onze ploeg eindigde op de elfde plaats. Aan de Olympiade namen 132 leerlingen van het vwo uit 17 landen deel. Op 6 en 7 juli was er een zitting van vier uren waarin de deelnemers drie vraagstukken kregen voorgelegd. Elders in dit nummer zijn de zes opgaven afgedrukt. De maximale score per persoon was 40 punten. Dit jaar ontvingen de vijf deelnemers met 35–40 punten een eerste prijs, de 20 deelnemers met 27–34 punten een tweede, en de 38 deelnemers met 22–26 punten een derde prijs. Er werden vier speciale prijzen uitgereikt voor bijzonder fraaie oplossingen. Een Finse deelnemer kreeg zo'n prijs voor zijn oplossing voor opgave 3, een Brit voor opgave 6, en Marc van Leeuwen ontving zowel een speciale prijs voor opgave 3 als voor opgave 6. De prijzen werden op 11 juli uitgereikt door de Roemeense minister van onderwijs, prof. Suzana Gâdea. De resultaten van de Nederlandse deelnemers waren:

Marijn Franx (Nuenen) – 17 punten;
Frank Hoogeveen (Amsterdam) – 20 punten;
Robert Jan Kooman (Maastricht) – 16 punten;
Marc van Leeuwen (Pijnacker) – 33 punten, 2e prijs, 2 speciale prijzen;
Hans Mulder (Rhenen) – 26 punten, 3e prijs;
Rob Potting (Son) – 21 punten;
Jan Herman Veldkamp (Gronin-

gen) – 5 punten; Peter Wagemans (Rotterdam) – 19 punten.

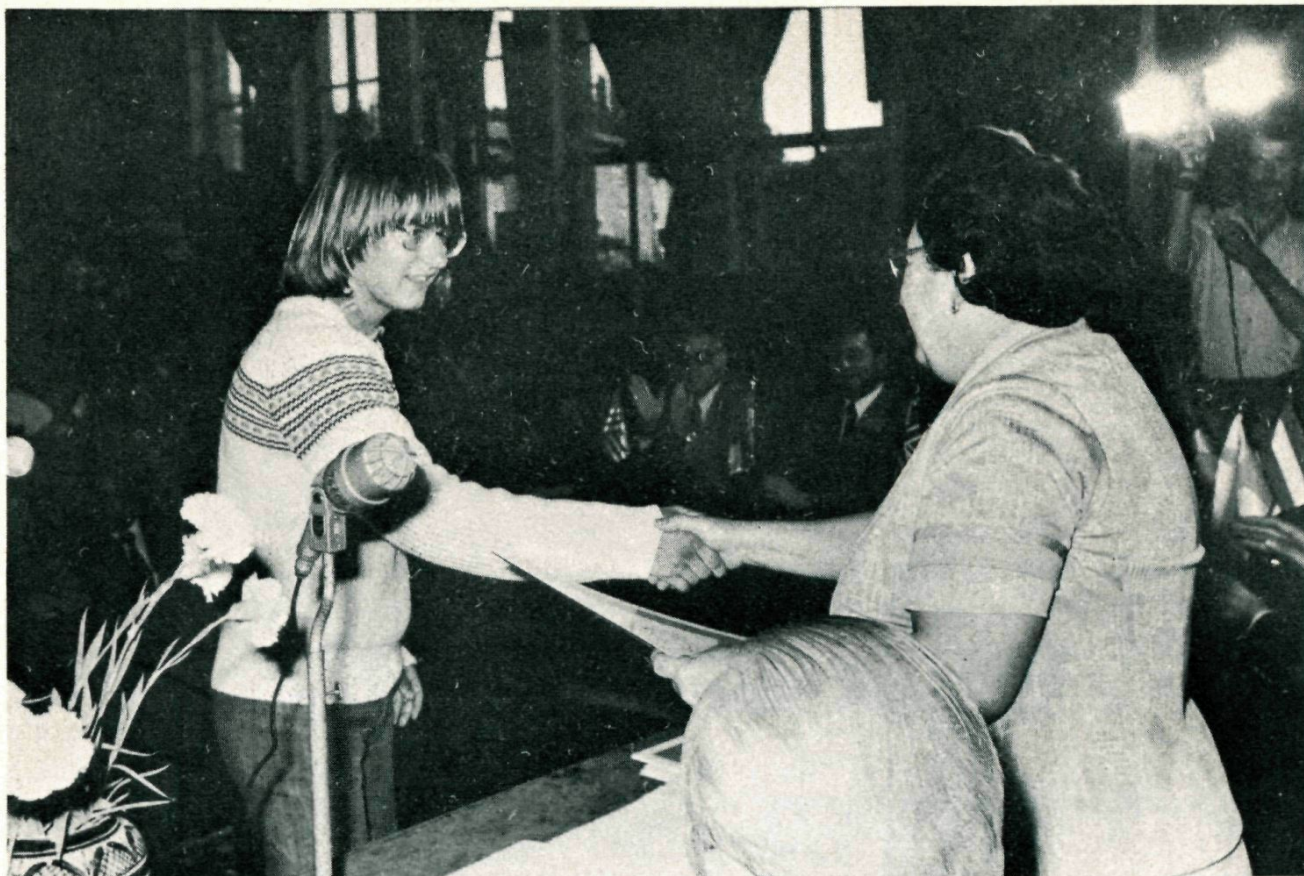
De drie dagen tussen de wedstrijd en de prijsuitreiking hebben de deelnemers doorgebracht in Constanta aan de Zwarte Zee. Op de dag van de prijsuitreiking mochten enige leerlingen hun oplossing van bepaalde vraagstukken in een grote zaal aan alle deelnemers en de voltallige jury presenteren. Marc van Leeuwen kwam hierbij twee maal voor het bord en demonstreerde op duidelijke wijze in goed Engels zijn bekroonde oplossingen van de opgaven 3 en 6.

XX-ste Internationale Wiskunde Olympiade

Boekarest, 6 juli 1978

eerste dag

1. Gegeven zijn twee natuurlijke getallen m en n , $n > m \geq 1$, zo, dat in decimale notatie de laatste drie cijfers van 1978^m en 1978^n overeenstemmen. Bepaal m en n zo, dat $m + n$ minimaal is.
2. P is een gegeven punt binnen een gegeven bol. A , B en C zijn drie punten op de bol zo, dat PA , PB en PC onderling loodrechte lijnstukken zijn. Q is het hoekpunt van het blok opgespannen door de lijnstukken PA , PB en PC zo, dat PQ een lichaamsdiagonaal is. Bepaal de verzameling van alle punten Q als A , B en C variëren.



Marc van Leeuwen ontvangt zijn tweede prijs uit handen van de Roemeense minister van onderwijs.



Hans Mulder ontvangt zijn derde prijs uit handen van de Roemeense minister van onderwijs.

foto's 3 en 4: Jan van de Craats

3. De verzameling van alle positieve gehele getallen is de vereniging van twee onderling disjuncte verzamelingen $\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$ en $\{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$, met $f(1) < f(2) < \dots < f(n) < \dots$, $g(1) < g(2) < \dots < g(n) < \dots$ en $g(n) = f(f(n)) + 1$ voor alle $n \geq 1$. Bepaal $f(240)$.

Beschikbare tijd: 4 uren

XX-ste Internationale Wiskunde Olympiade

Boekarest, 7 juli 1978 tweede dag

4. In driehoek ABC is $AB = AC$. Een cirkel raakt inwendig aan de omgeschreven cirkel van driehoek ABC en bovendien de zijde AB in een punt P en de zijde AC in een punt Q . Bewijs dat het midden van het lijnstuk PQ het middelpunt is van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC .
5. De rij $\{a_k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ bestaat uit onderling verschillende positieve gehele getallen. Bewijs dat voor elke waarde van n geldt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

6. De leden van een internationaal genootschap komen uit 6 verschillende landen. De ledenlijst bevat 1978 namen, genummerd 1 t/m 1978. Bewijs dat er tenminste één lid is wiens nummer gelijk is aan de som van de nummers van twee van zijn landgenoten of tweemaal zo groot als het nummer van één van zijn landgenoten.

Beschikbare tijd: 4 uren

De opgaven

De opgaven van de Internationale Wiskunde Olympiade zijn altijd zo gemaakt dat het oplossen ervan niet meer voorkennis vereist dan hetgeen op school wordt onderwezen. Toch zal het de meeste van onze lezers niet meevallen de oplossing van de opgaven te vinden. Net zoals bij sportwedstrijden is het bereiken van goede resultaten niet alleen een kwestie van aanleg, maar ook van oefening. Onze ploeg was behoorlijk voorbereid door middel van lesbrieven die niet alleen veel opgaven als oefenmateriaal bevatten, maar waarin ook diep werd ingegaan op de theoretische achtergrond van de verschillende typen vraagstukken. Zo behoorden de opgaven 1 en 5, waarvan je in dit nummer de oplossing kunt vinden, tot categorieën vraagstukken waarin onze deelnemers redelijk thuis zijn. Ook opgave 4 is niet zo lastig. Je kunt bij dit vraagstuk afbeeldingsmeetkunde gebruiken. Opgave 2 geeft meer problemen. Hier is vectormmeetkunde (Wiskunde II) een goed hulpmiddel. Echt moeilijk zijn de vraagstukken 3 en 6, ondanks het feit dat er totaal geen voorkennis nodig is voor de oplossing (je weet toch dat twee verzamelingen onderling disjunct heten als ze geen gemeenschappelijk element hebben). Voor opgave 6 (die slechts door 8 van de 132 deelnemers is opgelost!) zal ik na de oplossing van 1 en 5 enige aanwijzingen geven. In het volgende nummer komt dan de volledige oplossing, samen met die van de opgaven 2, 3 en 4.

°°° Oplossing van opgave 1

De oplossing van deze opgave is voor een onvoorbereide deelnemer tamelijk lastig te vinden. Iemand die echter, zoals onze Olympiade-gangers, een beetje thuis is in de getallentheorie heeft er niet veel moeite mee. Hij is gewend met geschikte notaties te werken en kent enige stellingen die de oplossing sterk vereenvoudigen. Ik zal hier echter een wat 'moei-

zamer' oplossing geven, die slechts gebruik maakt van de bekende binomiumformule van Newton:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n, \text{ waarin de zg. binomiaalcoëfficiënten } \binom{n}{k} \text{ gehele getallen zijn die gedefinieerd kunnen worden door } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Als 1978^m en 1978^n op dezelfde 3 cijfers eindigen, is $1978^n - 1978^m = 1978^m (1978^{n-m} - 1)$ een veelvoud van $1000 = 2^3 \cdot 5^3$; $1978^{n-m} - 1$ is oneven, en bevat dus geen factoren 2. In 1978^m moeten dus minstens 3 factoren 2 zitten. $1978 = 2 \cdot 989$ bevat slechts één factor 2, dus $m \geq 3$.

Noem $n-m = p$; 1978^m bevat geen factoren 5, dus $1978^p - 1$ bevat minstens 3 factoren 5. In het bijzonder moet 1978^p bij deling door 5 rest 1 geven. Volgens de binomiumformule is $1978^p = (1975 + 3)^p = 1975^p + \dots + \binom{p}{p-1} 1975 \cdot 3^{p-1} + 3^p$.

Alle termen, behalve de laatste, zijn deelbaar door 1975, dus zeker door 5, dus 3^p moet bij deling door 5 rest 1 geven. 3^1 geeft rest 3, 3^2 rest 4, 3^3 rest 2, 3^4 rest 1, 3^5 rest 3, 3^6 rest 4, 3^7 rest 2, 3^8 rest 1, enzovoorts. De resten keren periodiek terug (dit is iets wat in de getallentheorie algemeen bewezen wordt), en slechts de exponenten die een viervoud zijn, geven rest 1. Hieruit volgt $p = 4q$ voor zeker natuurlijk getal q .

De vraag is: wat is de kleinste waarde van q waarvoor $1978^{4q} - 1$ deelbaar is door 125. $1978 = 15 \cdot 125 + 103$. Net als boven kun je deze vraag terugvoeren op: wat is de kleinste waarde van q zo, dat $103^{4q} - 1$ deelbaar is door 125. Aangezien 1000 een veelvoud is van 125, behoeven we bij onze berekeningen slechts telkens de laatste 3 cijfers in aanmerking te nemen. 103^4 eindigt op 881, dus na de-

ling door 125 geeft dit rest 6. Omdat $103^{4q} = (103^4)^q$ is de vraag nu: wat is de kleinste waarde van q zo, dat $6^q - 1$ een veelvoud is van 125.

Elke macht van 6 eindigt op een 6, dus de laatste 3 cijfers van 6^q moeten zijn 126, 376, 626 of 876. De laatste 2 cijfers van de machten van 6 zijn 06, 36, 16, 96, 76, 56, 36, 16, 96, 76, 56, ... enzovoorts, dus q moet een veelvoud zijn van 5; 6^5 eindigt op 776, $6^{10} = (6^5)^2$ op 176, 6^{15} op 576, 6^{20} op 976 en 6^{25} op 376, dus $q = 25$ is de kleinste waarde die voldoet. Hieruit volgt $n-m = p = 4q = 100$, en de kleinste waarde van $n + m$ wordt bereikt als $m = 3$, $n = 103$, dus $n + m = 106$.

Oplossing van opgave 5

Laten we bij zo'n n -tal verschillende positieve gehele getallen de som

$$S = \frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2}$$

vergelijken met de som

$$R = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Je bent al een eind op de goede weg als je R schrijft als

$$R = \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{n^2}.$$

Hier staat blijkbaar net zo'n som als S , maar in plaats van $a_1, a_2, \dots, a_n$ staat er de speciale rij $1, 2, \dots, n$. Deze rij moet dus de minimale waarde van S geven. Als de termen a_k van de rij $a_1, a_2, \dots, a_n$ in opklimmende volgorde van grootte zouden staan, zou, omdat alle a_k verschillend zijn, voor elke a_k gelden $a_k \geq k$, en dan zou

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = R.$$

Je krijgt hierdoor het vermoeden dat als we de, overigens vast gekozen verschillende positieve gehele getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ in een willekeurige volgorde mogen zetten, de minimale waarde van S ontstaat indien ze naar opklimmende grootte gerangschikt zijn. We zullen dit inderdaad bewijzen. Het idee is om de termen van de rij $a_1, a_2, \dots, a_n$ door verwisselingen één voor één in de juiste volgorde te zetten, en te bewijzen dat bij elke stap de som S kleiner wordt (of gelijk blijft).

Laten we in de rij $a_1, \dots, a_n$ de grootste term opzoeken. Noem hem a_M . Als hij niet op zijn juiste plaats staat, d.w.z. als $a_M \neq a_n$, verwisselen we a_n en a_M . De som S' die dan ontstaat, is

$$S' = \frac{a_1}{1^2} + \dots + \frac{a_{M-1}}{(M-1)^2} + \frac{a_n}{M^2} + \frac{a_{M+1}}{(M+1)^2} + \dots + \frac{a_M}{n^2}.$$

Het verschil met S is

$$S - S' = \frac{a_n}{n^2} + \frac{a_M}{M^2} - \frac{a_M}{n^2} - \frac{a_n}{M^2} = (a_M - a_n) \left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{n^2} \right) > 0,$$

want $a_M > a_n$ en $n > M$. De som wordt dus inderdaad kleiner.

Hierna verwisselen we de op één na grootste term met a_{n-1} , enzovoorts. Elke keer wordt de som kleiner, waarmee het bewijs is geleverd.

Aanwijzingen bij opgave 6

Noem de nummers van de leden uit een vast gekozen land $a_1, \dots, a_n$. Als $a_k = a_i + a_j$ of $a_k = 2a_i$, is $a_k - a_i$ weer het nummer van een lid uit dat land. Als dus het gestelde *niet* waar zou zijn, zou het *verschil* van twee nummers van leden uit één land nooit het nummer van een lid uit dat land kunnen zijn. Een tweede aanwijzing is, dat er in minstens één land minstens 330 leden moeten wonen, want anders zouden er in totaal hoogstens $6.329 = 1974$ leden zijn. Meer aanwijzingen krijg je niet op dit moment. In het volgende nummer komt de volledige oplossing.

°° Een bol beleggen met cirkels

Tijdens de wereldkampioenschappen voetbal in Argentinië hebben vele miljoenen kijkers menig uur zich vermaakt aan het rollen van de bal. Die bal had daarbij niet helemaal de klassieke vorm van een afgerond veelvlak bestaande uit 12 vijfhoeken en 20 zeshoeken. (Zie binnenzijde omslag.)

Opvallend waren de aangebrachte cirkelpatronen, die in zwart en wit over de witte bal waren aangebracht (fig. 2). Bij ons kwam daarbij de vraag op: hoe is het mogelijk een bol te bedekken met elkaar rakende cirkels?

We willen daarbij wel dat alle cirkels dezelfde straal hebben. In het geval van de WK-voetbal waren dat er twaalf. Kan het ook met meer of minder? Kan het met een willekeurig aantal?

We willen wel volledige symmetrie. Dat



Fig. 2. De WK-voetbal.

betekent enerzijds congruente, elkaar rakende cirkels, anderzijds congruente restdelen op het boloppervlak.

Uitgaan van een kubus

Het vraagstuk van de bol, bedekt met elkaar rakende cirkels, lijkt sterk op dat van regelmatige veelvlakken. Laten we eens uitgaan van een kubus $ABCD/EFGH$ (fig. 3). Alleen de hoekpunten van de kubus zijn aangegeven.

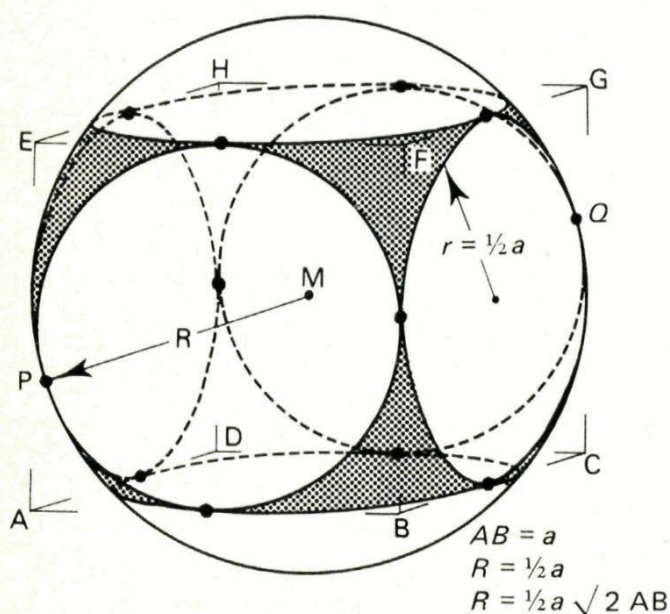


Fig. 3. Door middel van het kubusmodel kunnen we een bol beleggen met zes cirkels.



In elk van de zes zijvlakken is de ingeschreven cirkel getekend. De cirkels gaan elkaar uitwendig raken. Wanneer raken cirkels elkaar als hun vlakken niet samenvallen? Dat gebeurt als de snijlijn van beide vlakken raaklijn is aan beide cirkels en daarbij de raakpunten nog samenvallen. Hieraan voldoen de zes ingeschreven cirkels van de zijvlakken van een kubus.

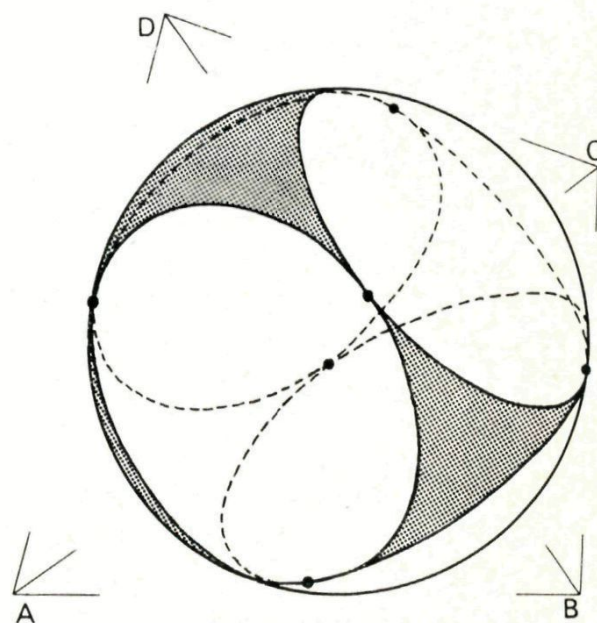


Fig. 4. Een bol bedekken met vier cirkels.

Dan is het verder mogelijk door die cirkels een bol aan te brengen en dan is het omgekeerd ook mogelijk op een bol zes cirkels te trekken, elkaar rakend en met gelijke straal.

Als de ribbe van zo'n kubus a is, dan is de straal van een cirkel de halve ribbe of $\frac{1}{2}a$ en de straal van de omschreven bol wordt een halve vlaksdiaagonaal PQ of $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Als de straal van een bol dus R is en we willen deze met zes gelijke, elkaar rakende cirkels, bedekken, dan hebben deze een straal $r = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$ of ongeveer $0,7R$.

Bij andere veelvlakken

We proberen iets soortgelijks bij een regelmatig viervlak (fig. 4). In elk van de gelijkzijdige driehoeken is een ingeschreven cirkel getekend. De drie zijden worden telkens weer in het midden geraakt. De vier cirkels raken elkaar ook onderling. Door de cirkels kan weer een bol. Omgekeerd is het dus ook mogelijk een bol te bedekken met vier elkaar rakende cirkels, met onderling gelijke straal. Als we de zijde van zo'n viervlak a stellen, dan is de straal van een ingeschreven cirkel $\frac{1}{6}a\sqrt{3}$ en de straal van de bol $\frac{1}{4}a\sqrt{2}$, zodat hier geldt:

$$r = R \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \text{ of } r = \frac{1}{3}R\sqrt{6} \text{ of ongeveer } 0,8R.$$

Probeer dat zelf maar verder uit te zoeken.

Nog meer mogelijkheden

Naast het regelmatig zesvlak (de kubus) en het regelmatig viervlak bestaan er nog

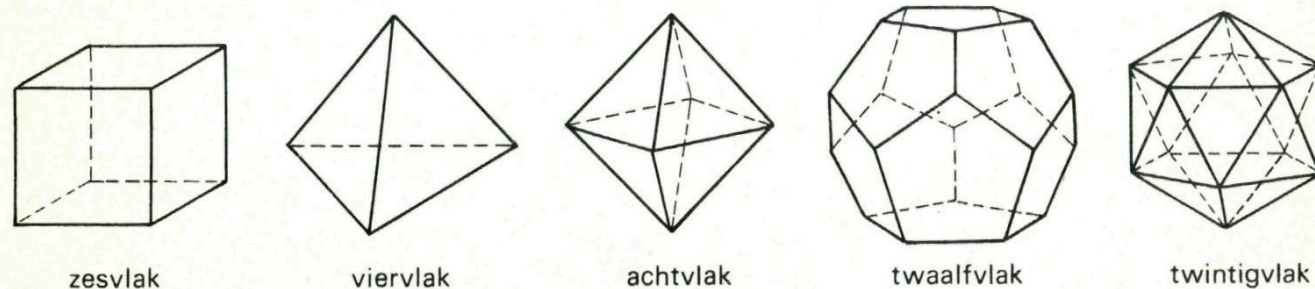


Fig. 5. De vijf reguliere veelvlakken.

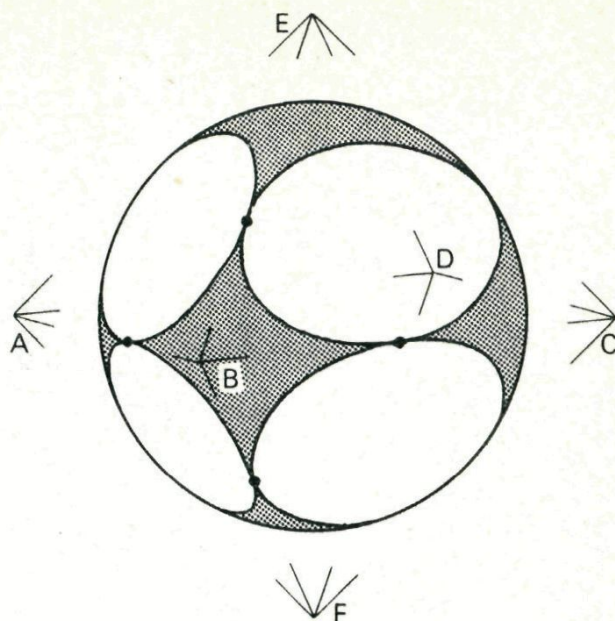


Fig. 6. Bol bedekt met acht cirkels.

maar drie andere, het regelmatig achtvlak, twaalfvlak en twintigvlak (fig. 5). Uit elk van die veelvlakken ontstaan op een soortgelijke manier oplossingen voor het bedekken van een bol met even grote, elkaar rakende, cirkels.

In fig. 6 staat de oplossing bepaald door het regelmatig achtvlak. Als de zijde hier weer a is, geldt hier:

$$r = \frac{1}{6}a\sqrt{3} \text{ en } R = \frac{1}{2}a \text{ zodat } r = \frac{1}{3}R\sqrt{3} \text{ of ongeveer } 0,6R.$$

Ten slotte staan in fig. 7 en 8 de oplossingen uitgaande van twaalf- en twintigvlak. De cirkels worden daarbij natuurlijk weer kleiner. Voor de duidelijkheid zijn alleen de cirkels op de voorhelft van de bol getekend. Van de veelvlakken zijn ook alleen maar de hoekpunten aangegeven. De raakpunten vallen steeds samen met middens van ribben.

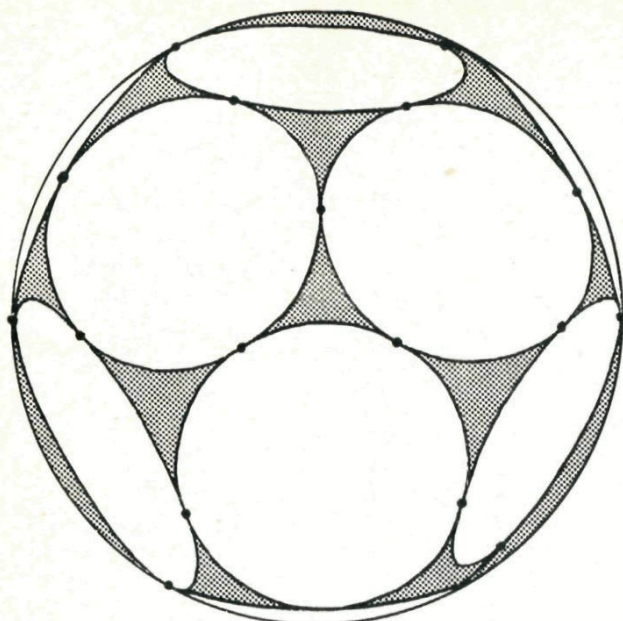


Fig. 7. Twaalf cirkels op de WK-voetbal.

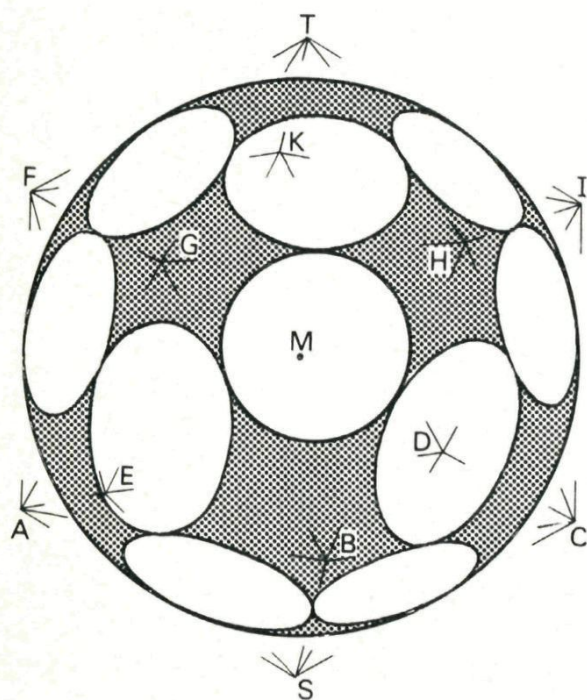


Fig. 8. Twintig cirkels op een bol.

Zo hebben we dan een bol kunnen bedekken met drie, vier, acht, twaalf of twintig driehoeken.

De WK-voetbal was met 12 ringen gesierd. Maar dat komt omdat de voetbalvorm afgeleid is van het twaalfvlak. De middelpunten ervan vallen samen met de centra van de vijfhoeken.

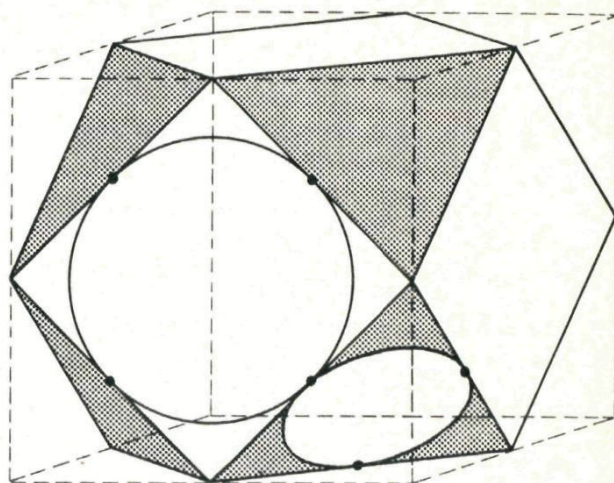


Fig. 9. Uitgaande van een halfregelmatig veelvlak ontstaan cirkels met verschillende straal.

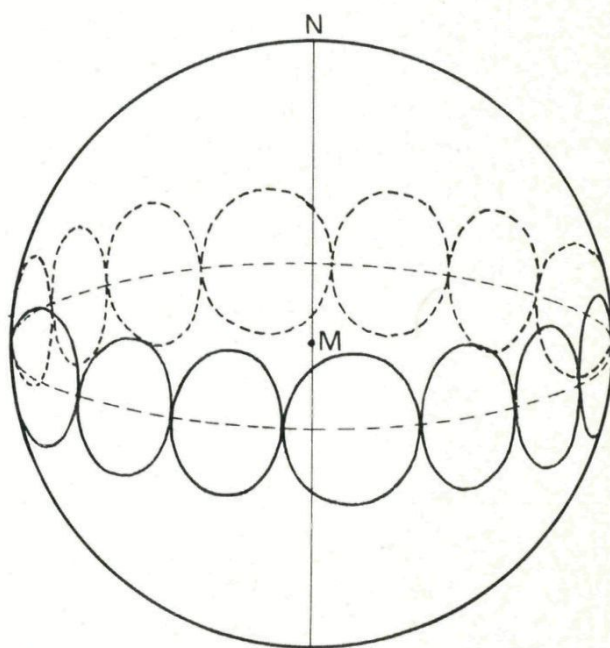


Fig. 10. Een snoer van 14 cirkels omspant een bol.

Snoeren en netten

We zouden kunnen onderzoeken of we misschien uit de halfregelmatige veelvlakken nog patronen kunnen afleiden. Hier zijn alle ribben nog wel even lang, maar ze zijn opgebouwd uit twee of drie soorten veelhoeken. Als we ze allemaal nagaan vinden we geen nieuwe mogelijkheden. Ze

leveren in geen geval even grote rakende cirkels.

In fig. 9 staat daarvan een voorbeeld. Het betreft hier een veelvlak opgebouwd uit vierkanten en gelijkzijdige driehoeken.

Een ander idee staat in fig. 10. Om de evenaar als hartlijn is bij een bol een snoer van even grote (in dit geval 14), elkaar rakende cirkels aangebracht. Het zou kunnen met een willekeurig aantal, mits groter dan 2.

Eigenlijk vinden we een dergelijke oplossing niet zo aardig. Er is van het beleggen van een bol met cirkels weinig meer overgebleven. De beide restdelen zijn tamelijk groot en daar zijn helemaal geen cirkels meer. Misschien kunnen we een dergelijk voorstel uitschakelen, door als extra eis te stellen: de oppervlakte van één restdeel moet kleiner zijn dan die van één cirkel.

We zouden ook nog zo'n cirkelsnoer door de polen kunnen laten lopen. Hierbij

moeten we wel zorgen dat er twee cirkels samenvallen met twee van het eerste snoer.

Op die manier ontstaat een net van 26 elkaar rakende even grote cirkels.

We zouden nog een derde snoer, lopende over beide polen, kunnen aanbrengen. Hierbij moet de hartlijn beide vorige loodrecht snijden. Zo verschijnt een net van 36 cirkels. De figuur die zo ontstaat, doet ons denken aan het regelmatig achthoekig vlak.

Verder fantaserend, kunnen we ook op het thema van de andere regelmatige veelvlakken, netten van cirkels een bol laten omspannen.

We moeten ons daarbij een regelmatig veelvlak voorstellen met zijn omgeschreven bol. Dan projecteren we alle ribben vanuit het middelpunt op die bol. Die lijnen worden dan hartlijn voor cirkelsnoeren.

°° Over Pythagoreïsche drietallen

Als je kennis maakt met de stelling van Pythagoras, merk je dat het niet lang duurt of je hebt er wortelvormen bij nodig; alleen in slim gekozen gevallen lukt het om met alleen natuurlijke getallen uit te komen. Je bent niet de eerste die dat merkt, het is al zeker sinds ca. 500 v. Chr. bekend; en dat je echt iets nieuws nodig hebt (getallen als $\sqrt{2}$), dat je het niet met breuken klaarspeelt, is al vóór Plato ontdekt, waarschijnlijk het eerst aan de diagonaal van het vierkant.

Maar als je je getallen handig kiest, lukt het wel. Hoe word je handig? Hoe kun je Pythagoreïsche drietallen vinden? Het oude recept luidt:

Neem twee natuurlijke getallen m en n , met $m \geq n$ en $\text{GGD}(m, n) = 1$ en neem dan

$$a = 2mn$$

$$b = m^2 - n^2$$

$$c = m^2 + n^2$$

dan geldt $a^2 + b^2 = c^2$

Maar eerst de definitie:

(a, b, c) is een Pythagoreïsch drietal, als

a, b en c natuurlijke getallen zijn zonder gemeenschappelijke factor, waarvoor geldt $a^2 + b^2 = c^2$.

Je kunt dan zelf wel narekenen dat je het geval dat m en n beide oneven zijn moet uitsluiten, omdat dan a, b en c alle drie even worden.

Je ziet daaruit dat we alleen hoeven te letten op getallenparen (m, n) met $m > n$, niet beide oneven, en zonder gemeenschappelijke factoren. Een dergelijk paar zullen we verder een P -paar noemen.

Laten we nu eerst maar eens kijken wat dat oplevert.

m	n	a	b	c
1	0	0	1	1
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61
7	2	28	45	53
7	4	56	33	65
7	6	84	13	85
8	1	16	63	65
8	3	48	55	73
8	5	80	39	89
8	7	112	15	113
9	2	36	77	85
9	4	72	65	97
9	8	144	17	145

enz.

Als je deze lijst zo eens bekijkt, dan vallen daarin een aantal rijtjes op van driehoeken met speciale eigenschappen.

a. de rij met $c - a = 1$: (0, 1, 1), (4, 3, 5), (12, 5, 13), (24, 7, 25), (40, 9, 41) enz. Als je let op b in deze drietallen, dan doorloopt die net de rij van de oneven natuurlijke getallen. Maar meer nog: $b^2 = a + c$.

Welke P -paren horen bij deze rij? Wel, de rij begint met

(1,0) (2,1) (3,2) (4,3) (5,4)

en dat suggereert dat de regel is $m = n + 1$. Bewijs dat maar eens.

b. de rij met $c - b = 2$: (4, 3, 5), (8, 15, 17), (12, 35, 37), (16, 63, 65), enz. Als je let op a in deze drietallen, dan doorloopt a de rij van de viervouden; maar daarmee zeg je niet genoeg, want a is altijd een viervoud. (Dat kun je ook

gemakkelijk zelf laten zien.) In deze rij geldt ook nog

$$\frac{1}{2}a^2 = b + c.$$

Welke P -paren horen bij deze rij? Wel, (2, 1), (4, 1), (6, 1), (8, 1), enz., dus die paren met $n = 1$.

Opmerking: de paren $(m, 1)$ met m oneven waren uitgesloten; ga je na wat die opleveren, dan vind je

m	n	a	b	c	verg.
3	1	6	8	10	(2, 1)
5	1	10	24	26	(3, 2)
7	1	14	48	50	(4, 3)
9	1	18	80	82	(5, 4)

Er is natuurlijk een duidelijk verband tussen de paren van de eerste rij en de paren van de laatste; als je nagerekend hebt waarom m en n niet beide oneven mogen zijn, zal het je ook niet al te lastig vallen een regel te vinden (en te bewijzen) die je bij een paar (m, n) met m en n beide oneven het bijbehorende P -paar oplevert.

We gaan verder met de rijtjes drietallen, maar nu van de andere kant.

c. $n = 2$:

(3, 2) (5, 2) (7, 2)
(12, 5, 13), (20, 21, 29), (28, 45, 53),
(9, 2) enz.
(36, 77, 85) enz.

Welke regelmaat zit hierin? Ga maar na dat $c - b = 8$ en $\frac{1}{8}a^2 = b + c$.

Algemener: n constant, dan $c - b = 2n^2$ en $a^2 = 2n^2 \cdot (b + c)$.

Het bewijs is niet zo moeilijk.

Vraag: Waarom bekijken we de rijen met m constant niet?

d. Ten slotte de rij

(4, 3, 5), (20, 21, 29),

waarbij de paren

(2, 1) (5, 2)

horen. Bij deze rij geldt dat $|a - b| = 1$; drietallen van deze rij zijn erg dun ge-

zaaid, de volgende zijn (120, 119, 169) bij het paar (12, 5) en (696, 697, 985) bij het paar (29, 12).

Probeer maar eens uit te zoeken hoe die rij in elkaar zit, en wat de volgende drietallen zijn; probeer ook maar eens een algemene regel te vinden. Het is een oud probleem; we zullen nu iets laten zien van de oplossing.

Oplossing

We zijn geëindigd met de rij van bijna-gelijkbenige drietallen:

(4, 3, 5), (20, 21, 29), (120, 119, 169), (696, 697, 985) waarbij de paren (2, 1), (5, 2), (12, 5), (29, 12) horen.

De vergelijking die deze rij bepaalt is $a - b = \pm 1$ of

$2mn - m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2m^2 = \pm 1$. Maar daar hebben we niet zoveel aan, want hoe vind je de oplossing (in gehele getallen!) van zo'n vergelijking?

Dit is een van de problemen die al in de Oudheid is opgelost. Theon van Smyrna — hij leefde in de tijd van keizer Hadrianus — geeft de volgende ladder:

Neem $x_0 = 1$ en $y_0 = 1$. Neem verder $x_{i+1} = x_i + y_i$ en $y_{i+1} = x_{i+1} + x_i$, dus:

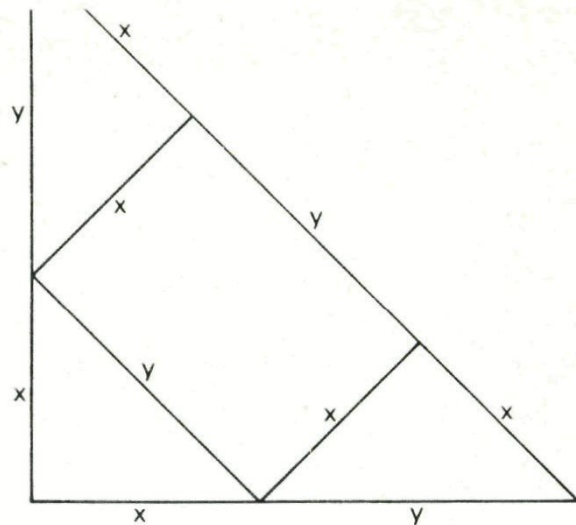
$x_1 = 2$	$y_1 = 3$
$x_2 = 5$	$y_2 = 7$
$x_3 = 12$	$y_3 = 17$
$x_4 = 29$	$y_4 = 41$
$x_5 = 70$	$y_5 = 99$
$x_6 = 169$	$y_6 = 239$

dan geldt voor alle $i \in \mathbb{N}$: $2x_i^2 - y_i^2 = (-1)^i$.

Theon heeft dat niet allemaal zelf bedacht, want bij Euclides vinden we al iets dat hier nauw verband mee houdt, (Boek II, prop. 10) en dat betekent waarschijnlijk dat het in de kring van de Pythagoreërs is gevonden, misschien in de vierde of vijfde eeuw voor Christus.

Hoe zouden ze dat gevonden hebben? Het bewijs is op zichzelf niet zo moeilijk,

maar hoe kom je op het idee dat deze ladder de goede is? We weten daar niets van af, maar misschien is het zo gebeurd:



Stel je hebt een gelijkbenige rechthoekige driehoek met rechthoekszijde x en schuine zijde y . Dan krijg je een grotere rechthoekige gelijkbenige driehoek door de rechthoekszijden te verlengen tot $x + y$, en dan wordt de schuine zijde $2x + y$.

Als dan dus $y^2 = 2x^2$, dan $(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 - 2x^2 - 4xy - 2y^2 = 2x^2 - y^2 = 0$ en dus $(2x + y)^2 = 2(x + y)^2$.

Maar dat lukt nu net niet. Want waar de Pythagoreërs mee zaten, dat was de irrationaliteit van $\sqrt{2}$, dus de onmogelijkheid om een gelijkbenige rechthoekige driehoek met gehele zijden te maken. Wel kun je het benaderen. Zo is bijv. (2, 3) een benadering. Welnu, met deze ladder kun je steeds betere benaderingen vinden. En het bewijs dat $2x_i^2 - y_i^2 = (-1)^i$ staat hierboven eigenlijk al:

$$2(x + y)^2 - (2x + y)^2 = -2x^2 + y^2.$$

Terug naar ons probleem. We hebben nu dus een rij oplossingen van $2x^2 - y^2 = \pm 1$ en daarmee van $a - b = \pm 1$, omdat we $m = x$ en $n = y - x$ kunnen nemen.

Laten we eens kijken welke oplossingen we nu hebben:

i	m	n	a	b	c	x	y	met
0	1	0	0	1	1	1	1	$x_{i+1} = x_i + y_i$
1	2	1	4	3	5	2	3	$y_{i+1} = x_{i+1} + x_i$
2	5	2	20	21	29	5	7	$m_i = x_i$
3	12	5	120	119	169	12	17	$n_i = y_i - x_i$
4	29	12	696	697	985	29	41	$a_i = 2m_i n_i$
5	70	29	4060	4059	5741	70	99	$b_i = m_i^2 - n_i^2$
6	169	70				169	239	$c_i = m_i^2 + n_i^2$

°° Het dilemma van het bierblikje: kantelen of niet

Het is niet leuk als een gedeeltelijk leeggedronken blikje bier omvalt. En dat kan zich gemakkelijk voordoen als je het onder 'primitieve' omstandigheden moet neerzetten, bijv. aan het strand. Het is dan van belang om te weten hoe het met de stabiliteit van zo'n blikje gesteld is. Zoals je wel zult weten is een voorwerp des te stabiel opgesteld naarmate zijn massamiddelpunt lager ligt.

Bij een nog vol blik ligt het massamiddelpunt precies in het midden (fig. 1a). Als je er wat uit hebt gedronken is het massamiddelpunt gedaald (fig. 1b). Maar als je het blikje helemaal hebt leeggedronken, is het massamiddelpunt weer op zijn 'oude' plaats gekomen (fig. 1c). Dat betekent dus, dat 'ergens' een laagste positie van het massamiddelpunt moet voorko-

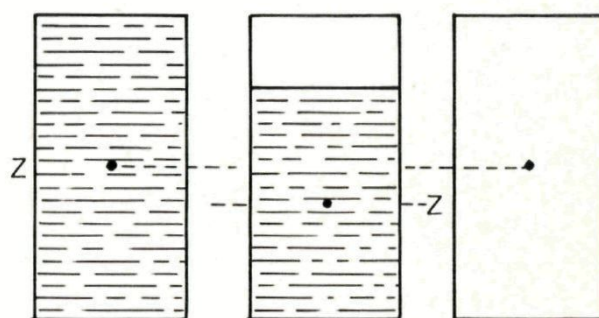


Fig. 1a.

1b.

1c.

men. Tot hoever moet je het blik nu leegdrinken om het massamiddelpunt zo laag mogelijk te krijgen? We hebben het antwoord op dit probleem kunnen uitdrukken in termen van één verhouding: nl. die tussen de massa van een vol blikje en de massa van een leeg blikje. In de praktijk is die verhouding gelijk aan 9.

°Drie in de pan

Als we drie pannekoekjes tegelijk in een ronde pan willen bakken, zal het wel het meest voor de hand liggen, om ervoor te zorgen dat ze alle drie even groot zijn, elkaar raken en ook de rand van de ronde koekepan (fig. 1c).

Ons wiskundig gevoel daagt ons uit te fantaseren of we het op een soortgelijke manier ook met 4, 5, 6 . . . tegelijk klaar kunnen krijgen. Ze worden dan natuur-

lijk wel kleiner, maar dat geeft niet. Dan noemen we ze maar poffertjes. Ze moeten wél elkaar en de pan blijven raken. Kan dat? En welke combinatie lijkt daarbij gunstig?

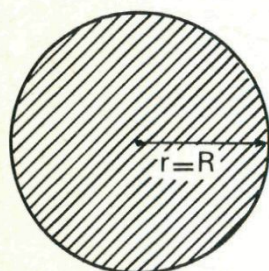
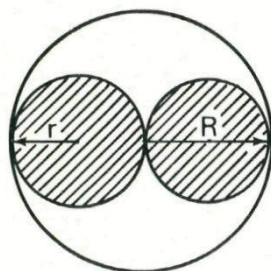
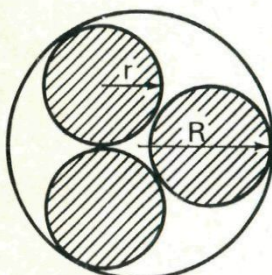


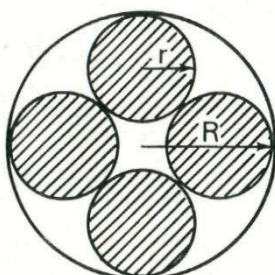
Fig. 1a.
 $n = 1$



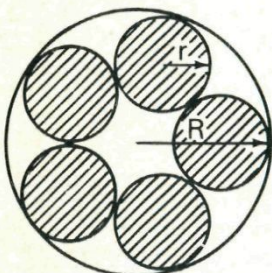
1b
 $n = 2$



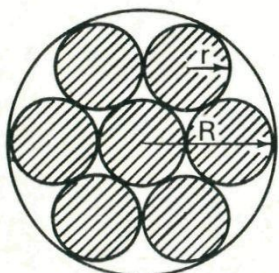
1c
'drie in de pan'



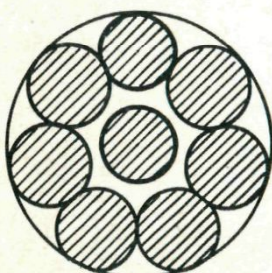
1d
 $n = 4$



1e
 $n = 5$



1f
 $n = 7$



1g
 $n = 8$

n in de pan

We zullen ons maar tot natuurlijke getallen beperken. Een koekepan met π of $\sqrt{2}$ flensjes staat een beetje gek.

Als we één groot spiegelei ($n = 1$), bakken in een ronde pan, dan kan dat ei de pan helemaal vullen. We zeggen de bezettingsgraad is 100% (fig. 1a).

In fig. 1b staat het geval $n = 2$. De stralen van de beide spiegeleieren zijn half zo groot als die van de pan.

De beschikbare ruimte is precies voor de helft gevuld omdat $r = \frac{1}{2} R$.

Het bekendst is het geval van fig. 1c. Hier hebben we 'drie in de pan' ofwel $n = 3$. Elke cirkel raakt beide andere en bovendien de pan; een fraaie situatie.

Opvallend is dat bij $n = 1$ de bezettingsgraad 100% is, voor $n = 2$ 50%, maar voor $n = 3$ weer veel meer en wel 65%. Je kunt dat gemakkelijk narekenen.

In fig. 1c geldt: $r = R(2\sqrt{3} - 3)$, waaruit volgt dat het bezette deel van de koekepan $3(2\sqrt{3} - 3)^2 \cdot 100\%$ dus ca. 65% is.

Voor $n = 4$ (fig. 1d) stijgt de bezettingsgraad nog wat, maar niet zo veel meer.

Hieruit kun je afleiden: $r = R(\sqrt{2} - 1)$, waaruit dan weer volgt dat de bezettingsgraad $4(\sqrt{2} - 1)^2 \cdot 100\%$ of 69% is.

Voor $n = 5$ (fig. 1e) worden de uitgeschreven cirkels nog iets kleiner, maar, wat zeer merkwaardig is, de bezettingsgraad daalt iets. Een wat ingewikkelde bereke-

ning toont aan dat de bezettingsgraad voor $n = 4$ te stellen is op 68,63% en voor $n = 5$ op 68,52%!

Inmiddels verschijnt in het centrum een gat dat naarmate n toeneemt ook steeds groter wordt. Daar past zo direct nog een spiegelei in!

' $n = 6$ ' bestaat niet

We zouden nu 6 cirkels langs de rand van de koekepan kunnen leggen (fig. 1f). Maar dan is het centrale gat zo groot geworden dat daar precies nog één in past, die alle 6 eerder genoemde cirkels kan raken en zelf ook even groot is! Maar dan hebben we 'zeven in de pan' en zo moeten we dan besluiten dat 'zes in de pan' niet bestaat!

Gemakkelijk is hier te zien dat $r = \frac{1}{3} R$ zodat daaruit voor de bezettingsgraad volgt: $7 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 100\%$, ofwel 78% en dat is tamelijk veel . . . hoewel toch tegenvallend in vergelijking met het geval van 'drie in de pan'.

En voor n groter dan 7?

In fig. 1g hebben we 7 cirkels langs de omtrek gelegd en het centrale gat is weer groter geworden. Daar kan dan een achtste in . . . maar die kan dan niet meer aan de eerste cirkels raken, tenminste als zijn straal ook even groot moet blijven, zoals overigens afgesproken. Dit geval is dus voor ons niet interessant; 'acht in de pan' bestaat dus ook niet.

Bij nader onderzoek blijkt dat we voor alle gevallen, waarbij n groter dan 7 gekozen wordt, geen bevredigende oplossing meer kunnen vinden.

In fig. 2 staat een foto van een rond dienblad, waarbij een poging is gedaan dit decoratief met elkaar rakende cirkels te vullen. We tellen er 121. Maar kijk eens aan de rand. Daar is het een 'puinhoop'. Het is niet gelukt, om die 121 cirkels een aan de buitenste cirkels rakende cirkel te trekken.

Eindconclusie

'Drie in de pan' is zo gek nog niet; 'één in de pan' is natuurlijk het beste; 'zeven in de pan' is ook niet onaardig. Voor n groter dan 7 vinden we geen aanvaardbare mogelijkheden meer.

Huisvrouwen kiezen van nature voor $n = 1, 3, 7$.

Voor ijverige rekenaars

Voor de gevallen $n = 2, 3, 4, 5$ kan men een algemene formule afleiden van de straal r in relatie tot straal R . Deze luidt: $r = R \frac{p}{1+p}$ waarin $p = \sin \frac{180^\circ}{n}$.

Zo wordt bijvoorbeeld in het geval dat $n = 4$ $p = \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ en $r = R \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2}}{1 + \frac{1}{2} \sqrt{2}} = R (\sqrt{2} - 1)$.

De bezettingsgraad wordt, volgens deze

formule, in het algemeen $\frac{n \cdot p^2}{(1+p)^2} \times 100\%$.

Je zou nu zelf de uitkomsten met behulp van je rekenmachine kunnen opzoeken.

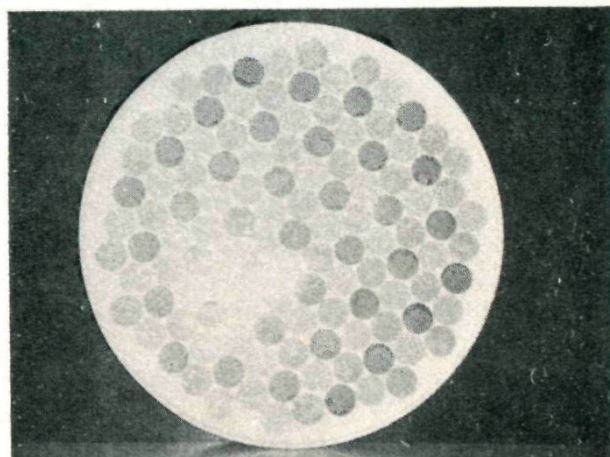
Wie dat rekenwerk wil controleren, vindt hieronder de resultaten.

Uitkomsten bezettingsgraad voor

$n = 2, 3, 4, 5$

voor $n = 2$ bezettingsgraad	50,000000%
$n = 3$	64,617093%
$n = 4$	68,629158%
$n = 5$	68,520986%

Fig. 2. '121 in de pan'.



De oplossing van het bierblikjesdilemma

De oplossing bestaat uit twee delen. Eerst zullen we aantonen dat in het geval van het laagste massamiddelpunt dit massamiddelpunt samenvalt met de *vloeistofspiegel*. De berekening van de vloeistofspiegelhoogte is dan betrekkelijk eenvoudig.

Het bewijs voor het eerste deel is een bewijs uit het ongerijmd. Stel (fig. 1a) dat het *laagste* massamiddelpunt zich *boven* de vloeispiegel bevindt. We voegen nu iets bier toe. Het massamiddelpunt zal hierdoor verplaatst worden. Aangezien het massamiddelpunt berekend wordt uit de massamiddelpunten van het metalen blikje en van de vloeistof, zien we dat het massamiddelpunt door het toevoegen van vloeistof iets moet zijn gedaald. Mocht je het nog niet 'zien', dan kunnen we de volgende truc toepassen. Kantel het blikje over 90° en zorg door middel van een gewichtsloos vlies, dat de vloeistof niet kan wegstromen (fig. 1b). Ondersteun het blikje in het massamiddelpunt. Het blikje is dan in evenwicht. Voeg nu rechts wat bier toe. Het geheel zal dan 'met de wijzers van de klok' gaan omkiepen: het massamiddelpunt ligt blijkbaar rechts van Z (dus 'lager').

Eenzelfde verhaal kunnen we afsteken bij

de veronderstelling, dat het massamiddelpunt in de laagste positie *onder* de vloeistofoppervlakte zou liggen. Ook dat voert tot een ongerijmdheid. Iets wegnemen van bier leidt dan tot een verlaging van het massamiddelpunt. De enige overgebleven situatie moet dus de juiste zijn: de laagste positie van het massamiddelpunt valt samen met de vloeistofspiegel.

Stellen we de massa van het blikje op V en die van het bier alléén op B , dan is de resterende biermassa $\frac{x}{h} B$ (fig. 2). De conditie voor het massamiddelpunt wordt dan:

$$\left(\frac{h}{2} - x\right) \cdot V = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{h} B\right)$$

Uitwerken van deze vergelijking levert:

$$(h - x)^2 V = x^2 (B + V)$$

dus in ons geval, waar $\frac{B + V}{V} = 9$ krijgen we:

$$\left(\frac{hx}{x}\right)^2 = 9$$

Eén van de twee wortels van deze vierkantsvergelijking levert ons de 'fysische realiteit', nl. $x = \frac{1}{4} h$.

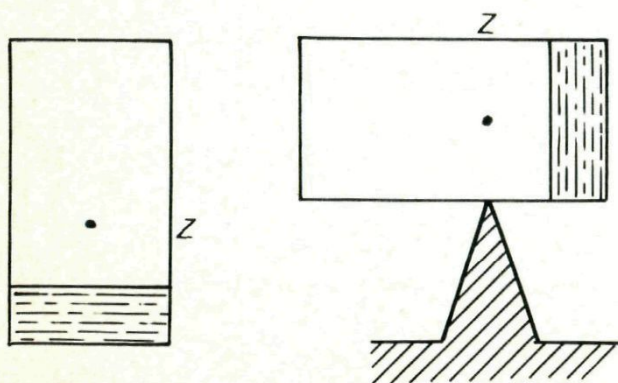


Fig. 1a.

1b.

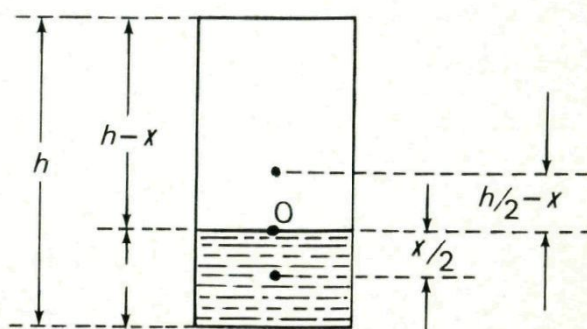
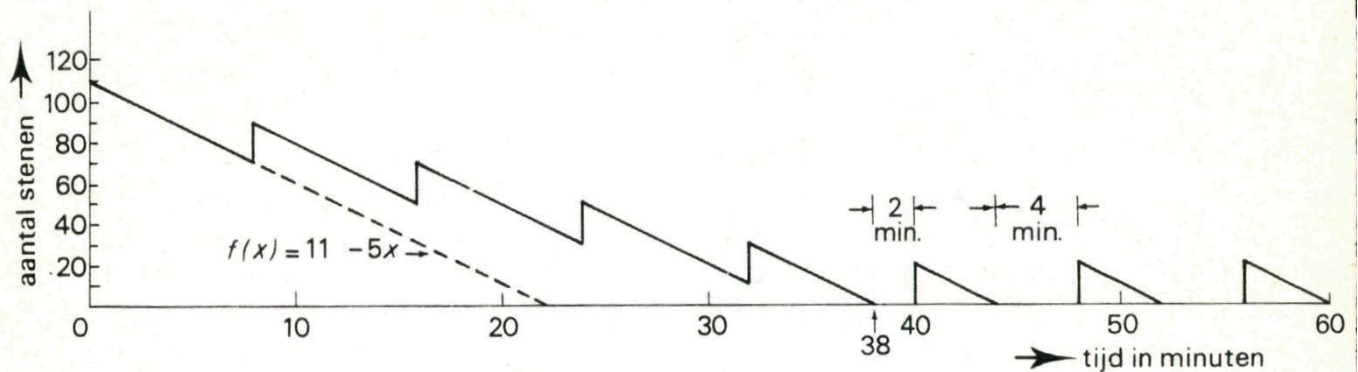


Fig. 2.

Oplossing van de entierfuncties en van de sloper en de bikker (op pagina 26, 27)

Fig. 4a $f(x) = 2[x]$
 4b $f(x) = 2[\frac{1}{2}x]$
 4c $f(x) = [2x]$

Fig. 11 is de grafiek van: $f(x) = 110 - 5x + 20[\frac{1}{8}x]$.



$$f(x) = 110 - 5x + 20[\frac{1}{8}x]$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 38\}$$

Na 38 minuten zit de bikker zonder stenen. Hij heeft er dan inmiddels

$110 + 4 \cdot 20$ of 190 klaar. Na 2 minuten wachten krijgt hij een nieuwe voorraad. Elke volgende periode van 8 minuten geeft telkens 4 minuten pauze. Na 1 uur zijn er 250 stenen afgewerkt.

Oplossing

van *Dit is logisch* (Pythagoras no. 1)

Van de 72 gevallen die $2E + 2S \rightarrow R$ hebben, moeten we die opzoeken, waarvan E even is en $S = 1; 3; 7; 9$. Immers PLUS en IS kunnen als priemgetal niet eindigen op een even cijfer of op een 5.

Dit zijn:

E	S	R	E	S	R	E	S	R
0	1	2	4	1	0	8	3	2
	3	6		7	2		7	0
	7	4		9	6		9	4
	9	8	6	1	4			
2	1	6		3	8			
	3	0		9	0			
	7	8						

Voor T, P, V geldt:

T	P	V	T	P	V	T	P	V	T	P	V
1	2	4	2	1	5	3	1	7	4	1	9
		5			6			8			
		6			7			9			
	3	5		3	7		2	8			
		6			8			9			
		7			9						
	4	8		4	8						
		9			9						

Uitwerking van deze beginselen door achtereenvolgens te zoeken
E; S; R; U; I; T; P; V; L en W, levert ten slotte 2 oplossingen, waarvan alleen

$$1588 + 3079 + 1588 + 29 = 6284$$

twee priemgetallen heeft.

Dit resultaat is bijzonder fraai, omdat TWEE deelbaar is door 2; en VIER deelbaar is door 4.

Dit is een bijzonderheid die slechts zelden voorkomt in een cijfercryptogram.

Inhoud

Entierfuncties; grafieken als trappen en zaagtanden	25
Wie zoekt, die vindt	29
Parabool en paraboloïde	29
De 20e Internationale Wiskunde Olympiade	33
Een bol beleggen met cirkels	37
Over Pythagoreïsche drietallen	41
Het probleem van het bierblikje: kantelen of niet	44
Drie in de pan	45
Oplossing van het bierblikjesdilemma	47
Oplossing van de <i>entierfuncties</i> en van de <i>sloper en de bikker</i>	48
Oplossing van: Dit is logisch (uit <i>Pythagoras</i> no. 1)	48

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

W. Kleijne, Apeldoorn.
Ir. H. Mulder, Nieuw Ginniken
G.A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Stationsstraat 114, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,— per jaargang. Voor anderen f 11,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

