

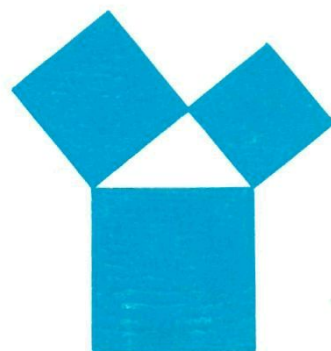


3

jaargang 18 / januari 1979

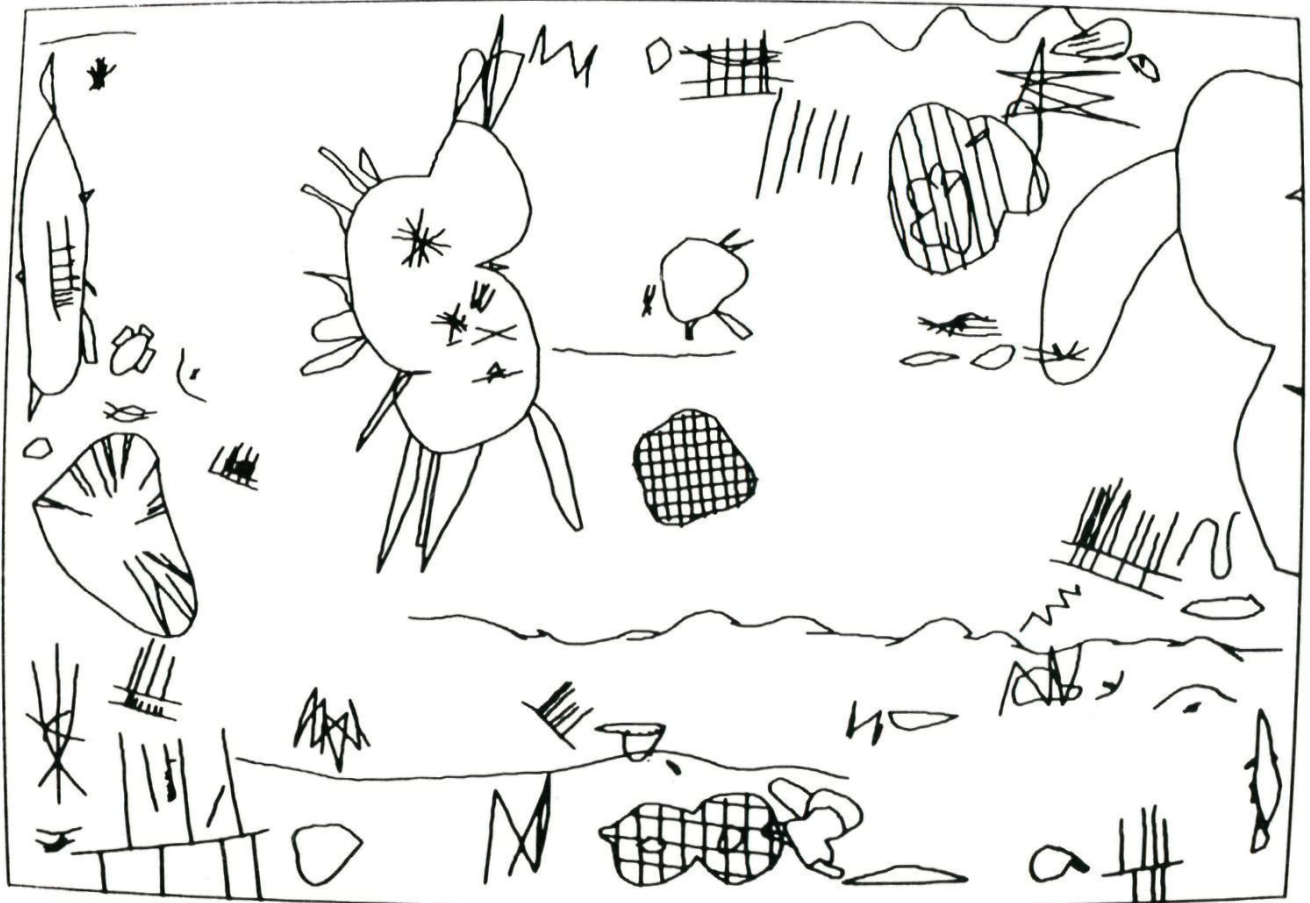
**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 x per schooljaar

Pythagoras



‘Dat kan m’n zusje van drie ook!’ Inderdaad, het lijkt veel op de eerste pogingen van een kind om iets te tekenen. Maar het zijn tekeningen van een robot-schildpad. Meer hierover kun je lezen in het artikel: ‘Tekende schildpad.’

BIJ DE FIGUUR OP DE OMSLAG

Dit is het portret van de man die door een aantekening die hij in de kantlijn van een boek schreef al 300 jaar lang vele wiskundigen aan het speuren heeft gezet . . . en tot nog toe tevergeefs! Het is Pierre de Fermat (1601–1665), een van de belangrijkste wiskundigen uit de 17de eeuw.

Het boek was een uitgave van *Arithmetica* (rekenkunde) van de oude Griek Diophantus en de passage waarbij Fermat de aantekening maakte ging over pythagoreïsche drietallen (zie het vorige nummer van *Pythagoras*).

De kanttekening luidde als volgt: ‘. . . een derde macht kan onmogelijk de som van twee derdemachten zijn, een vierde macht niet de som van twee vierdemachten of in het algemeen: een n -de macht kan nooit de som van twee n -de machten zijn als n groter is dan 2. *Ik heb een werkelijk wonderlijk bewijs van deze stelling gevonden, maar de marge is te klein om het op te schrijven.*’

Fermat beweerde dus dat hij een bewijs had voor de stelling: Er bestaat geen geheel getal n (groter dan 2) waarvoor geldt: $x^n = y^n + z^n$.

Men heeft tot nu toe nog geen bewijs gevonden. Zou de grote wiskundige en getal-theoreticus zich dan toch vergist hebben? Voorlopig blijven we zitten met een beroemd onopgelost probleem dat bekend is onder de naam: het laatste theorema van Fermat.

°De trapformule

Om omhoog te komen, hebben we een trap nodig. Een trap bestaat uit treden en elke trede heeft een horizontaal gedeelte, dat aantrede heet en een verticaal deel, dat optrede heet. Wij geven de aantrede aan met x en de optrede met y .

Soms is een trap steil. Dan is y groter dan x . Bij trappen met een flauwe helling is y kleiner dan x .

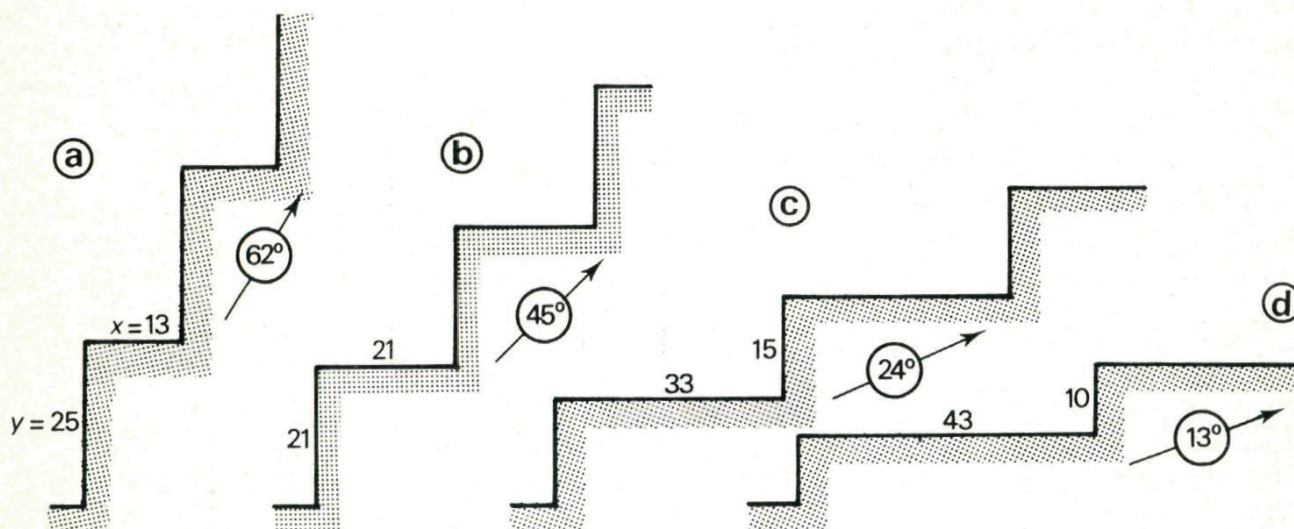


Fig. 1. Trappen met verschillende steilheid.

Verskillende hellingen

Fig. 1a toont een zoldertrap. De horizontale stukken zijn telkens 13 cm diep, terwijl we bij elke stap steeds 25 cm stijgen. De hellingshoek bij deze trap kunnen we berekenen uit $\tan \alpha = 25/13 = 1,923$, zodat $\alpha = 62^\circ$. Dat is dus de hoek met de horizontaal. Die trap is vrij steil.

Prettiger om te bestijgen is trap b. Daar zijn op- en aantrede even groot, elk 21 cm. Deze trap gaat onder 45° opwaarts.

Trappen zoals in figuur c en d komen we tegen als toegang voor een tuinterras, een bordes, de hal van een hotel. Daar is de

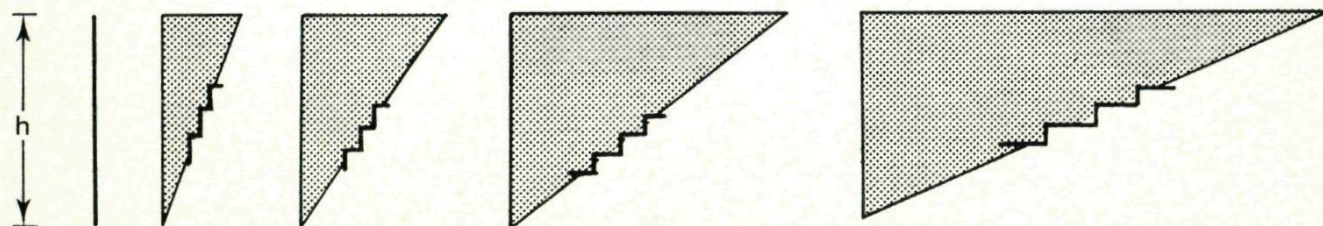
optrede juist kleiner dan de aantrede. We stijgen er maar weinig.

Reken zelf maar uit dat bij getallen 33 en 15 de stijgingshoek 24° wordt en bij 43 en 10 tenslotte 13° .

De relatie tussen x en y

Aannemers die trappen bouwen voor huizen, hebben daar vaak geen gemakkelijk karwei aan. Ze willen het de mensen zo comfortabel mogelijk maken; dat betekent dat ze liever geen steile trap plaatsen. Maar een flauw stijgende trap kost meer ruimte dan een steilere. Het zal duidelijk zijn dat in duurdere huizen,

Fig. 2. Hoe steiler een trap, des te minder ruimte is er nodig.



waar meestal meer ruimte is, de trappen ook minder steil zijn (fig. 2).

Bij een steile klim zouden we y niet al te groot willen kiezen. Eigenlijk zouden we dan juist y kleiner dan x willen kiezen, . . . maar dat strijdt natuurlijk met het idee van een steile trap!

Voorts kunnen we x en y ook niet willekeurig kiezen. We hebben niet de benen van een giraffe en evenmin muizepootjes.

Een timmermansformule

Timmerlieden hanteren een merkwaardige formule om de relatie tussen x en y aan te geven. Ze luidt: $2y + x = 63$. Als een trap volgens deze formule wordt gemaakt, is deze goed te beklimmen.

Fig. 3 toont de grafiek die de relatie tussen aantrede en optrede geeft. Het verband is lineair.

Van 4 punten komen de coördinaten overeen met de 4 trappen van fig. 1. Met

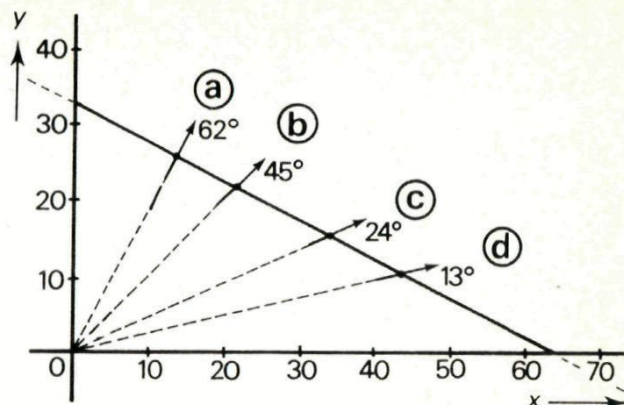


Fig. 3. De trapgrafiek met vergelijking $2y + x = 63$.

pijltjes is in fig. 2 telkens aangegeven hoe steil een trap wordt bij gegeven x en y . Door eenvoudig de lijn vanuit de oorsprong naar dat punt te trekken, krijgen we die steilheid te zien.

Meet de trappen in je huis maar eens op en kijk maar of ze volgens de juiste spelregels gebouwd zijn.

°° Dit getal telt mee

Je komt soms merkwaardige getallen tegen! Neem nu bijvoorbeeld

105263157894736842

Of je dit getal nu verdubbelt of dat je het laatste cijfer wegneemt en vooraan zet, het resultaat is hetzelfde. En ook als je dat met het resultaat opnieuw doet. En nog een keer. En nog een keer.

Een zelfde soort verschijnsel doet zich voor bij sommige repeterende breuken:

$$\frac{1}{7} = 0, 142857 \ 142857 \ \dots$$

$$\frac{2}{7} = 0, 285714 \ 285714 \ \dots$$

$$\frac{4}{7} = 0, 571428 \ 571428 \ \dots$$

$$\frac{8}{7} = 1, 142857 \ 142857 \ \dots$$

Hierbij kun je zeggen dat vermenigvuldiging met 2 het effect heeft dat in de repeterende cijfergroep (het repetendum) de laatste vier cijfers vooraan worden gezet.

Een variant hierop:

$$\frac{2}{13} = 0, 153846 \text{ repetent}$$

$$\frac{8}{13} = 0, 615384 \text{ repetent}$$

$$\frac{32}{13} = 2, 461538 \text{ repetent}$$

Vermenigvuldiging met 4 verplaatst in het repetendum het laatste cijfer naar voren. Misschien kunnen we het gegeven getal ook op deze manier laten ontstaan, dus als repetendum van een breuk. Laten we aannemen dat er een breuk G is met de gevraagde eigenschap. We nemen $a_1, a_2, \dots, a_n$ als cijfers van het repetendum.

$$G = 0, a_1 \dots a_n \text{ repetent} \quad (1)$$

met

$$2G = 0, a_n a_1 \dots a_{n-1} \text{ repetent} \quad (2)$$

Uit regel (1) volgt

$$G + a_n = a_n, a_1 \dots a_n \text{ repetent} \quad (3)$$

Uit regel (2) volgt door vermenigvuldiging met 10:

$$20G = a_n, a_1 \dots a_n \text{ repetent} \quad (4)$$

Uit de gelijkheid van (3) en (4) volgt dat $20G = G + a_n$, dus $G = \frac{a_n}{19}$.

Kiezen we nu voor a_n het cijfer 2, dan krijgen we:

$$\frac{2}{19} = 0, 105263157894736842 \text{ repetent.}$$

Vandaar dus.

(Bron: D. Pedoe, *The gentle art of mathematics*.)

°Graankorrels

H.J. Slieker

Er is een legende waarin verteld wordt, dat de sjah van Perzië de bedenker van het schaakspel beloonde met alles wat hij maar wilde hebben. Wat de bedenker vroeg, scheen echter niet zoveel te zijn. Op het eerste veld van zijn schaakspel wilde hij 1 graankorrel, op het tweede wilde hij er 2, op het derde wilde hij er 4 en verder telkens het dubbele op het volgende veld. De sjah dacht dat het een redelijk verzoek was en zond daarom een bediende weg om een zak graan te halen. Maar wat gebeurde?

Het totale aantal korrels nam zo snel toe dat er bij het vierenzestigste veld meer dan 9 quintiljoen korrels waren (9.000.000.000.000.000.000). Dit zou genoeg zijn om Perzië onder een laag van 7 cm graan te bedekken!!

Het is natuurlijk overbodig om te zeggen dat de sjah niet zo in zijn sas was toen hij ontdekte dat de bedenker meer kreeg dan hij verwachtte.

We gaan dit totale aantal korrels eens bekijken:



Het aantal korrels per veld is een reeks: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 (machten van 2). Deze reeks noemen we de binaire reeks (opm. $2^0 = 1$).

Als we een kleiner schaakbord nemen met 4 vlakken dan is de som 'van korrels' $1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

1	2	of	2^0	2^1
4	8		2^2	2^3

De som bij een schaakbord met negen vlakken is $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 511$.

1	2	4	of	2^0	2^1	2^2
8	16	32		2^3	2^4	2^5
64	128	256		2^6	2^7	2^8

Zou hier een logisch verband in zitten? Kijken we nog eens naar het schaakbord van 4 velden: $15 = 16 - 1 = 2^4 - 1$.

Het aantal op het schaakbord van 9 velden is $511 = 512 - 1 = 2^9 - 1$.

Dit hulpmiddeltje gaan we gebruiken op een schaakbord met 16 velden:

als je optelt $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{15} = 65.535 = 65.536 - 1 = 2^{16} - 1$.

Bij 25 velden krijgen we dan 33554399 (!!)

graankorrels. Je begrijpt dat bij een echt schaakbord met 64 velden er dus $2^{64} - 1$ korrels zijn. Het bovenstaande probleem kenden jullie misschien al. Stel nu dat onze bedenker van het schaakspel nog meer had willen hebben door op het eerste veld 1, tweede veld 3, derde veld 9, vierde veld 27, ... enz. graankorrels te vragen. Bij een schaakbord met 4 vlakken had hij dan:

$1 + 3 + 9 + 27 = 40$ korrels gehad; bij een schaakbord met 9 velden had hij:

$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187 + 6561 = 9841$ korrels ontvangen.

Ook hier verwacht je misschien wel een 'formule'. Die is er!

Een 4-velds bord gaf ons 40 korrels: $40 = \frac{81 - 1}{2} = \frac{3^4 - 1}{2}$.

Een 9-velds bord telde in totaal 9841 korrels: $9841 = \frac{19.683 - 1}{2} = \frac{3^9 - 1}{2}$.

Een bord met 16 velden levert ons $\frac{3^{16} - 1}{2} = 21.523.350$ korrels op! (dat is al 21.457.815 meer dan in ons eerste probleem!)

Je zult wel begrijpen dat een 64-velds bord ($\frac{3^{64} - 1}{2}$) ontzettend veel korrels oplevert.

Als ik in plaats van machten van 3, nu machten van 4 neem, dan krijg ik op een 4-vlaks veld: $1 + 4 + 16 + 64 = 85 = \frac{4^4 - 1}{3}$; op een 9-vlaks veld: $1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 1024 + 1096 + 16384 + 65536 = 87381 = \frac{4^9 - 1}{3}$ korrels.

Ik vermoed dus op een compleet schaakbord: $\frac{4^{64} - 1}{3}$.

Bij machten van 5 krijg ik op een 4-vlaks veld: $1 + 5 + 25 + 125 = 156 = \frac{5^4 - 1}{4}$ en bij een 9-vlaks veld: $\frac{5^9 - 1}{4}$ (reken maar na!).

Je ziet dat er duidelijk verband bestaat tussen het aantal vlakken en met welke macht je rekt.

Ik schrijf de gevonden resultaten eens onder elkaar:

velden machten	4 velden	9 velden	16 velden	64 velden
2	$\frac{2^4 - 1}{2 - 1}$	$\frac{2^9 - 1}{2 - 1}$	$\frac{2^{16} - 1}{2 - 1}$	$\frac{2^{64} - 1}{2 - 1}$
3	$\frac{3^4 - 1}{3 - 1}$	$\frac{3^9 - 1}{3 - 1}$	$\frac{3^{16} - 1}{3 - 1}$	$\frac{3^{64} - 1}{3 - 1}$
4	$\frac{4^4 - 1}{4 - 1}$	$\frac{4^9 - 1}{4 - 1}$	$\frac{4^{16} - 1}{4 - 1}$	$\frac{4^{64} - 1}{4 - 1}$

Het is nu niet meer moeilijk om een formule hieruit te vissen: $x \in \mathbb{N} \wedge x > 1$
 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{63} =$
 $= \frac{x^{64} - 1}{x - 1}.$

(Deze formule kunnen we nog abstracter maken, want het gaat ook nog op voor 'grotere schaakborden' — dus met meer velden. Dan wordt het:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.)$$

°Een schildpad die tekent !

Rond de jaarwisseling 1977/78 werd in het Stedelijk Museum in Amsterdam een tentoonstelling gehouden van het werk van Harold Cohen, een Engels kunstenaar, die sinds 1968 les geeft aan de Universiteit van Californië in San Diego. Cohen heeft studie gemaakt van de wijze waarop een mens tekent. Hij kwam tot 300 regels waarmee vervolgens zijn zegen een tekenprocédé beschreven kan worden.

Om deze bewering waar te maken, zou men de regels moeten opgeven aan iemand die nog nooit getekend heeft, nog nooit een tekening gezien heeft, maar wel geschikt is om de regels stipt uit te voeren. Een mens met deze eigenschappen is nog niet gevonden, maar kon in 'het Stedelijk' wel worden gespeeld. 'Gesimuleerd' zegt men in de computerwereld. Want het was een computerprogramma waarin de regels waren verwerkt en waarmee de tekenstift werd gestuurd.

Apparatuur

Nu zijn er verschillende manieren om met behulp van computers te tekenen. Men ziet wel tekeningen op beeldscherm of men schrijft met een inktpen door middel van een tekenmachine (plotter). In het museum was gekozen voor een meer spectaculaire oplossing: een wagentje met viltstift dat over een vel papier van 3 bij 5

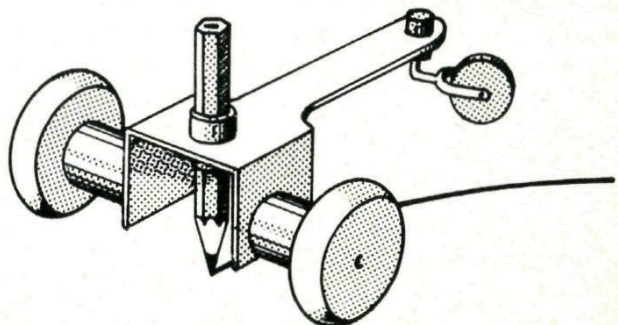


Fig. 1.

meter rijdt en daarbij naar wens een duidelijk spoor achterlaat. Dit wagentje, aangeduid met troetelnaampje 'schildpad', wordt bestuurd door middel van een draadverbinding met een PDP 11/34 computer (Digital Equipment). De commando's van de computer worden in de schildpad omgezet in het op papier zetten van de pen of juist het optillen ervan, en in het draaien van de wielen. Een probleem met de schildpad is dat de wielen iets kunnen slippen waardoor de pen niet

precies op de plaats beland waar deze volgens het computerprogramma had moeten zijn. Daarom is de installatie tevens voorzien van een sonar navigatiesysteem. De schildpad zendt 20 maal per seconde een ultrasonisch geluidje uit. Microfoons op de vier hoeken van het papier vangen het geluid op, met welke gegevens de plaats van de schildpad nauwkeurig berekend kan worden. Deze terugkoppeling geeft de computer de mogelijkheid een eventuele slip te corrigeren.

Programmatuur

Zoals gezegd is het een computerprogramma dat de tekeningen produceert. Het programma bestaat uit verschillende niveaus. Het laagste niveau is dat gedeelte dat de pen- en wielbewegingen voorschrijft om lijnen te trekken. Een hoger niveau coördineert de lijnen zodat er een figuur ontstaat. Het hoogste niveau voegt figuren samen tot een tekening. Dit alles volgens bepaalde regels die het menselijk gedrag moeten simuleren.

We gaan nu alleen in op de laagste niveaus: het produceren van eenvoudige

lijnen. Dit systeem is door de Amerikaan Seymour Papert ook in het meetkunde-onderwijs toegepast. Nu wordt waarschijnlijk ook het verband van dit verhaal met ons wiskundetijdschrift duidelijk.

Het laagste niveau

We nemen aan dat op het papier zetten van de pen het gevolg is van het commando

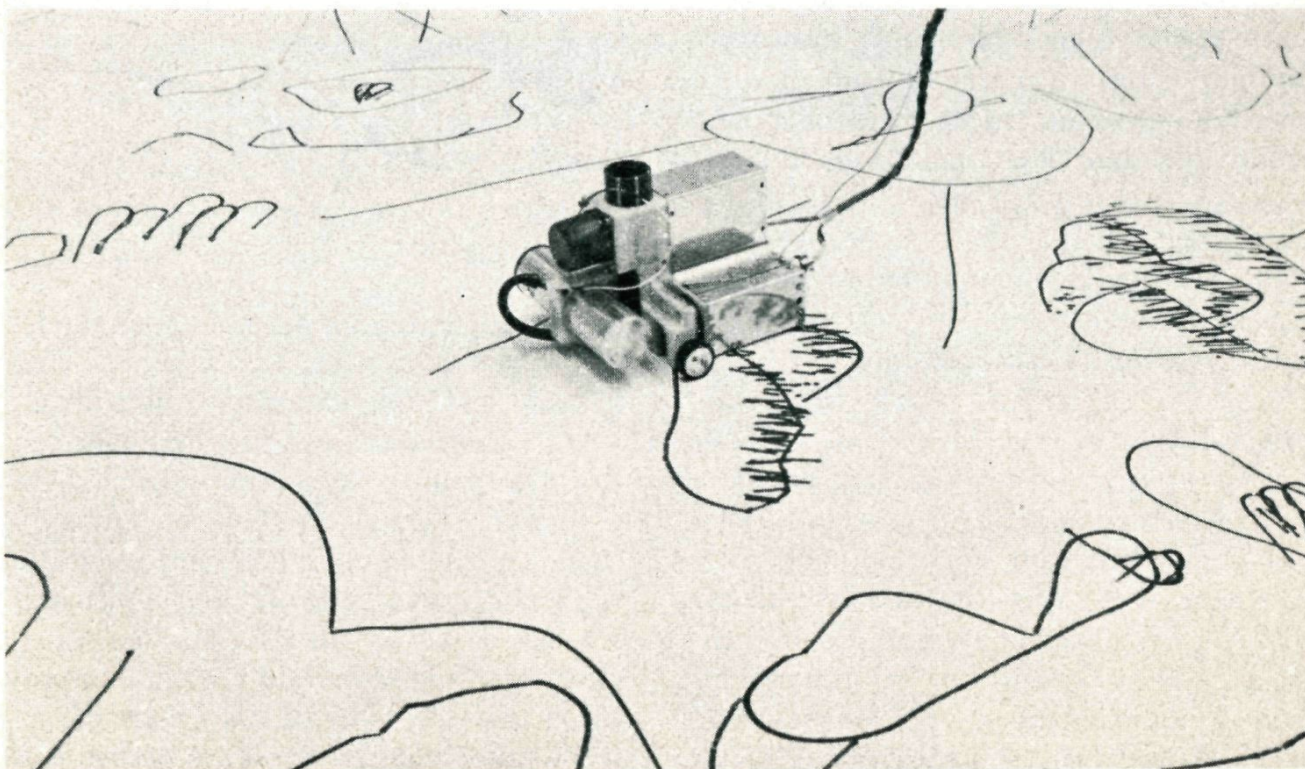
PEN NEER

en het omgekeerde van

PEN OP

De pen bevindt zich precies tussen de aangedreven wielen. Er is nog een derde wiel dat als enige functie heeft de schildpad voor omvallen te behoeden: een zwenkwiel dat niet aangedreven of gestuurd wordt (fig. 1). De wielen aan weerszijden van de pen kunnen onafhankelijk van elkaar worden aangedreven. Zo is het bijvoorbeeld mogelijk om, door het precies even hard maar in tegengestelde richting te laten draaien van de wielen, de schildpad te roteren met de pen als as. We nemen nu aan dat met

LINKER 1



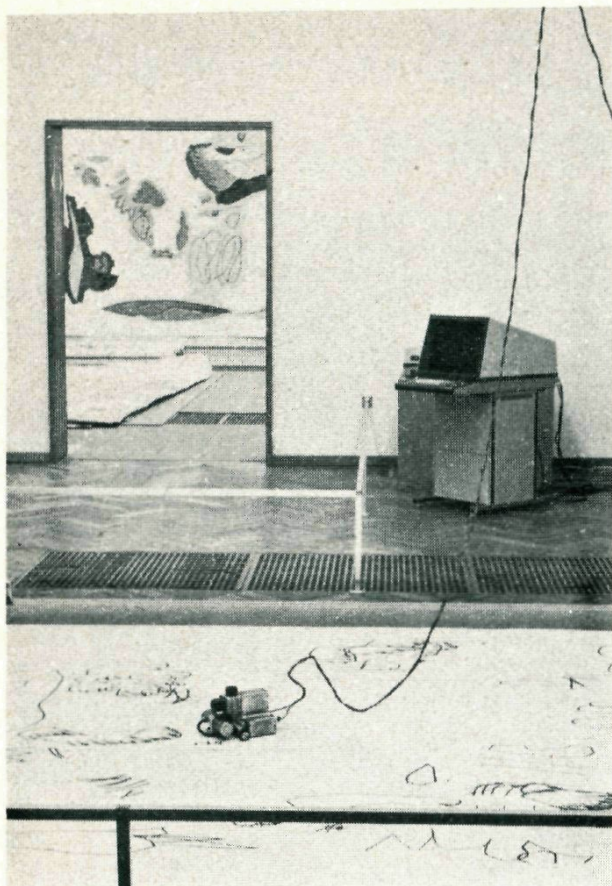


Fig. 3.

we het linker wiel precies 1 mm vooruit kunnen laten rijden.

LINKER 1; RECHTER 1

beweegt onze schildpad 1 mm vooruit.

Door de wielafstand handig te kiezen (denkertje 1) kan met

LINKER -1; RECHTER 1

de schildpad 1° linksom gedraaid worden.

Een klein stapje hoger

Om ons niet voortdurend bezig te hoeven houden met het draaien van de wielen, voeren we de volgende commando's in.

VOORUIT

TERUG

LINKSOM

RECHTSOM

waarbij bijvoorbeeld

- VOORUIT · 5 overeenkomst met LINKER 5; RECHTER 5, dus 5 mm vooruit.
- TERUG 7 overeenkomst met LINKER -7; RECHTER -7, dus 7 mm achteruit.
- LINKSOM 9 overeenkomst met LINKER -9; RECHTER 9, een draai linksom van 9 graden.
- RECHTSOM 13 overeenkomst met LINKER 13; RECHTER -13, een draai rechtsom van 13 graden.

Een programma om de schildpad een vierkantje te laten tekenen, kan als volgt luiden:

```
(1)  PEN NEER
      VOORUIT 20
      RECHTSOM 90
      VOORUIT 20
      RECHTSOM 90
      VOORUIT 20
      RECHTSOM 90
      VOORUIT 20
      PEN NEER
```

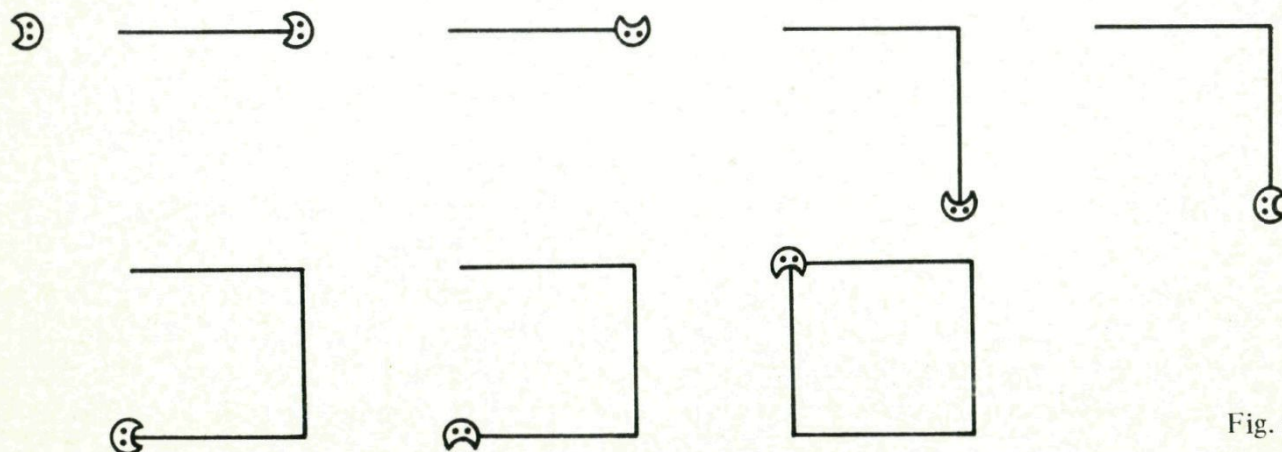


Fig. 4.

De herhaling die optreedt in de commando's is wat slaapverwekkend. We knappen de situatie iets op door de herhaalde twee regels door één te vervangen.

(2b) PEN NEER
ZIJDEHOEK
ZIJDEHOEK
ZIJDEHOEK
ZIJDEHOEK
PEN OP

Maar ZIJDEHOEK is geen commando dat bekend is aan onze schildpad. We moeten bekend maken dat we hieronder verstaan, met behulp van de commando's AFSPRAAK en EIND.

(2a) AFSPRAAK ZIJDEHOEK
VOORUIT 20
RECHTSOM 90
EIND

Een soortgelijke oplossing voor het tekenen van een gelijkzijdige driehoek is:

(3) AFSPRAAK DRIEKANT
VOORUIT 30
LINKSOM 120
EIND
PEN NEER
DRIEKANT
DRIEKANT
DRIEKANT
PEN OP

Inmiddels is er een soort taal ontstaan waarin we ons tot de schildpad kunnen richten. Die taal, althans de Amerikaanse versie ervan, heet LOGO.

Meer LOGO

We bekijken de volgende constructie.

(4) AFSPRAAK DRIEKANT
VOORUIT 30
LINKSOM 120
DRIEKANT
EIND
PEN NEER
DRIEKANT

De bovenste vijf regels betreffen een afspraak: de zesde en zevende regel zijn

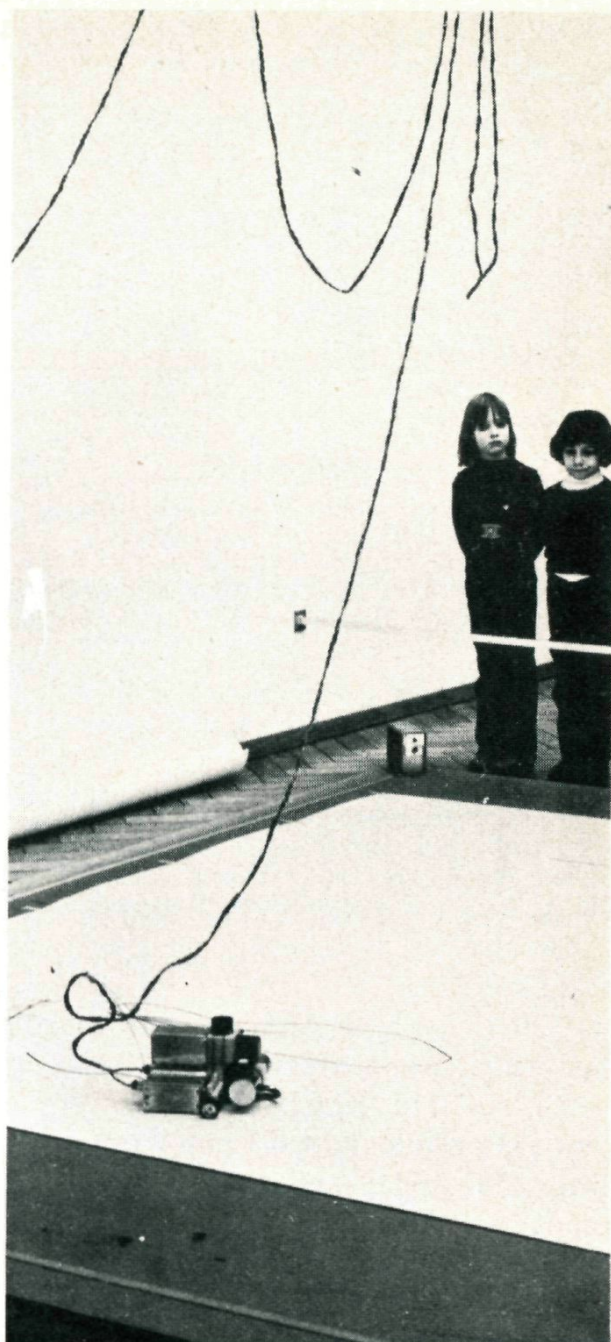


Fig. 5.

directe commando's PEN NEER en DRIEKANT. De schildpad zet de pen op papier en 'kijkt' bij de afspraak DRIEKANT en doet VOORUIT 30 en LINKSOM 120 en krijgt dan het commando DRIEKANT. De schildpad kijkt bij de afspraak DRIEKANT en doet VOORUIT 30 en LINKSOM 120 en . . . We moeten de computer uitschakelen om de arme schildpad tot rust te brengen. Gelukkig is er op de bedienende schrijfmachine wel

een knop om een als maar doorlopend proces te stoppen.

Nog een voorbeeld.

(5) AFSPRAAK DRIEKANT

(LENGTE)

VOORUIT LENGTE

LINKSOM 120

DRIEKANT (LENGTE)

EIND

PEN NEER

DRIEKANT (40)

Deze commando's laten de schildpad een gelijkzijdige driehoek aflopen met zijde van 40 mm. Door het getal in de onderste regel te vervangen door een ander, kunnen we driehoeken van verschillende grootte laten maken.

Een voorbeeld nu waarin we zowel de lengte als de hoek kunnen kiezen.

(6) AFSPRAAK VEELHOEK

(LENGTE, HOEK)

VOORUIT LENGTE

LINKSOM HOEK

VEELHOEK (LENGTE, HOEK)

EIND

PEN NEER

We zien hiervan enkele toepassingen in de volgende figuren.

VEELHOEK (20, 60)

VEELHOEK (1, 3)

VEELHOEK (65, 156)

VEELHOEK (40, 144)

VEELHOEK (20, 40)

Het laatste voorbeeld, met vele fraaie resultaten.

(7) AFSPRAAK SPIRAAL (LENGTE, HOEK)

VOORUIT LENGTE

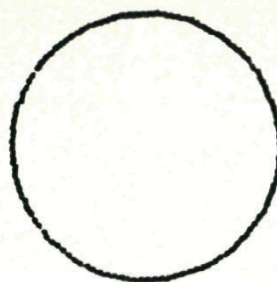
RECHTSOM HOEK

SPIRAAL (LENGTE+1, HOEK)

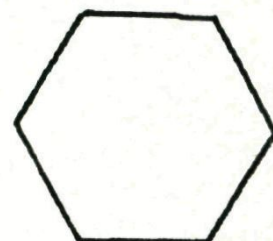
EIND

PEN NEER

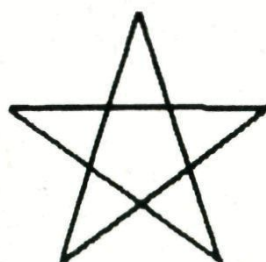
.....



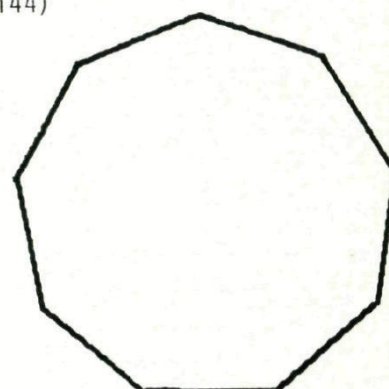
VEELHOEK (1,3)



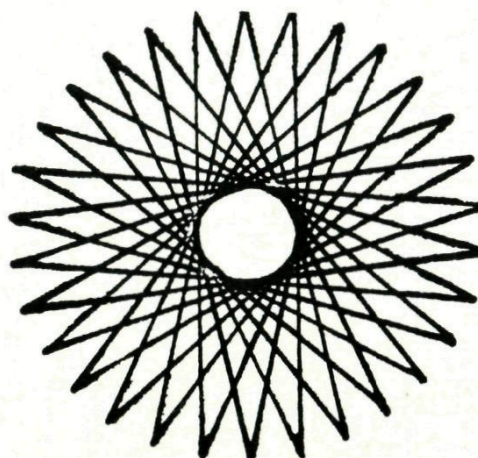
VEELHOEK (20,60)



VEELHOEK (40,144)



VEELHOEK (20,40)



VEELHOEK (65,156)

Geven we op de plaats van de puntjes het commando SPIRAAL (2, 90) dan gebeurt er het volgende (zie de fig. 11 t.e.m. 16). SPIRAAL (2, 90) dus:

VOORUIT 2

RECHTSOM 90

SPIRAAL (3, 90) dus:

VOORUIT 3

RECHTSOM 90

SPIRAAL (4, 90) dus:

VOORUIT 4

enzovoort

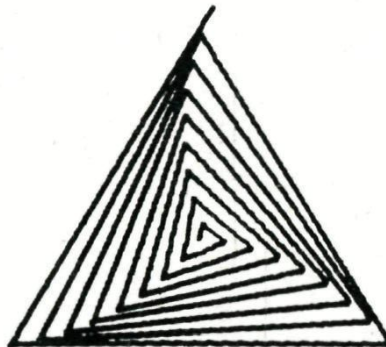
We zijn hiermee nog niet toe aan de 'kindertekeningen' die Harold Cohen door zijn computer laat maken, maar voor wiskundig geïnteresseerden hebben onze figuren toch ook hun bekoring.

Bronnen

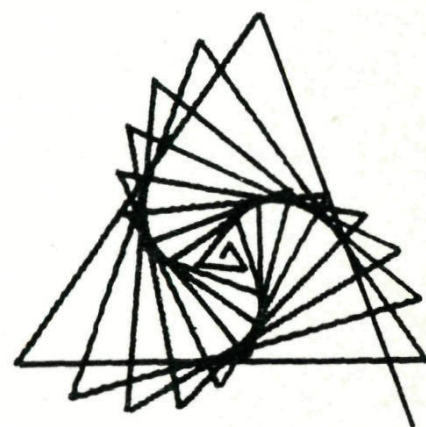
- *Real time clock*, 4e jaargang, nummer 5, uitgave Digital Equipment B.V.
- Foto's uit het Stedelijk Museum van Becky Cohen.
- Seymour Papert, *Teaching children thinking*, Massachusetts Institute of Technology.
- Michael A. Arbib, *Computers en de cybernetische samenleving*, (schildpad heet daarin 'kever'), uitgave Academic Service, Postbus 96996, 2509 JJ Den Haag.



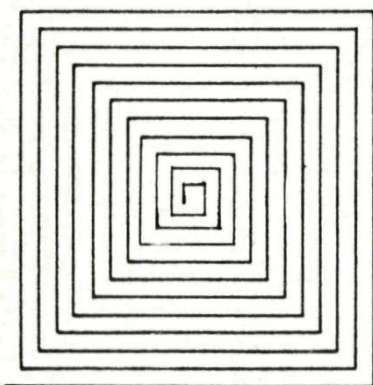
SPIRAAL (1, 120)



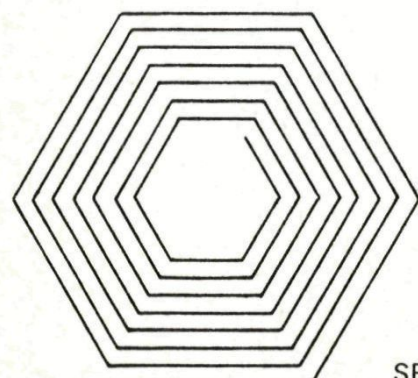
SPIRAAL (1, 121)



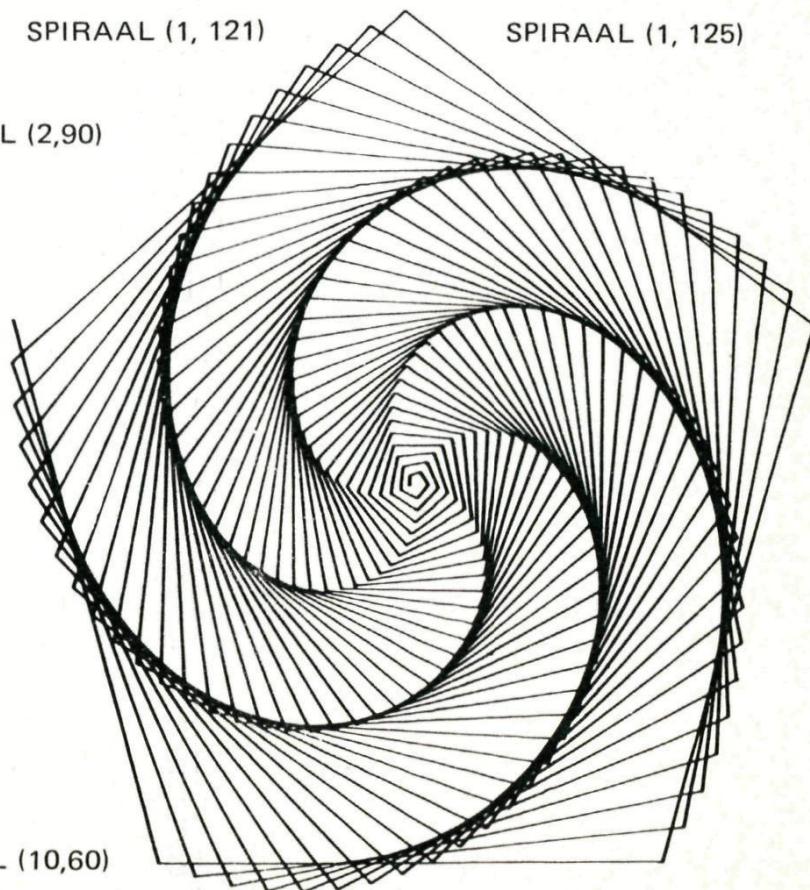
SPIRAAL (1, 125)



SPIRAAL (2, 90)



SPIRAAL (10, 60)



SPIRAAL (3, 73)

De 20e Internationale Wiskunde Olympiade (II)

J. v.d. Craats

Zoals in het vorige nummer beloofd is, geven we hier de oplossingen van de opgaven 2, 3, 4 en 6 van de 20e Internationale Wiskunde Olympiade.

Blokken en bollen

Opgave: P is een gegeven punt binnen een gegeven bol. A , B en C zijn drie punten op de bol zo, dat PA , PB en PC onderling loodrechte lijnstukken zijn. Q is het hoekpunt van het blok opgespannen door de lijnstukken PA , PB en PC zo, dat PQ een lichaamsdiagonaal is.

Bepaal de verzameling van alle punten Q als A , B en C variëren.

Oplossing: Stel dat de gegeven bol straal 1 heeft. Noem de afstand van P tot het middelpunt r ($r < 1$). Laat in de ruimte een vast rechthoekig assenkruis gegeven zijn. Breng de bol in een zodanige positie dat PA , PB en PC evenwijdig zijn aan de coördinaatassen, en dat het middelpunt met de oorsprong O samenvalt. De coördinaten (a, b, c) van P voldoen dan aan $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$, en

$$A = (\pm(1 - b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}, b, c)$$

$$B = (a, \pm(1 - a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}, c)$$

$$C = (a, b, \pm(1 - a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}})$$

$$Q = (\pm(1 - b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}, \pm(1 - a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}, \pm(1 - a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}})$$

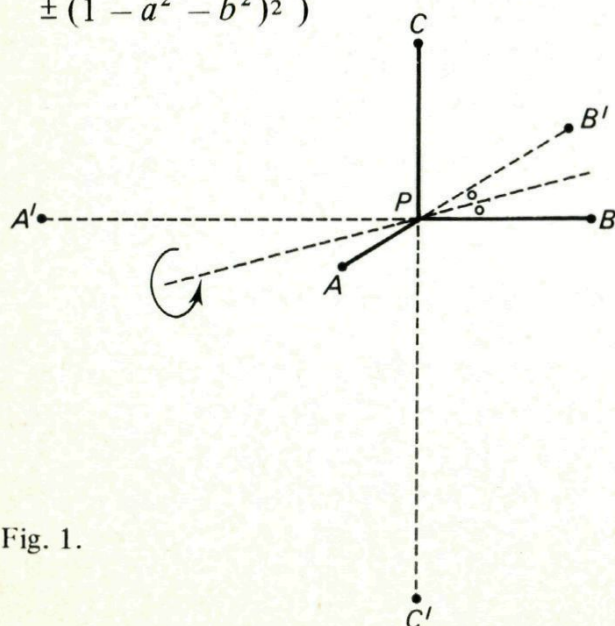


Fig. 1.

(zie fig. 1). De tekens bij de wortels hangen af van de richtingen van PA , PB en PC . De afstand $d(O, Q)$ van O tot Q voldoet aan $d(O, Q)^2 = 1 - b^2 - c^2 + 1 - a^2 - c^2 + 1 - a^2 - b^2 = 3 - 2r^2$, dus $d(O, Q)$ hangt slechts af van r , en niet van de keuze van A , B en C . Q ligt dus altijd op de bol IB met middelpunt O en straal $(3 - r^2)^{\frac{1}{2}}$.

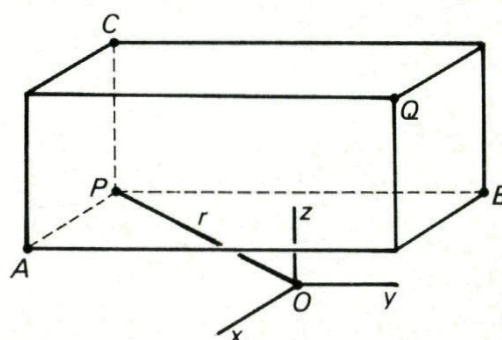


Fig. 2.

Q doorloopt ook *alle* punten van de bol IB . Om dit te bewijzen, beschouwen we eerst een willekeurige positie die Q aanneemt (fig. 2). Noem de hoek tussen OP en OQ φ . Laat men het blok, opgespannen door PA , PB en PC wentelen rond de as OP , dan blijven A , B en C op de gegeven bol, en Q beschrijft een cirkel met OP als as op de bol IB . Als we dus kunnen bewijzen dat φ alle waarden tussen 0 en π aanneemt, dan is daarmee aangetoond dat Q de gehele bol IB doorloopt.

Het inwendig product van OP en OQ is $\pm a(1 - b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} \pm b(1 - a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} \pm c(1 - a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} = r(3 - 2r^2)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi$.

Kiest men PA , PB en PC zo, dat $a = b = c = \frac{r}{\sqrt{3}}$ en zo, dat de tekens bij alle wortels positief zijn, dan is $\cos \varphi = 1$, dus $\varphi = 0$. Laat men vervolgens het stelsel

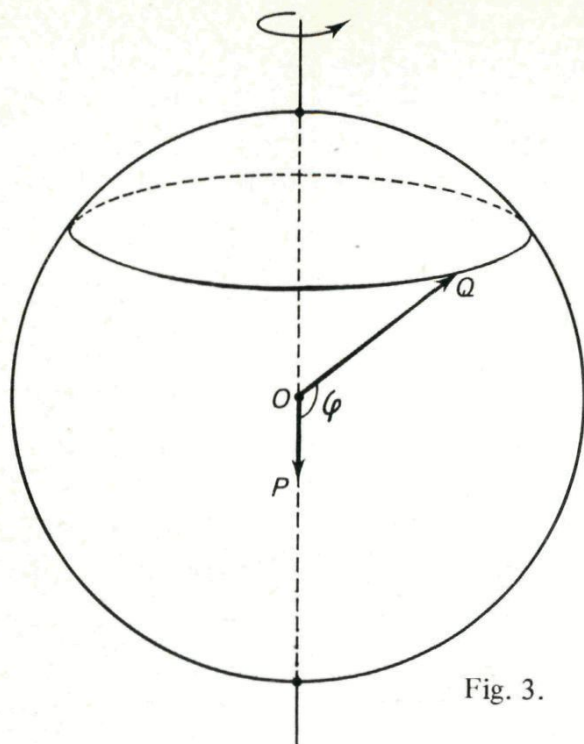


Fig. 3.

PA , PB , PC wentelen over een hoek π rond de buitenbisectrice van hoek APB (waarbij A , B en C steeds op de gegeven bol blijven), dan komt Q uiteindelijk in de positie $Q = (- (1 - b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}, - (1 - a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}, - (1 - a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}})$, zodat $\cos \varphi = -1$, en $\varphi = \pi$. Gedurende de wenteling heeft φ alle waarden tussen 0 en π aangenomen (zie fig. 3).

Er waren veel deelnemers aan de olympiade die de bol IB vonden, maar de meesten konden niet bewijzen dat ook *alle* punten van IB door Q kunnen worden aangenomen. Velen realiseerden zich zelfs niet dat zij dit ook nog moesten bewijzen!

Twee stijgende rijen

Opgave: De verzameling van alle positieve gehele getallen is de vereniging van twee onderling disjuncte verzamelingen

$$\{f(1), f(2), \dots\} \text{ en } \{g(1), g(2), \dots\}$$

met

$$f(1) < f(2) < \dots, g(1) < g(2) < \dots,$$

en

$$g(n) = f(f(n)) + 1 \text{ voor alle } n \geq 1. \text{ Bepaal } f(240).$$

Oplossing: Omdat $g(1) = f(f(1)) + 1 > 1$, is $f(1) = 1$, en dus is $g(1) = 2$. $g(2) = f(f(2)) + 1 > f(2) + 1 > 2 + 1 = 3$, dus $f(2) = 3$.

Op grond van de formule $g(n) = f(f(n)) + 1$ gaat aan elke g -waarde een f -waarde vooraf, dus twee op elkaar volgende g -waarden komen niet voor. Alle waarden die géén g -waarde zijn, zijn f -waarden. $f(f(n))$ is dus gelijk aan het aantal g -waarden kleiner dan $f(f(n))$ (en dit zijn er $n - 1$, want $g(n) = f(f(n)) + 1$), plus het aantal f -waarden kleiner dan of gelijk aan $f(f(n))$ (en dit zijn er $f(n)$). Hieruit volgt dus de formule:

$$f(f(n)) = f(n) + n - 1.$$

Stap voor stap leiden we hieruit af:

$$f(3) = f(f(2)) = f(2) + 2 - 1 = 4,$$

$$f(4) = f(f(3)) = f(3) + 3 - 1 = 6,$$

$$f(6) = f(f(4)) = f(4) + 4 - 1 = 9,$$

en zo voortgaande $f(9) = 14$, $f(14) = 22$, $f(22) = 35$, $f(35) = 56$, $f(56) = 90$, $f(90) = 145$, $f(145) = 234$, $f(234) = 378$.

Omdat $f(90) + 1 = f(f(56)) + 1 = g(56) = 146$ een g -waarde is, en er op elke g -waarde een f -waarde moet volgen, is $f(91) = 147$, dus $f(147) = f(91) + 91 - 1 = 237$, en $f(237) = 383$. Evenzo: $f(147) + 1 = f(f(91)) + 1 = g(91) = 238$, dus $f(148) = 239$ en $f(239) = 386$; $f(239) + 1 = f(f(148)) + 1 = g(148) = 387$, dus $f(240) = 388$.

Het is heel merkwaardig dat je ook een formule voor $f(n)$ en $g(n)$ kun geven. Onze derde-prijswinnaar Hans Mulder vond

$$f(n) = \left[\frac{\sqrt{5} + 1}{2} n \right] \text{ en } g(n) = \left[\frac{\sqrt{5} + 3}{2} n \right]$$

(hierbij betekent $[x]$ het grootste gehele getal dat kleiner dan of gelijk aan x is). Door tijdgebrek kon hij zijn bewijs niet helemaal afmaken. Jullie hebben echter alle tijd. Kunnen jullie het?

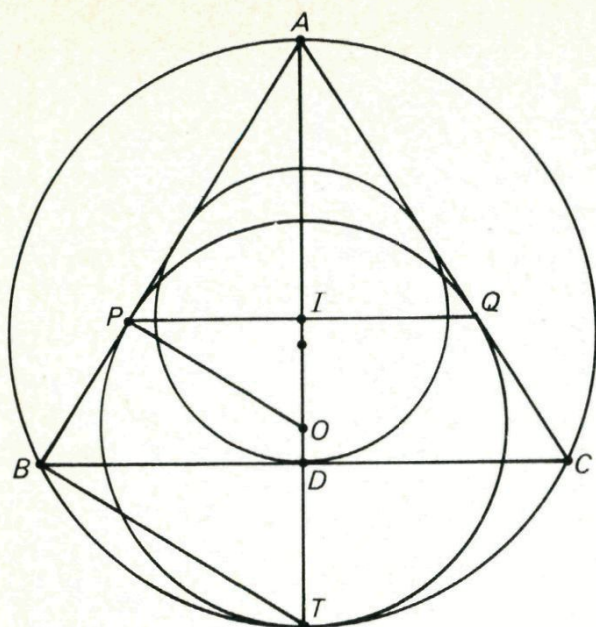


Fig. 4.

Drie cirkels bij een driehoek

Opgave: In driehoek ABC is $AB = AC$. Een cirkel raakt inwendig aan de omgeschreven cirkel van driehoek ABC en bovendien de zijde AB in een punt P , en de zijde AC in een punt Q . Bewijs dat het midden van het lijnstuk PQ het middelpunt is van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC .

Oplossing (zie fig. 4): De puntvermenigvuldiging met centrum A die het raakpunt T van de beide cirkels overvoert in het midden D van BC , voert de cirkel door P , Q en T over in de ingeschreven cirkel van driehoek ABC . Het middelpunt O gaat dus over in het middelpunt van de ingeschreven cirkel.

Omdat AT een middellijn is van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC , is $\angle ABT = \frac{\pi}{2}$. OP is een straal van een cirkel die AB in P raakt, dus $\angle APO = \frac{\pi}{2}$. Hieruit

volgt dat de driehoeken ABT en APQ gelijkvormig zijn. D en I zijn overeenkomstige punten in deze driehoeken. T gaat door de puntvermenigvuldiging over in D , het midden van BC , dus O gaat over in I , het midden van PQ , hetgeen te bewijzen was.

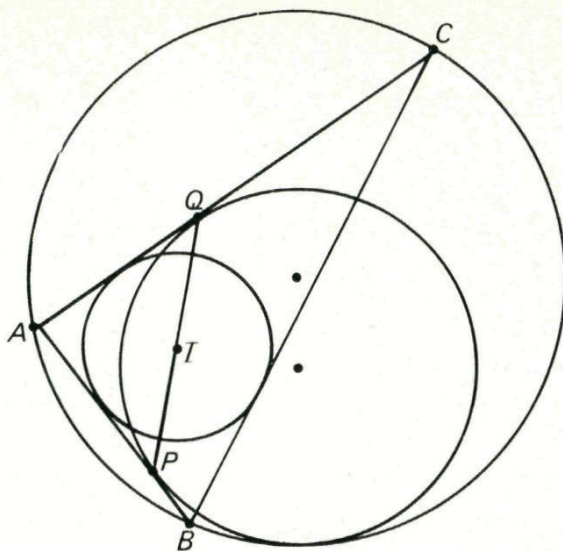


Fig. 5.

De opgave in deze vorm was niet zo verschrikkelijk moeilijk. Echter, ook als driehoek ABC niet gelijkbenig is, is het midden I van PQ het middelpunt van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC ! (zie fig. 5). Zijn er onder onze lezers knappe koppen die dit kunnen bewijzen?

Een internationaal genootschap en een kleurprobleem

Opgave: De leden van een internationaal genootschap komen uit 6 verschillende landen. De ledenlijst bevat 1978 namen, genummerd van 1 t.e.m. 1978. Bewijs dat er ten minste één lid is wiens nummer gelijk is aan de som van de nummers van twee van zijn landgenoten of tweemaal zo groot als het nummer van één van zijn landgenoten.

Oplossing: Dit was verreweg de moeilijkste opgave van de olympiade. We zullen een bewijs uit het ongerijmde geven.

Neem aan dat er een verdeling van 1978 leden over 6 landen zou zijn, zo, dat er geen enkel lid is wiens nummer de som is van de nummers van 2 van zijn landgenoten, of tweemaal zo groot is als het nummer van een landgenoot. We zullen laten zien dat deze aanname tot een tegenspraak leidt.

In het vorige nummer zijn al twee aanwijzingen gegeven. De eerste was dat er in minstens één land minstens 330 leden wonen, want anders zouden er in totaal maar hoogstens $6 \cdot 329 = 1974$ leden zijn. Stel dat zij de nummers

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{330}$$

hebben. De tweede aanwijzing was, dat je met *verschillen* moet werken. We beschouwen de verschillen met het kleinste nummer. Deze 329 verschillen $a_i - a_1$ ($i = 2, 3, \dots, 330$) zijn geen van alle gelijk aan een nummer van een lid uit dit zelfde land (dat we voortaan L_1 zullen noemen). Dan zou immers a_i de som zijn van a_1 en dat nummer (eventueel a_1 zelf). De leden met zo'n verschil als nummer, zijn dus over de overige vijf landen verspreid. In minstens één van die vijf landen, noem dit verder L_2 , wonen minstens 66 van deze leden, want $5 \cdot 65 = 325 < 329$. Stel dat deze leden de nummers

$$b_1 < b_2 < \dots < b_{66}$$

hebben, waarbij $b_j = a_{i_j} - a_1$. De 65 verschillen $b_j - b_1$ ($j = 2, \dots, 66$) zijn niet de nummers van leden uit L_2 . Het zijn echter evenmin nummers van leden uit L_1 ! Immers, $b_j - b_1 = (a_{i_j} - a_1) - (a_{i_1} - a_1) = (a_{i_j} - a_{i_1})$, en dit verschil kan niet het nummer van een lid uit L_1 zijn. Deze 65 verschillen zijn dus nummers van leden uit de overige 4 landen. Hiervan behoren er minstens 17 tot eenzelfde land, noem dit L_3 , want $4 \cdot 16 = 64 < 65$. Net als boven geeft dit 16 verschillen die niet tot L_1 , L_2 of L_3 behoren. Er zijn dan minstens 6 van die verschillen in een land L_4 , want $3 \cdot 5 = 15 < 16$. Dit geeft 5 verschillen die niet tot L_1 t.e.m. L_4 behoren, en er zijn dus minstens 3 van die verschillen in een land L_5 . De twee verschillen hiervan behoren niet tot L_1 t.e.m. L_5 , en dus moeten ze tot L_6 behoren. Het verschil van deze twee is het nummer van een lid dat in géén van de landen L_1 t.e.m. L_6 kan wonen. Tegenspraak.

Je kunt zelf nagaan dat deze redenering ook nog goed gaat als het genootschap slechts 1957 leden zou tellen. Marc van Leeuwen, die voor zijn werk aan deze opgave een speciale prijs verdiende, bewees dat in het algemeen bij een genootschap van N leden, verspreid over n landen, er minstens één lid is wiens nummer de som is van de nummers van twee landgenoten of het dubbele van het nummer van een landgenoot, zodra geldt dat

$$N > n! \cdot \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\right). \quad (1)$$

De Engelse deelnemer Richard Ewen Borchers ontdekte dat de opgave op de volgende wijze 'vertaald' kan worden. Neem 1979 punten, genummerd van 1 t.e.m. 1979. Verbind elk tweetal punten door een draad, waarbij er 6 verschillende kleuren draad gebruikt worden (corresponderend met de 6 landen). We doen dit op de volgende wijze: de verbindingsdraad van a_i en a_j krijgt de kleur van het land waarin het lid met het nummer $|a_i - a_j|$ woont. De wirwar van punten en al hun verbindingsdraden noemt men wel een *volledige graaf*. We hebben hier dus een gekleurde volledige graaf met 1979 hoekpunten gemaakt. De bewering is nu:

Er is in het genootschap een lid wiens nummer gelijk is aan de som van de nummers van twee landgenoten of het dubbele van een landgenoot, dan en slechts dan als er in de bijbehorende gekleurde volledige graaf drie punten zijn waarvan de drie onderlinge verbindingsdraden dezelfde kleur hebben.

Stel, om dit te bewijzen, eerst dat er in de graaf zo'n driehoek van één kleur is. Stel de hoekpunten zijn a , b en c , met $a < b < c$. Aangezien $c - a = (c - b) + (b - a)$ is dan inderdaad het nummer $c - a$ de som van de twee (eventueel gelijke) nummers $c - b$ en $b - a$, alle-

maal van leden uit hetzelfde land. Als, omgekeerd, p , q en r uit hetzelfde land zijn met $p \leq q < r$ en $r = p + q$, is bij voorbeeld de driehoek $1, 1 + p, 1 + p + q$ van één kleur.

Richard bewees nu dat er in zo'n volledige, met 6 kleuren gekleurde graaf met 1979 hoekpunten altijd een driehoek van één kleur te vinden is. In wezen komt zijn bewijs op hetzelfde neer als hetgeen hierboven gezegd is, maar misschien kun je het in deze vorm beter volgen. Stel dat er *niet* zo'n driehoek is. Neem een hoekpunt van waaruit zoveel mogelijk draden van één kleur vertrekken. Laten we zeggen dat deze kleur rood is. Het aantal rode draden vanuit dat punt is dan minstens 330, want vanuit elk hoekpunt vertrekken 1978 draden. De verbindingsdraden van de 330 eindpunten zijn dan geen van alle rood, want anders zou er een rode driehoek zijn. Er zijn dus 330 punten waarvan de verbindingsdraden met vijf verschillende

kleuren zijn gekleurd. Ga je op dezelfde wijze verder, dan kom je uiteindelijk terecht op 3 punten waarvan de verbindingsdraden de laatst overblijvende kleur, laten we zeggen blauw, hebben. Deze vormen dus een blauwe driehoek, in tegenspraak met onze veronderstelling dat er geen driehoeken van één kleur zouden zijn.

Richard bewees ook de algemene formule (1), en kreeg voor zijn werk aan deze opgave, net als Marc van Leeuwen, een speciale prijs. Je kunt zelf ook eens proberen de algemene formule te bewijzen. Je kunt ook nog je krachten beproeven op de volgende variant van de opgave: Zijn er 1978 leden, verspreid over *vijf* landen, dan is er minstens één lid wiens nummer gelijk is aan de som van de nummers van twee van zijn landgenoten (de mogelijkheid van het dubbele van een nummer van een landgenoot is nu dus weggelaten!).

De pantograaf

Laatst kreeg ik een pantograaf in handen. Van de bijgevoegde beschrijving neem ik het volgende over:

**DE PANTOGRAAF DIENST TOT HET:
VERGROTEN - VERKLEINEN - NATUURLIJKE MOTIEVEN**

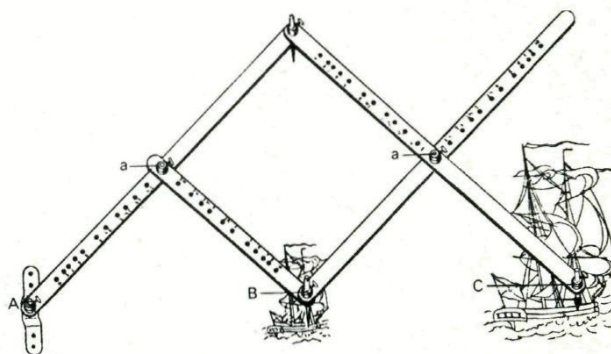
De herleidingswaarden op de edel aluminium strips aangegeven zijn als volgt:
 $1\frac{1}{2} - 2 - 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4} - 3 - 3\frac{1}{2} - 4 - 5 - 6 - 8 - 10$.

Om op grotere schaal te reproduceren: bepaalt men eerst de vergrotingsschaal, punten $a - c$.

Plaats een tekenstift in houder C.

De aftaster op B.

Zet de voetspil goed vast met tekenpauzen.



Houd de tekenstift vast en kijk naar de in B geplaatste aftaster en volg de lijnen.

Om te verkleinen, plaats de aftaster op C en de tekenstift op B.

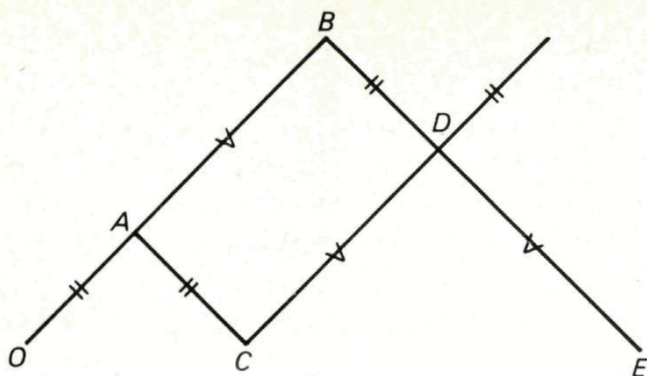
Om volgens natuurlijke grootte te reproduceren:

verplaatst men de metalen voetspil naar B (dat nu het vaste punt wordt).

De aftaster op C.

De tekenstift op A.

Je wordt dan natuurlijk nieuwsgierig naar de verklaring van een en ander. Laten we eens een poging wagen.



Het gaat erom, dat we proberen aan te tonen, dat de getekende figuur gelijkvormig is met de oorspronkelijke. D.w.z. we willen aantonen, dat de getekende figuur congruent is met een produktfiguur van de oorspronkelijke.

Allereerst een vereenvoudigde tekening van het apparaat. In de figuur is aangegeven welke stukken even groot zijn. (Voetspil in O , aftaster in C , tekenstift in E .) In O, A, B, C, D zijn draaischarnieren aangebracht. We merken op, dat de punten $O,$

C en E op een rechte lijn liggen, hoe we de pantograaf ook draaien. Immers $\triangle OAC$ en $\triangle OBE$ zijn gelijkbenig met dezelfde basishoek AOC .

Het is duidelijk, dat vierhoek $ABDC$ een parallellogram is: de overstaande zijden zijn gelijk. Daaruit volgt $OB \parallel CD$ en $AC \parallel BD$. Hieruit blijkt, dat $\triangle OCA \sim \triangle OEB$ wegens de gelijkheid van overeenkomstige hoeken.

Dus $OA : OB = OC : OE$

$r : pr = OC : OE$ dus

$OC : OE = 1 : p$.

Dat betekent, dat E verkregen wordt uit C door vermenigvuldiging met p . De getekende figuur wordt dus een produktfiguur van de oorspronkelijke, waarbij de vermenigvuldigingsfactor bepaald is door de plaats van punt A (en punt D).

De beschreven werking van het instrument kun je nu eenvoudig nagaan.

CRYPTARITMETRISCHE OPTELSOM

D	R	I	E	
		E	N	
Z	E	V	E	N
		Z	I	N
P	R	I	E	M

Ir. H. Nijon

In de bewering die je hier leest zijn tien verschillende letters gebruikt. De bedoeling is deze letters te vervangen door cijfers. Iedere letter natuurlijk steeds door het zelfde cijfer. Uiteindelijk zal er dan een kloppende optelsom verschijnen, waarin alle tien cijfers voorkomen.

Geen der getallen mag met een nul beginnen.

Teneinde kracht bij deze uitspraak te zetten, verlangen we, dat het getal voor PRIEM, een priemgetal is.

Bovendien moet ook de som der cijfers van PRIEM een ondeelbaar getal zijn.

Denkertjes

1. Wat is de afstand tussen de aangedreven wielen van onze schildpad, als LINKER -1 ; RECHTER 1 een rotatie van 1° veroorzaakt?
2. Er is een verschil in effect tussen de commando's van (1) en die van (2a) plus (2b). Welk?

°° Vermenigvuldigen van getallen met negenvouden

A. Lecluse

De gehele theorie is gebaseerd op de vermenigvuldiging:

$$9 \times 123456789 = 1111111101$$

Laten we nu van het getal 123456789 steeds één cijfer weg, dan krijgen we de volgende rij:

$$\begin{array}{l} 23456789 \times 9 = 211111101 \\ 1\ 3456789 \times 9 = 121111101 \\ 12\ 456789 \times 9 = 112111101 \\ 123\ 56789 \times 9 = 111211101 \\ 1234\ 6789 \times 9 = 111121101 \\ 12345\ 789 \times 9 = 111112101 \\ 123456\ 89 \times 9 = 111111201 \\ 1234567\ 9 \times 9 = 111111111 \\ 12345678 \times 9 = 111111102 \end{array}$$

Hoe hadden we die uitkomsten ook kunnen vinden? Heel eenvoudig!! Allereerst een definitie. We noemen het getal 1111111101 het grondtal bij vermenigvuldigen met 9 (preciezer: bij positieve vermenigvuldigingen met 9).

Hoe vinden we nu de uitkomsten van de bovenstaande vermenigvuldigingen? Neem het grondtal, en laat het eerste cijfer weg, dus: 111111101. Is het n -de cijfer van het getal 123456789 weggelaten, dan moet er op de n -de plaats van het afgeleide grondtal (zo noemen we 111111101 in dit geval) er één bij optellen, en we zijn klaar.

Bekijken we nu eens, wat er gebeurt, wanneer we twee opeenvolgende getallen van 123456789 weglaten:

$$\begin{array}{l} 3456789 \times 9 = 311111101 \\ 1\ 456789 \times 9 = 131111101 \\ 12\ 56789 \times 9 = 113111101 \\ 123\ 6789 \times 9 = 111311101 \\ 1234\ 789 \times 9 = 111131101 \\ 12345\ 89 \times 9 = 11111301 \\ 123456\ 9 \times 9 = 11111121 \\ 1234567 \times 9 = 111111103 \end{array}$$

Ook hier is weer een duidelijke regelmaat! Neem namelijk gewoon het afgeleide

grondtal (laat de eerste twee cijfers van het grondtal weg). Wanneer het n -de en $n + 1$ -de cijfer is weggelaten, moeten we op de n -de plaats van het afgeleide grondtal er twee bij tellen.

Nu volgen de volgende rijtjes, om alles compleet te maken.

3 opvolgende overslaan:

$$\begin{array}{l} 456789 \times 9 = 41111101 \\ 1\ 56789 \times 9 = 14111101 \\ 12\ 6789 \times 9 = 11411101 \\ 123\ 789 \times 9 = 1114101 \\ 1234\ 89 \times 9 = 1111401 \\ 12345\ 9 \times 9 = 1111131 \\ 123456 \times 9 = 11111104 \end{array}$$

4 opvolgende overslaan:

$$\begin{array}{l} 56789 \times 9 = 5111101 \\ 1\ 6789 \times 9 = 1511101 \\ 12\ 789 \times 9 = 1151101 \\ 123\ 89 \times 9 = 111501 \\ 1234\ 9 \times 9 = 111141 \\ 12345 \times 9 = 111105 \end{array}$$

5 opvolgende overslaan:

$$\begin{array}{l} 6789 \times 9 = 611101 \\ 1\ 789 \times 9 = 161101 \\ 12\ 89 \times 9 = 11601 \\ 123\ 9 \times 9 = 11151 \\ 1234 \times 9 = 11106 \end{array}$$

6 opvolgende overslaan:

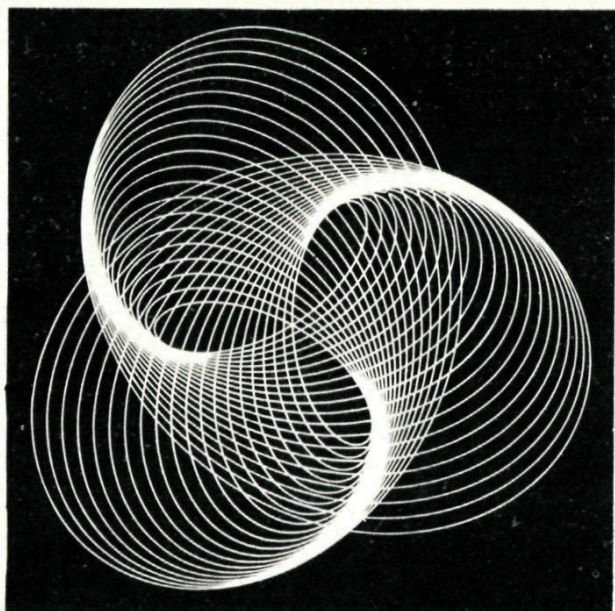
$$\begin{array}{l} 789 \times 9 = 7101 \\ 1\ 89 \times 9 = 1701 \\ 12\ 9 \times 9 = 1161 \\ 123 \times 9 = 1107 \end{array}$$

7 opvolgende overslaan:

$$\begin{array}{l} 89 \times 9 = 801 \\ 1\ 9 \times 9 = 171 \\ 12 \times 9 = 108 \end{array}$$

8 opvolgende overslaan:

$$\begin{array}{l} 9 \times 9 = 81 \\ 1 \times 9 = 9 \end{array}$$



Nadat we de rijtjes bestudeerd hebben, kunnen we de volgende stelling formuleren:

Stelling 1

Wanneer we van het getal 123456789 a opvolgende cijfers weglaten, vanaf de n -de plaats, dan is de uitkomst van de vermenigvuldiging met 9 te vinden door bij het a -de afgeleide grondtal op de n -de plaats a op te tellen.

(a -de afgeleide grondtal is het afgeleide grondtal, waarbij de eerste a cijfers zijn weggelaten.)

Wat gebeurt er nu, wanneer we 2 niet-opvolgende cijfers weglaten? Laten we maar weer een paar rijtjes opschrijven:

2 niet-opvolgende cijfers overslaan

a. met tussenruimten van één cijfer:

$$\begin{aligned} 2 \ 456789 \times 9 &= 22111101 \\ 1 \ 3 \ 56789 \times 9 &= 12211101 \\ 12 \ 4 \ 6789 \times 9 &= 11221101 \\ 123 \ 5 \ 789 \times 9 &= 11122101 \\ 1234 \ 6 \ 89 \times 9 &= 11112201 \\ 12345 \ 7 \ 9 \times 9 &= 11111211 \\ 123456 \ 8 \times 9 &= 11111112 \end{aligned}$$

b. met tussenruimten van twee cijfers:

$$\begin{aligned} 23 \ 56789 \times 9 &= 21211101 \\ 1 \ 34 \ 6789 \times 9 &= 12121101 \\ 12 \ 45 \ 789 \times 9 &= 11212101 \\ 123 \ 56 \ 89 \times 9 &= 11121201 \\ 1234 \ 67 \ 9 \times 9 &= 11112111 \\ 12345 \ 78 \times 9 &= 11111202 \end{aligned}$$

c. met tussenruimten van drie cijfers:

$$\begin{aligned} 234 \ 6789 \times 9 &= 21121101 \\ 1 \ 345 \ 789 \times 9 &= 12112101 \\ 12 \ 456 \ 89 \times 9 &= 11211201 \\ 123 \ 567 \ 9 \times 9 &= 11121111 \\ 1234 \ 678 \times 9 &= 11112102 \end{aligned}$$

d. met tussenruimten van vier cijfers:

$$\begin{aligned} 2345 \ 789 \times 9 &= 21112101 \\ 1 \ 3456 \ 89 \times 9 &= 12111201 \\ 12 \ 4567 \ 9 \times 9 &= 11211111 \\ 123 \ 5678 \times 9 &= 11121102 \end{aligned}$$

e. met tussenruimten van vijf cijfers:

$$\begin{aligned} 23456 \ 89 \times 9 &= 21111201 \\ 1 \ 34567 \ 9 \times 9 &= 12111111 \\ 12 \ 45678 \times 9 &= 11211102 \end{aligned}$$

f. met tussenruimten van zes cijfers:

$$\begin{aligned} 234567 \ 9 \times 9 &= 21111111 \\ 1 \ 345678 \times 9 &= 12111102 \end{aligned}$$

g. met tussenruimten van zeven cijfers:

$$2345678 \times 9 = 21111102$$

Analoog hieraan kunnen we rijen van 3 niet-opvolgende getallen opschrijven en verder. We zullen dit hier niet doen. De lezer zal inmiddels ervan overtuigd zijn, dat de regelmaat aanwezig blijft.

Definitie

Een monotoon dalend getal is een getal dat het cijfer 0 niet bevat en het $(n + 1)$ -de cijfer is altijd kleiner dan het n -de. Analoge definitie voor een monotoon stijgend getal.

We hebben het hierboven gehad over monotoon stijgende getallen. We formuleren nu de hoofdstelling.

Stelling 2

Willen we een monotoon stijgend getal van a cijfers met 9 vermenigvuldigen, dan nemen we het $(9 - a)$ -de grondtal. Zijn vanaf de n -de plaats a cijfers weggelaten, dan moeten we op de n -de plaats van het afgeleide grondtal a erbij tellen.

2e 4e 6e
↓ ↓ ↓

Voorbeeld: $1\ 34\ 67\ 9 \times 9 =$

Het getal bestaat uit 6 cijfers, dus het afgeleide grondtal wordt het $(9 - 6)$ -de, dus het derde: 1111101.

Op de tweede plaats is één cijfer weggelaten, dus op de tweede plaats van het grondtal één erbij tellen: 1211101.

Op de vierde plaats is één cijfer weggelaten, dus op de vierde plaats van het grondtal één erbij tellen: 1212101.

Op de zesde plaats is één cijfer weggelaten, dus op de zesde plaats van het grondtal één erbij tellen: 1212111.

Dit is dus de uitkomst.

Voorbeeld: $379 \times 9 =$

Afgeleide hoofdgetal: 1101.

Eerste twee cijfers weg, dus op eerste plaats er twee bij optellen: 3101; op tweede plaats 456 weggelaten, dus op tweede plaats van het grondtal 3 bij optellen: 3401; op derde plaats 8 weggelaten, dus op derde plaats van het grondtal er 1 bij optellen: 3411; dit is dus de uitkomst.

Voorbeeld: $3478 \times 9 =$

Afgeleide grondtal: 11101

12 weggelaten, dus 1e plaats: + 2 31101

56 weggelaten, dus 3e plaats: + 2 31301

9 weggelaten, dus 5e plaats: + 1 31302

Voorbeeld:

Beredeneer zonder te delen of ontbinding in factoren, welk getal, vermenigvuldigd met 9, 21111111 oplevert.

Oplossing:

Vergelijk met het 2de afgeleide grondtal:

11111101

21111111

De oplossing zal in ieder geval uit zeven cijfers bestaan.

Op de eerste plaats een twee, dus is de 1 weggelaten bij 123456789.

Op de op één na laatste plaats een 1, dus de 8 is ook weggelaten; dus het gevraagde getal is 2345679.

Voorbeeld:

Beredeneer zonder delen of ontbinden welk van de volgende getallen na deling door 9 een getal oplevert, waarvan de cijfers oplopend zijn:

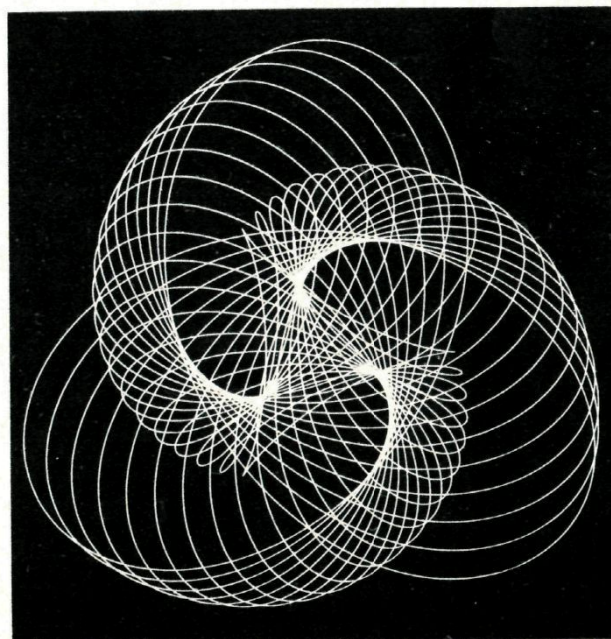
a. 35.322

Eerste plaats een drie, dus 12 weggelaten. Tweede plaats een 5, dus 4567 weggelaten.

Derde plaats een 2, dus 89 weggelaten. Maar dan kan op de laatste plaats geen 2 meer staan!!

b. 1107

Laatste plaats een zeven, dus 456789 weggelaten, dus het getal is 123.



Opgaven voor zelfoefening

1. Beredeneer het getal, dat vermenigvuldigd met 9, 13221 oplevert.
2. Beredeneer welk van de volgende getallen, na deling door 9, monotoon stijgend zijn: a. 5211; b. 18.
3. Bereken 178×9 ; 1259×9 ; 268×9 ; 14579×9 .

Nu gaan we eens monotoon dalende getallen bekijken. Hier wordt alles gebaseerd op de vermenigvuldiging:

$$987654321 \times 9 = 8888888889$$

Het getal 8888888889 zullen we ook weer grondtal noemen. Het n -de afgeleide grondtal zal hier bestaan uit de $(10 - n)$ laatste cijfers van het grondtal.

Laten we nu weer eens kijken naar het rijtje getallen, waarbij we van 987654321 steeds één cijfer weglaten.

$$98765432 \times 9 = 888888888$$

$$98765431 \times 9 = 888888879$$

$$98765421 \times 9 = 999999789$$

$$98765321 \times 9 = 888887889$$

$$98764321 \times 9 = 888878889$$

$$98754321 \times 9 = 888788889$$

$$98654321 \times 9 = 887888889$$

$$97654321 \times 9 = 878888889$$

$$87654321 \times 9 = 788888889$$

We zien, dat als het n -de getal is weggelaten, er op de n -de plaats één wordt afgetrokken. Verder geldt hier precies dezelfde theorie als bij monotoon stijgende getallen, alleen moeten we hier aftrekken in plaats van optellen. De hoofdstelling gaat dus luiden:

Stelling 3

Moeten we een monotoon dalend getal van a cijfers met 9 vermenigvuldigen, dan nemen we het $(9 - a)$ de grondtal. Zijn vanaf de n -de plaats a cijfers weggelaten, dan moeten we op de n -de plaats van het afgeleide grondtal a eraf trekken.

$$\text{Voorbeeld: } 98 \times 9 =$$

$$\text{Afgeleide grondtal } 7e \quad 889$$

$$7654321 \text{ weggelaten, dus laatste cijfer: } -7 \quad 882$$

$$\text{Voorbeeld: } 97 \times 9 =$$

$$7e \text{ afgeleide grondtal} \quad 889$$

$$\text{Laatste 6 cijfers weg: laatste cijfer: } -6 \quad 883$$

$$8 \text{ weg: } 2e \text{ plaats: } -1 \quad 873$$

$$\text{Voorbeeld: } 72 \times 9 =$$

$$7e \text{ afgeleide grondtal} \quad 889$$

$$98 \text{ weg, dus } 1e \text{ plaats: } -2 \quad 689$$

$$6543 \text{ weg, dus } 2e \text{ plaats: } -4 \quad 649$$

$$1 \text{ weg, dus } 3e \text{ plaats: } -1 \quad 648$$

$$\text{Voorbeeld: } 95431 \times 9 =$$

$$4e \text{ afgeleide grondtal} \quad 888889$$

$$876 \text{ weg, dus } 2e \text{ plaats: } -3 \quad 858889$$

$$2 \text{ weg, dus } 5e \text{ plaats: } -1 \quad 858879$$

$$\text{Voorbeeld: } 85321 \times 9 =$$

$$4e \text{ afgeleide grondtal} \quad 888889$$

$$9 \text{ weg, dus } 1e \text{ plaats: } -1 \quad 788889$$

$$76 \text{ weg, dus } 2e \text{ plaats: } -2 \quad 768889$$

$$4 \text{ weg, dus } 3e \text{ plaats: } -1 \quad 767889$$

We kunnen nu dus van alle monotone getallen die vermenigvuldigd moeten worden met 9, direct zeggen, wat de uitkomst zal worden, zonder lastige vermenigvuldigingen.

Kunnen we nu zonder vermenigvuldigen, alle uitkomsten van vermenigvuldigingen van getallen met 9 direct opschrijven? Ja, dat kan.

Het volgende is vrijwel triviaal en we laten het bewijs dan ook aan de lezer over:

Ieder getal van meer dan 2 cijfers is te splitsen in stukken die monotoon zijn (een getal van één cijfer $\neq 0$ is zowel monotoon stijgend als monotoon dalend per definitie).

Wanneer we nu een willekeurig getal met 9 moeten vermenigvuldigen, verdelen we het getal in monotone stukken, die we ieder kunnen uitrekenen en dan optellen.

Hierbij maken we dus gebruik van de distributieve wet van IN.

$$\begin{aligned} \text{Voorbeeld: } 27347958 \times 9 &= \\ 27 \cdot 9 \cdot 10^6 + 3479 \cdot 9 \cdot 10^2 + 58 \cdot 9 &= \\ 243 \cdot 10^6 + 31311 \cdot 10^2 + 522 &= \\ 243000000 + 3131100 + 522 &= \end{aligned}$$

246131622

Deze manier van splitsen heeft het voordeel, dat de einduitkomsten makkelijk op te tellen zijn daar ze elkaar weinig overlappen: bij een splitsing in n stukken, hoeven we slechts $n - 1$ optellingen te maken van getallen die allen uit slechts één cijfer bestaan.

Zouden de gevonden regels van stelling 2 en 3 ook uitgebreid kunnen worden voor negenvouden i.p.v. 9? Als dit zo zou zijn, dan wordt de hypothese:

Willen we een monotoon stijgend getal van a cijfers met een negenvoud vermenigvuldigen, dan nemen we het erbij horende $(9-a)$ -de grondtal. Stel het negenvoud is

$9b$ met $1 \leq b \leq 9$. Zijn vanaf de n -de plaats a cijfers weggelaten, dan moeten we op de n -de plaats van het afgeleide grondtal $b \cdot a$ erbij tellen.

Willen we een monotoon dalend getal van a cijfers met 9 vermenigvuldigen, dan nemen we het $(9-a)$ -de grondtal. Zijn vanaf de n -de plaats a cijfers weggelaten, dan moeten we op de n -de plaats van het afgeleide grondtal $b \cdot a$ eraf trekken.

In hoeverre deze hypothese juist is, laten we aan jullie over.

Tenslotte een voorbeeld, waarbij deze hypothese klopt: de vermenigvuldiging 234×81 (dus $b = 9$)

grondtal bij stijgend getal

getal $\times 81$

9999999909

6e afgeleide grondtal

9909

bij 234 is t.o.v.

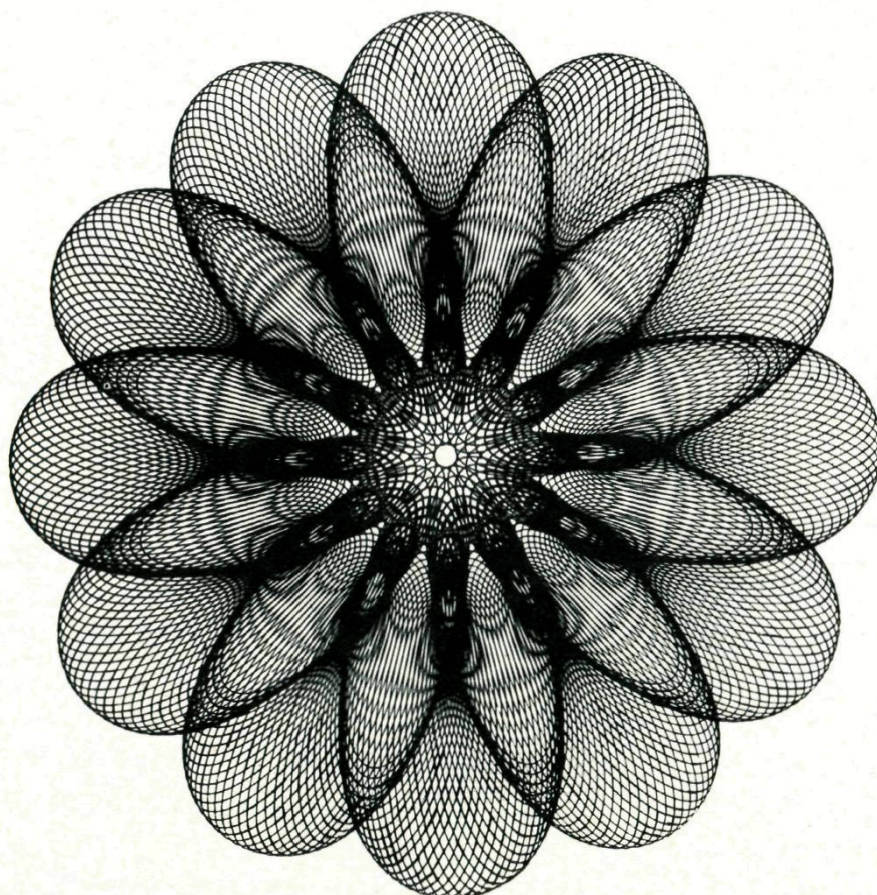
123456789 vooraan 1 weg,

dus op eerste plaats

$9 \cdot 1 = 9$ optellen:

18909

bij 234 is t.o.v.



123456789 achteraan

56789 weg, dus op

achterste plaats

9.5 = 45 optellen

en deze uitkomst klopt inderdaad!

18954

Nog enkele oefeningen:

1. Bereken 852×9 ; 921×9 ; 8654×9 ; 8762345798321×9 ;
2. Bereken 136×36 ; 249×63 ;
3. Beredeneer zonder staartdeling welk getal vermenigvuldigd met 9, 78768 oplevert.

Het eerlijke abonnementsgeld

H.J. Sliker

Achter op jullie blad staat de abonnementsprijs: $f\ 7,-$ p.p. en bij elke 8 abonnementen, één gratis voor de docent. Stel nu dat de docent zegt: 'We delen de prijs eerlijk' — dus het gratis exemplaar wordt verrekend, wat wordt dan de abonnementsprijs?

Als er 8 personen abonnee willen worden dan betalen ze gewoon $f\ 7,-$ p.p. maar als er 9 personen abonnee willen worden (en we geven er maar 8 op) dan betaalt ieder $f\ \frac{8 \cdot 7}{10} = f\ 6,23$ (naar boven afgerond); bij 10 personen: $f\ \frac{9 \cdot 7}{10} = f\ 6,30$ p.p. enz. Bij 18 abonnees betaalt ieder: $f\ \frac{16 \cdot 7}{18} = f\ 6,23$ (want we hebben er 16 opgegeven en er 2 gratis gekregen!).

Hiernaast zien jullie de kosten bij het aantal personen (tabel pag. 71).

Je vraagt je natuurlijk af: 'Kan ik dit „eerlijke abonnementsgeld” met een functie weergeven?' Het is duidelijk dat elk 9-voud de minste kosten geeft! Duidelijker gezegd: bij $9 = 9 \cdot 1$ betaal ik er 1 minder; bij $18 = 9 \cdot 2$ betaal ik er 2 minder; bij $27 = 9 \cdot 3$ betaal ik er 3 minder ... bij $9 \cdot x$ betaal ik er x minder.

Hoe gaat het nu bij de overigen: bij bijvoorbeeld 13 betaal ik er ($\frac{13}{9} = \textcircled{1} \frac{4}{9}$) 1 minder; bij 21 ($\frac{21}{9} = \textcircled{2} \frac{1}{3}$) betaal ik er 2 minder. Deze 'HELEN' uit de breuk noem ik de *entier* (uitspraak *antjee*) ervan. Notatie $[x]$.

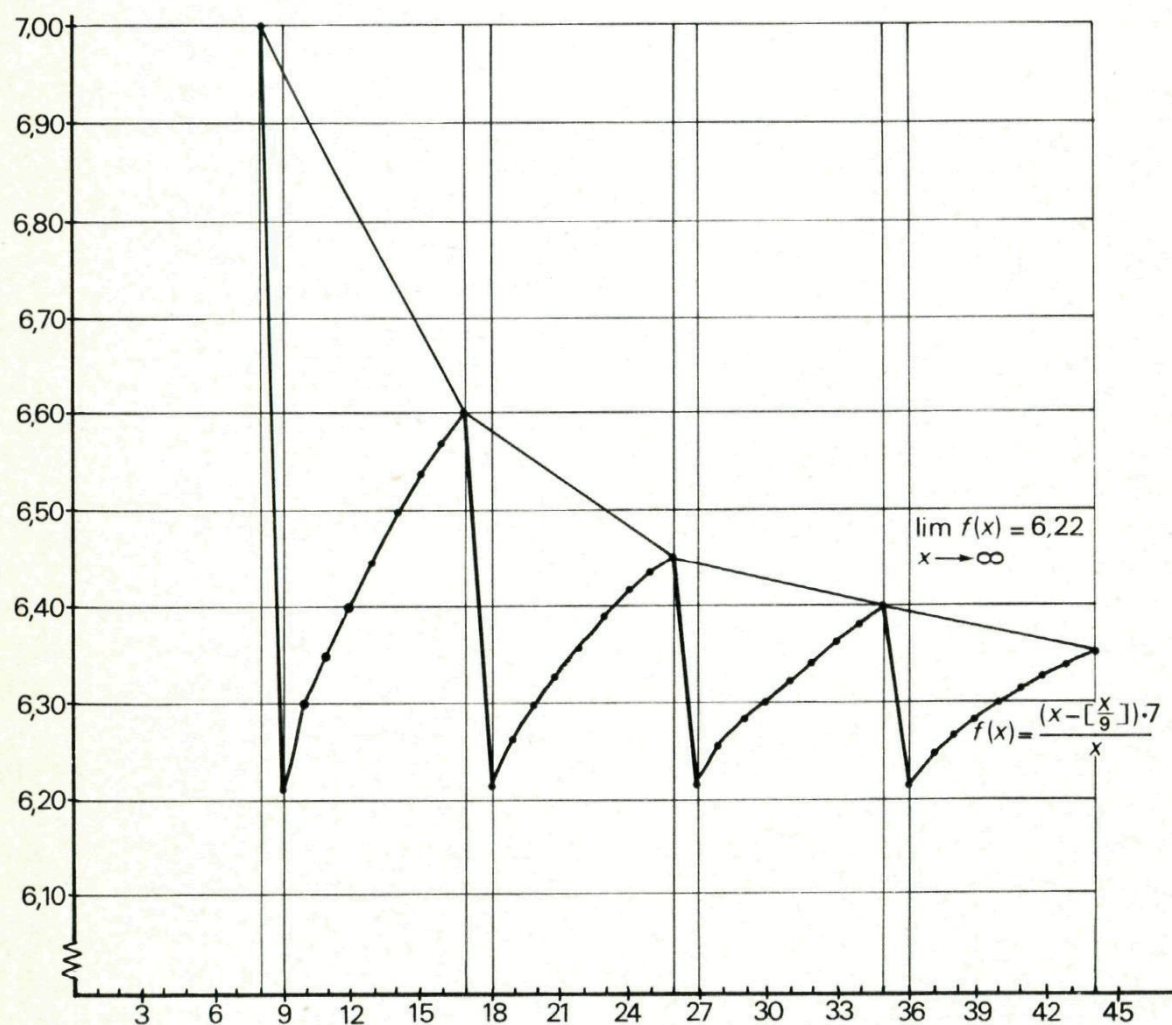
Wat worden nu de kosten per persoon als er X personen zijn. Noem dit functie f .

$$f: x \rightarrow \frac{(x - [\frac{x}{9}]) \cdot 7}{x} \qquad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$

1	$f 7,-$	11	$f 6,36$	21	$f 6,33$	31	$f 6,32$
2	$f 7,-$	12	$f 6,40$	22	$f 6,36$	32	$f 6,34$
3	$f 7,-$	13	$f 6,46$	23	$f 6,39$	33	$f 6,36$
4	$f 7,-$	14	$f 6,50$	24	$f 6,42$	34	$f 6,38$
5	$f 7,-$	15	$f 6,53$	25	$f 6,44$	35	$f 6,40$
6	$f 7,-$	16	$f 6,56$	26	$f 6,46$	*36	$f 6,23$
7	$f 7,-$	17	$f 6,59$	*27	$f 6,23$	37	$f 6,24$
8	$f 7,-$	*18	$f 6,23$	28	$f 6,25$	38	$f 6,26$
*9	$f 6,23$	19	$f 6,26$	29	$f 6,28$	39	$f 6,28$
10	$f 6,30$	20	$f 6,30$	30	$f 6,30$	40	$f 6,30$

enz.

In de grafiek uitgezet ziet het er als volgt uit:

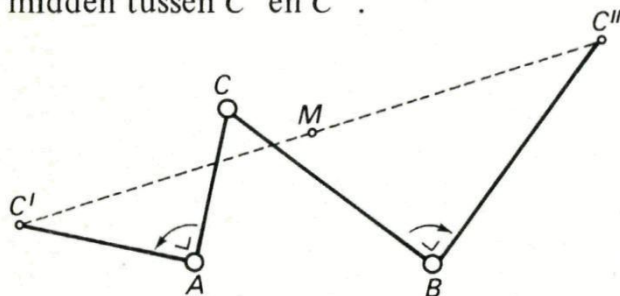


° Het probleem van de verloren schat

(Ontleend aan *Verscheidenheden*,
prof. dr. O. Bottema)



Iemand wil een schat begraven op een plek die, terwille van de geheimhouding, op een gecompliceerde wijze wordt bepaald, maar door hem zelf gemakkelijk kan worden teruggevonden. Er is een vlakte met drie bomen: een abeel A , een berk B en een ceder C . Hij bepaalt het punt C' door rotatie van C om A over 90° en het punt C'' door rotatie van C om B over -90° . Hij begraaft zijn schat precies midden tussen C' en C'' .

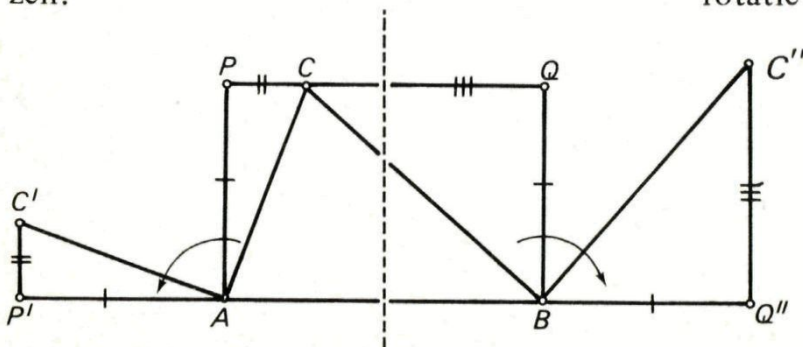


Op het moment dat hij terugkomt, blijkt de ceder verdwenen te zijn zonder ook maar een spoor achter te hebben gelaten. Wat zou jij doen om de schat terug te vinden?

Hier volgt de oplossing.

De schat hervonden

Heb je ook op papier geprobeerd verschillende posities van boom C aan te nemen en bij elk ervan M te construeren? Je zult bij nauwkeurig werken ontdekt hebben dat M telkens op dezelfde plaats uitkomt. Je kunt dat op de volgende manier bewijzen.



Neem de plaats van C zomaar ergens en bekijk de rechthoek $ABQP$ waarvan QP door C gaat.

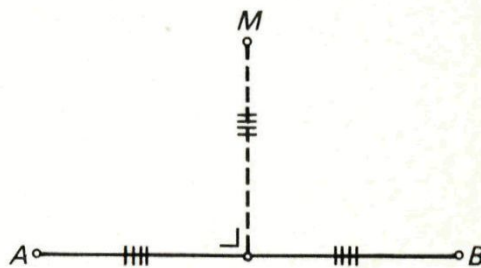
Neem in de rotatie om A ook het punt P mee, evenals Q bij de rotatie om B (fig. 2). Daaruit blijkt dat $P'A = PA = QB = Q''B$ zodat P' en Q'' elkaars beeld zijn bij spiegeling om de as (middelloodlijn) van AB . Dan ligt ook C' even ver links van die as als C'' er rechts van ligt. Het midden van $C'C''$ ligt dus op die as.

Verder zal de hoogte van M boven AB het gemiddelde zijn van de hoogten van C' en C'' boven AB , dus

$$\frac{1}{2} (P'C' + Q''C'') = \frac{1}{2} (PC + QC) = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} AB$$

Maar dit is onafhankelijk van de plaats van C .

Achteraf blijkt dus de ceder C helemaal niet belangrijk te zijn geweest. Of misschien toch wel? Namelijk om te weten aan welke kant van de lijn AB we de schat moeten zoeken. Of toch niet? Onderzoek wat er gebeurt als we C aan de onderkant van AB aannemen. Natuurlijk blijft de rotatie om de abeel A over 90° en de rotatie om de berk B over -90° .



Oplossing wie + zoekt + die + = vindt

Je ziet gemakkelijk in, dat $E = 0$ of 5 ; $V = Z + 1$; $O = 8$ of 9 ; $I = \text{nul}$ of 1 .

Indien $E = \text{nul}$ zou zijn, dan zou $O = 9$ zijn en I wederom nul worden. Wegens cijferherhaling voor verschillende letters E en I is dit niet toegestaan.

Voor $W + D + \text{rest} \rightarrow N$ kunnen dan geen cijfers gevonden worden die hoog genoeg zijn om in de middelste kolom een som van tenminste 20 op te leveren. Ergo $E = 5$.

$2I + K + 1$ moet eindigen op D .

Te onderzoeken gevallen

I	K	D
0	2	3
	3	4
	6	7
	7	8
	8	9

I	K	D
1	0	3
	3	6
	4	7
	6	9
	9	2

Merkwaardig, dat er 7 kloppende optellingen zijn te vinden, die alle aan dit schema voldoen, doch waarvan er slechts één voor *VINDT* een getal vertoont dat een cijfersom van 21 heeft, en dus juist door 7 deelbaar is.

Bovendien is *ZOEKT* hier ook nog deelbaar door 8, waardoor volledig gestand gedaan wordt aan Mattheus 7 vers 8!

$$\text{Dus: } 105 + 29576 + 805 = 30486$$

Oplossing denkertjes

1. Een wiel legt 360 mm af, een complete cirkel omtrek, voor een rotatie van 360° . Dus $\pi \times (\text{wielafstand}) = 36 \text{ cm} \Rightarrow \text{wielafstand} = 11,46 \text{ cm}$.
2. Bij (1) staat na afloop de kever te kijken zoals in figuur 2. Na afloop van (2) kijkt hij weer in de richting waarin hij begonnen is.

Inhoud

1. De trapformule 49
2. Dit getal telt mee 50
3. Graankorrels 51
4. Een schildpad die tekent! 53
5. De 20e internationale Wiskunde Olympiade (II) 59
6. De pantograaf 63
7. Drie en zeven zijn priem 64
8. Vermenigvuldigen van getallen met negenvouden 65
9. Het eerlijk abonnementsgeld 70
10. Het probleem van de verloren schat 72
11. Oplossing van Wie + zoekt + die = vindt
12. Oplossing van de denkertjes

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

W. Kleijne, Apeldoorn.
Ir. H. Mulder, Nieuw Ginniken
G.A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Stationsstraat 114, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,— per jaargang. Voor anderen f 11,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

