

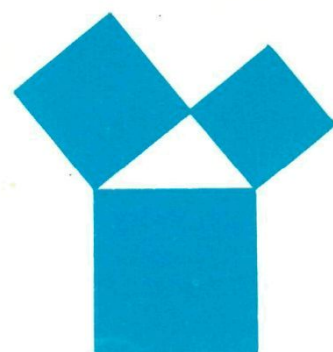


4

jaargang 18 / februari 1979

wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Dit is een van de mooiste verticale zonnewijzers in ons land. Deze dateert uit 1730 en bevindt zich op de poort van het Prinsenhof in Groningen.

Bij de figuur op de omslag:

Een fraaie, maar zeer onnauwkeurige zonnewijzer, aan de zuidwand van de kathedraal van Freiburg. Een groot deel van dit nummer is gewijd aan de geschiedenis en de constructie van de meest gebruikte typen zonnewijzers.

Als je dit aandachtig doorneemt, kun je zelf zonnewijzers construeren.

In het laatste nummer van deze jaargang komen we nog terug op dit thema om enige finesses te verklaren.

Zonnewijzers

Wat de tijdaanwijzing betreft, zijn we de afgelopen jaren in een nieuw tijdperk aangeland. Voor een ieder is op het ogenblik vrij goedkoop het kwartshorloge met digitale tijdaanduiding beschikbaar. De precisie van deze horloges, waarin geen bewegende onderdelen voorkomen, is veel groter dan van de ook nog alom in gebruik zijnde mechanische horloges met hun vele radertjes en assen. De gelijkmatigheid van de gang van zo'n horloge wordt beperkt door het 'hartje' ervan: de *onrust*.

Dit is een fijn gelagerd radje, dat in een bepaald tempo heen en weer draait; de trillingstijd ervan wordt geregeld door een uiterst fijn spiraalvormig veertje. Deze trillingstijd is o.a. afhankelijk van de stand van de *onrust*, zodat men bij horloges die gedragen worden (zoals polshorloges) altijd een onregelmatige gang krijgt, die niet verholpen kan worden.

Het digitale kwartshorloge heeft geen bewegende delen en de beroemde horlogemakerskunst zal waarschijnlijk binnenkort tot de oude ambachten gaan behoren!

Zonnewijzers komen weer in de belangstelling

Heeft het in deze tijd nog wel zin iets te weten over een oeroude, vrij onnauwkeurige tijdaanwijzer, die bovendien alleen tijd aanwijst als de zon schijnt?

Je zou natuurlijk situaties kunnen bedenken, waarin zo'n zonnewijzer nog van pas kan komen, maar die zijn dan bijzonder ver gezocht. Toch is er juist op het ogenblik een groeiende belangstelling voor zonnewijzers: er wordt veel over gepubliceerd, er worden geheel nieuwe typen bedacht en onlangs is in Nederland de Zonnewijzerkring opgericht. Dat is een vereniging van mensen die zich interesseren voor zonnewijzers en alles wat daarmee verband houdt (in andere landen bestonden al zulke verenigingen).

Nogmaals: deze hernieuwde belangstelling komt niet voort uit de wil om tot een

praktische en nauwkeurige tijdmeting te komen. Evenmin is het een verlangen om in gedachten terug te keren naar die 'goede oude tijd', hoewel dit soort heimwee naar het verleden (nostalgie noemt men dat) op andere gebieden een grote rol speelt.

Wat dan wel?

Tijdmeting

De mens heeft er vanouds behoefte aan gehad de dag te verdelen in kleinere delen zodat hij inzicht kreeg in de tijdsduur van zijn doen en laten en tijdgebonden afspraken met zijn medemensen kon maken.

De zon die de dag vastlegt (een dag is de tijd die verstrijkt tussen twee opeenvolgende tijdstippen, waarop de zon in het zuiden staat), kan tevens behulpzaam zijn bij het verdelen van de dag in kleinere tijdeenheden: zij komt in het oosten op, bereikt haar hoogste punt in het zuiden en gaat in het westen onder. Aanvankelijk stelde men alleen belang in een tijdsverdeling van het gedeelte van de dag waarin het licht was, dus tussen zonsopgang en zonsondergang. Een tweedeling van de dag met behulp van de zon ligt dan voor de hand: de tijd van zonsopgang tot de zon in het zuiden zijn hoogste punt bereikt en het deel dat daarna komt tot zonsondergang.

Er zijn verschillende zonnewijzers die alleen maar precies aangeven wanneer het middag is, dus wanneer het tweede deel van de dag begint (zie fig. 1).

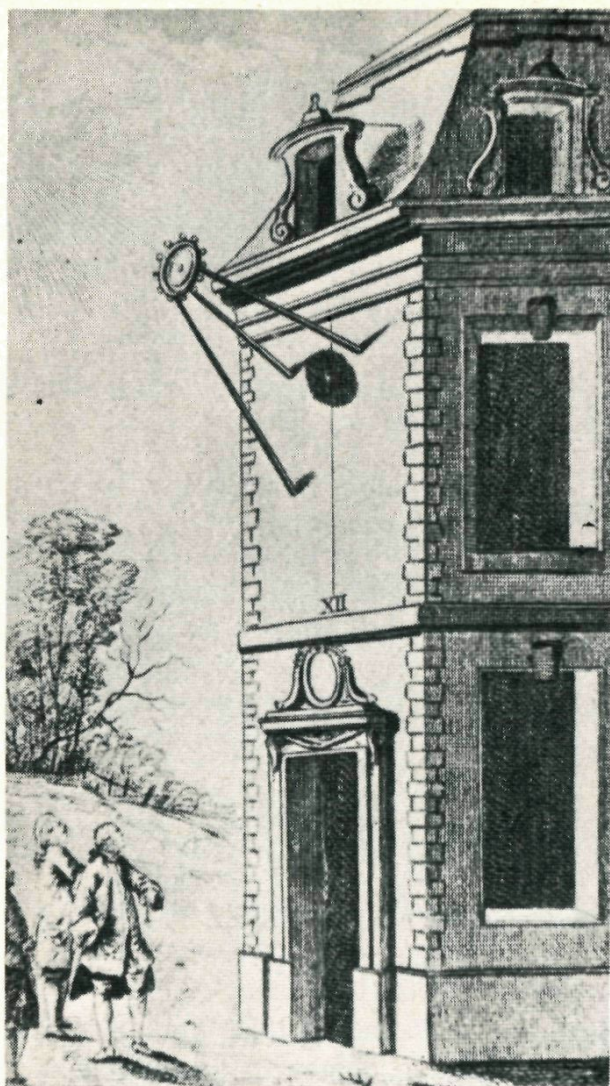


Fig. 1. Een middeleeuwse middagwijzer.

Omdat de zon zo gelijkmatig haar baan doorloopt, kunnen we deze baan in kleinere bogen verdelen en op deze manier een aantal kleine deeltjes van de dag afmeten aan de lengte van de doorlopen boog. Hierop berust de werking van de zonnwijzer en bovendien de definitie van de tijdeenheden: uur, minuut, seconde*.

De zonnwijzer legt een direct verband tussen de definitie van tijd en het meten ervan. En dat is aantrekkelijk voor de mens die ook zijn omgeving, zijn situatie,

* In het SI-stelsel heeft men de definitie van de seconde als eenheid van tijdsduur losgekoppeld van de beweging der zon en vastgeknoopt aan de frequentie van een bepaalde straling die door het cesiumatoom wordt uitgezonden.

de gewone begrippen die hij dagelijks hanteert werkelijk wil beleven.

Onze stationsklok, wekker of polshorloge staan ver af van de oorsprong van het begrip tijd. Het zijn mechaniekjes of elektronische instrumenten die de gelijkmatige gang van de zon vervangen door de gelijkmatige gang van iets anders.

Wiskundig spel

We zullen in dit artikel, dat slechts de allereenvoudigste zonnwijzers de revue laat passeren, reeds zien dat het niet zo heel eenvoudig is om een zonnwijzer te bedenken die de tijd redelijk nauwkeurig aan kan geven.

Daarvoor is een goed inzicht nodig in de baan van de zon die van dag tot dag verandert en die bovendien voor elke geografische breedte anders is. Bovendien vertoont de loop van de zon, ondanks zijn schijnbare gelijkmatigheid in de loop van het jaar nog variaties, die te danken zijn aan de ellipsvorm van de baan van de aarde rond de zon!

Verder zijn er talloze mogelijkheden om de tijd weer te geven door de schaduw die de zon werpt en dit biedt een zeer breed veld van wiskundige probleempjes, met interessante oplossingen.

Vooraf dit laatste trekt vele mensen aan, zodat er steeds weer nieuwe ingenieuze zonnwijzerconstructies bedacht worden.

De baan van de zon en de richting van de schaduw

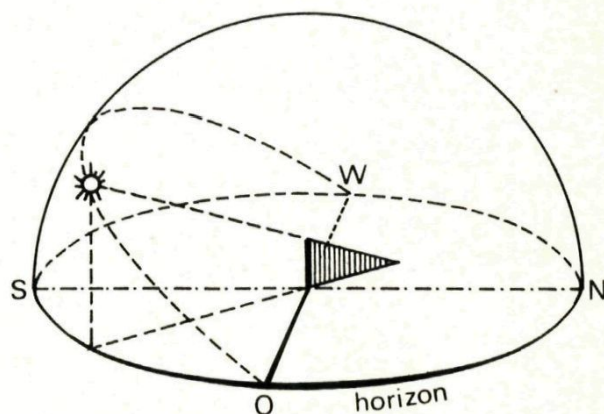


Fig. 2. Hemelgewelf met zonnebaan.

In fig. 2 zien we het zichtbare hemelgewelf voorgesteld als een halve bol waar we van buitenaf op kijken. Op de horizon zijn de punten: oost (O), zuid (Z), west (W) en noord (N) aangegeven.

De zonnebaan is gestippeld, zoals die bij het begin van de lente en het begin van de herfst (21 maart en 23 september) verloopt. De zon komt dan precies in het oostpunt op en gaat precies in het westpunt onder.

Verder is een verticale stok getekend en de schaduw daarvan die de zon op een zeker ogenblik op het horizontale vlak werpt.

Bij zonsopkomst is deze schaduwlijn precies naar het westpunt gericht, in de middag precies naar het noordpunt en bij zonsondergang naar het oostpunt. De zon doorloopt gelijkmatig een boog van 180° . We vragen ons nu af: draait de schaduw in de loop van de dag ook gelijkmatig over een hoek van 180° ?

Fig. 3 laat ons zien dat dit helaas (anders hadden we meteen al een gemakkelijk te construeren zonnwijzer) niet het geval is. We kijken hier naar het oostpunt en de zonnebaan maakt daar (op onze breedte) een hoek van ongeveer 38° met de horizon. Natuurlijk loopt deze baan niet helemaal 'recht', maar deze benadering is voor de vroege ochtenduren zo slecht nog niet. Van 6 uur tot 7 uur doorloopt de zon een boog van 15° aan de hemel (nl. $360^\circ : 24$). De schaduw van onze stok loopt echter niet zo snel. De hoek die de schaduw in dat uur draait is aan de horizon af te lezen als de boog OP en die is ca. 12° .

De zonnenschaduw loopt dus in de ochtenduren langzamer dan de zon zelf! Toch doorlopen zowel de zon als de schaduw van de verticale stok in de loop van één dag precies dezelfde hoek, nl. 180° .

Er is maar één conclusie mogelijk: rond het middaguur draait de schaduw die de zon werpt sneller dan de zon zelf! Is dat wel mogelijk?

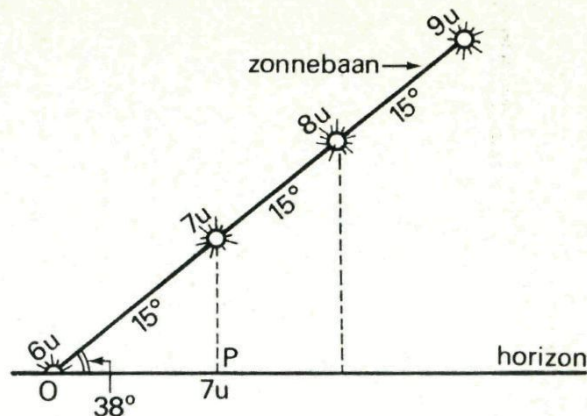


Fig. 3. De zonnenschaduw loopt in de ochtenduren langzamer dan de zon.

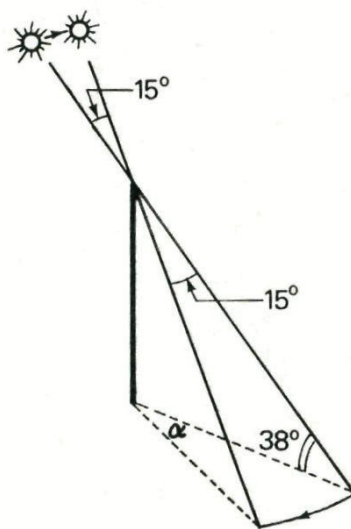


Fig. 4. Rond het middaguur draait de schaduw sneller dan de zon.

Laten we eens kijken naar de ruimtelijke fig. 4. De zon staat hier bij haar hoogste punt aan de hemel. Van half 12 tot half 1 (zonnetijd) legt zij een hoek van 15° af. Ook de stok is getekend met de schaduwen op beide tijdstippen. De zon staat ongeveer 38° hoog aan de hemel. De schaduw is gedraaid over de hoek α . Zonder deze te berekenen kun je gemakkelijk in de figuur zien dat α groter moet zijn dan 15° . De zonnenschaduw loopt dus inderdaad rond de middag sneller dan de zon zelf.

Het is mogelijk voor elk tijdstip de richting van de zonnenschaduw te berekenen en we kunnen deze waarden ook (voor elke dag van het jaar en voor elke geografische breedte) in tabellen vinden. In

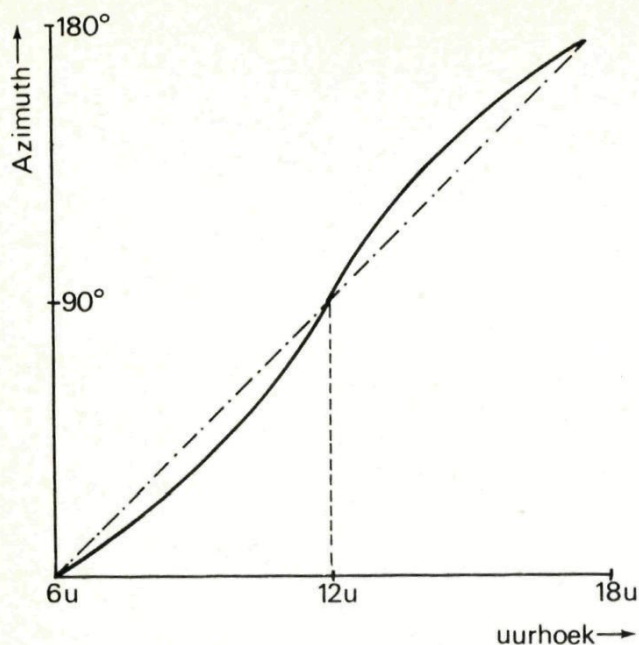


Fig. 5. De uurhoekazimutgrafiek.

fig. 5 hebben we de waarden uit de tabel voor ons land en voor beide bovengenoemde data uitgezet: op de horizontale as is de tijd weergegeven en op de verticale as de richting van de schaduw die de zon van een verticale stok werpt.

Nu is het voor tijdaanwijzing door middel van de zonnenschaduw helemaal niet noodzakelijk dat de schaduw gelijk loopt met de zon: per uur 15 graden. We kunnen immers experimenteel (om het uur strepen zetten als de zon schijnt) of door berekening de uurlijnen trekken.

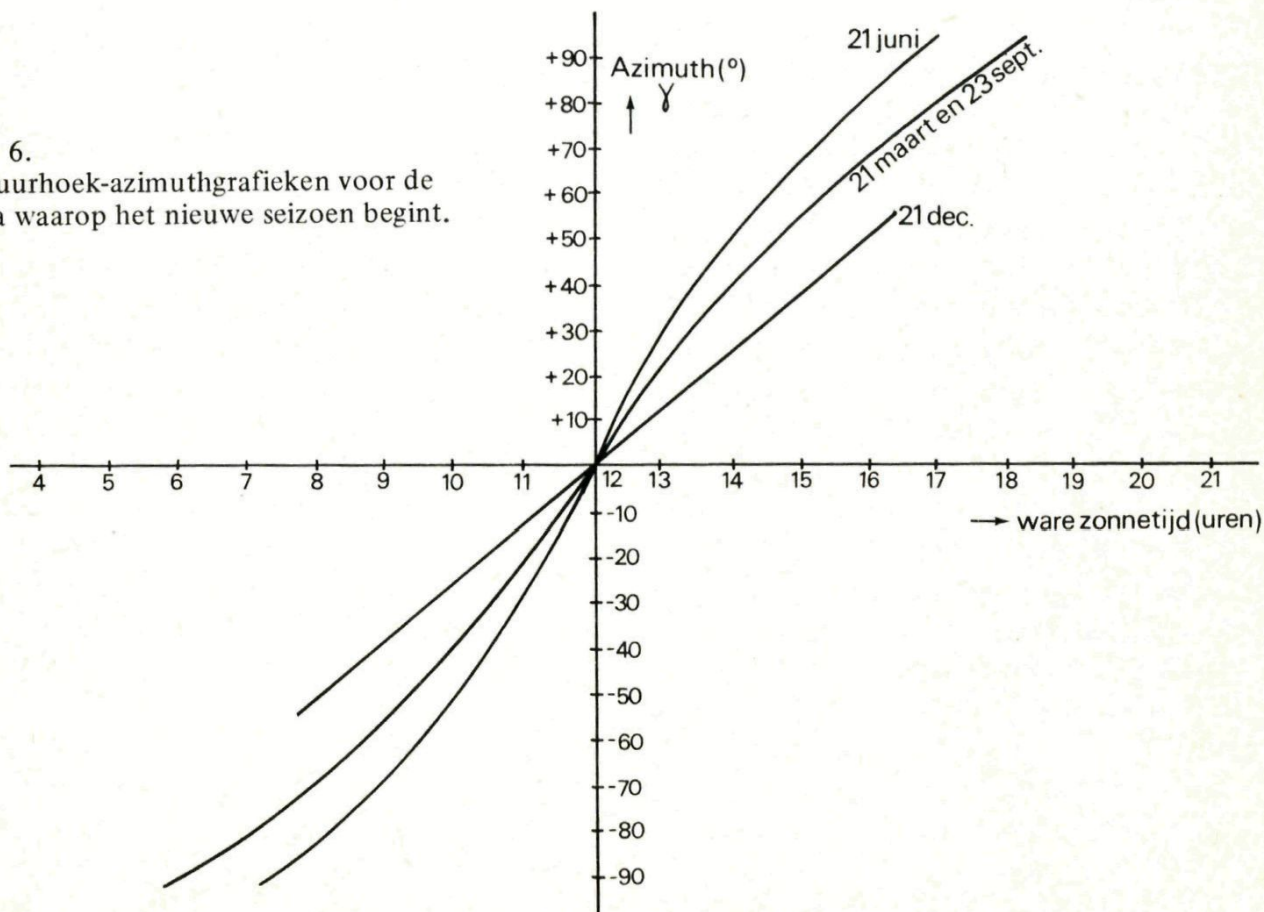
Dat kan inderdaad en niet alleen de steenhouwer waarbij ik mijn natuursteen betrok om zonnewijzers te bouwen, maar ook de constructeur van een zeer kostbaar afgewerkte zonnewijzer voor het gebouw van de provinciale waterstaat aan de Zijlweg in Haarlem deden dat. (En hoeveel anderen??)

Zij kwamen echter bedrogen uit, want het verschil tussen de tijd die hun zonnewijzer aangaf en de werkelijke tijd werd met de dag groter! Zij hadden een zonnewijzer gemaakt die slechts op twee dagen van het jaar de juiste tijd aangaf!

Hoe komt dat? Wat is er fout?

Daarvoor bekijken we fig. 6. Het is dezelfde grafische voorstelling als in fig. 5, alleen de oorsprong ligt bij 12 uur en we

Fig. 6.
De uurhoek-azimuthgrafieken voor de data waarop het nieuwe seizoen begint.



zetten daar (zoals het officieel moet) bij de schaduwhoek 0° . Deze schaduwhoek wordt in de sterrenkunde het *azimuth* van de zon genoemd.

Behalve voor het begin van de herfst en de lente is nu ook voor het begin van de zomer en het begin van de winter (21 juni en 21 december) het azimuth uitgezet tegen de tijd. We zien dat het inderdaad helemaal fout zit met de tijdaanduiding als we de schaduwlijnen voor een bepaalde datum hebben vastgelegd. Als het azimuth bijv. 50° is (de schaduwlijn maakt dan een hoek van 50° met de noord-zuid-richting) kunnen we in de grafiek aflezen dat het op 21 juni 2 uur is en op 21 december bijna 4 uur! Zelfs rond het middaguur groeien de verschillen al gauw tot meer dan een half uur.

Een geniale oplossing uit de oudheid

In verschillende musea vinden we zonnewijzers in de vorm van een kom : een halve bol. Zij dateren uit een tijd rond het begin van onze jaartelling en komen o.a. uit Egypte en Griekenland.

We zullen zien dat deze halve bol een volmaakte zonnewijzer vormt, omdat ze in staat is de zonnebaan aan de hemel exact af te beelden. De uitvinding ervan wordt toegeschreven aan de Babylonische priester Berossos die rond 300 voor het begin van onze jaartelling woonde op het Griekse eiland Kos.

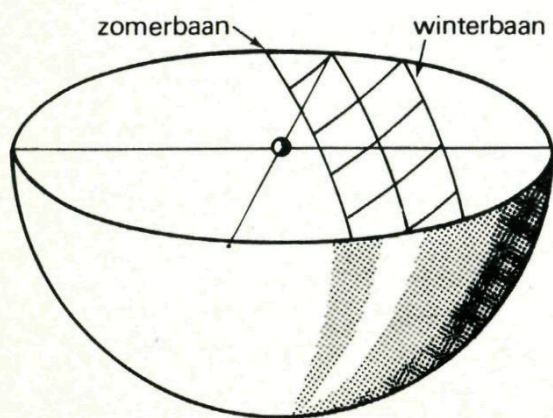


Fig. 7. De zonnewijzer van Berossos.

In het centrum van de bol hangt (aan twee loodrecht op elkaar gespannen draden) een kraaltje (fig. 7). Zodra de zon opkomt wordt in de bol aan de tegenovergestelde zijde de schaduw van dit kraaltje zichtbaar. Deze schaduw beschrijft binnenin de kom, van zonsopgang tot aan zonsondergang, precies dezelfde baan als de zon, maar dan op zeer verkleinde schaal en in tegenovergestelde richting.

Als we een vlak aanbrengen door de zonnebaan en het kraaltje snijdt dit vlak de halve bol van Berossos in een cirkel die een gelijkvormige afbeelding is van de zonnebaan (fig. 8). Als de zon 15° in haar cirkelbaan aan de hemel verder gaat (in één uur dus), dan gaat de schaduw van het pareltje ook precies 15° over zijn eigen cirkeltje binnen de kom. We kunnen dus binnen in de kom een tijdverdeling aanbrengen die juist is voor iedere dag van het jaar.

Op de binnenzijde van de kom is alleen een verdeling aangebracht, daar waar de schaduw van de zon ook werkelijk komt. Als het zomer is beschrijft de zon een baan die benoorden het oosten begint en benoorden het westen eindigt. De schaduwbaan in de kom is dan de laagst gelegen cirkel (fig. 7). De cirkel die precies in het oostpunt begint en in het westpunt eindigt is de baan bij het begin van lente en herfst, terwijl de kortste cirkelboog, die het hoogst in de kom ligt, doorlopen wordt bij het begin van de winter.

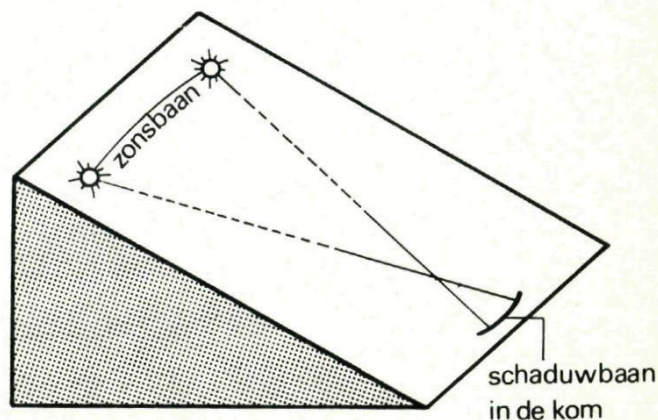


Fig. 8. Gelijkvormigheid van zonnebaan en schaduwbaan in de kom van Berossos.



A. Armillairfeer met een aantal nevenzonnewijzers op het Plesmanplein in Gouda.

Als je zelf zo'n zonnewijzer van Berossos wilt maken en je wilt daarvoor meer gegevens hebben, dan kun je schrijven naar de voorzitter van de Zonnewijzerkring: M. J. Hagen, Molenberg 45, Beekbergen.

De Angelsaksische zonnewijzer, een misser uit de middeleeuwen

Met de Romeinse cultuur gaat na ca. 400 heel wat kennis verloren, ook o.a. die van de zonnewijzer. In de primitiever geordende gemeenschappen, die na het uiteenvallen van het Romeinse rijk in Europa ontstaan, had men waarschijnlijk minder behoefte aan een fijne tijdsindeling van de dag.

Rond 700 verschijnen weer heel primitieve zonnewijzers. Primitief wat betreft de achtergrondkennis en dus de nauwkeurigheid.

In de zuidmuur van een kerk of klooster werd een pin *horizontaal* in de muur geslagen en met de pin als middelpunt een halve cirkel onder de pin gebeiteld (fig. 9). In deze halve cirkel werden stralen onder gelijke hoeken gebeiteld die de dag in zes en soms in acht delen verdelen. Het zal je wel zonder berekeningen duidelijk zijn (als je denkt aan wat we in het begin van dit artikel afgeleid hebben voor de schaduw van een *verticale* stok), dat de



Fig. 9. Een Angelsaksische zonnewijzer uit Schüttorf (West-Duitsland).

schaduw van de zon de hoek tussen twee stralen elke dag in een andere tijd aflegt. Een slechtere benadering van wat wij verstaan onder een tijdaanwijzer is nauwelijks te bedenken en toch heeft men lang met zulke 'zonnewijzers' gewerkt. Er zijn er nogal wat bewaard gebleven in Engeland (waar ze Saxon-dials genoemd worden), Duitsland en Frankrijk.

Pas in de 15de eeuw werd een gezond principe gevonden voor de constructie van een aantal verschillende typen zonnewijzers. We kunnen dit principe het beste bespreken als we uitgaan van de alom bekende tuinzonnewijzer (fig. 10).

De tuinzonnewijzer

De naam tuinzonnewijzer is weinig zeggend, want in een tuin kun je talloze verschillende typen zonnewijzers neerzetten en men vindt in tuinen dan ook heel wat verschillende typen. De meer technische naam, van het type dat we bedoelen, is de *armillairsfeer*. Het woord is afgeleid van de Latijnse woorden *armilla* = armband en *sphaera* = bol. Het is eigenlijk een verkleinde afbeelding van de hemelbol.

Een ring staat in het noord-zuidvlak en de pijl is een middellijn van deze cirkel die naar de noordpool aan de hemel gericht moet zijn. De pijl (bij de zonnewijzer noe-

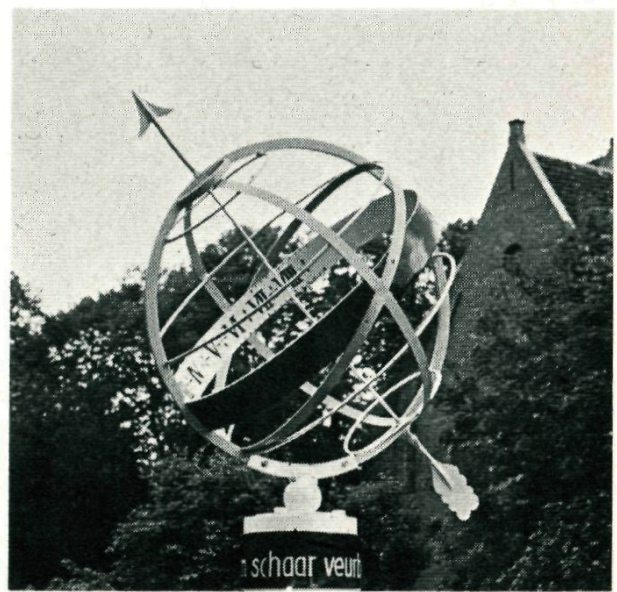


Fig. 10. De tuinzonnewijzer.

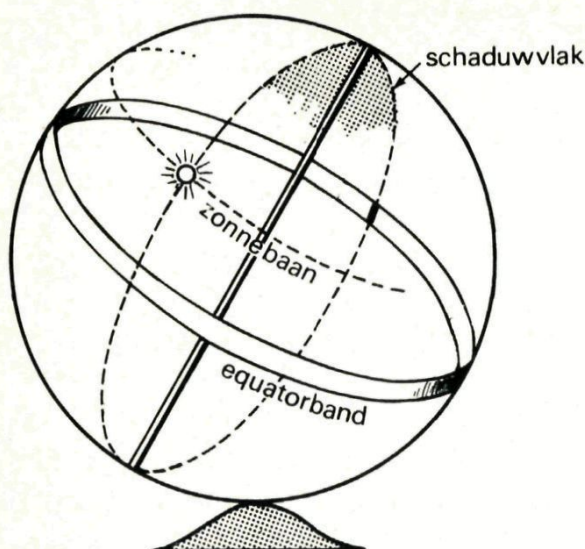


Fig. 11. De zonnebaan getekend op een armillairsfeer.

men we die de *stijl*) is dus evenwijdig met de aardas.

Een tweede evengrote ring is zó aan de eerste bevestigd, dat deze loodrecht op de stijl staat. Deze ring is dus evenwijdig aan het vlak van de hemelequator.

Als de armillairsfeer goed opgesteld staat, dan vormt ze met de werkelijke hemelbol* een concentrische bol. Banen van hemellichamen kunnen we evengoed op de armillairsfeer aangeven, omdat zij een verkleinde afbeelding van de hemelbol is.

Aan de hand van fig. 11 is het niet moeilijk in te zien dat de schaduw van de stijl op de equatorband van de armillairsfeer in de loop van de dag even gelijkmatig over de band loopt als de zon zelf haar baan aan de hemel aflegt. En dat geldt voor elke dag, omdat de zonnebaan altijd evenwijdig aan de equatorband loopt.

Je begrijpt dat de grote uitvinding is: de schaduwgever (*de stijl*) moet wijzen in de richting van de hemelnoordpool, dus te naaste bij in de richting van de poolster.

* De uitdrukking 'werkelijke hemelbol' is natuurlijk wat misleidend. Het is een bol die we ons om de aarde heen denken, waarop alle bewegingen van de hemellichamen zich afspelen.

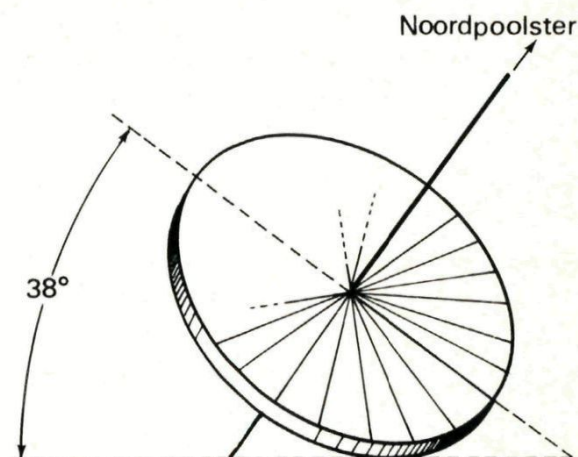


Fig. 12. Schema van de equatoriale zonnewijzer.

De equatoriale zonnewijzer

We kunnen nu het bolgeraamte ook missen! We nemen een cirkelvormige plaat waarop vanuit het middelpunt stralen om de 15° getrokken zijn en stellen de plaat zo op dat zij samenvalt met het vlak van de hemelequator (fig. 12).

In het middelpunt en loodrecht op de plaat steken we een breinaald of iets dergelijks als schaduwgever. Nu draaien we het geheel zo, dat de stijl in de richting van de poolster komt en we hebben een goed werkende zonnewijzer. In tegenstelling tot een verticaal of een horizontaal gerichte schaduwgever zal de schaduw van deze naar de hemelpool gerichte stijl elk uur over een hoek van 15° draaien, onafhankelijk van de tijd van het jaar.

Eén ding is wel lastig: in het zomerhalfjaar valt de schaduw op de bovenkant van de plaat, maar in het winterhalfjaar aan de onderkant. We moeten het geheel van plaat en stijl dus zo op zien te stellen dat zowel de boven- als de onderkant van de plaat zichtbaar is.

We hoeven dit niet nader te omschrijven: we bedoelen hier dezelfde hemelbol als in fig. 2 is afgebeeld.



B.

De horizontale en verticale zonnewijzer

Bij de equatoriale zonnewijzer moet de 'wijzerplaat' een heel bepaalde stand in de ruimte hebben. Dit is niet zo praktisch. Het zou beter zijn als de wijzerplaat horizontaal kon zijn, dan zou de zonnewijzer gewoon op de grond kunnen liggen. Het verticale vlak is ook, en misschien nog wel meer, aangewezen als wijzerplaat, omdat men ze dan gemakkelijk op muurvlakken van gebouwen kan aanbrengen en de mensen ze ook gemakkelijk in de verte kunnen aflezen.

Zoals we zullen zien moeten we daarvoor een iets ingewikkelder constructie van de uurlijnen toepassen, maar zolang we vasthouden aan de poolgerichte stijl zijn deze uurlijnen geldig voor *elke dag van het jaar* en dat is een groot winstpunt.

De oudste verticale zonnewijzer met poolgerichte stijl vinden we in de zuidgevel van de Jacobikerk te Utrecht. Deze dateert uit 1463 en is op het ogenblik weer gerestaureerd (zie fig. 13).



C.

B. Sterk vereenvoudigde armillairsfeer. Moderne zonnewijzer in de tuin van de transformatorfabriek Smit in Nijmegen.

C. De verticale zonnewijzer is vanouds de meest verbreide. De constructie is eenvoudig, overal zijn muurvlakken en hij is gemakkelijk van een grote afstand te lezen.

De decoratie is een belangrijk element, waarbij men vooral de stijl zo natuurlijk mogelijk vanuit die versiering te voorschijn wil laten komen.

(Muurzonnwijzer in een dorpje in Z.-Duitsland)

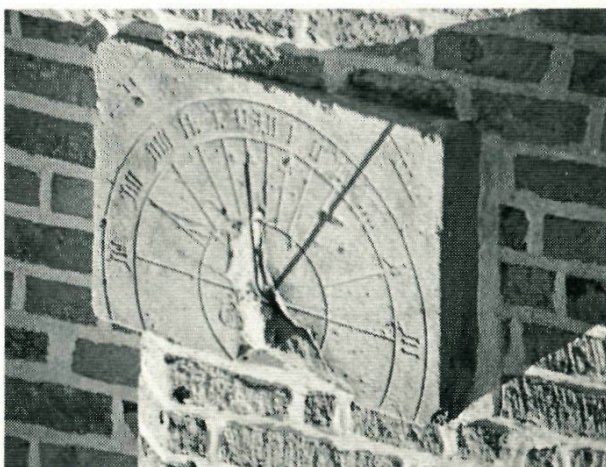
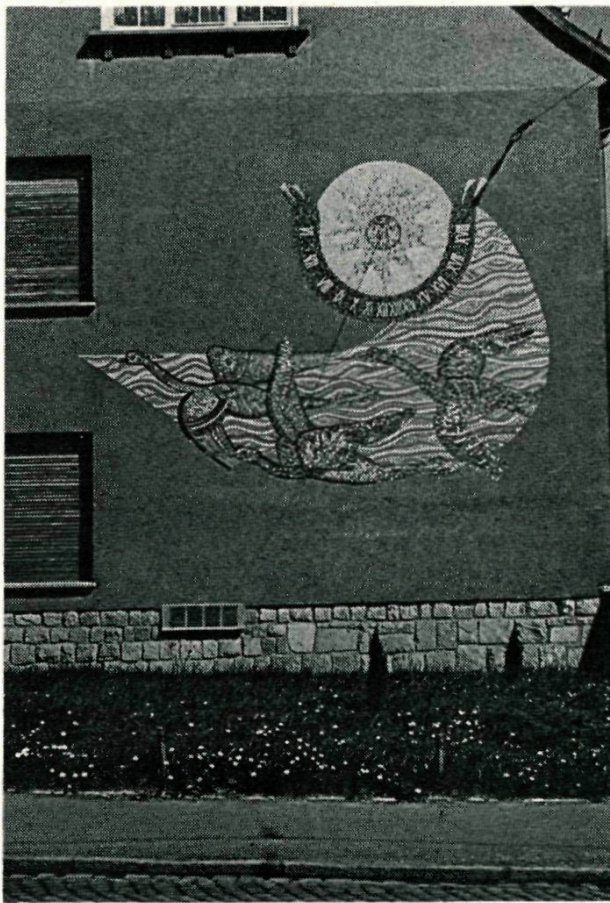
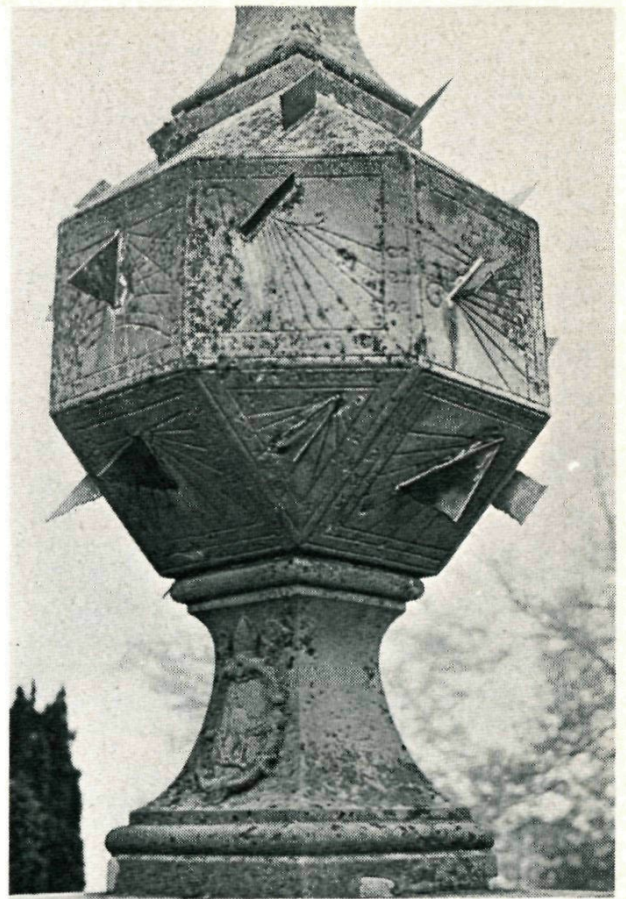


Fig. 13. De oudste verticale zonnewijzer met een poolgerichte stijl, Jacobikerk te Utrecht.



D. Moderne muurzonnewijzer in Weissenboth (DDR).



E. Het is mogelijk uurlijnen te construeren op elk willekeurig vlak, zoals op deze monumentale zonnewijzer in St. Odile (Elzas). Deze heeft nog de bijzonderheid dat op elk vlak de tijd op een andere plaats op aard is aangegeven.

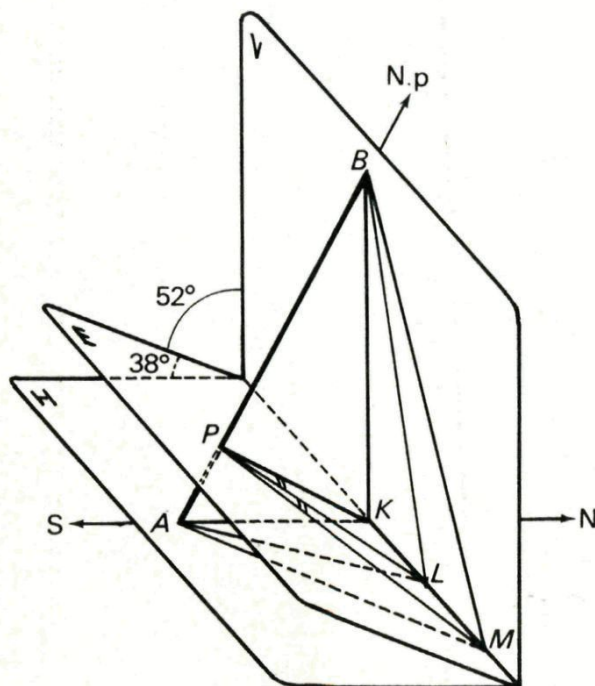


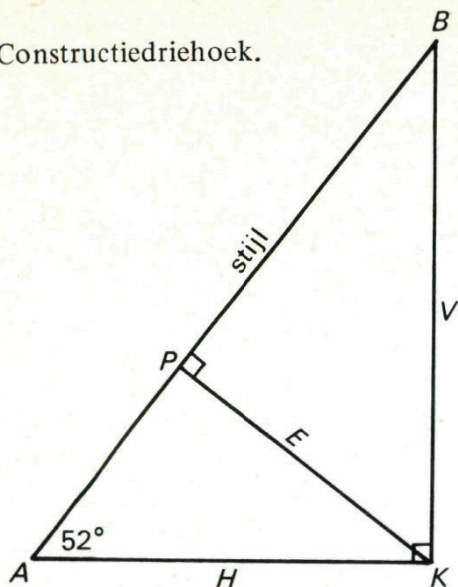
Fig. 14. Het verband tussen equatoriale, horizontale en verticale zonnewijzer.

De constructie van de horizontale zonnewijzer

Je kunt zelf horizontale en verticale zonnewijzers construeren als je het principe van de constructie eenmaal door hebt. Dit is eenvoudig als je met behulp van een kartonnen model (fig. 14) de equatoriale zonnewijzer in verband brengt met de horizontale en verticale zonnewijzer. Hier volgt een uitvoerige beschrijving.

H, *V* en *E* zijn drie stukken karton van ongeveer 25 x 30 cm. *H* en *V* staan loodrecht op elkaar en *E* maakt met het verticale vlak een hoek van 52°. Door de drie vlakken steken we een breinaald, die met het grondvlak een hoek van 52° maakt; de breinaald gaat in *A* door het horizontale vlak, in *P* door het equato-

Fig. 15. Constructiedriehoek.



riale vlak en in B door het verticale vlak. Richten we de breinaald noord-zuid, dan zal ze tevens naar de hemelnoordpool wijzen.

We hebben nu drie zonnewijzers in één: een horizontale, een verticale en een equatoriale. Alleen de uurlijnen ontbreken nog. In het equatoriale vlak zijn ze gemakkelijk aan te brengen, zoals we reeds hebben gezien: vanuit P trekken we een lijn naar K en verder lijnen die hoeken van 15 graden met elkaar maken: PL , PM , enz. Maar nu zien we ook vanzelf, hoe we de uurlijnen in het verticale en het horizontale vlak moeten trekken: het zijn

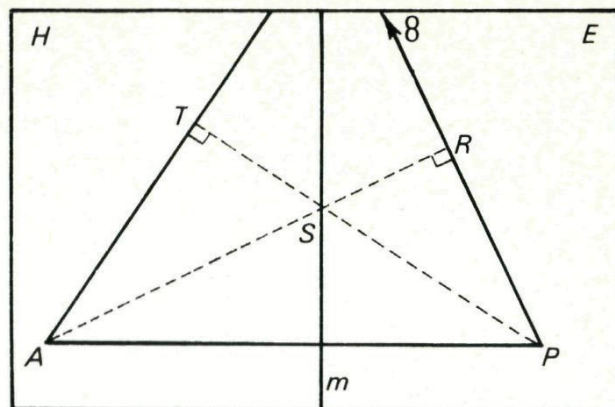


Fig. 17. Hulpconstructie voor een snijpunt buiten het papier.

BK , BL , BM , enz. en AK , AL , AM , enz. Voor we aan de eigenlijke constructie beginnen, bekijken we eerst nog eens fig. 15; die zullen we dadelijk nodig hebben. We zien de stijl AB en de doorsneden van de vlakken H , E en V . Deze driehoek is gemakkelijk te tekenen: hoek K is 90° , hoek A is 52° en hoek P is ook 90° .

Om de uurlijnen van de horizontale zonnewijzer te kunnen tekenen, denken we in fig. 15 het verticale vlak weg en het equatoriale naar rechts omgeslagen, zodat het met H in hetzelfde vlak komt te liggen (fig. 16). We trekken PKA loodrecht op lijn m . De maten van PK en KA

Fig. 16. Constructie van de uurlijnen op de horizontale zonnewijzer.

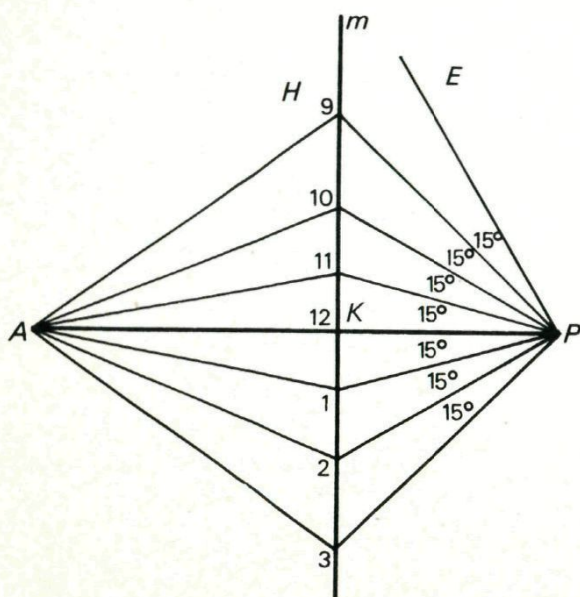
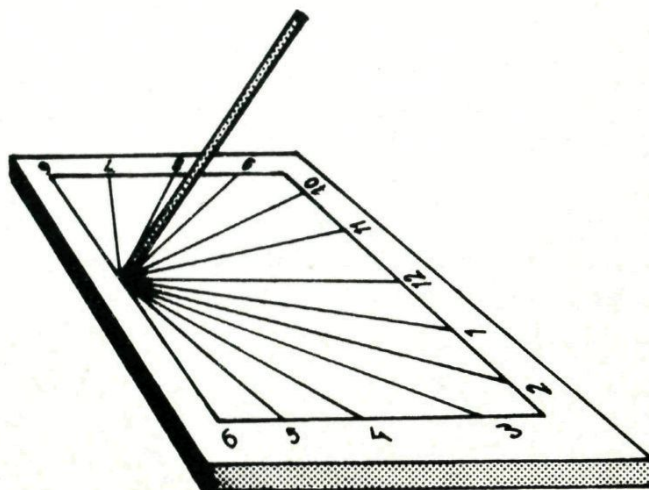


Fig. 18. Eenvoudige horizontale zonnewijzer.



nemen we over uit de driehoek van fig. 15. Daarna construeren we de uurlijnen rond P . Ten slotte verbinden we de snijpunten van deze uurlijnen met m , met het punt A en we vinden de uurlijnen in het horizontale vlak.

Hier doet zich vlak voor de finish nog even een kleine moeilijkheid voor. Het snijpunt van de morgenuurlijnen 7 en 8 en van de avonduurlijnen 5 en 6 liggen ver buiten het papier. We kunnen natuurlijk ons tekenpapier op de grond leggen en met kunst en vliegwerk toch snijpunten op het verlengde van m vinden. Er is echter een elegantere oplossing (fig. 17). We trekken vanuit A een loodlijn AR op de uurlijn van 8 uur. Deze loodlijn snijdt m in Z . Nu trekken we PZ . De loodlijn AT op het verlengde van PZ is (volgens een bekende meetkundige stelling) de uurlijn van 8 uur in het horizontale vlak.

De uurlijnen van vóór 6 uur 's morgens en van na 6 uur 's avonds liggen gewoon in het verlengde van de reeds getrokken uurlijnen.

We kunnen nu onze uurlijnen overnemen op een plankje en de stijl oprichten, zoals hiervoor beschreven is; hier eindigt het relaas voor de constructeur en begint het domein van de fantasierijke knutselaar. We kunnen ons immers beperken tot de zeer simpele uitvoering van een rechthoekig plankje, met uurlijnen en cijfers (fig. 18), maar we kunnen het ook, naar gelang onze fantasie en smaak, versieren.

De verticale zonnewijzer op een zuidmuur
Elke muur die precies of enigszins naar het zuiden gericht is, nodigt uit om er een zonnewijzer op aan te brengen. Staat de muur precies oost-west, dan is de constructie vrijwel gelijk aan die van de horizontale zonnewijzer. We denken ons in fig. 14 het vlak H weg en klappen de vlakken E en V naar links en naar rechts, zodat ze in één vlak komen te liggen. We krijgen dan fig. 19 en de lengten van BK

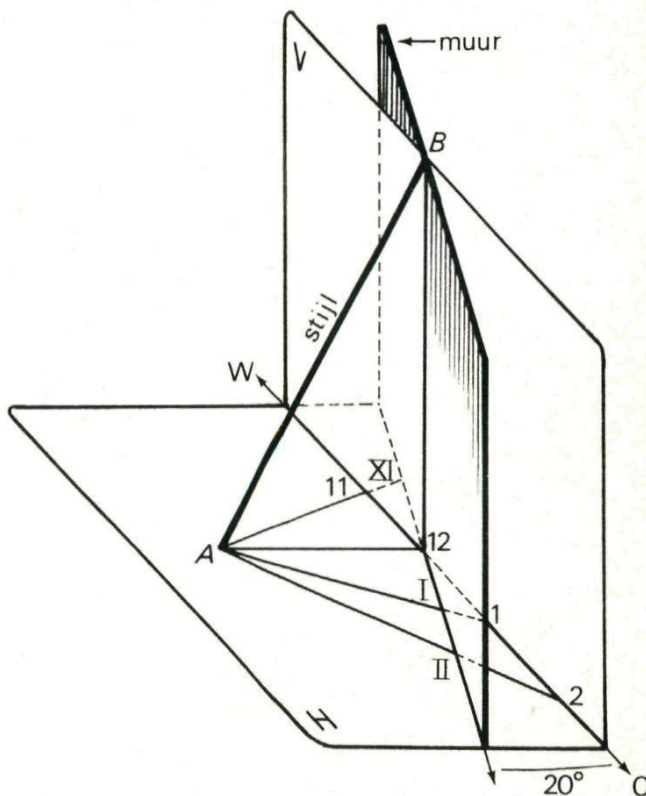
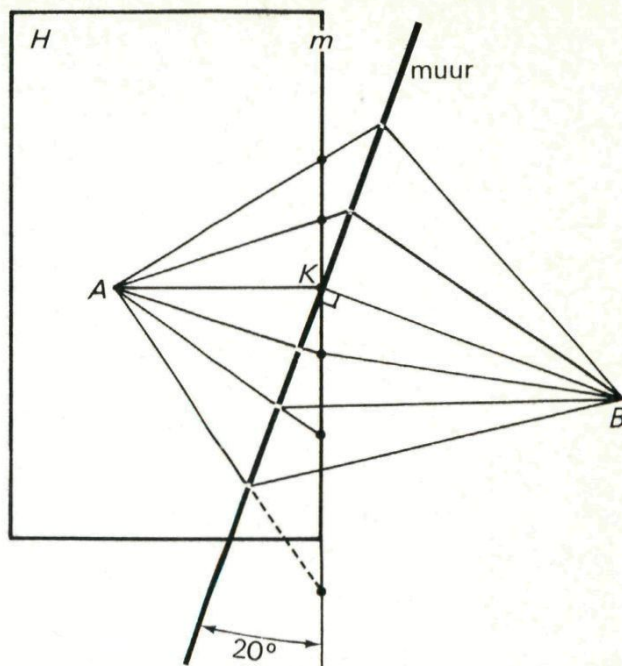


Fig. 21 en 22. Constructie van de uurlijnen op een muur die niet precies oost-west gericht is.

86 Sonne-wijfer tegen 't Zuyden.

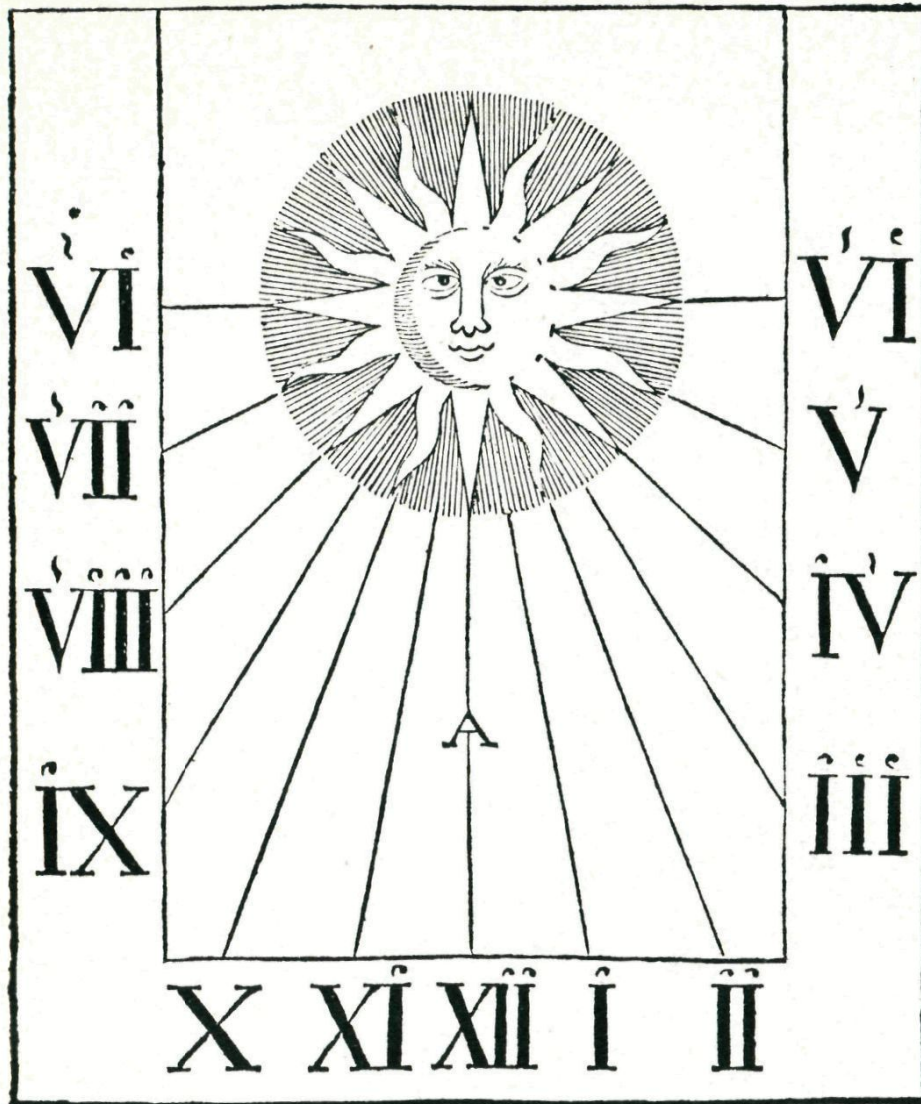


Fig. 20. Ontwerp voor een verticale zonnwijzer in een tuiniersboek uit 1670 (Den Nederlandtsen Hovenier).

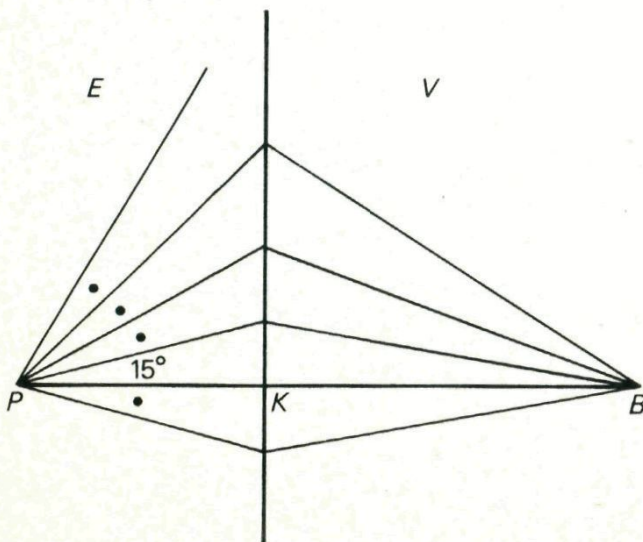


Fig. 19. Constructie van de uurlijnen bij een verticale zonnwijzer op een zuidmuur.



F. Een veelvlakkige zonnewijzer op de Menkemaborg.
(Uithuizen, Groningen)

en KP halen we ook uit fig. 15. Na het tekenen van de uurlijnen rond P vinden we weer de uurlijnen rond B . Fig. 20 toont een eenvoudige verticale zonnwijzer.

Wat te doen als de muur niet precies oost-west loopt? Eerst de hoek meten, die de muur met de oost-westrichting maakt. Dit doen we weer door eerst een noord-zuidlijn in de tuin vast te stellen. Laten we eens aannemen dat de muur een hoek van 20° met de oost-westlijn maakt (fig. 21). Uit de figuur is meteen duidelijk hoe we de uurlijnen op de muur kunnen tekenen, als de uurlijnen in het horizontale vlak bekend zijn. Voor de praktische uitvoering klappen we de muur om in het horizontale vlak (fig. 22). In H hebben we al

de uurlijnen voor het horizontale vlak getekend. Door K trekken we een lijn die een hoek van 20° met m maakt. In K richten we een loodlijn KB loodrecht op de muur op. De lengte van KB halen we weer uit fig. 17. Uit fig. 22 is nu verder duidelijk hoe de uurlijnen op de muur volgen uit die in het vlak H .

Alle zonnwijzers die wij tot nu toe besproken hebben geven de zg. ware plaatselijke zonnetijd aan. Onze horloges zijn anders afgesteld. Daarom moeten wij twee correcties aanbrengen, die we in het volgende nummer zullen behandelen. Hebben we deze correcties eenmaal verwerkt, dan loopt de zonnenschaduw gelijk met onze horloges en geven beide precies dezelfde tijd aan.

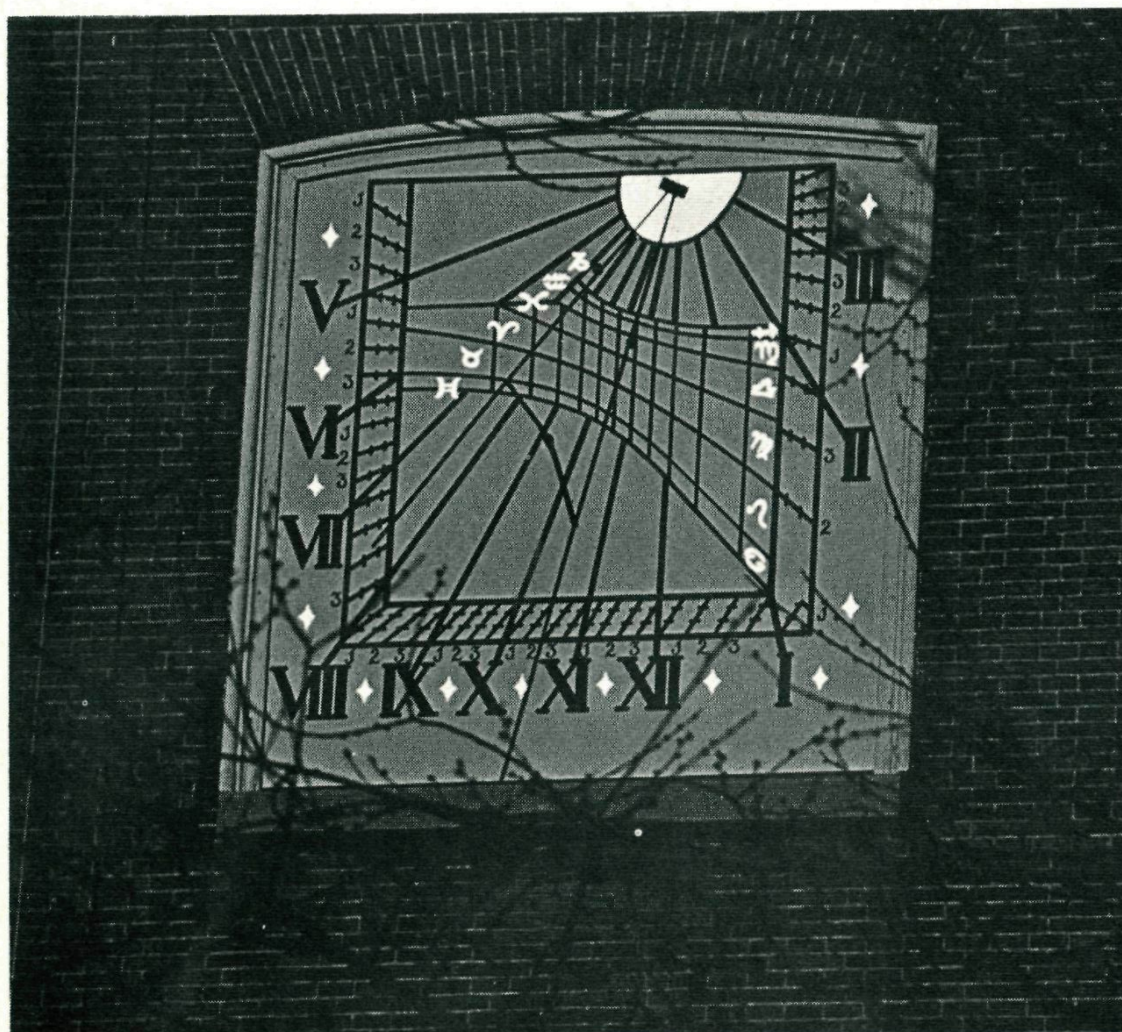


Fig. 25. Verticale zonnwijzer op een wijkende muur (Fundatie Van Renswoude, Utrecht).

Op vrijdag 23 maart wordt de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade op de scholen georganiseerd. Deze ronde is vooral gericht op de leerlingen van de klassen 4 havo en 4 en 5 vwo met belangstelling voor wiskunde. Er is geen bezwaar tegen dat ook leerlingen uit lagere klassen met buitengewoon veel aanleg en belangstelling voor wiskunde deelnemen. Eindexamenklassers kunnen echter alleen buiten mededinging meedoen.

De deelnemers kunnen op vrijdag 23 maart tussen 14.00 en 17.00 uur de oplossing proberen te vinden van 10 à 15 opgaven, variërend van vrij gemakkelijk tot tamelijk moeilijk. Bij elke opgave is er slechts één kort correct antwoord mogelijk. Aan de hand van een antwoordenformulier bepaalt de leraar na afloop de behaalde puntenaantallen. Hij stuurt een lijst hiervan op naar de organisatoren. Deze selecteren de leerlingen met de hoogste puntenaantallen, vragen hun werk ter controle op en nodigen hen uit voor deelname aan de *tweede ronde*, tevens finale van de Nederlandse Wiskunde Olympiade, te houden op vrijdag 31 augustus in Utrecht. Ongeveer 120 scholieren zullen hieraan meedoen. De opgaven van de tweede ronde zijn moeilijker dan die van de eerste ronde. Bovendien wordt dan niet alleen het antwoord, maar ook een correcte afleiding van het resultaat verlangd.

Dit jaar zal er voor het eerst een *scholenprijs* bij de eerste ronde zijn, bepaald door het puntentotaal van de beste vijf deelnemers van elke school. De winnaars van deze prijs en de individuele prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade krijgen een uitnodiging voor de plechtige prijsuitreiking, die half oktober in Utrecht zal plaatsvinden.

De resultaten van vorig jaar

De eerste ronde van 1978 telde 3 434 deelnemers, afkomstig van 293 scholen.

91 leerlingen deden mee aan de tweede ronde. De prijswinnaars waren:

1. Geert Jan van Oldenborgh (Gem. Lyceum Dordrecht) 95 punten
2. Freek Wiedijk (Rijks Sch. Gem. Texel) 94 punten
3. Jan Herman Veldkamp (Willem Lodewijk Gymn. Groningen) 93 punten
4. Laura Joppe (Rijks Sch. Gem. Goeree Overflakkee) 91 punten
5. Jan Koen Annot (Chr. Lyceum Veenendaal) 91 punten
6. Jos v.d. Bijl (Ichthus College Driehuis IJmuiden) 85 punten
7. Hugo Cramer (Augustinianum Eindhoven) 85 punten
8. Harry Bruning (Menso Alting College Hoogveen) 83 punten
9. Carel Faber (Willem Lodewijk Gymn. Groningen) 81 punten
10. Kees Huizing (Chr. Sch. Gem. Blaise Pascal Spijkenisse) 80 punten
11. Paul Louis Iske (Sch. Gem. Noord Amsterdam) 79 punten

Hieronder vind je de opgaven van de tweede ronde van 1978. In het volgende nummer komen de oplossingen.

De beste 14 deelnemers aan de tweede ronde krijgen de gelegenheid zich verder in de wiskunde te bekwamen door middel van lesbrieven die ze vanuit het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit Leiden krijgen toegestuurd. Uit deze groep worden de acht Nederlandse scholieren gekozen die in juli zullen meedoen aan de 21e Internationale Wiskunde Olympiade in Groot-Brittannië.



17e Nederlandse Wiskunde Olympiade
Tweede ronde, vrijdag 1 september 1978

1. Bewijs, dat er geen gehele getallen x en y zijn, die voldoen aan de vergelijking $3x^2 = 9 + y^3$.

2. Men wil een rechthoekige vloer met vierkante tegels betegelen. De lengte van de vloer is a dm, de breedte is b dm, waarbij a en b gehele getallen zijn. De tegels mogen elkaar niet overlappen, en de zijden van de tegels moeten evenwijdig aan de zijden van de vloer liggen.

Gebruikt men tegels met zijden van 2 dm, dan houdt men evenveel onbedekte oppervlakte over als wanneer men tegels met

zijden van 4 dm gebruikt. Neemt men tegels met zijden van 3 dm, dan blijft een oppervlakte van 29 dm^2 onbedekt.

Wat zijn de afmetingen van de vloer?

3. In het vlak liggen 1 978 punten. Bij elk punt behoort een cirkelschijf met dat punt als middelpunt, en als straal de afstand van dat punt tot een vast gekozen punt.

Bewijs, dat er vijf van deze cirkelschijven zijn, die te zamen alle 1 978 punten bedekken.

(Met cirkelschijf wordt bedoeld: de cirkel en zijn binnengebied.)

4. In het vlak met een rechthoekig coördinatenstelsel is een verzameling van oneindig veel rechthoeken gegeven. Elke rechthoek heeft de oorsprong als een van zijn hoekpunten. De zijden van alle rechthoeken zijn evenwijdig aan de coördinaatassen, en alle zijden hebben een gehele lengte.

Bewijs, dat er minstens twee rechthoeken in de verzameling zijn, waarvan de een de ander geheel bedekt.

Vlnr. Laura Joppe, Jan Herman Veldkamp, Carel Faber, Hugo Cramer, Harry Bruning, Jos v.d. Bijl en Paul Louis Iske.



In dit artikel wordt een bekende kaarttruc beschreven en verklaard. Er zal gedemonstreerd worden hoe deze kaarttruc naar allerlei richtingen uitgebreid kan worden.

We nemen een aantal briefjes die door een streep in twee helften ofwel stroken zijn verdeeld. De briefjes hebben elk een nummer dat op beide stroken vermeld staat, bijv.

5
5

Iedere helft wordt nu van een kleur voorzien; in totaal zijn vier kleuren voorhanden, bijv. rood, groen, geel, blauw. Het kleuren van de helften gebeurt zodanig dat een bepaalde kleurencombinatie slechts op één briefje voorkomt. Als dus van een briefje de ene helft rood is en de andere helft blauw, dan mag geen ander briefje deze twee kleuren hebben.

De briefjes met hun twee stroken gaan er dan als volgt uitzien:

1 rood
1 rood

2 rood
2 groen

5 groen
5 groen

3 rood
3 geel

6 groen
6 geel

8 geel
8 geel

4 rood
4 blauw

7 groen
7 blauw

9 geel
9 blauw

10 blauw
10 blauw

Meer dan tien briefjes kunnen we niet kleuren als we tenminste vasthouden aan de regel dat geen kleurencombinatie op meer dan één briefje mag voorkomen.

We gaan de briefjes nu langs de streep doorknippen. De stroken die we overhouden sorteren we op kleur. We krijgen dan vier hoopjes, die elk stroken van één kleur bevatten.

Schema A:

Het rode hoopje bevat stroken met nummers 1 1 2 3 4.

Het groene hoopje bevat stroken met nummers 2 5 5 6 7.

Het gele hoopje bevat stroken met nummers 3 6 8 8 9.

Het blauwe hoopje bevat stroken met nummers 4 7 9 10 10.

Als de volgorde van de nummers binnen één hoopje gewijzigd wordt, kunnen we bijv. het volgende schema krijgen.

Schema B:

rode hoopje	2	1	4	3	1
groene hoopje	5	2	5	6	7
gele hoopje	9	6	8	8	3
blauwe hoopje	9	10	10	7	4

Op schema A (of B) is de volgende bekende kaarttruc gebaseerd.

Laat aan een toeschouwer tien paren speelkaarten zien (dus in totaal twintig speelkaarten).

Voorbeeld

Sch 4	Ru H	Ru 6	Ru A	Sch 3	Ha Vr
Kl 9	Kl Vr	Sch A	Ha H	Ha 8	Ha 5
Ha A	Ru 7	Kl 10	Ru 2	Kl 4	Sch 10
Sch B	Kl H				

Vraag de toeschouwer één paar in gedachten te nemen. Neem daarna de kaarten op, zodanig dat kaarten van één paar meteen na elkaar worden opgenomen*; leg de twintig kaarten vervolgens weer op tafel in vier rijen van vijf kaarten en doe dit overeenkomstig schema A, d.w.z. kaarten van één paar worden op eenzelfde getal gelegd. We krijgen dan bijv.

Kl 10	Ru 2	Ha 8	Kl Vr	Ha A	rij 1
Ha 5	Kl 4	Sch 10	Ru A	Sch 4	rij 2
Kl 9	Ru 6	Sch B	Kl H	Ha H	rij 3
Ru 7	Ru H	Sch A	Sch 3	Ha Vr	rij 4

* De volgorde van de paren is willekeurig bij het opnemen.

Vraag de toeschouwer in welke rij(en) de kaarten liggen van het door hem gekozen paar. Als hij bijv. antwoordt 'rij 2 en rij 4', dan weet je dat het door hem gekozen paar bestaat uit de kaarten die op het getal zeven liggen. Aldus is bij ieder antwoord meteen te zien welk paar de toeschouwer in gedachten genomen had.

In plaats van schema A had je voor het opnieuw uitleggen van de kaarten ook schema B kunnen gebruiken. Schema B is gemakkelijk te onthouden met het ezelsbruggetje:

ANTON
DADER
BELLO
BUURT

(Ook de woorden MATAS, DEDIT, NOMEN, COCIS zijn in gebruik; deze woorden horen bij een schema dat men krijgt als de nummers binnen één hoopje weer anders gerangschikt worden.)

De truc is ook te doen met de blinde zijde van de kaarten naar boven in plaats van de beeldzijde.

Er bestaan diverse varianten van deze kaarttruc. Daartoe gaan we weer naar de briefjes aan het begin van dit artikel.

We gebruiken nu niet vier maar vijf kleuren, bijv. rood, groen, geel, blauw, paars. In plaats van tien kunnen we nu vijftien briefjes kleuren en wel als volgt:

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1. rood / rood | 9. groen / paars |
| 2. rood / groen | 10. geel / geel |
| 3. rood / geel | 11. geel / blauw |
| 4. rood / blauw | 12. geel / paars |
| 5. rood / paars | 13. blauw / blauw |
| 6. groen / groen | 14. blauw / paars |
| 7. groen / geel | 15. paars / paars |
| 8. groen / blauw | |

Dit levert een kaarttruc op met vijftien paren speelkaarten (dus met dertig speelkaarten), die niet in vier maar in vijf hoopjes worden uitgelegd.

We kunnen ook briefjes gebruiken die in drie stroken verdeeld zijn. Stel we gebruiken vier kleuren. Er geldt weer: twee

briefjes mogen niet dezelfde kleurencombinatie bezitten (dus als van een briefje twee stroken blauw zijn en een strook groen dan mag geen ander briefje deze combinatie bevatten).

We kunnen nu twintig briefjes kleuren.

1. rood / rood / rood
2. rood / rood / groen
3. rood / rood / geel
4. rood / rood / blauw
5. rood / groen / groen
6. rood / groen / geel
7. rood / groen / blauw
8. rood / geel / geel
9. rood / geel / blauw
10. rood / blauw / blauw
11. groen / groen / groen
12. groen / groen / geel
13. groen / groen / blauw
14. groen / geel / geel
15. groen / geel / blauw
16. groen / blauw / blauw
17. geel / geel / geel
18. geel / geel / blauw
19. geel / blauw / blauw
20. blauw / blauw / blauw

Dit levert een kaarttruc op waarbij men aan een toeschouwer twintig trio's (i.p.v. paren) laat zien, waarvan deze er één in gedachten moet nemen. Je hebt dan zestig speelkaarten nodig (bijv. dertig kaarten op twee stellen).

Nog een variant leiden we op de volgende manier af.

We gaan nu briefjes kleuren die elk een strook met de letter A en een strook met

5 A

de letter B hebben bijv. ;

5 B

ieder briefje krijgt aldus een A-kleur en een B-kleur.

Bij het kleuren nemen we de volgende regel in acht: een bepaalde combinatie A-kleur/B-kleur mag slechts op één briefje voorkomen.

Als we met vier kleuren werken gaan de briefjes er als volgt uit zien.

1 rood A	5 groen A
1 rood B	5 rood B
2 rood A	6 groen A
2 groen B	6 groen B
3 rood A	7 groen A
3 geel B	7 geel B
4 rood A	8 groen A
4 blauw B	8 blauw B
9 geel A	13 blauw A
9 rood B	13 rood B
10 geel A	14 blauw A
10 groen B	14 groen B
11 geel A	15 blauw A
11 geel B	15 geel B
12 geel A	16 blauw A
12 blauw B	16 blauw B

Na het verknippen van de briefjes en het sorteren van de stroken krijgen we de volgende hoopjes.

Schema C:

Het rode hoopje bevat stroken met de codes 1A, 1B, 2A, 3A, 4A, 5B, 9B, 13B.

Het groene hoopje bevat stroken met de codes 2B, 5A, 6A, 6B, 7A, 8A, 10B, 14B.

Het gele hoopje bevat stroken met de codes 3B, 7B, 9A, 9B, 10A, 11A, 11B, 12A, 15B.

Het blauwe hoopje bevat stroken met de codes 4B, 8B, 12B, 13A, 14A, 15A, 16A, 16B.

De bijbehorende kaarttruc gaat als volgt in zijn werk. Laat zestien paren speelkaarten zien aan een toeschouwer; deze neemt één paar in gedachten en onthoudt welke kaart rechts en welke kaart links ligt; de kaarten worden opgenomen en wel zodanig dat kaarten van één paar na elkaar worden opgenomen, eerst de rechter- en daarna de linkerkaart.

De kaarten worden uitgelegd volgens schema C; kaarten van één paar worden op hetzelfde getal gelegd; de rechterkaart op A, de linkerkaart op B.

De toeschouwer zegt in welke rij de rechter- en in welke rij de linkerkaart van het door hem gekozen paar ligt.

Je weet dan meteen welk paar de toeschouwer in gedachten had genomen. Binnen één hoopje in schema C mag de volgorde zonder bezwaar gewijzigd worden.

Er zijn natuurlijk nog veel meer varianten mogelijk, bijv. als we bij briefjes met twee stroken te werk gaan met zes kleuren, of als we bij briefjes met drie stroken met vijf kleuren werken,

of als we briefjes hebben met een A-, een B- en een C-strook,

of als we briefjes met A- en B-stroken met vijf kleuren bewerken, enz.

°°Van globe naar landkaart

Er zijn vele manieren bedacht om de hele globe of delen ervan op een plat vlak te projecteren zodat een landkaart ontstaat.

Deze projectiemethoden kunnen een niet te groot gebied afbeelden zò dat afstanden bij benadering verhoudingsgetrouw zijn weergegeven. Met verhoudingsgetrouw wordt bedoeld dat afstanden natuurlijk niet in ware grootte worden afgebeeld, maar op zekere schaal. Bij benadering wil zeggen dat meestal naar de rand van de kaart afstanden en oppervlaktes minder precies worden. Men spreekt wel van een lokale benadering.

Ook in de wiskunde gebruikt men het begrip lokale benadering. Zo kan men de kwadratische functie $f: x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ vervangen door de lineaire functie $g: x \rightarrow x + 1$, wat een goede benadering is voor waarden van x dicht bij nul (fig. 1). Bijvoorbeeld: $g(0,01) = 1,01$ en $f(0,01) = 1,01005$.

Zo'n lokale benadering kan een goede rol vervullen bij problemen die wel met een lineaire functie, maar niet of moeilijk met

andere functies op te lossen zijn. Maar zoals uit fig. 1 blijkt zal de benadering minder bruikbaar zijn naarmate waarden van x verder van nul af liggen. Als er waarden van x rond -2 in het geding zijn, kan men natuurlijk een andere benadering (een andere kaart) kiezen: $x \rightarrow -x - 1$. Een bruikbare lineaire benadering voor de functie voor het gehele domein is niet mogelijk. Evenmin is het mogelijk een vlakke weergave van de gehele aardbol

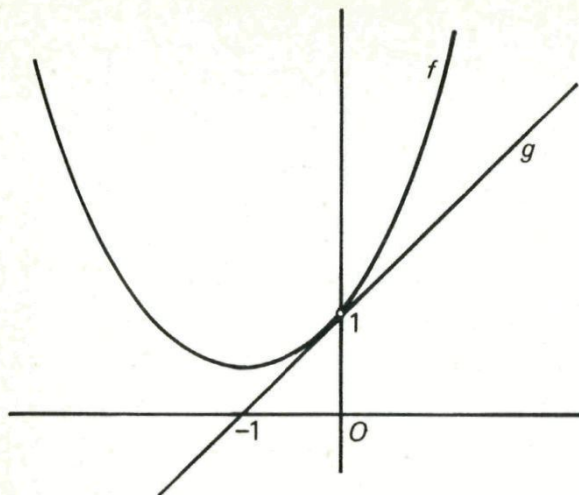


Fig. 1.

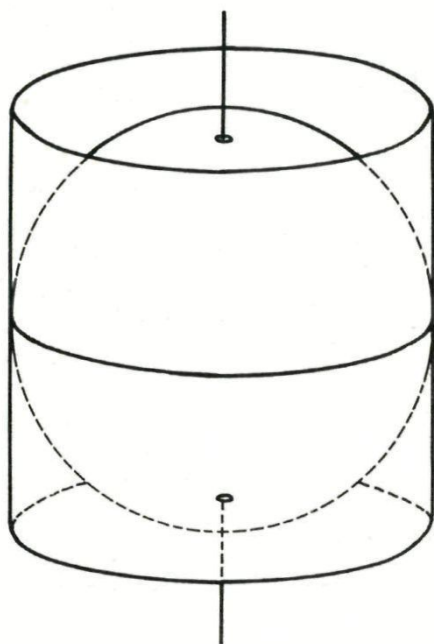


Fig. 2.

te maken waarop afstanden betrouwbaar worden weergegeven. Wel kan men een redelijk resultaat krijgen met kaartdelen die niet aaneengesloten worden afgebeeld. Dit is vergelijkbaar met het benaderen van de parabool van fig. 1 door een gebroken lijn bestaande uit raaklijnstukken, in plaats van door 1 raaklijn.

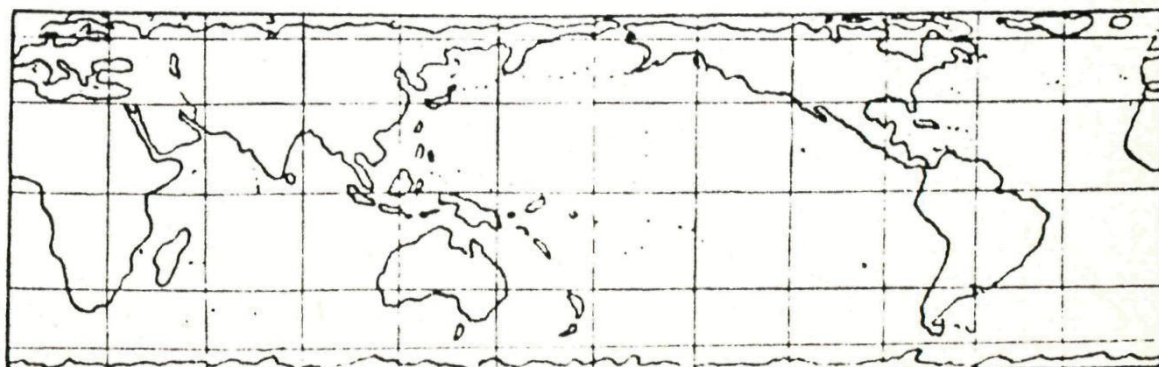
Toch is het mogelijk om de aardbol oppervlaktegetrouw in het platte vlak weer te geven! Dus eilanden met gelijke oppervlakte op de kaart hebben dat in werkelijkheid ook. Hoewel de vorm van zo'n eiland op de kaart soms moeilijk te herkennen is. Want van afstandstrouw is bij deze projectiemethode geen sprake. De methode was overigens al bekend aan Archimedes.

Stel de wereldbol omgeven door een cilinder door de evenaar en evenwijdig de aardas (fig. 2).

We vinden de projectie van een punt door hier vanuit eerst een loodlijn neer te laten op de aardas en deze loodlijn in de andere richting te verlengen totdat de cilinder gesneden wordt (fig. 3).

Deze omschrijving geldt niet voor de polen (waarom niet?).

De kaart die ontstaat door het openknippen van de cilinder ziet er ongeveer als volgt uit:



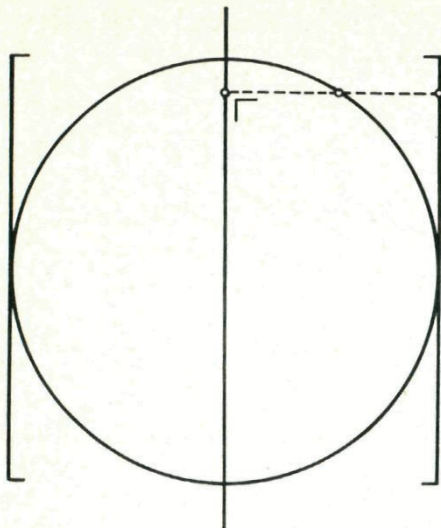


Fig. 3.

Parallelcirkels verschijnen als horizontale lijnen, meridianen als verticale lijnen. Het meest opvallend is dat Midden-Afrika en het Verre Oosten groter overkomen dan bij de gebruikelijke projecties. Misschien dat deze methode de problemen rond de derde wereld in de juiste proporties weet te zetten!

Waarom is er bij deze projectie oppervlakte-trouw? Stel je voor dat er twee schilders zijn, waarvan de ene de cilinder en de andere de bol gaat schilderen. Ze spreken af beiden van onderen naar boven te schilderen en wel zo, dat de horizontale grens tussen geverfd en ongeverfd eenparig (snelheid $\vec{V}_1$) naar boven schuift (fig. 5).

Bij de cilinder verandert het geschilderde oppervlak daarmee ook eenparig ($2\pi R |\vec{V}_1|$). Hoe is het met de bol?

De snelheid $\vec{V}_2$ waarmee de vergrens verschuift langs een meridiaan is gelijk aan $\frac{R}{P} |\vec{V}_1|$, wegens de gelijkvormigheid van de driehoeken in figuur 6. Het verfwerk gebeurt op de bol over een cirkel met omtrek $2\pi P$, dus verandert het geschilderd oppervlak van $2\pi P \times \frac{R}{P} |\vec{V}_1| = 2\pi R |\vec{V}_1|$ en dat komt volledig overeen met

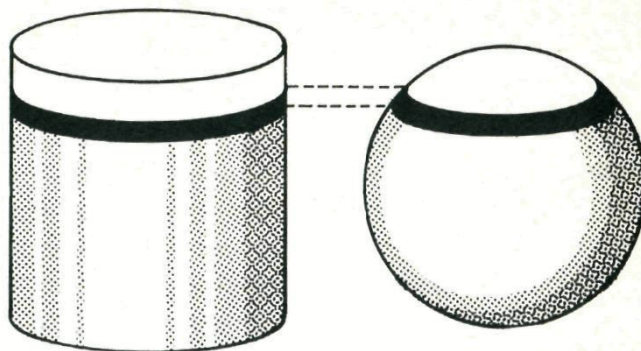


Fig. 5.

de cilinder. Met andere woorden: de beide schilders verzetten evenveel verfwerk per tijdseenheid. Bovendien zijn ze op hetzelfde moment begonnen. Nemen we twee momenten in gedachten dan is het tussenliggend verfwerk gelijk: de zwarte ringen in fig. 5. Neemt men daarvan weer een sector, bijvoorbeeld het honderdste deel, dan zijn die oppervlaktes ook gelijk (fig. 7). Een eiland op de bol kunnen we indelen in kleine vierhoekjes; dan zal ook

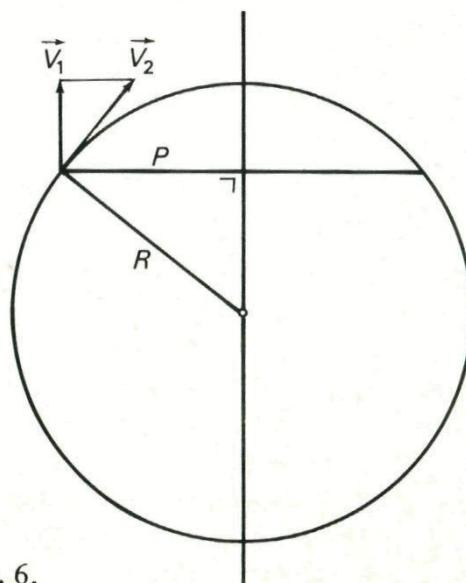


Fig. 6.

de projectie ingedeeld worden met evenveel vierhoekjes van dezelfde oppervlakte.

Onze afbeelding is aldus oppervlakte-trouw.

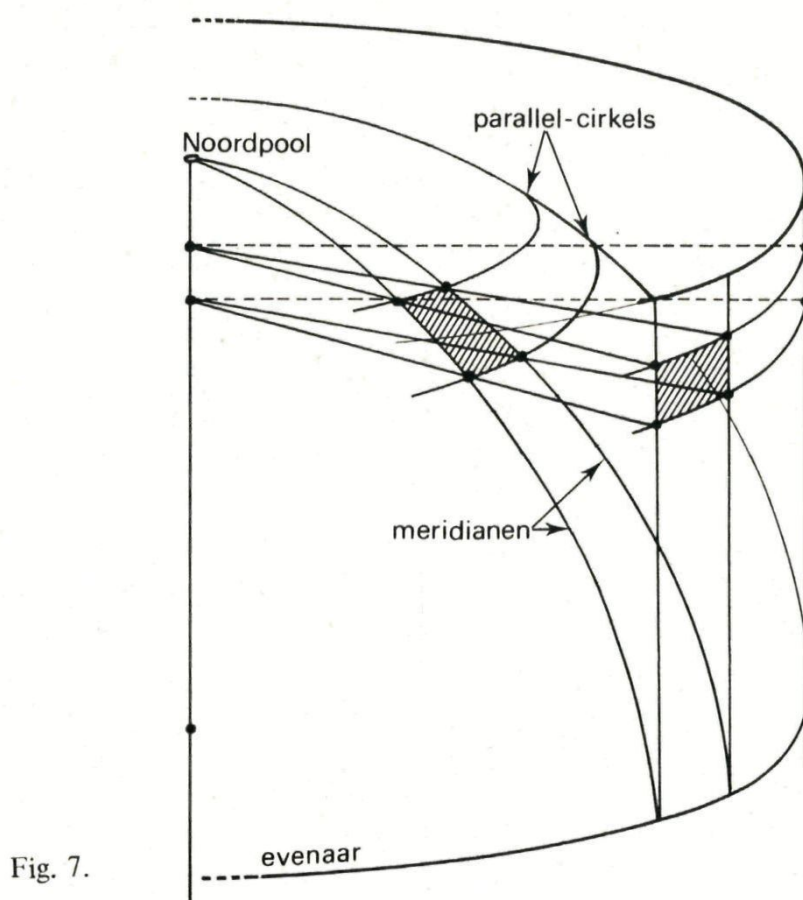


Fig. 7.

Inhoud

Zonnewijzers 73

Zonnewijzers komen weer in de belangstelling 73

Tijdmeting 73

Wiskundig spel 74

De baan van de zon en de richting van de schaduw 74

Een geniale oplossing uit de oudheid 77

De Angelsaksische zonnewijzer, een misser uit de middeleeuwen 79

De tuinzonnewijzer 79

De equatoriale zonnewijzer 80

De horizontale en verticale zonnewijzer 81

De constructie van de horizontale zonnewijzer 82

De verticale zonnewijzer op een zuidmuur 84

De Nederlandse Wiskunde Olympiade: opgaven tweede ronde 88

Kaarttrucs 90

Van globe naar landkaart 93



Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

W. Kleijne, Apeldoorn.
Ir. H. Mulder, Nieuw Ginniken
G.A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Stationsstraat 114, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,— per jaargang. Voor anderen f 11,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

