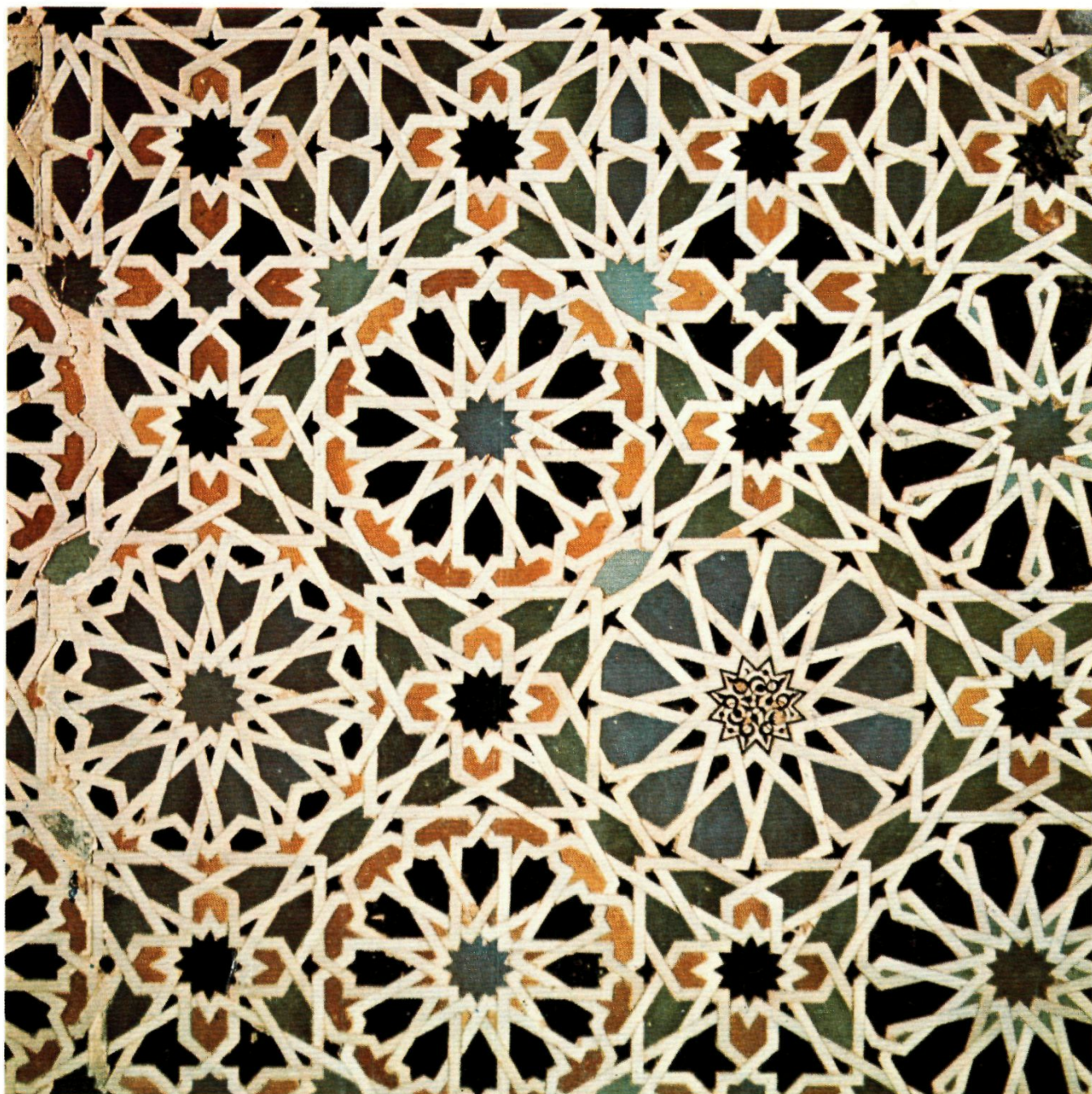


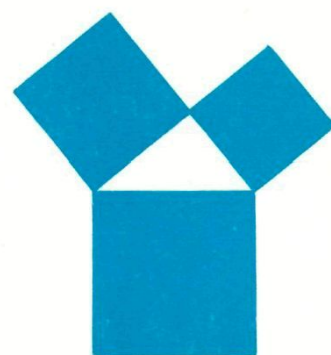


5

jaargang 18 / maart 1979

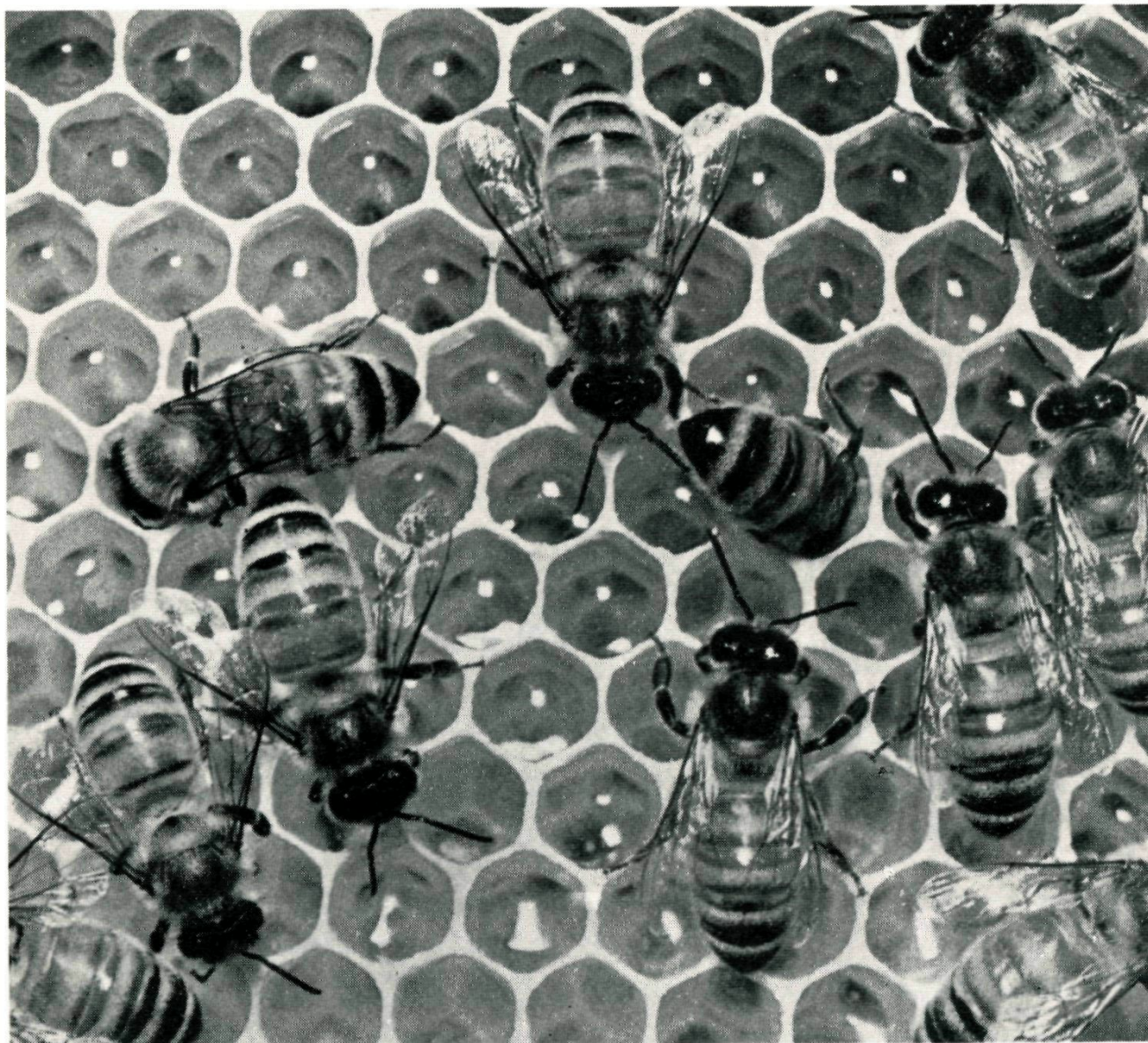
**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



De honingraat van de bijen is opgebouwd uit cellen die bij een minimum aan materiaalgebruik (was) een maximale inhoud en een grote stevigheid garanderen. Dit heeft de geleerden altijd verbaasd. Meer hierover in het eerste artikel.

BIJ DE PLAAT OP DE OMSLAG:

Vrijwel alle zalen van het Alhambra (het Moorse paleis in Granada) zijn tot schouderhoogte bedekt met tegelwerk. Wat de vlakverdeling betreft waren de Moren zeer inventief, elke muur heeft weer andere ingewikkelde geometrische patronen. Ook de techniek is bijzonder: alle elementen zijn gezaagd uit gekleurde steen en op gips geplakt.

De vorm van de bijecel

Martin Kindt

Dit is een klassiek probleem.

Het gaat over de vorm van de bijecel, waar Euclides al studie van gemaakt schijnt te hebben en die Pappus geïnspireerd heeft tot de uitspraak dat de bij over een 'meetkundig instinct' moet beschikken.

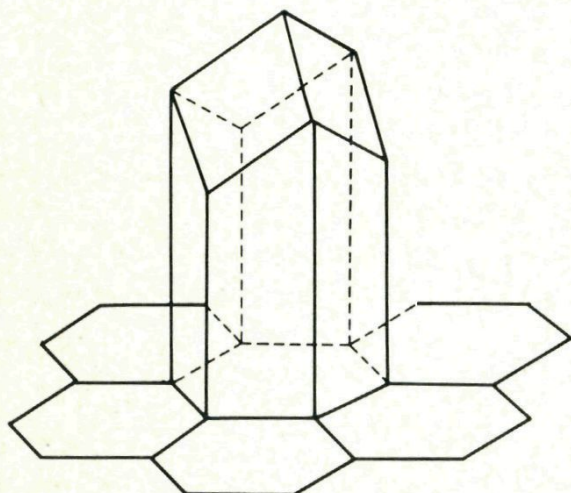


Fig. 1. Bijecel.

Iedereen weet dat een honingraat een fraaie meetkundige structuur vertoont: een vlakvulling van regelmatige zeshoeken. Maar wat misschien minder bekend is, is dat elke bijecel met zo'n zeshoek als (open) bodem uitloopt in een 'drievlakspunt', waarbij de drie bovenvlakken de vorm hebben van een ruit.

Meetkundig kunnen we zo'n cel eenvoudig uit een zeszijdig prisma laten ontstaan. Van het prisma zagen we drie puntjes af (langs de diagonalen $B_1 B_3$, $B_3 B_5$ en $B_5 B_1$) en die plaatsen we er bovenop.

Meer wiskundig gezegd: het viervlakje $B_1 B_2 B_3 X$ draaien we om de lijn $B_1 B_3$ over 180° , enz.

Natuurlijk moeten we dan wel weten hoe schuin we moeten zagen, met andere woorden: welke hoek de drie bovenvlakken met het grondvlak moeten maken.

Op de *inhoud* van de cel heeft die hoek geen invloed, die inhoud zal immers steeds gelijk zijn aan de inhoud van het prisma!

Spannender is wat er met de *buitenoppervlakte* van de cel gebeurt als de hoek (in de figuur aangeduid met α) verandert.

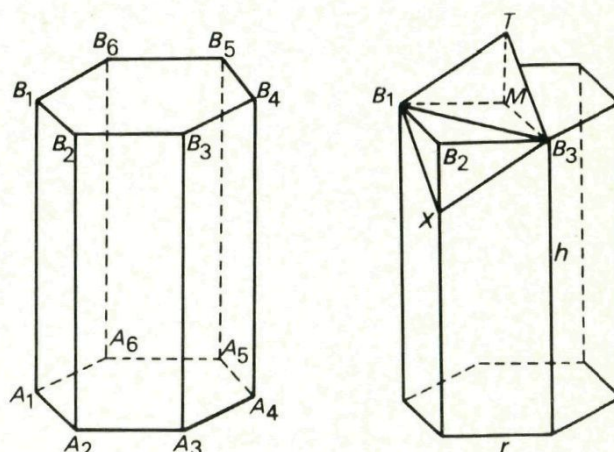


Fig. 2.

Ook voor de bij is die kwestie interessant, want zij moet tenslotte de was leveren waarmee de wanden worden gemaakt.

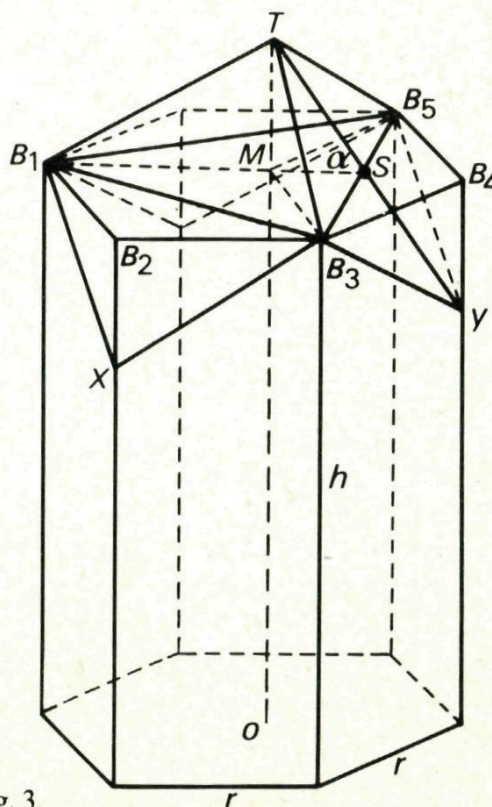


Fig. 3.

En je voelt de probleemstelling misschien al aan: we zijn, met de bij, geïnteresseerd in dié hoek α , waarvoor de buitenoppervlakte van de cel *minimaal* is.

Het instrument dat in de wiskunde beschikbaar is voor een dergelijke probleem heet *differentiaalrekening*. Dus daar gaan we dan maar.

In fig. 4 zijn enkele afspraken over de in te voeren variabelen vastgelegd (ribbe grondvlak = r , hoogte prisma = h , hoek tussen bovenvlak en grondvlak = α).

Met gebruikmaking van o.a. wat goniometrie vinden we:

$$MS = \frac{1}{2}r;$$

$$TS = \frac{1}{2\cos\alpha} \cdot r;$$

$$TM = YB_4 = \frac{1}{2}\tan\alpha \cdot r;$$

$$B_3 B_5 = r\sqrt{3}.$$

De oppervlakte van de ruit $TB_3 YB_5$ is gelijk aan het produkt van TS en $B_3 B_5$, dus aan:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\cos\alpha} \cdot r^2.$$

De zijwanden van de cel zijn rechthoekige trapezia met als oppervlakte:

$$hr - \frac{1}{4}\tan\alpha \cdot r^2.$$

Zo komen we tot een totale buitenoppervlakte van:

$$6(hr - \frac{1}{4}\tan\alpha \cdot r^2) + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2\cos\alpha} \cdot r^2\right) =$$

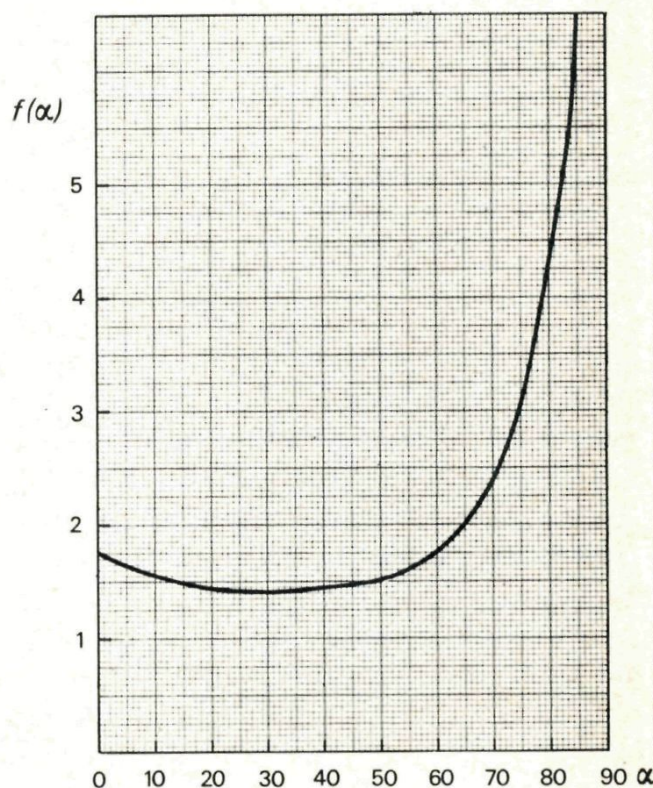
$$6hr + \frac{3}{2}r^2 \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha} - \tan\alpha\right)}_{f(\alpha)}$$

Die oppervlakte is natuurlijk minimaal als $f(\alpha)$ minimaal is (met inachtneming van de voorwaarde $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$).

Met behulp van een zakrekenmachientje kunnen we snel een serie waarden voor $f(\alpha)$ berekenen:

α	$f(\alpha)$
0°	1,73
10°	1,58
20°	1,48
30°	1,42
40°	1,42
50°	1,50
60°	1,73
70°	2,32
80°	4,30

om vervolgens een grafiek te schetsen:



Het minimum van $f(\alpha)$ lijkt voor α bereikt te worden ergens tussen 30° en 40° in.

Via de afgeleide van f kunnen we een nauwkeurige waarde vinden:

$$f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Zo komen we tot een optimale hoek α van $35,3^\circ$.

Metingen van bijecellen geven resultaten die niet ver van de hier gevonden waarde afwijken, zodat we kunnen vaststellen dat de bij haar cel zo economisch mogelijk bouwt. Darwin sprak in dit verband van 'the most wonderful of known instincts'.

Ruimtefilling

Een ander interessant aspect van de bijcel is de vorm van de drie ruiten die in de top samenkomen. De astronoom Maraldi schreef in zijn *Observations sur les abeilles* (1712) dat hij waargenomen had dat de hoeken van zo'n ruit 110° en 70° zijn.

Bekijken we de 'ideale' bijcel dan vinden we (stelling van Pythagoras) dat de zijden van zo'n ruit de lengte $\frac{3}{4}r\sqrt{2}$ hebben. Via de wetenschap dat de lange diagonaal $r\sqrt{3}$ is, vinden we (cosinusregel) voor de cosinus van de stompe hoek het getal $-\frac{1}{3}$. Dit levert een hoek van $109^\circ 28'$, dicht in de buurt van de door Maraldi gemeten hoek.

Die cosinus ter waarde van $-\frac{1}{3}$ komt je misschien wel bekend voor. Die past ook bij de (stompe) hoeken tussen de halve lichaamsdiagonalen in een kubus.

Dit rekt men gemakkelijk na met de cosinusregel of met vectoren: kies de oorsprong in het middelpunt van de kubus en de acht hoekpunten als $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$; de vectoren naar de uiteinden van de vier gekozen halve lichaamsdiagonalen hebben onderlinge

inproducten van -1 , terwijl elk van die vectoren de lengte $\sqrt{3}$ heeft.

Spiegelen we de zes vierzijdige piramides waarin de kubus door de lichaamsdiagonalen wordt verdeeld ten opzichte van hun grondvlak, dan ontstaat het bekende *ruitentwaalfvlak* (*rhombododecaëder*), waarvan de zijvlakken blijkbaar dezelfde vorm hebben als de drie ruiten van de bijcel.

Aan de hand van de laatste prenten kan men nu gemakkelijk begrijpen dat de ruimte opgevuld kan worden met ruitentwaalfvlakken. (Vul de ruimte met kubussen en trek alle lichaamsdiagonalen!)

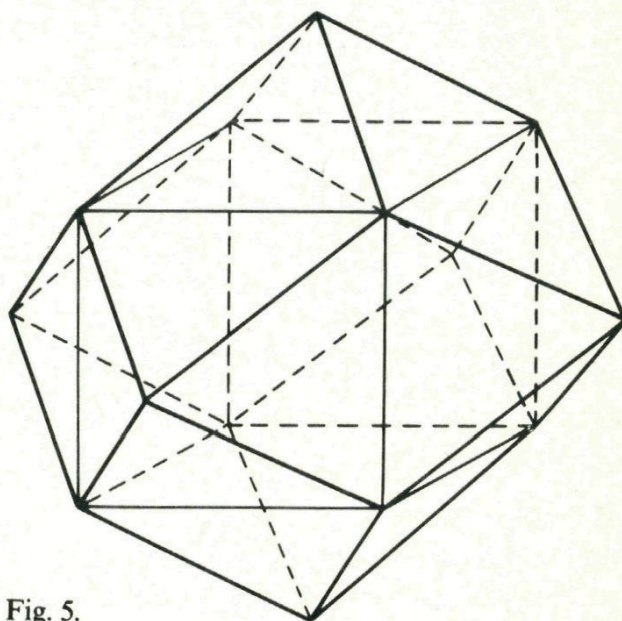


Fig. 5.

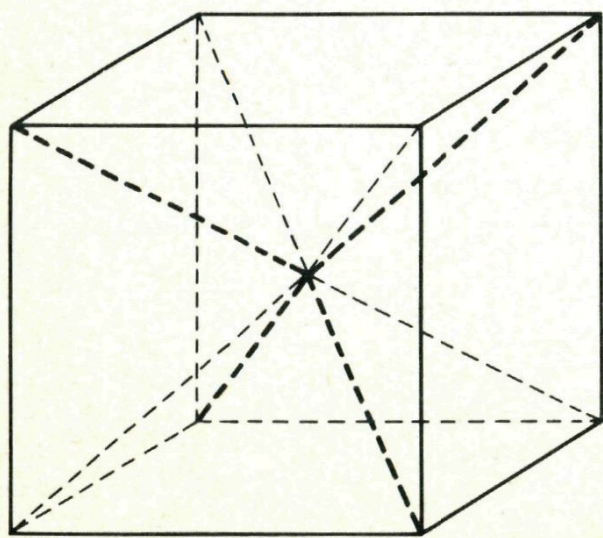
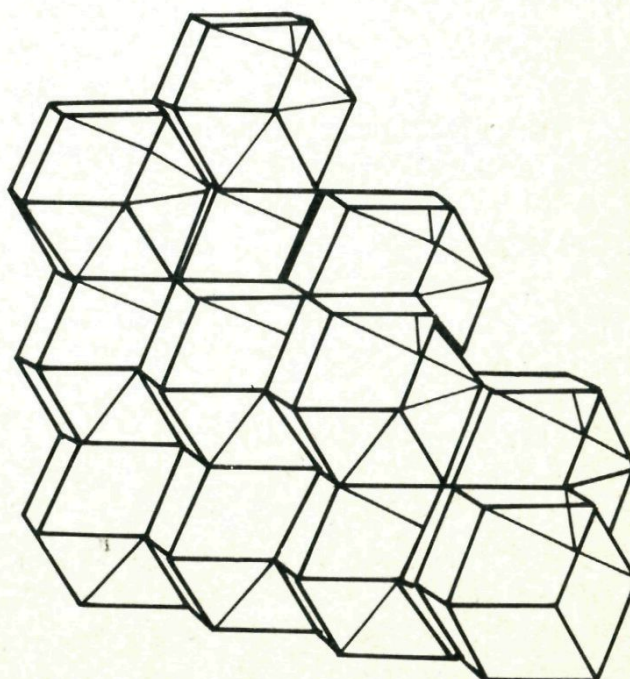
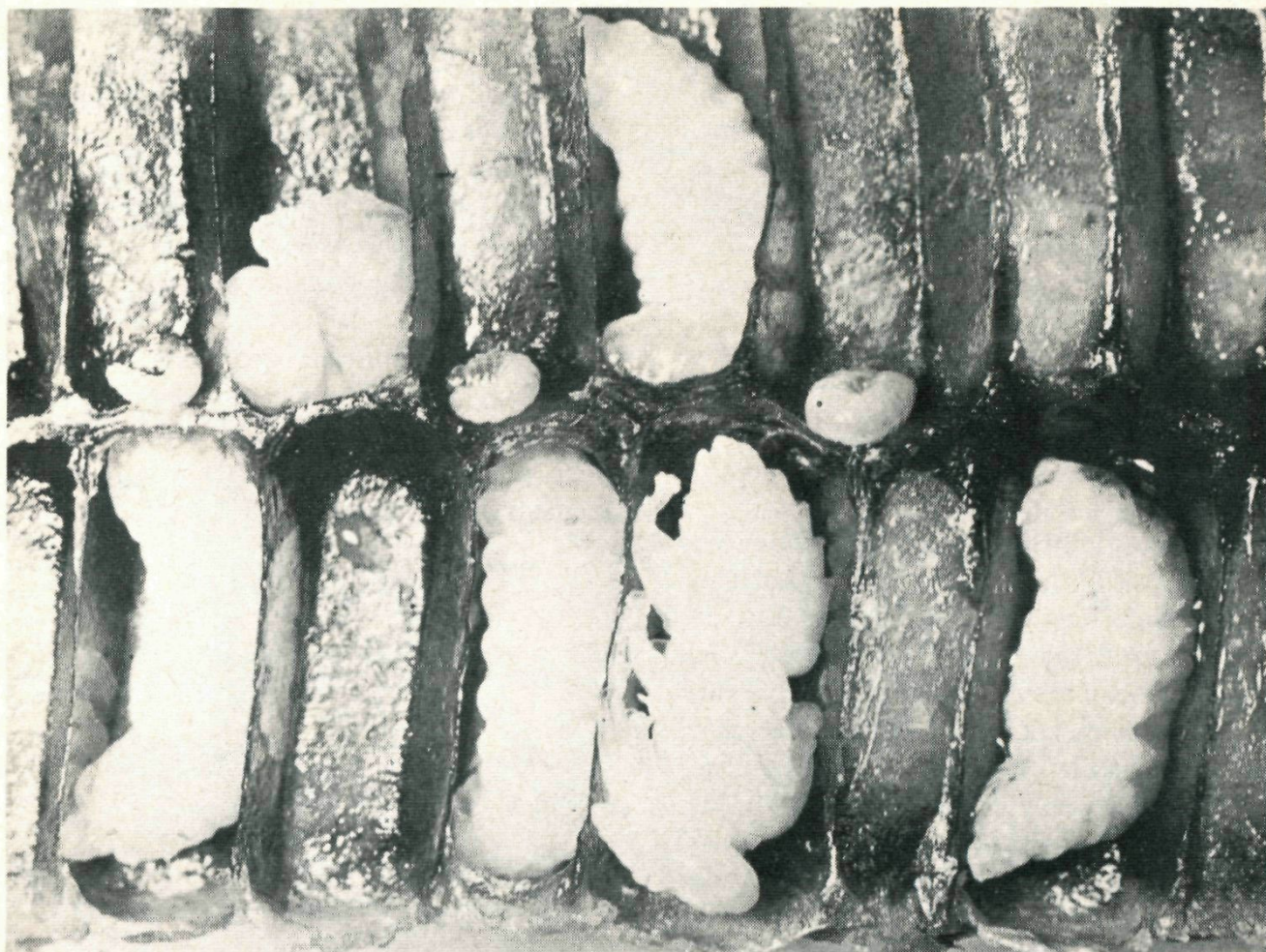


Fig. 4.





De ruimte kan natuurlijk ook gevuld worden met regelmatige zeszijdige prisma's en het is nu niet moeilijk meer te zien dat dit ook kan met lichamen die zowel iets van het zeszijdige prisma als van het ruitentwaalfvlak hebben: de bijecellen.

Kepler had uit de ruimtevullende structuur van de bijcel al de conclusie getrokken dat de ruiten dezelfde vorm moesten hebben als die van het ruitentwaalfvlak, dus met een hoek van $109^{\circ}28'$, maar zijn ontdekking is lang onopgemerkt gebleven.

Die zelfde hoek van $109^{\circ}28'$ treft men ook aan bij zes zeepvliezen die elkaar in één punt ontmoeten.

Hoe het ook zij, het idee van de ruimtevulling werpt een ander, misschien minder mysterieus licht op de vorm van de bijcel. En het lijkt aannemelijk dat de regelmatigheid van dit trotse bouwwerk eerder een gevolg is van samenspel van fysische krachten, dan van het economisch inzicht van de bij.

Als je meer over de boeiende historie van het bijecelprobleem wilt weten, raadpleeg dan het bijzonder fraaie boek van D'Arcy Thompson: *On Growth and Form*.

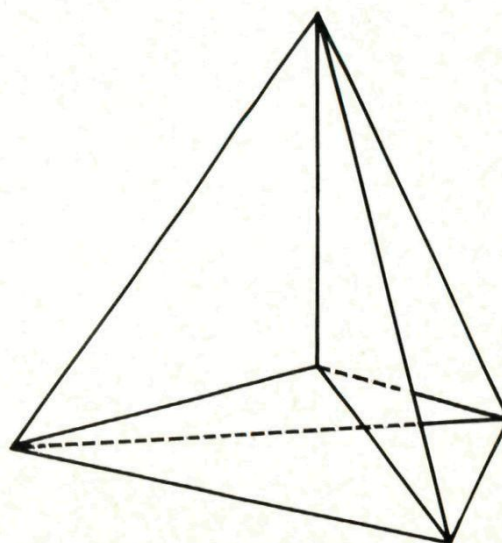


Fig. 6.

° Indirecte bewijzen

P. Gondrie

Het komt wel eens voor dat we bij een vraagstuk iets moeten bewijzen maar dat we niet weten hoe we een dergelijk bewijs moeten aanpakken. Het kan dan wel eens zijn dat een dergelijk bewijs eenvoudig wordt als we aannemen dat hetgeen we moeten bewijzen niet waar is.

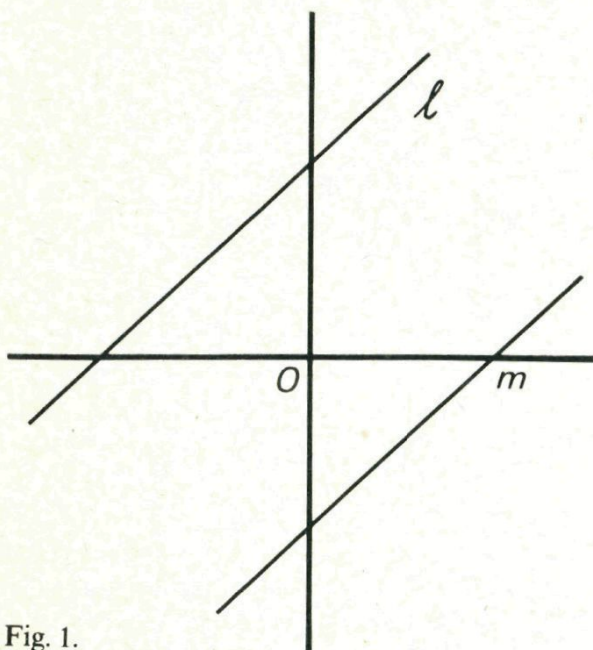


Fig. 1.

Bekijken we het volgende voorbeeld.

Bewijs dat als twee lijnen evenwijdig lopen hun richtingscoëfficiënten gelijk zijn (zie fig. 1).

Stel dat de lijnen l en m grafieken zijn van de functies $f: x \rightarrow ax + b$ en $g: x \rightarrow ax + d$ en dat l en m niet evenwijdig lopen. De lijnen snijden elkaar en nu geldt: $ax + b = ax + d$ dus $b = d$ en $f = g$, dat wil zeggen de grafieken lopen wel evenwijdig, terwijl we hadden aangenomen van niet. Tegenspraak! Conclusie: ons uitgangspunt is fout geweest en de lijnen lopen wel evenwijdig.

Het tweede voorbeeld heeft te maken met denkertje 8 uit nr. 1 jaargang 18.

Kijken we naar fig. 2 dan moeten we hoek A_1 berekenen. In *Pythagoras* wordt een direct bewijs gegeven met behulp van het trekken van hulplijnen. We proberen nu eens een indirect bewijs. Als je een nette tekening maakt en hoek A_1 opmeet, vind je dat hoek $A_1 = 60^\circ$. We vermoeden dan dat dit wel altijd zo zal zijn.

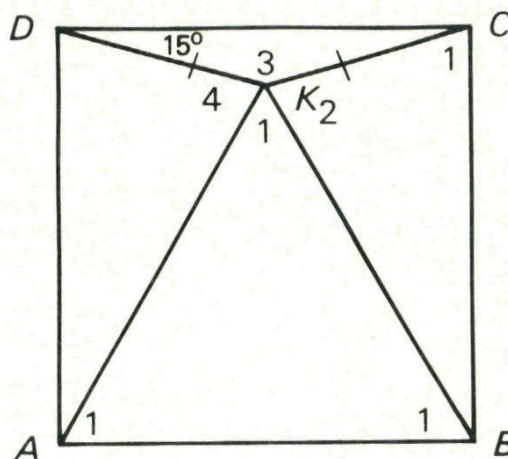


Fig. 2.

Veronderstel dat hoek $A_1 < 60^\circ$. Hieruit volgt dat hoek $B_1 < 60^\circ$ (driehoek ABK is gelijkbenig), en dus is hoek $K_1 > 60^\circ$. Tegenover de grootste hoek in een driehoek ligt ook de grootste zijde, dat wil zeggen $AB > BK$. Hoek $K_3 = 150^\circ$, hoek $K_2 =$ hoek K_4 en hoek $K_1 > 60^\circ$, dus hoek $K_2 < 75^\circ$. Hoek $C_1 = 75^\circ$, dat wil zeggen $BK > BC$. We hebben nu $AB > BK > BC$, maar dit kan niet omdat $\square ABCD$ een vierkant is en dan is $AB = BC$. (Je krijgt een analoog bewijs als je stelt dat hoek $A_1 > 60^\circ$ is; je vindt dan $AB < BC$).

Opmerking: dat in een driehoek tegenover de grootste hoek de grootste zijde ligt, volgt uit de sinusregel. Indien hoek $A >$ hoek B dan is $\sin(A)$ groter dan $\sin(B)$. (Ga dit zelf maar eens na!) Hieruit volgt $a:b = \sin(A):\sin(B) > 1$, dus $a > b$.

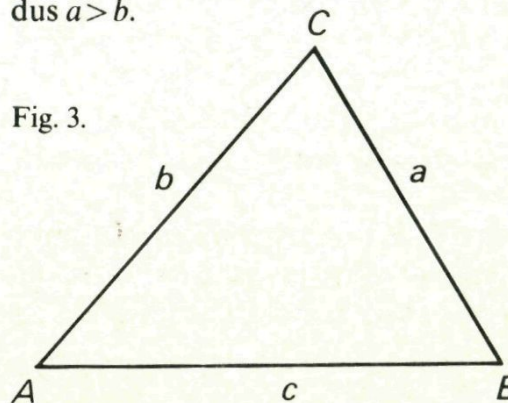


Fig. 3.

In het vorige nummer hebben we in verband met de zonnewijzer iets verteld over de richting van de schaduw die de zon van een verticale stok werpt. In dit artikel bekijken we de baan die de (zonne)schaduw van de punt van een stokje gedurende een hele dag, bijvoorbeeld om het half uur, beschrijft. Dit levert namelijk een aantal gegevens op waarin wiskundig interessante zaken schuilgaan.

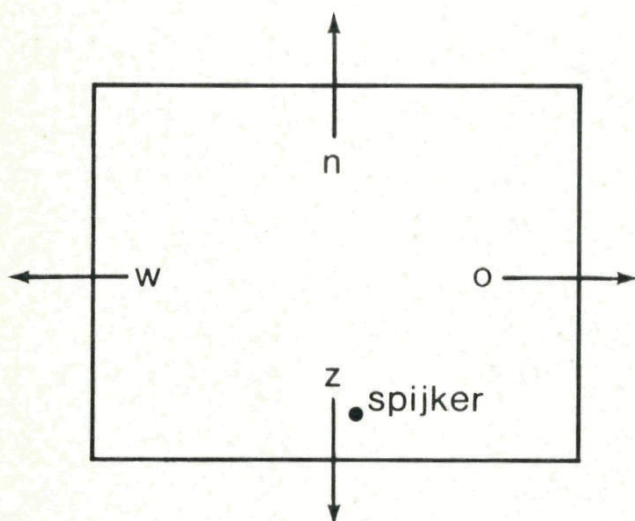


Fig. 1.

Voor de inrichting van de 'waarnemingspost' doen we de volgende simpele suggesties. Het kan natuurlijk veel perfecter voor wie dat wil.

Neem een plaatje triplex of multiplex van bijvoorbeeld 30 cm x 40 cm. Sla daarin bij de rand loodrecht een spijker; de spijker functioneert als schaduwstok. Geef de windrichtingen op de plank aan.

Met behulp van een kompas wordt de plank buiten georiënteerd. Om het uur (of om het half uur) wordt nu de zonneschaduw van de spijker op de plank getekend. Telkens wordt bij de uitgetekende schaduw het tijdstip van vastleggen genoteerd.

De uit de waarnemingen verkregen gegevens kunnen op verschillende wijzen verwerkt worden. Op twee manieren gaan we hierop nader in.

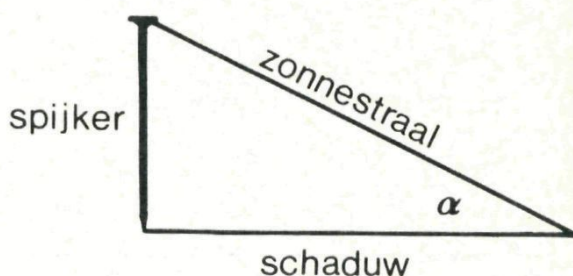


Fig. 2.

Grafieken

De zonnestraal, die telkens nog juist het topje van de 'schaduwstok' passeerde, vormde samen met de spijker en de schaduw steeds een rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden bewaard zijn gebleven. Met behulp van die rechthoekszijden kunnen de rechthoekige driehoeken voor de verschillende tijdstippen eenvoudig gereconstrueerd worden, en hiermee de hoogte van de zon op de verschillende waarnemingsmomenten uitgedrukt in de hoek (fig. 2).

Hetzelfde is te bereiken met behulp van het begrip tangens en het terugzoeken in de gonietafel of berekenen met behulp van een rekenmachine.

Uit deze gegevens kan nu een hoogte/tijd-grafiek voor de zon op een zekere dag worden samengesteld. Omdat onze waarnemingen een deel zijn van een doorlopend proces, mogen we de grafiek doorlopend veronderstellen en dus de punten, die in de grafiek onze waarnemingen weergeven, onderling verbinden.

Aan dergelijke grafieken kan omgekeerd heel wat informatie ontlokt worden, bijvoorbeeld uit fig. 3:

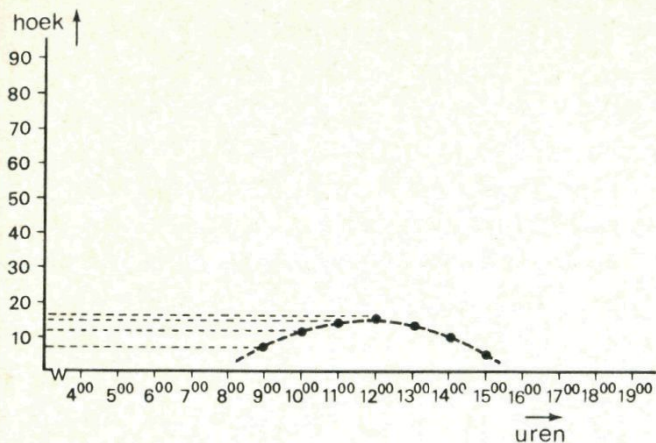


Fig. 3.

- tijdstippen bepalen van zonsopkomst en -ondergang;
- bij de hoogste stand staat de zon slechts op 15° , dus nogal laag.

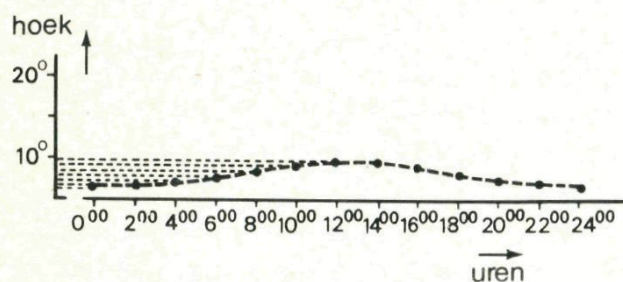


Fig. 4.

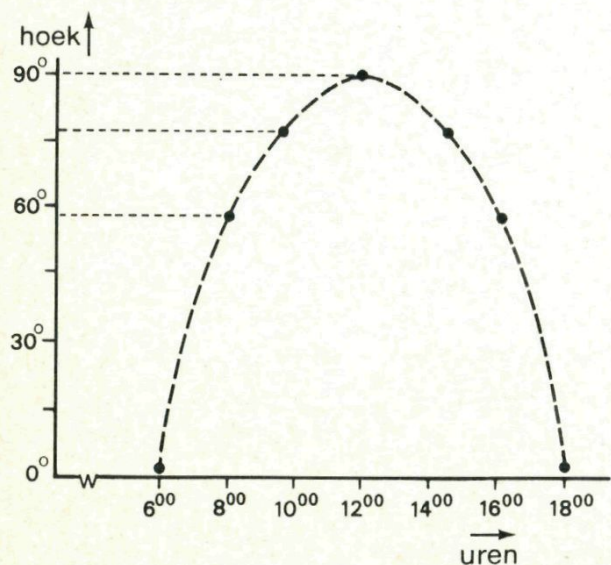


Fig. 5.

Als er bij vermeld wordt dat de grafiek voor Nederland geldt, kunnen we concluderen dat de waarnemingen 's winters gedaan zijn. Dat klopt ook weer niet helemaal, want in Nederland bereikt de zon niet precies om twaalf uur zijn hoogste punt maar ongeveer een half uur later (of een half uur eerder bij zomertijd). Zie hiervoor het artikel: 'Zonnewijzer-correctie'.

Geef voor jezelf commentaar op de grafieken 4, 5 en 6.

Als de kortste schaduw in Arnhem om 12.31 uur waargenomen wordt en in Zeist om 12.34 uur, hoe kun je hieruit de uursnelheid van de aarde op onze breedte afleiden? (De vraag is zuiver theoretisch, want zo nauwkeurig zijn de momenten van de kortste schaduw niet te meten.)

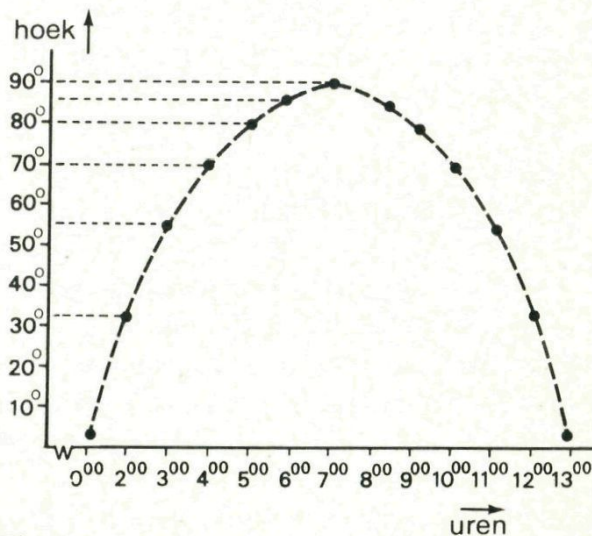


Fig. 6.

Kegelsneden

Een andere interessante vraag die bij de waarneming gesteld kan worden is: hoe is het verloop van de eindpunten van de schaduwen? Is dat verloop afhankelijk van de dag waarop de waarnemingen gedaan zijn? Zo ja, wat is dan het totale jaarbeeld van de door de schaduwtop afgelegde banen?

Om die vragen te kunnen beantwoorden starten we met wat elementaire begrippen uit de kosmografie.

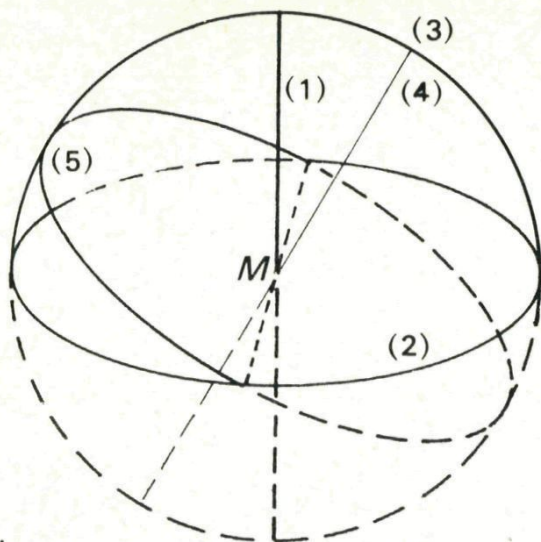


Fig. 7.

Het eerste wereldbeeld (fig. 7)

Om greep te krijgen op zogenaamde hemelverschijnselen, bijvoorbeeld de beschrijving van de beweging van de sterren, heeft men het volgende model ontworpen:

- beschouw de ruimte om je heen als een bol en verplaats jezelf in de rol van waarnemer in het middelpunt M van die bol;
- we denken alle sterren even ver van ons verwijderd, namelijk op het oppervlak van die bol;
- over de afstand van ons waarnemingspunt (het middelpunt M van die bol) tot de bol (dus de straal) maken we ons niet druk;
- we moeten deze straal alleen *zeer veel groter* veronderstellen dan de afstanden waarmee we op aarde vertrouwd zijn;
- van de beschreven bol zien we eigenlijk maar de helft, de andere helft bevindt zich onder de horizon.

Het beschreven model wordt *rustende hemelbol* genoemd, omdat we er alleen maar de sterrenhemel mee kunnen beschrijven, zoals we die op een bepaald ogenblik zien.

Voor het vervolg voeren we enige noodzakelijke termen in. Let daarbij op de overeenkomst met ons aardbeeld.

Als we in onze 'waarnemingspost' M een schietlood ophangen, dan bepaalt dit de richting van de *verticaal* (1). De richting van deze verticaal is dus afhankelijk van de plaats M , waar men zich op aarde bevindt!

Het vlak door M , loodrecht op de verticaal, snijdt onze rustende hemelbol volgens de horizon (2).

Wanneer we de *dagelijkse beweging* van de sterrenhemel ten opzichte van de horizon beschouwen, blijkt dat het punt (3) op zijn plaats blijft. Dit is een punt in de buurt van de poolster. We noemen het punt de *hemelpool* (noordpool).

De as van de hemelbol door de hemelpool en ons waarnemingspunt M noemen we de *hemelas*.

Het vlak door M loodrecht op de hemelas snijdt de hemelbol volgens een cirkel, die de *hemelequator* heet.

Het tweede wereldbeeld

Zoals we gezien hebben, stelde het 'model' van de rustende hemelbol ons in staat het sterrenbeeld op een bepaald moment vast te leggen. Als we echter ook de dagelijkse beweging in ons model willen opnemen, schiet het tekort.

Om daartoe ook nog in staat te zijn, verwerpen we het statische model niet, doch breiden het uit, in die zin dat we ons de rustende hemelbol omgeven denken door een tweede bol met een iets grotere straal.

Alle sterren denken we ons overgebracht op de buitenste bol en we veronderstellen de binnenste doorzichtig.

De buitenste (*wentelende*) hemelbol laten we in een sterrenetmaal (dat is 23 uren en 56 minuten) om een as draaien, die door de polen van de rustende hemelbol gaat.

N.B. In feite hebben we de draaiing van de aarde om zijn as overgebracht op de ruimte en beschouwen we in dit hemelbolmodel de aarde als rustend middelpunt en de hemel als wentelende bol.

Elke ster, meegevoerd door de wentelende hemelbol, beschrijft nu op de rustende hemelbol een cirkelvormige weg.

Het zal op grond van het geschetste model duidelijk zijn, dat elk van die sterbanen *evenwijdig* is met de hemelequator. (Denk aan de breedtecirkels op een aardglobe)

Wat ons binnen dit kader echter voornamelijk interesseert zijn de bewegingsverschijnselen van de zon.

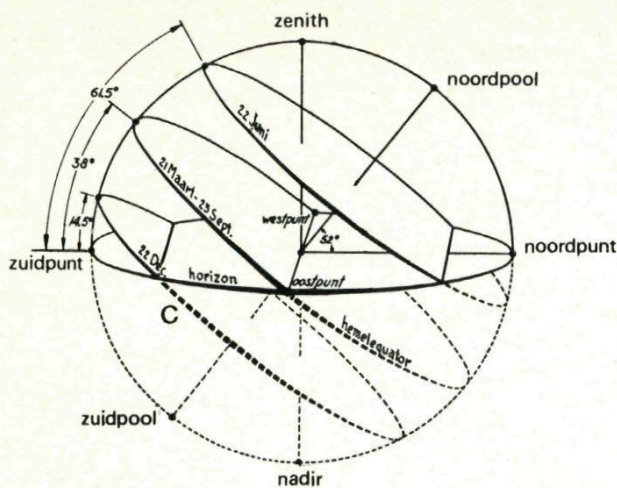


Fig. 8. Dagbanen van de zon over de rustende hemelbol.

De bewegingsverschijnselen van de zon

Wanneer we elke maand gedurende een of meer dagen de beweging van de zon over de rustende hemelbol zouden volgen, zouden we onze waarnemingen als volgt kunnen samenvatten:

- de zon beschrijft elke dag een baan, die de vorm heeft van een cirkelboog (het gedeelte onder de horizon zien we niet!); die baan is evenwijdig met de hemelequator;
- de punten van opkomst en ondergang veranderen van dag tot dag;
- de hoogste stand van de zon verandert van dag tot dag, anders gezegd: de culminatiehoogte varieert van dag tot dag.

In fig. 8 zijn drie verschillende dagbanen van de zon over de rustende hemelbol beschreven. Indien we deze afbeelding vanuit onze aardse situatie interpreteren, komen we tot het verloop van de eindpunten van de schaduwen.

Uit fig. 8 lichten we nu een dagbaan *C* van de zon en het horizontale vlak *H*. Loodrecht op dit horizonvlak staat de spijker (met top *T*), die voor de nodige schaduwen moest zorgen. *T* blijkt de top van een kegel te zijn en *C* de richtkromme (fig. 9).

De mantel van de kegel wordt gevormd door die zonnestrallen, die nog juist de spijker passeren (de hypotenusa's van onze rechthoekige driehoeken).

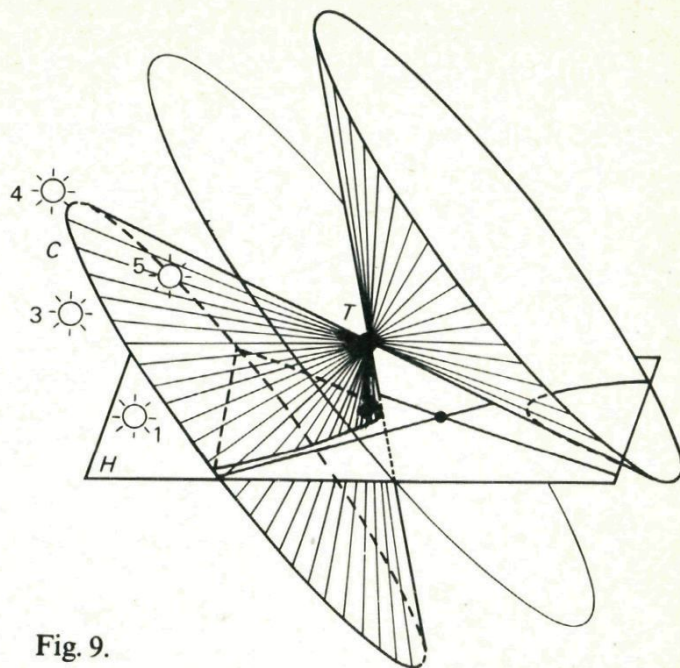


Fig. 9.

De kegel wordt gesneden door het horizonvlak *H*. De snijkromme blijkt dus een kegelsnede te zijn.

Op onze waarnemingsplank (fig. 10) vormen de eindpunten van de schaduwen dus een deel van bedoelde snijkromme.

Bij opkomst en ondergang van de zon zijn de zonnestrallen die op het kegeloppervlak liggen evenwijdig met het horizonvlak en veroorzaken op die momenten dus oneindig lange schaduwen.

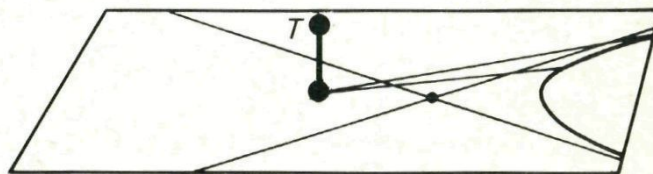


Fig. 10.

Hiermee is de verzameling van de schaduw-eindpunten vrijwel volledig ontmaskerd. Immers, een kegelsnede met oneindig verre punten moet wel een hyperbool zijn. De oneindig lange schaduwen bij opkomst en ondergang bepalen de asymptotische richtingen van de gevonden hyperbool.

Deze bevindingen zijn vrijwel algemeen geldig voor het hele jaar, zij het dat er zich (theoretisch gesproken) tweemaal per jaar een uitzonderingssituatie voordoet.

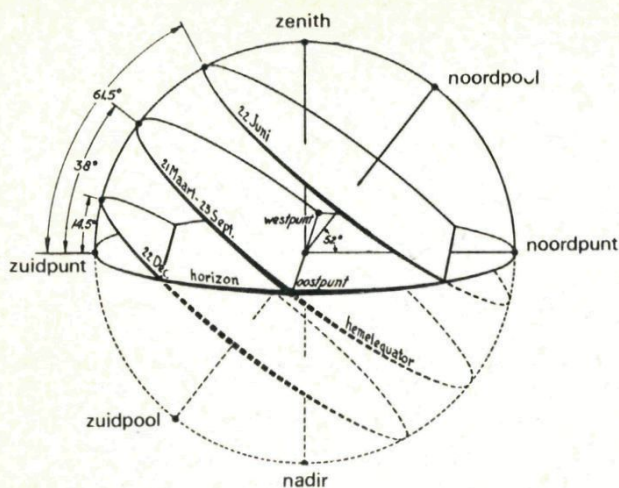


Fig. 11.

Dat is het geval wanneer de dagbaan van de zon samenvalt met de hemelequator (fig. 11). Dat doet zich steeds opnieuw voor op 21 maart en 23 september. Het topje van onze schaduwstok ligt dan namelijk *in* het vlak van de 'zonnebaan'. De kegel, waarvan in fig. 9 sprake was, blijkt nu 'platgedrukt' tot een vlak. Dit vlak snijdt het horizontale vlak volgens een rechte (1) (fig. 12).

Op het moment dat de zon haar culminatiepunt heeft bereikt op een van die dagen, blijkt het eindpunt van de schaduw het snijpunt van de asymptoten aan te wijzen (fig. 12).

Gedurende de perioden tussen 21 maart–23 september en 23 september–21 maart 'beweegt' de betrokken tak van de hyperbool zich tussen de ontaarding 1 en de uiterste standen, die bereikt worden op 22 juni en 22 december (zie fig. 11).

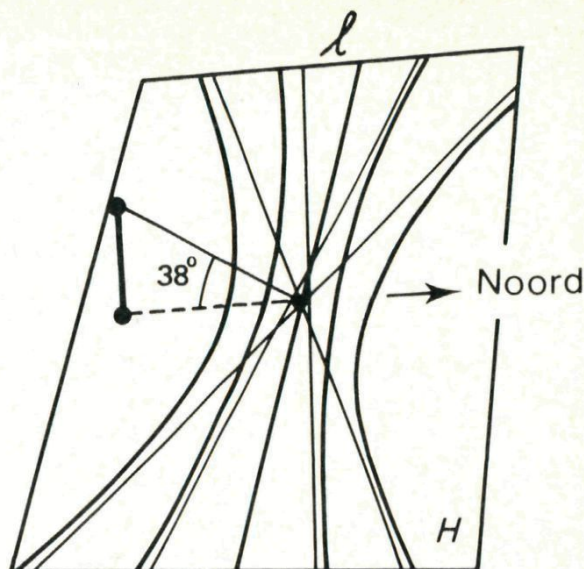


Fig. 12.

In het algemeen spreekt men van een ontaarde kegelsnede wanneer een snijvlak door de top van de kegel gaat. De kegelsnede beperkt zich dan tot een tweetal snijdende lijnen (of eventueel een punt).

In het geval van de zon blijkt de kegelsnede te ontaarden, omdat de kegel zelf tot een plat vlak ontaard is.

Voor het overige hopen we dat ze nog lang blijft schijnen en dan niet alleen vanwege de wiskundige problemen, die er uit af te leiden zijn.

Kun je je plaatsen op aarde voorstellen waar de verzameling schaduwtoppen een ellips wordt? (Denk aan de situatie van fig. 4.)

° Dominostenen op een schaakbord

J. van de Craats

Een schaakbord bestaat uit 64 velden. Met 32 dominostenen, die elk precies twee velden bedekken, kun je het gehele schaakbord vullen. Met één steen minder blijven er altijd twee velden over. Zou je die 31 stenen zo kunnen neerleggen dat de twee hoekvelden a1 en h8 onbedekt blijven (fig. 1)? Je kunt lang of kort proberen zo'n bedekking te maken, maar het zal je nooit lukken!

Bij elke mogelijke bedekking neemt elke steen namelijk precies één zwart en één wit

veld in beslag. De twee open velden zijn dus altijd *verschillend* van kleur. De velden a1 en

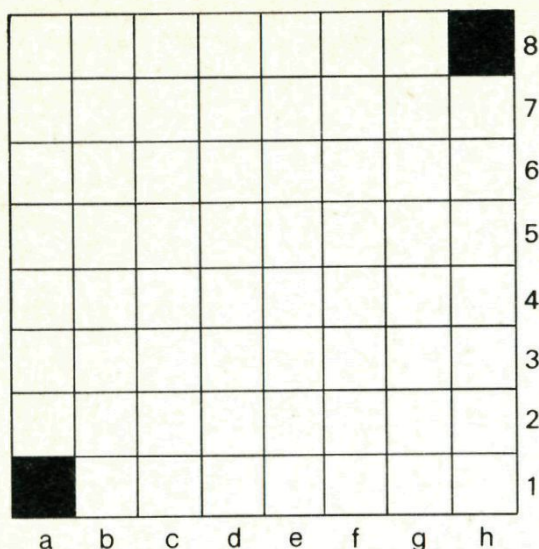
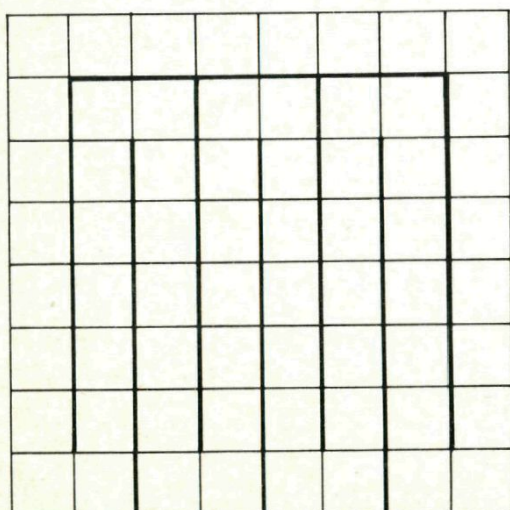


Fig. 1.

h8 zijn echter beide zwart, dus ze kunnen niet allebei onbedekt blijven!

Is dit resultaat al tamelijk verrassend, nog verrassender is het feit dat het altijd mogelijk is de 31 stenen zo neer te leggen dat twee willekeurig gekozen velden van verschillende kleur onbedekt blijven! De Amerikaanse wiskundige Ralph Gomory gaf hiervoor een buitengewoon fraai en erg eenvoudig bewijs. Hij rangschikte de velden als een soort 'kralensnoer', zoals aangegeven in fig. 2. Denk je maar in dat het bord is opengesneden langs de dikke lijnen. Laat je nu twee willekeurige velden van verschillende kleur weg, dan breekt het snoer in twee stukken, die elk een even aantal velden bevatten. Elk van die stukken kun je dus precies met dominostenen op-

Fig. 2.



vullen. Ook bij het 'omslaan van een hoek' kom je niet in moeilijkheden.

Deze methode is zo eenvoudig dat je haar gemakkelijk kunt onthouden en uitvoeren. Verbaas je familieleden en vrienden er maar eens mee!

Het wordt indrukwekkender als je ze niet toont hoe je het doet, maar alleen het resultaat laat zien. Helaas bestaat het dominospel slechts uit 28 stenen, dus je zult er drie bij moeten maken. Je kunt ook op een kleiner bord werken. Bij 6×6 -velden gaat het net zo, en ook bij een rechthoekig bord van 8×7 velden werkt de methode (maak de tanden van de 'hooivorken' maar één veld korter).

Hoe zit het echter met een 7×7 -bord? Er zijn nu niet meer evenveel witte als zwarte velden. Van de ene kleur, zeg zwart, is er één veld méér. Bij een maximale bedekking blijft er dus altijd één zwart veld over.

Kan *elk* zwart veld ook openblijven? Jazeker! Ga dit zelf maar eens na!

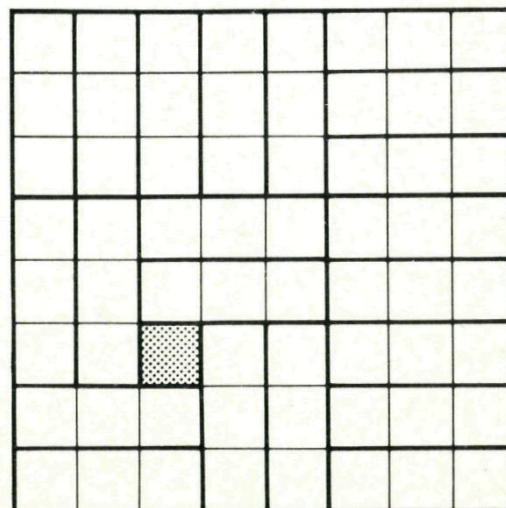
'Driemino's'

We gaan nu proberen het normale 8×8 -schaakbord te vullen met wat je zou kunnen noemen rechte 'driemino's': stenen die precies drie velden op een rijtje beslaan (fig. 3). Er zijn $64 = 3 \cdot 21 + 1$ velden, dus er blijft altijd minstens één veld onbedekt.

Fig. 3.



Fig. 4.



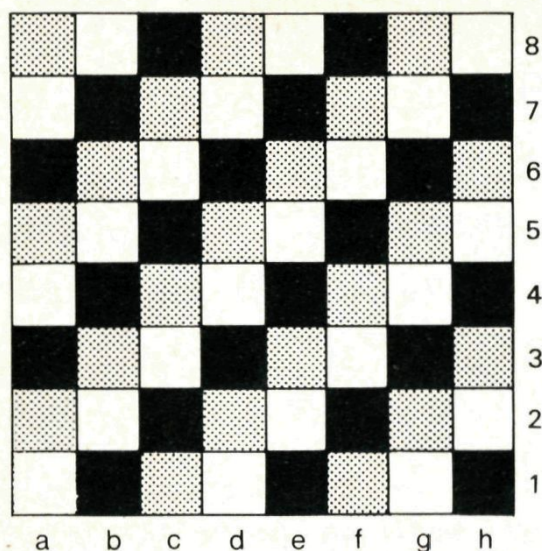


Fig. 5.

In fig. 4 zie je een bedekking met 21 driemino's. Veld c3 is opengebleven. Door draaiing kun je hieruit bedekkingen maken die f3, f6 of c6 onbedekt laten. Het verrassende is nu dat dit de *enige* velden zijn die bij een bedekking met 21 rechte driemino's open kunnen blijven! Dit is in 1954 ontdekt door de Amerikaan Solomon Golomb. Ook zijn bewijs is erg mooi. Hij kleurt de velden van het bord niet met twee, maar met *drie* kleuren, zoals aangegeven in fig. 5. Om druktechnische redenen hebben we hier de 'kleuren' grijs, wit en zwart genomen. Deze kleuring is zó gemaakt, dat hoe je ook een driemino neerlegt, hij altijd één grijs, één wit en één zwart veld bedekt. Er zijn 21 grijze, 22 witte, en 21 zwarte velden. Het veld dat openblijft moet dus wit zijn. Niet *alle* witte velden kunnen openblijven, want zou er een bedekking bestaan die bijvoorbeeld alleen veld b5 onbedekt zou laten, dan zou je door de bedekking een kwartslag te draaien een bedekking hebben verkregen die veld d2 open laat. Dit veld is echter grijs, dus zo'n bedekking kan niet bestaan. De enige witte velden die door draaiing van het bord over 90° (een kwartslag) overgaan in witte velden, zijn c3, c6, f3 en f6, en dit zijn dus de enige velden die open kunnen blijven!

L-vormige driemino's

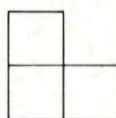


Fig. 6.

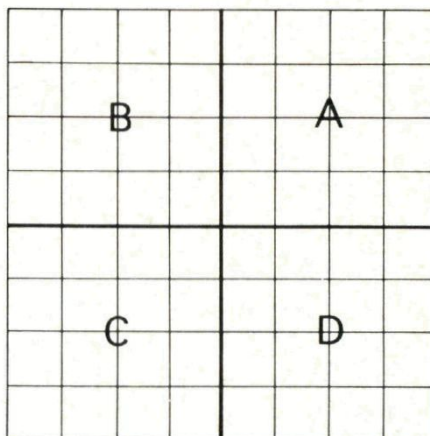


Fig. 7.

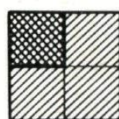


Fig. 8.

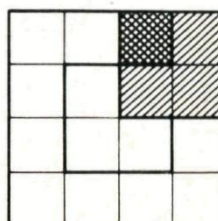


Fig. 9.

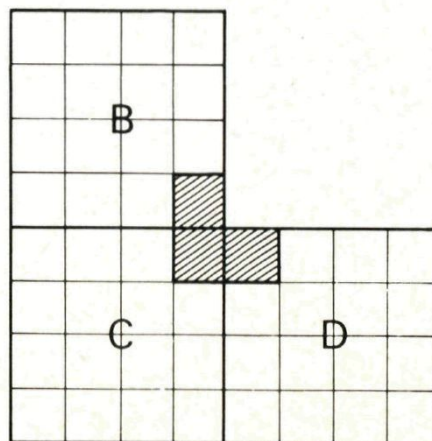


Fig. 10.

Ten slotte nog iets over l-vormige driemino's (fig. 6).

Ook hiervan passen er hoogstens 21 op een schaakbord, waarbij dan één veld onbedekt blijft. Zijn er weer speciale velden die als enige onbedekt kunnen blijven? Het zal je wel verbazen dat in dit geval *elk* veld als enige open kan blijven! Om dit te bewijzen verdelen we het schaakbord eerst in vier gelijke vierkante kwadranten, die we A, B, C en D zullen noemen (fig. 7). Elk kwadrant bevat 16 velden. Ieder kwadrant wordt weer in 4 deelkwadranten van vier velden verdeeld. Kies nu een willekeurig veld, dat als enige open moet blijven. Het ligt in een van de vier grote kwadranten, zeg in A. Het deelkwadrant van A waarin ons uitverkoren veld ligt, vullen we verder op met een driemino (fig. 8). Vervolgens vullen we de andere drie deelkwadranten van A met vier driemino's (fig. 9). Nu laten we uit de drie kwadranten B, C en D het veld weg dat het dichtst bij het centrum van het bord ligt (fig. 10). De rest van zo'n kwadrant kunnen we dan op dezelfde manier met driemino's opvullen als we dat met kwadrant A

hebben gedaan. De rol van het open veld wordt hier gespeeld door het veld dat het dichtst bij het centrum ligt. Ten slotte leggen we onze laatste driemino op de drie nog onbedekte velden in het midden!

Er is over dit soort bedekkingen met do-, drie-, vier- en meermينو's nog veel meer bekend. Ook over het analoge probleem in de ruimte, het vullen van rechthoekige dozen met blokjes die bestaan uit een aantal kubusjes aan elkaar, is veel onderzocht en geschreven. Ik wil dit verhaal echter nu besluiten, en wel met het volgende vraagstukje:

Is het mogelijk een *dambord* (van 10×10 velden), te bedekken met 25 l-vormige viermino's van de vorm van fig. 11?

Wie van onze lezers vindt hiervoor een oplossing?



Fig. 11.

° Zonnewijzercorrecties

In het vorige nummer hebben we verschillende typen zonnewijzers behandeld. Deze gaven de *ware plaatselijke zonnetijd* aan.

Misschien vraag je je af waarom we niet gewoon gezegd hebben: een goede zonnewijzer geeft goed en nauwkeurig *de tijd* aan.

Wat versta je dan onder *de tijd*?

De antwoorden: dat is de tijd die je van de tv-klok afleest en van de stationsklokken of: de tijd die de radiostations opgeven of de telefoondienst (en natuurlijk alle horloges die je daarmee gelijk hebt gezet), die antwoorden... brengen ons niet verder.

Stel dat je, nu je dit leest, tegelijkertijd zes piepjes op de radio hoort en daarna de stem van de omroeper: 'Het is vijf uur.'

Waar haalt hij die informatie vandaan? Wie of wat bepaalt nu dat het 5 uur is?

Ware plaatselijke zonnetijd

Het is 5 uur, als het 5 uur geleden is dat de zon op de plaats waar ik mij bevind precies in het zuiden stond. Als je voor deze omschrijving kiest, heb je omschreven wat we bedoelen met de ware plaatselijke zonnetijd.

Deze tijd is dus gebonden aan een bepaalde plaats en wordt vastgelegd door de stand van de zon aan de hemel, vandaar de toevoegingen: *plaatselijke* en *ware*.

Het gebruik van deze tijd heeft praktische bezwaren. Op deze manier zouden bijvoorbeeld op hetzelfde ogenblik alle klokken in Nederland verschillende tijden aanwijzen. Als de zon in Enschede in het zuiden staat, en de Enschedeërs dus beweren dat het 12 uur is, dan staat die zelfde zon voor de Amsterdammers nog niet in het zuiden. Amsterdam ligt twee graden westelijker dan Enschede en de Amsterdammers moeten daarom nog precies 8 minuten wachten tot de zon in het zuiden staat. Als het in Enschede 12 uur is, is het in Amsterdam dus 11.52 u.

Om zulke verschillen zoveel mogelijk te voorkomen, heeft men de aarde verdeeld in 24 stroken (zones) die noord-zuid lopen. In elke strook, die ongeveer 15° breed is, zet men zijn klokken gelijk aan de plaatselijke tijd van het midden der strook. Zo heeft Nederland de Middeneuropese tijd aangenomen, dat wil zeggen de plaatselijke tijd van 15° oosterlengte.

Het zou natuurlijk consequenter zijn geweest, als men over heel de aarde dezelfde tijd had aangenomen, zoals de astronomen (deze gebruiken voor hun waarnemingen de tijd van Greenwich).

Willen we nu onze zonnewijzer zo corrigeren dat hij niet de plaatselijke tijd aanwijst, maar de zonetijd (voor ons wil dat zeggen de Middeneuropese tijd), dan kan dat reeds in de constructie van de uurlijnen verwerkt worden.

In het vorige artikel hebben we gezien dat we bij het construeren van de uurlijnen voor een horizontale of een verticale zonnewijzer altijd uitgaan van de uurlijnen van een equatoriale zonnewijzer. Daarop gaan we dan ook deze correctie voor zonetijd toepassen.

Laten we aannemen dat deze zonnewijzer in Rotterdam komt te staan. Rotterdam ligt op $4^\circ 50'$ O.L. We tekenen op de equatoriale zonnewijzerplaat de noord-zuidlijn. Als het 12 uur zonetijd is, moet de zon nog $15^\circ - 4^\circ 50' = 10^\circ 10'$ van haar baan aan de

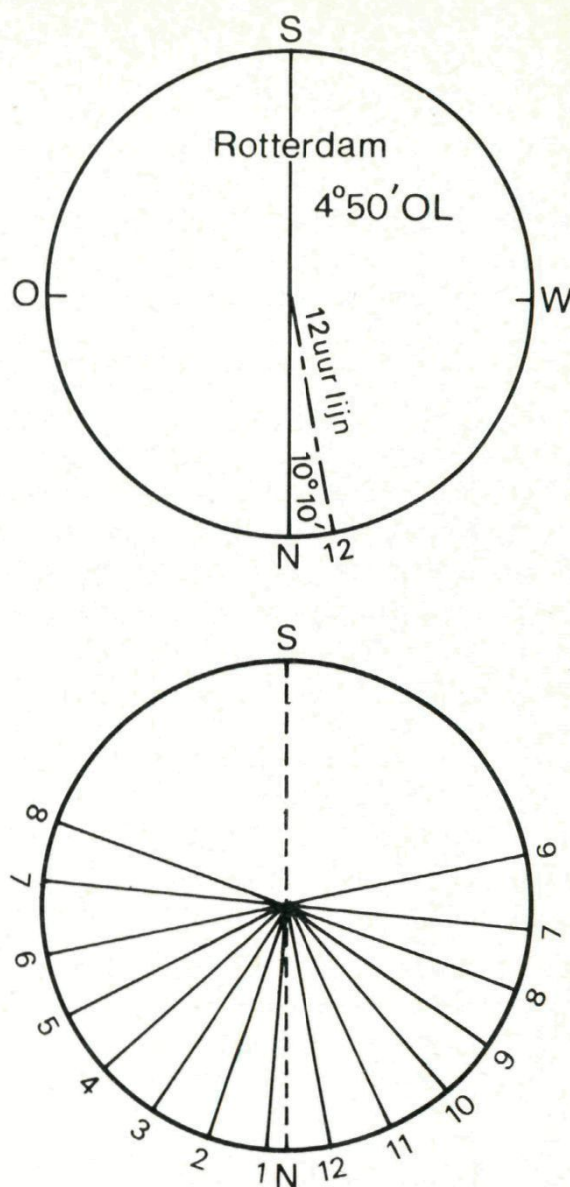


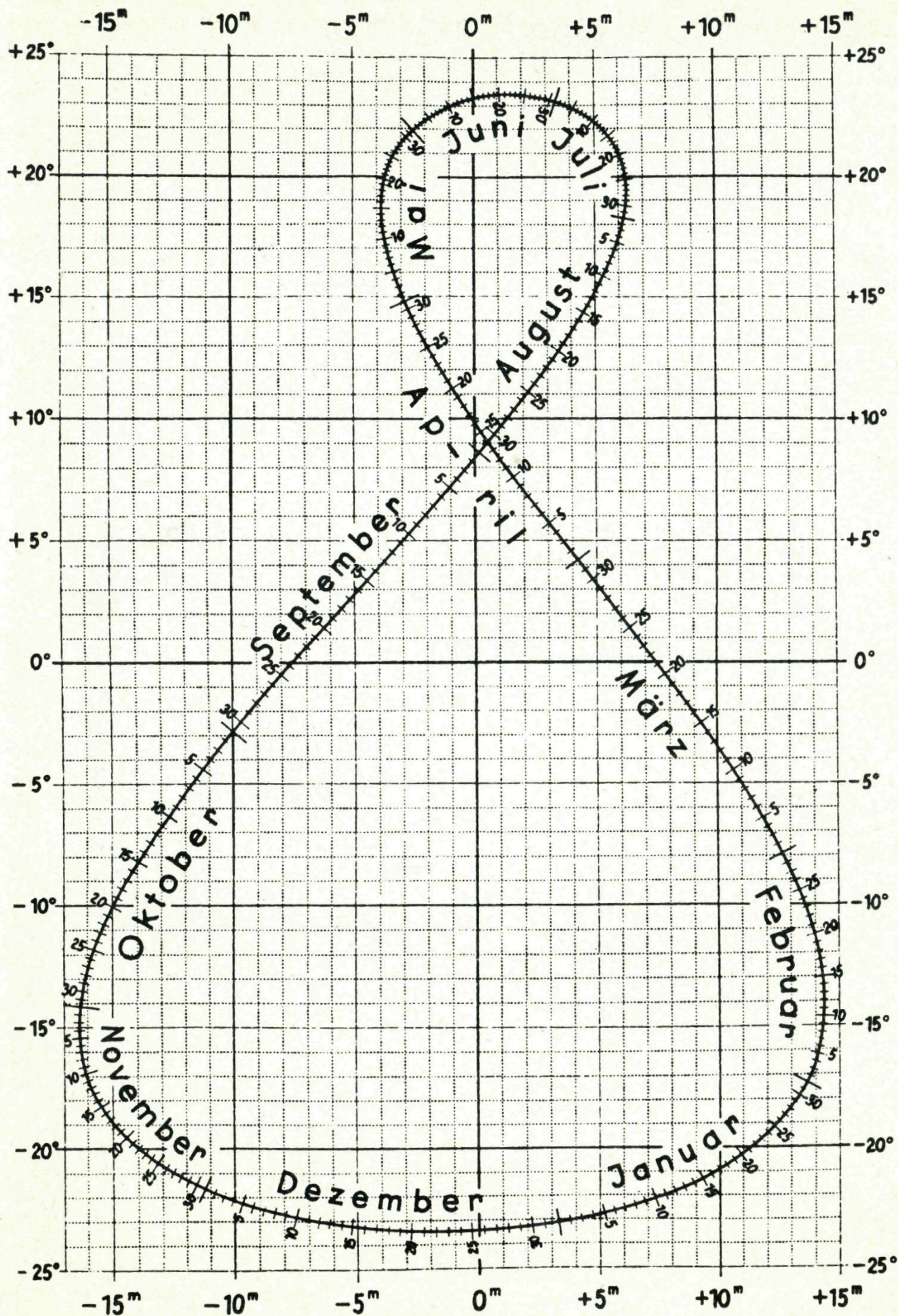
Fig. 1. De correctie voor de lengtegraad van de woonplaats.

hemel afleggen voor zij in Rotterdam in het zuiden staat.

We trekken dus de uurlijn van 12 uur zo, dat deze met de noord-zuidlijn een hoek van $10^\circ 10'$ (naar het westen) maakt (zie fig. 1). Daarna kunnen we de overige uurlijnen tekenen.

De correctie voor de zonetijd wordt dus in de constructie ingebouwd.

Fig. 2. De tijdsvereffeningslus: een grafische voorstelling van het voor- of achterlopen van de werkelijke zon op de middelbare zon.



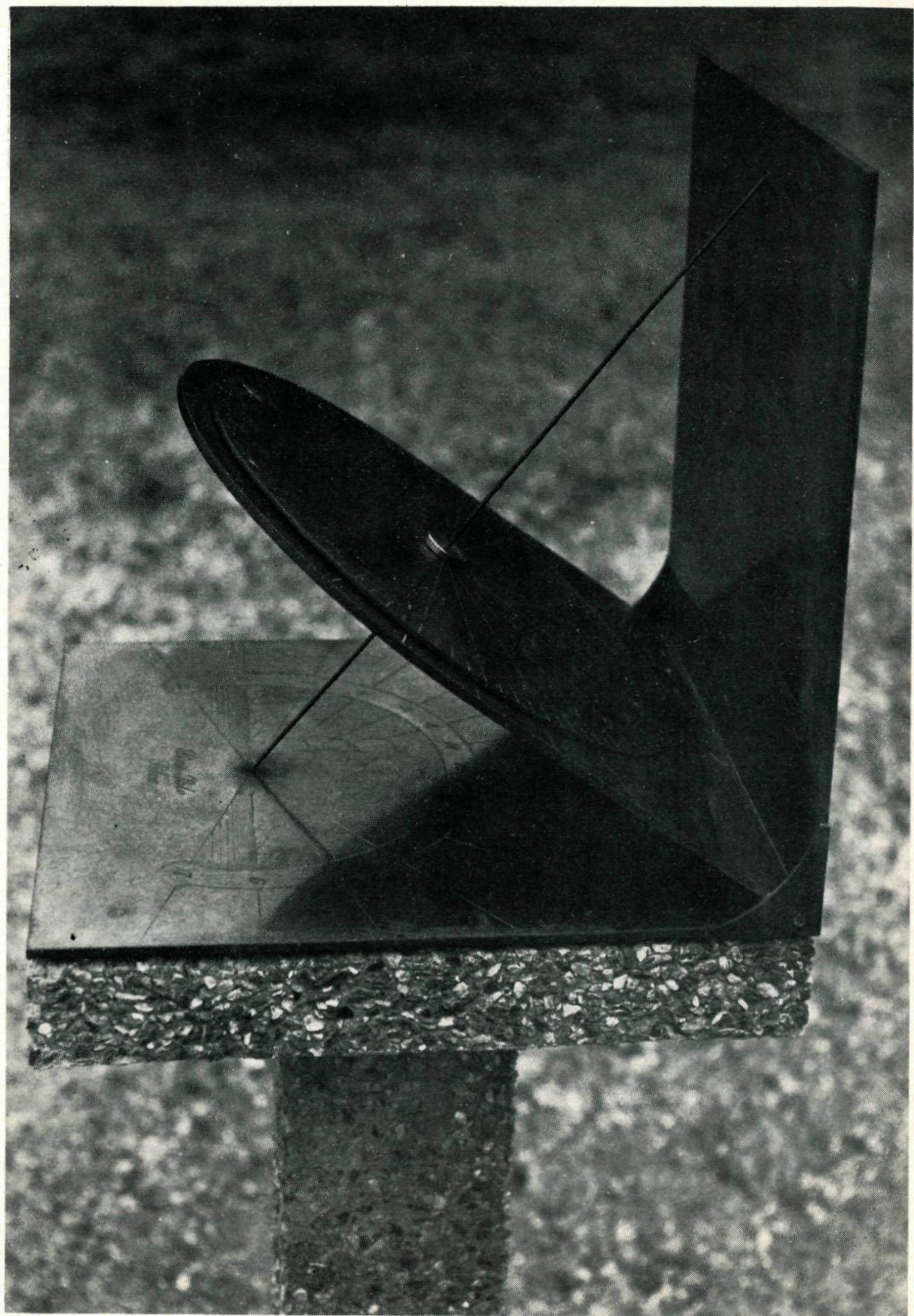


Fig. 3. De demonstratiezonnewijzer op de volkssterrenwacht Simon Stevin: Hier ziet men direct het verband tussen de uurlijnen op de verticale en horizontale zonnewijzer met die op het equatoriale vlak.

De middelbare zonnetijd

Als de aarde precies in een cirkelbaan zou lopen en de zon in het middelpunt van deze cirkel zou staan was bovenstaande correctie voldoende om de tijd die de zonnewijzer aangeeft te laten kloppen met de 'radiotijd'. De aarde loopt echter in een ellipsvormige baan rond de zon en dit maakt dat niet alle dagen (liever gezegd alle etmalen) even lang zijn. In januari is een dag langer dan in juni. In januari bevindt de aarde zich iets dichterbij de zon dan in juni en dit brengt met zich mee,* dat de aarde in januari iets sneller in haar baan loopt dan in juni. Vanuit de aarde bekeken lijkt het dan of de zon in januari sneller oostwaarts langs de sterren loopt, zodat het langer duurt voor zij een volgende dag weer in het zuiden staat.

Zoiets is natuurlijk voor de tijdrekening een beetje lastig en daarom heeft men een 'theoretische zon' ingevoerd, die volkomen gelijkmatig langs de hemel loopt in dagen van pre-

cies dezelfde tijdsduur. Op de loop van deze zon, de zogenaamde *middelbare zon*, is onze kloktijd gebaseerd. De werkelijke (de ware) zon loopt dan voor, gelijk, of achter, afhankelijk van de datum.

In de grafiek van fig. 2 is het verschil tussen ware zonnetijd en middelbare zonnetijd voor elke datum af te lezen. Loopt de ware zon voor op de middelbare, dan wordt dit met een + -teken aangegeven, loopt zij achter dan staat daarvoor een -.

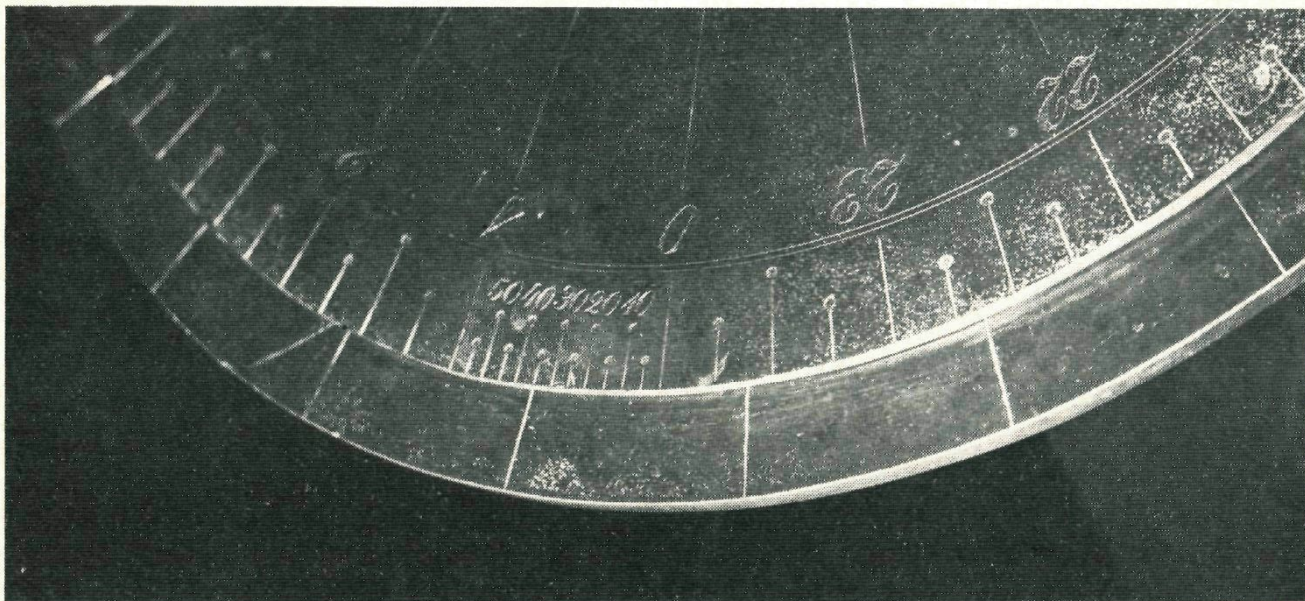
Je ziet dat deze verschillen in februari en in oktober-november het grootst zijn en dan oplopen tot bijna een kwartier.

Op verschillende manieren is deze zogenaamde tijdsvereffening te verwerken in de constructie van de zonnewijzer, maar dat is niet zo eenvoudig en een uitdaging voor mensen die zich enthousiast bezighouden met het uitdenken van zonnewijzerconstructies.

De eenvoudigste manier is: lees de tijd af op de zonnewijzer en trek de waarde van de tijdsvereffening (af te lezen uit de grafiek) eraf.

Een equatoriale zonnewijzer is gemakkelijk van een hulpmiddel te voorzien om die tijdsvereffening om de paar dagen met de hand in te stellen. Degene die de zonnewijzer afleest heeft dan geen omrekenproblemen: hij leest direct de kloktijd op de zonnewijzer af.

Fig. 4. Schaalverdeling op het equatoriale deel voor het instellen van de tijdsvereffening (detail van fig. 3).



* Volgens de tweede wet van Kepler.

Dit hulpmiddel zien we op fig. 5. De equatoriale wijzerplaat is hier draaibaar ten opzichte van een kleine vaste schaalverdeling. Voor het instellen van de wijzerplaat leest men nu eerst uit de grafiek de tijdsvereffening af en draait dan de schijf over het aantal minuten dat afgelezen is.

Er is veel literatuur over zonnewijzers. Wil je er iets meer van weten, vraag dan via de plaatselijke bibliotheek of via de leraar een of meer van de volgende boeken aan:

Cittert-Eymers, J. G. van, *Zonnewijzers aan en bij gebouwen in Nederland*, Thieme.

Terpstra, P., *Zonnewijzers*, Wolters 1953.

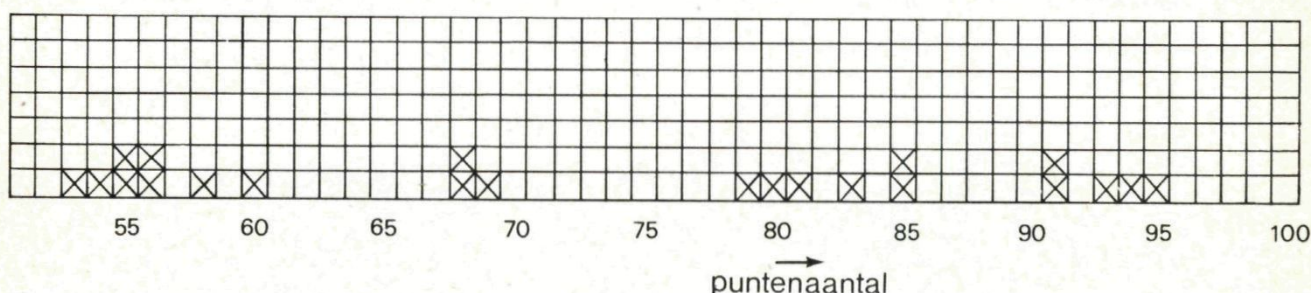
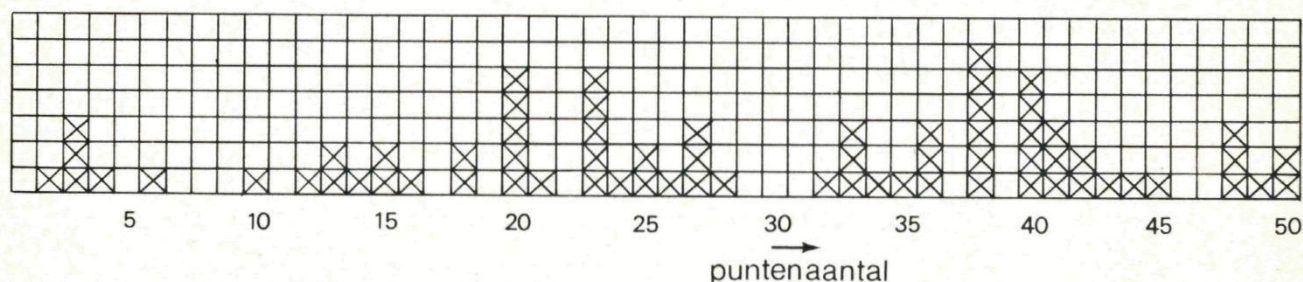
Sundials, their theory and construction, Dover Publications 1973.

Loski, L. M., *Die Sonnenuhren*, Springer Verlag 1959.

°°° De 17de Nederlandse Wiskunde Olympiade

J. van de Craats

In het vorige nummer hebben de opgaven gestaan van de tweede ronde van de 17de Nederlandse Wiskunde Olympiade, gehouden op 1 september 1978. De oplossingen vind je hieronder. De maximale waardering bij de opgaven 1 t.e.m. 4 was respectievelijk 15, 25, 30 en 30 punten (totaal 100). Hier is eerst een overzicht van de resultaten van de 90 deelnemers.



Opgave 1: Bewijs dat er geen gehele getallen x en y zijn, die voldoen aan de vergelijking $3x^2 = 9 + y^3$.

Deze opgave werd door ruim de helft van alle deelnemers opgelost. Ze deden het vrijwel allemaal op de volgende wijze:

Stel dat (x, y) voldoet. Dan is $y^3 = 3(x^2 - 3)$; y^3 bevat blijkbaar minstens één factor 3, en dat kan alleen als $y = 3y_1$ voor zeker getal y_1 . Dan is $9y_1^3 = x^2 - 3$, dus x^2 moet een drievoud zijn. Dit kan alleen als x zelf een drie-

voud is, en dan is x^2 een negenvoud. Dit betekent weer dat het negenvoud $9y_1^3$ gelijk is aan het negenvoud x^2 , met daarvan afgetrokken het getal 3. Dit kan niet waar zijn, dus de gegeven vergelijking heeft geen gehele oplossingen.

Opgave 2: Men wil een rechthoekige vloer met vierkante tegels betegelen. De lengte van de vloer is a dm, de breedte is b dm, waarbij a en b gehele getallen zijn. De tegels mogen elkaar niet overlappen, en de zijden van de

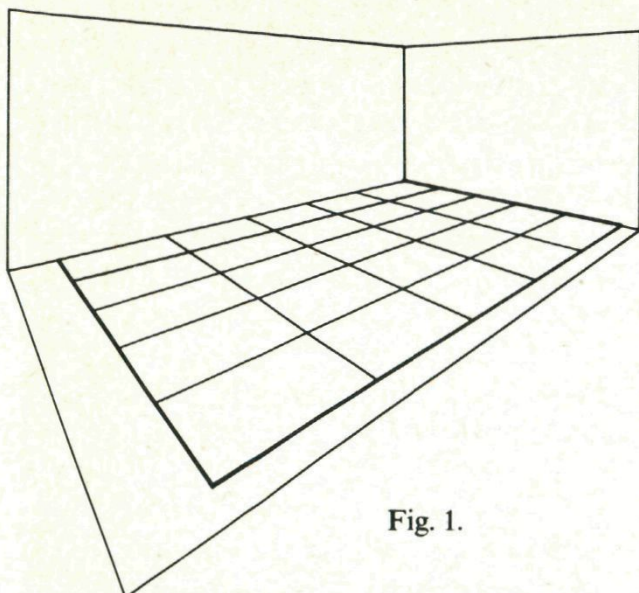


Fig. 1.

tegels moeten evenwijdig aan de zijden van de vloer liggen. Gebruikt men tegels met zijden van 2 dm, dan houdt men evenveel onbedekte oppervlakte over als wanneer men tegels met zijden van 4 dm gebruikt. Neemt men tegels met zijden van 3 dm, dan blijft een oppervlakte van 29 dm^2 onbedekt. Wat zijn de afmetingen van de vloer?

Hier waren wat minder volledige oplossingen. Enige deelnemers vonden de volgende mooie korte oplossing:

Bedek de vloer eerst met zoveel mogelijk 3×3 -tegels. Stel $a = 3k + r$, $b = 3m + s$, waarin k en m natuurlijke getallen zijn en r en s de waarde 0, 1 of 2 hebben. Er zijn dan km tegels gebruikt en het onbedekte oppervlak is $29 = 3ks + 3mr + rs$.

Blijkbaar is $29 - rs = 3(ks + mr)$ een drievoud. rs kan alleen de waarden 0, 1, 2 en 4 aannemen, dus moet $rs = 2$ zijn. Dit betekent $r = 1$ en $s = 2$, of omgekeerd (voor het eindresultaat maakt dit niet uit). Als r en s deze waarden hebben, is $27 = 6k + 3m$, oftewel $9 = 2k + m$. De mogelijke paren (k, m) zijn dus $(0, 9)$, $(1, 7)$, $(2, 5)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$. Deze geven voor (a, b) : $(1, 29)$, $(4, 23)$, $(7, 17)$, $(10, 11)$ en $(13, 5)$. Alleen het eerste en het laatste paar laten dezelfde rest bij bedekking met tegels van 2×2 als bij tegels van 4×4 . De mogelijke afmetingen zijn dus 1×29 en 13×5 .

Opgave 3: In het vlak liggen 1978 punten. Bij elk punt behoort een cirkelschijf met dat punt als middelpunt en als straal de afstand van dat punt tot een vast gekozen punt. Be-

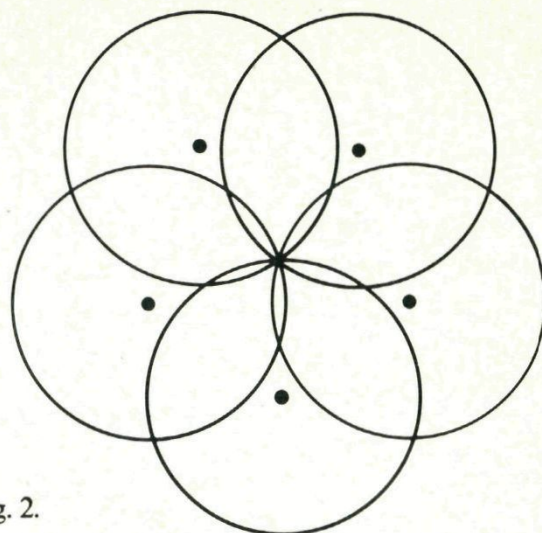


Fig. 2.

wijs dat er vijf van deze cirkelschijven zijn, die te zamen alle 1978 punten bedekken.

Slechts 6 deelnemers hadden bij deze opgave een bewijs waar niets op aan te merken was. 22 deelnemers gaven een redenering die wel goede elementen bevatte, maar aan precisie en duidelijkheid te wensen overliet. In zulke gevallen werden minder punten toegekend.

Er waren ook veel echte fouten. Sommigen dachten dat het ook altijd met vier, of zelfs met drie cirkelschijven kan. Dat dit niet zo is, toont de figuur hieronder. Er zijn 5 punten gekozen als hoekpunten van een regelmatige vijfhoek met het vaste punt als centrum. Liggen alle overige punten zeer dicht bij het vaste punt, dan wordt elk hoekpunt van de vijfhoek alleen door zijn eigen cirkelschijf bedekt.

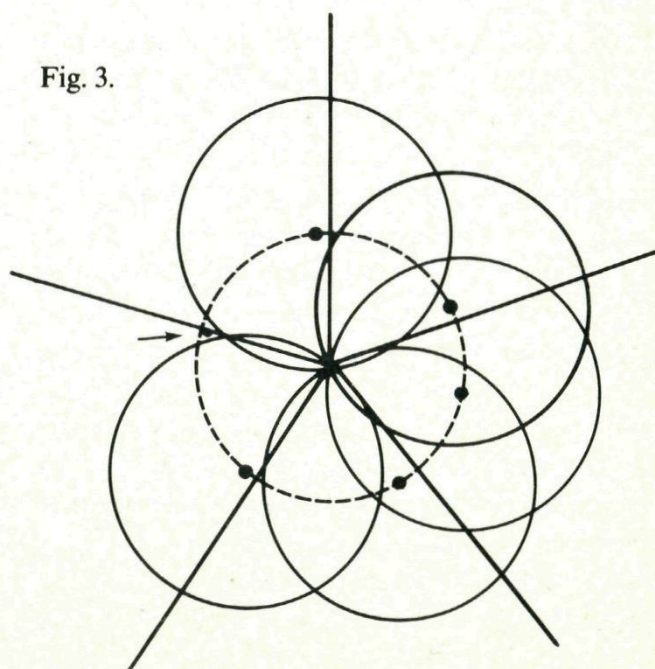


Fig. 3.

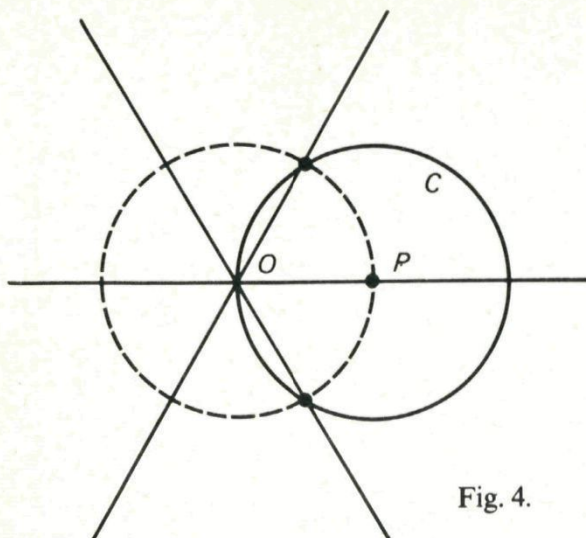


Fig. 4.

Een andere veel gemaakte fout ontstond als volgt: Verdeel het vlak vanuit het vaste punt in 5 gelijke sectoren, en kies in elke sector de schijf van een punt met maximale afstand tot het vaste punt. Dat dit mis kan gaan is hierboven te zien. (De niet getekende punten liggen weer vlak bij het vaste punt.)

De correcte oplossing gaat als volgt: Kies een punt P met maximale afstand tot het vaste punt O . Verdeel het vlak met 3 lijnen door O in 6 gelijke sectoren zo, dat een van de lijnen ook door P gaat. De cirkelschijf C van P bedekt van de andere 2 lijnen precies een segment van lengte OP . Alle punten in de twee sectoren aan weerszijden van het lijnstuk OP worden dus bedekt door de cirkelschijf C . Kies in elk van de overige sectoren een punt met maximale afstand tot O . De bijbehorende cirkelschijf bedekt dan alle punten in sector. De vijf op deze wijze gekozen cirkelschijven bedekken te zamen dus alle 1978 punten.

Opgave 4: In het vlak met een rechthoekig coördinatenstelsel is een verzameling van oneindig veel rechthoeken gegeven. Elke rechthoek heeft de oorsprong als een van zijn hoekpunten. De zijden van alle rechthoeken zijn evenwijdig aan de coördinaatassen en alle zijden hebben een gehele lengte. Bewijs dat er minstens twee rechthoeken in de verzameling zijn, waarvan de een de ander geheel bedekt.

Ook deze opgave werd slechts door weinig deelnemers opgelost. Velen hadden moeite

met de uitdrukking 'oneindig veel'. Sommigen dachten bijvoorbeeld dat de gegeven verzameling dan ook *alle mogelijke* rechthoeken zou moeten bevatten, maar dat is natuurlijk niet zo. Neem maar alle rechthoeken waarvan de lengten van de zijden gehele veelvouden van 1979 zijn, dan heb je er oneindig veel.

De moeilijkheid bij deze opgave is weer dat je niet een uitspraak moet doen over één bepaald object, maar een redenering moet geven die geldig is voor alle mogelijke collecties van rechthoeken die aan de gestelde voorwaarden voldoen. In zulke gevallen kun je vaak een *bewijs uit het ongerijmde* geven. Je kunt proberen een tegenstrijdigheid af te leiden uit de aanname van het tegendeel: Stel dat er een oneindige verzameling V van rechthoeken is die aan de gestelde voorwaarden voldoet, maar waarbij van geen enkel tweetal de een de ander geheel bedekt. Neem dan een rechthoek R met zijden a en b uit V . Het is geen beperking van de algemeenheid te veronderstellen dat R in het eerste kwadrant ligt. Voor elke rechthoek R' met zijden a' en b' uit V die eveneens in het eerste kwadrant ligt, moet dan gelden:

$$\begin{aligned} &\text{of } a' < a \text{ en } b' > b, \\ &\text{of } a' > a \text{ en } b' < b. \end{aligned}$$

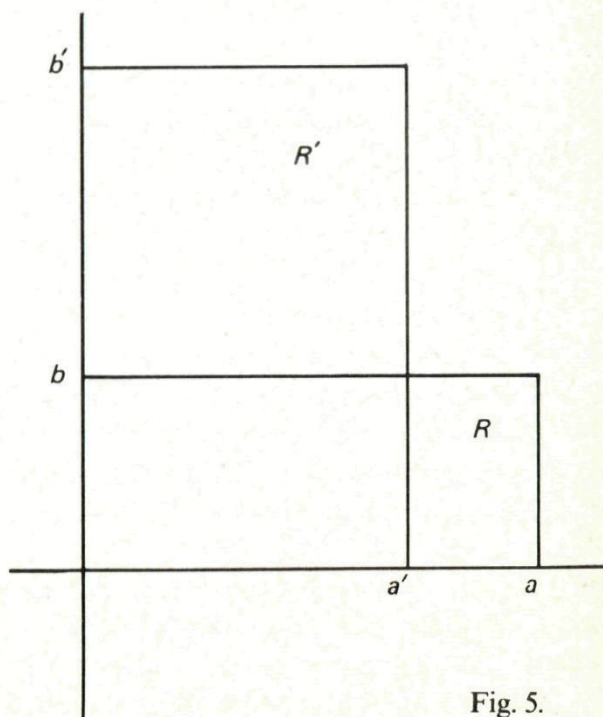


Fig. 5.

Alle rechthoeken van de eerste soort moeten *verschillende* zijden a' hebben, want twee rechthoeken met een gelijke zijde bedekken elkaar. Er zijn dus hoogstens $a-1$ van zulke rechthoeken.

Evenzo zijn er hoogstens $b-1$ rechthoeken van de tweede soort in V . In het eerste kwadrant liggen dus maar *eindig veel* rechthoeken uit V (namelijk hoogstens $1 + (a-1) + (b-1)$).

Natuurlijk kunnen er in de andere 3 kwadranten om dezelfde redenen ook slechts eindig veel rechthoeken uit V liggen, zodat er in totaal slechts eindig veel rechthoeken tot V behoren. Dit is een ongerijmdheid, en het kan dus niet juist zijn dat er zo'n verzameling is waarbij van geen enkel tweetal de een de ander overlapt. Het gevraagde bewijs is hiermee geleverd.

° Een ruitjesbiljart en een klassiek 'vulprobleem'

W. Pijs

In *Pythagoras* nr. 1 van deze jaargang stond een artikel over het aantal stoten tegen de banden van een biljart als een bal vanuit een hoekpunt onder een hoek van 45° gestoten wordt. (Lees dat artikel nog eens over.)

Een algemeen resultaat bij dit probleem luidt als volgt: Als de lengte en de breedte van het biljart respectievelijk a en b eenheden lang zijn en de G.G.D. van a en b is $= 1$, dan krijgen de lange banden in totaal $a-1$ tikken te incasseren en de korte banden in totaal $b-1$. (Dit levert gezamenlijk $a-1+b-1+1$ op (tegen eindpunt) $= a+b-1$).

Wij gaan nu een biljart bekijken met de vorm van een parallellogram en met hoeken van 60° en 120° (zie fig. 1). Als vanuit B een bal wordt gestoten (in de aangegeven richting), hoe groot is dan het aantal tikken eer punt D wordt bereikt?

Bij een dergelijk biljart geldt: Als de lange en de korte banden respectievelijk a en b eenheden lang zijn en de G.G.D. van a en b is $= 1$, dan incasseert iedere lange band $a-1$ en iedere korte band $b-1$ tikken. (Dit levert te zamen: $2 \times (a-1) + 2 \times (b-1) + 1$ (tegen eindpunt) $= 2a + 2b - 3$).

Aangezien de bal niet tegen A of tegen C tikt, betekent dit dat elke streep op de schaalverdeling precies één keer geraakt wordt (aangenomen dat er op de banden een geheel-tallige schaalverdeling aanwezig is).

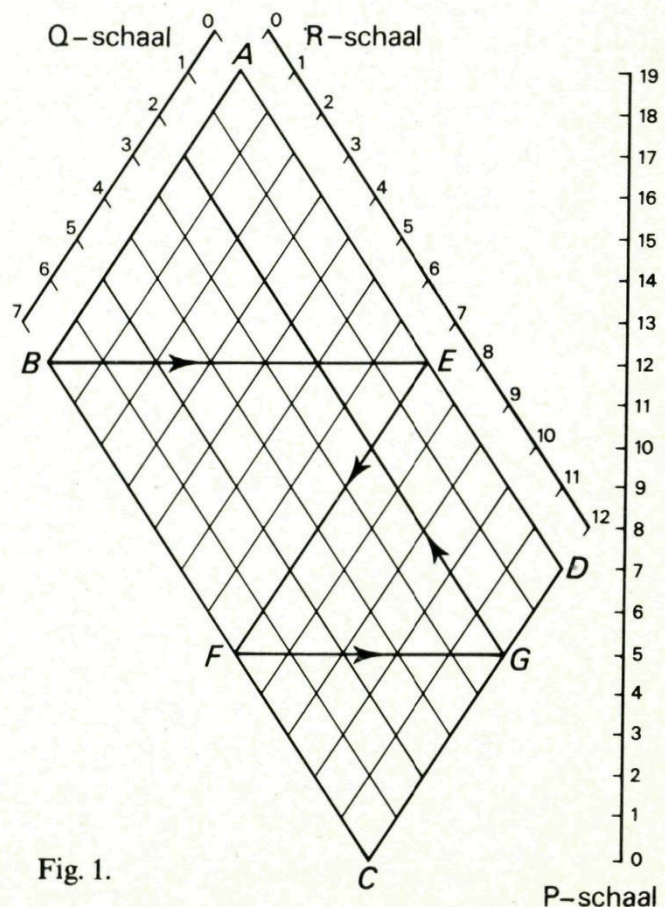


Fig. 1.

Elk punt binnen en op het parallellogram wordt gekarakteriseerd door drie coördinaten (behorende bij respectievelijk de P -, de Q - en de R -schaal).

We kunnen fig. 1 ook opvatten als de grafiek voor de oplossing van het volgende probleem:

Gegeven twee lege vaten van respectievelijk 7 en 12 liter. We hebben de beschikking over een waterreservoir waaruit we kunnen putten of waarin we kunnen teruggieten. Omdat op de vaten geen maatverdeling aanwezig is, gieten we ze alleen maar óf helemaal vol óf helemaal leeg. Hoe kunnen we x liter ($x \in \mathbb{N}$) afmeten?

De overgang van A naar B betekent: het 7-liter vat wordt met behulp van het reservoir gevuld. De overgang van B naar E betekent: het 7-liter vat wordt leeggegoten in het 12-liter vat. De overgang van E naar F betekent: het 7-liter vat wordt weer met behulp van het reservoir gevuld. De overgang van F naar G betekent: het 7-liter vat maakt het 12-liter vat vol en houdt 2 liter over enz. De coördinaat van de Q -schaal geeft steeds aan hoeveel in het 7-liter vat zit; de coördinaat van de R -schaal geeft aan hoeveel in het 12-liter vat zit. Omdat nooit meer dan $12 + 7 = 19$ liter aan het reservoir wordt onttrokken, kunnen we dit opvatten als een vat van 19 liter (of eventueel meer); de P -schaal geeft dan aan hoeveel het reservoir bevat.

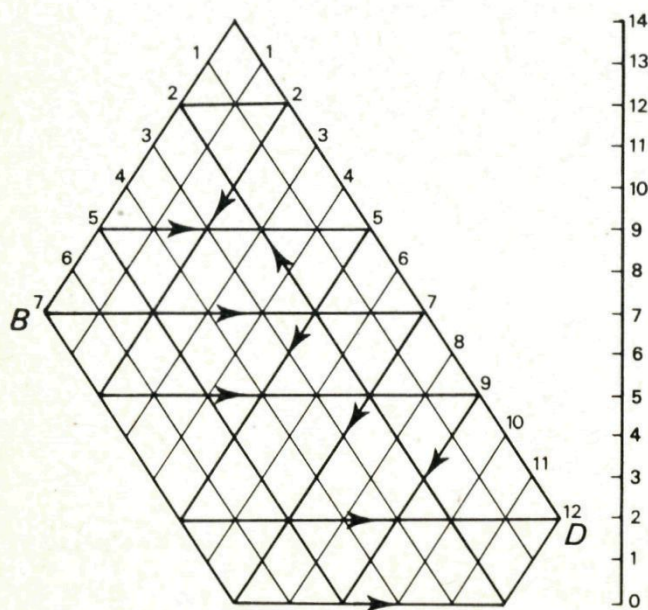


Fig. 2.

Omdat de biljartbal die uit B vertrekt iedere maatstreep op de banden zal aandoen, kan iedere hoeveelheid water afgemeten worden.

We kunnen dit resultaat algemeen formuleren. Gegeven twee lege vaten van respectievelijk a en b liter ($a, b \in \mathbb{N}$). Gegeven een vat c liter water waarbij $c > a + b$.

Stel de G.G.D. van a en b is $= 1$, dan is iedere hoeveelheid van x liter ($x \in \mathbb{N}$ en $x \leq b$) af te meten.

Als de G.G.D. van a en $b \neq 1$ is, verander dan de eenheid waarmee de inhoud wordt gemeten. (Als de G.G.D. van a en b gelijk p is, neem dan p liter als nieuwe inhoudsmaat.)

Als het grootste vat (het reservoir) is gevuld met c liter water en c is $< a + b$, dan betekent dit dat van het parallellogram een stuk moet worden afgesneden. (Zie fig. 2, waarin de situatie wordt weergegeven met twee vaten van respectievelijk 7 en 12 liter en een reservoir van 14 liter.) Niet iedere hoeveelheid van x liter water is dan nog af te meten.

We kunnen onze grafieken ook gebruiken bij een iets andere probleemstelling, bijvoorbeeld: Gegeven drie vaten van respectievelijk 10, 8 en 5 liter; in deze vaten bevindt zich respectievelijk 3, 6 en 1 liter. Is een situatie te bereiken met respectievelijk 6, 4 en 0 liter in de vaten?

Dit probleem is in fig. 3 uitgewerkt.

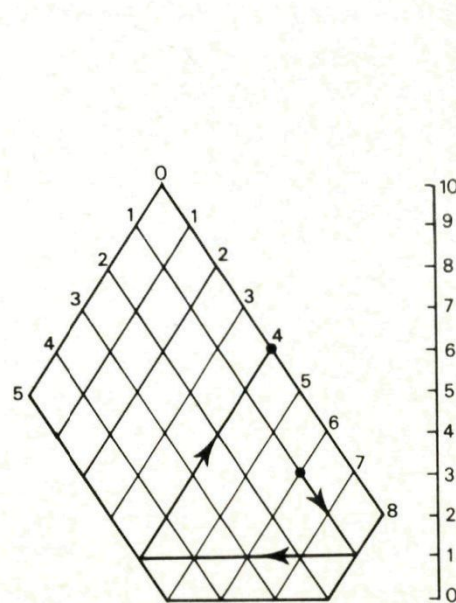


Fig. 3.

° Toverkwadraatvierkant

Je weet waarschijnlijk wel wat een tovervierkant is.

Er is al in verscheidene nummers van *Pythagoras* iets over geschreven.

Het zijn vierkanten van $n \times n$ hokjes waarin de natuurlijke getallen $1 \dots n^2$ zijn opgenomen, zodanig dat de som van elke rij gelijk is aan de som van elke kolom en de som van elke diagonaal.

Voorbeelden:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Fig. 1.

13	2	3	16
8	11	10	5
12	7	6	9
1	14	15	4

Fig. 2.

Voor al de tovervierkanten met oneven n zijn gemakkelijk te construeren volgens onderstaande regels.

Algoritme 1.

1. Kies als beginhokje het midden van een zijde (kompasrichting: N, O, Z of W).
2. Kies als looprichting uit NO, ZO, ZW of NW, met als voorwaarde dat de bij 1 gekozen letter erin voorkomt.
De getallen worden in de natuurlijke volgorde ingevuld in de gekozen looprichting, met twee uitzonderingen (3 en 4).
3. Als het volgende in te vullen hokje bezet blijkt, kies dan het hokje in de richting tegengesteld aan die gekozen bij 1.
4. Als het volgende in te vullen hokje niet bestaat, denk het even buiten het vierkant en verplaats het naar de uiterste andere kant van de kolom, rij of diagonaal.

Hierbij kan blijken dat regel 3 toch eerst moet worden toegepast.

We maken nog even een 5×5 vierkant met het begin aan de *West*-zijde en looprichting NW.

15	16	22	3	9
8	14	20	21	2
1	7	13	19	25
24	5	6	12	18
17	23	4	10	11

Fig. 3.

We vervangen nu in de algoritme 1 de regel 1 door:

1. Kies als beginhokje een van de hokjes aan een zijde (kompasrichting N, O, Z of W).

We zien dan dat er een vierkant ontstaat waarvan de kolommen en rijen de juiste som hebben, maar de diagonalen kunnen onjuist zijn.

Bijvoorbeeld (keuze *Oost*, looprichting ZO):

2	7	6
4	3	8
9	5	1

Fig. 4.

Tot zover misschien weinig verrassends.

Maar nu het volgende $n^2 \times n^2$ -vierkant (n oneven).

2	15	25	31	44	48	63	64	77
36	37	50	56	69	79	4	17	21
58	71	75	9	10	23	29	42	52
24	7	11	53	30	40	73	59	72
46	32	45	78	61	65	26	3	13
80	57	67	19	5	18	51	34	38
16	20	6	39	49	35	68	81	55
41	54	28	70	74	60	12	22	8
66	76	62	14	27	1	43	47	33

Fig. 5.

Dit vierkant is niet alleen gewoon tovervierkant, ook de som van de kwadraten van de getallen in een rij of een kolom is onafhankelijk van de keuze gelijk aan 20049.

Het lijkt op het eerste gezicht totaal anders geconstrueerd, maar toch...

Let eens op de onderverdeling in $n \times n$ -vierkanten en kijk ook eens in welke ondervierkanten 1, 2, 3, ..., 9 terecht komen, vergeleken met fig. 1.

Vergelijk de plaats die deze getallen krijgen in zo'n ondervierkant met fig. 4.

De moeilijkheid is dan nog slechts de overgang van 9 naar 10, van 18 naar 19, van 27 naar 28 (!) enzovoort.

Denkertjes

1. Als je weet dat $1+2+3+\dots+p = \frac{1}{2}p(1+p)$, bewijs dan dat de kolomsom voor een $n \times n$ -tovervierkant gelijk is aan $\frac{1}{2}n(1+n^2)$.
2. Op hoeveel manieren kun je volgens algoritme 1 een gegeven vierkant als tovervierkant vullen?
3. Geef een algoritme voor de overgang van 9 naar 10, van 18 naar 19, enzovoort, in het toverkwadraatvierkant.
4. Als je weet dat $1^2+2^2+3^2+\dots+p^2 = \frac{1}{6}p(p+1)(2p+1)$, geef dan een formule voor de som van de kwadraten uit een rij of kolom van een toverkwadraatvierkant.
5. Wat valt je op van de som van de kwadraten van elk van de diagonalen?



Oplossingen

1. De totaalsom van het vierkant is $\frac{1}{2}n^2(1+n^2)$. Deze som moet gelijkelijk over de n -kolommen verdeeld worden, dus voor elke kolom $\frac{\frac{1}{2}n^2(1+n^2)}{n}$.
2. Keuzemogelijkheid uit 4 startpunten en bij elk startpunt 2 looprichtingen, totaal 8.
3. In het gegeven vierkant is de regel:
 - a. stap in hetzelfde ondervierkant naar rechts, met de volgende twee uitzonderingen;
 - b. bij een stap buiten het ondervierkant regel 4 van algoritme 1 toepassen;
 - c. als het volgende in te vullen hokje bezet blijkt dan een stap NO en daarna een ondervierkant naar links; voor dit laatste eventueel algoritme 1 regel 4 toepassen.
4. In een $n^2 \times n^2$ -vierkant staan de getallen $1, \dots, n^4$, waarvan de som van de kwadraten gelijk is aan $\frac{1}{6}n^4(n^4+1)(2n^4+1)$, gelijkelijk te verdelen over n^2 -kolommen: $\frac{1}{6}n^2(n^4+1)(2n^4+1)$

Inhoud

- De vorm van de bijecel 97
- Indirecte bewijzen 101
- Schaduwen 102
- Dominostenen op een schaakbord 106
- Zonnewijzercorrecties 109
- De 17de Nederlandse Wiskunde Olympiade 114
- Een ruitjesbiljart en een klassiek 'vulprobleem' 117
- Toverkwadraatvierkant 119

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

W. Kleijne, Apeldoorn.

Ir. H. Mulder, Nieuw Ginniken

G.A. Vonk, Naarden.

Redactiesecretariaat

Bruno Ernst, Stationsstraat 114, Utrecht.

Artikelen en problemen kunnen naar het redactiesecretariaat worden gezonden alsmede oplossingen van denkertjes en prijsvragen.

Abonnementen

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,— per jaargang. Voor anderen f 11,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv. Afdeling Periodieken, Postbus 58, Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

