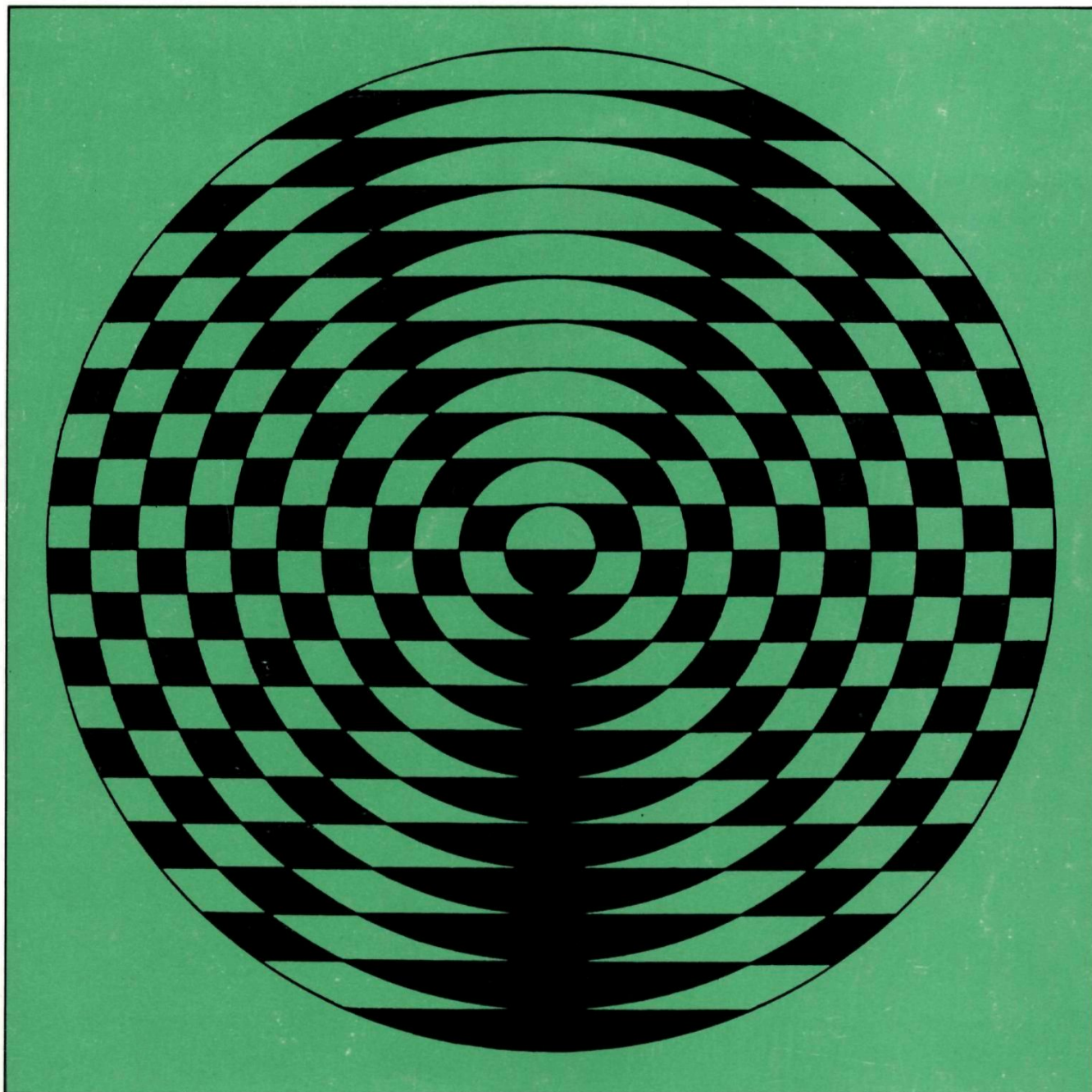


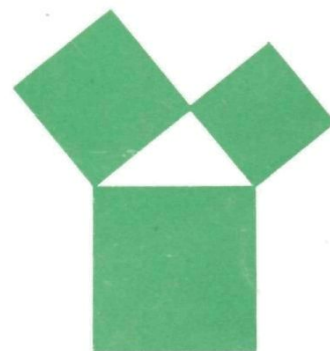


1

jaargang 19 / september 1979

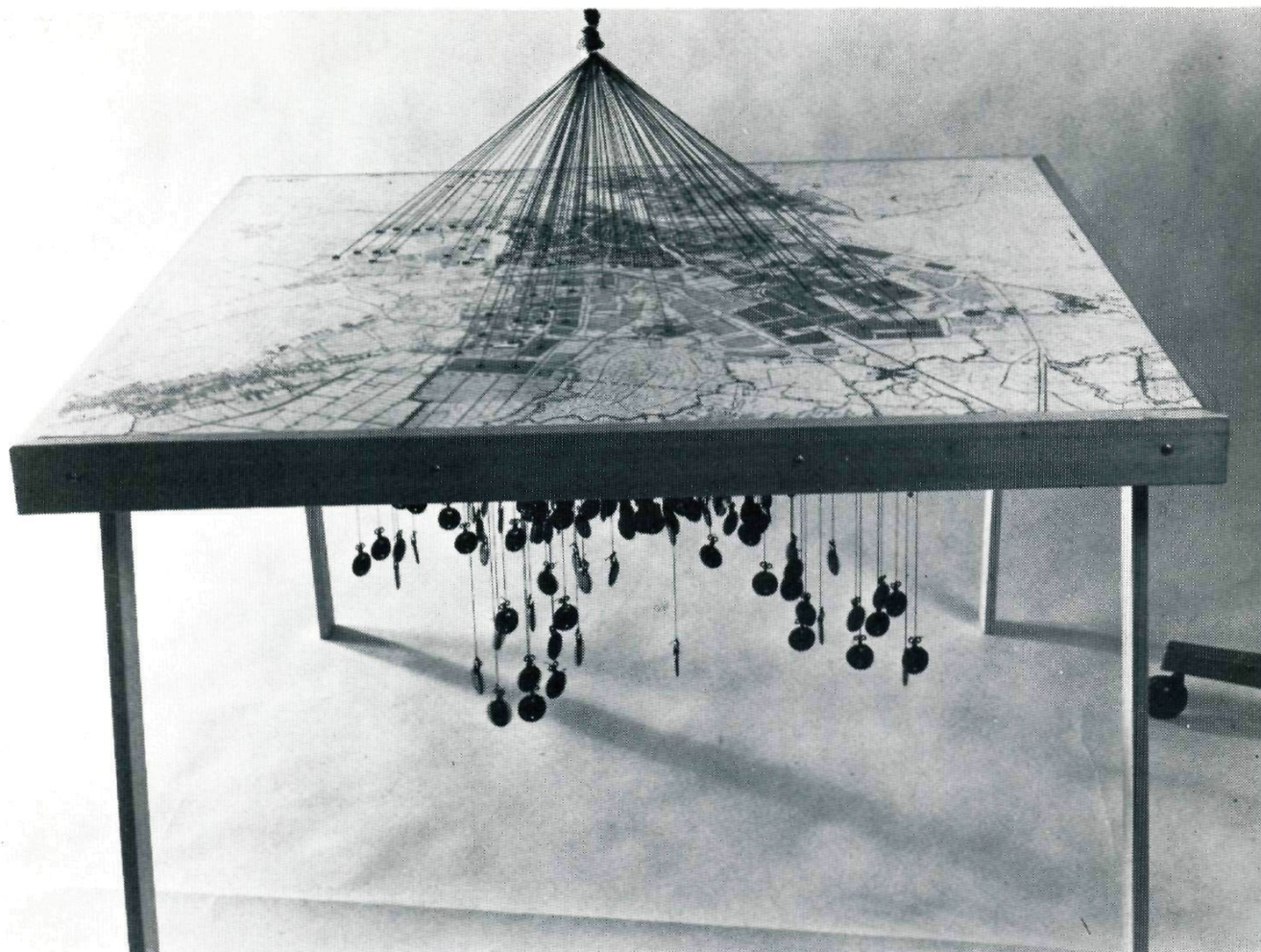
wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Op zoek naar het *midden* van Amsterdam! Wat verstaan we dan onder het midden? Dat is een interessante vraag en dat is één van de dingen waarover het artikel: *Het punt van Torricelli* opheldering zal verschaffen.

De tekenjes bij de artikelen

Om het contact tussen lezers en schrijvers te bevorderen, hebben we in de inhoudsopgave op de achterkant bij elk artikel een symbool afgedrukt. Hetzelfde teken vindt je bij de redacteur, die het artikel schreef.

Als een artikel niet door de redactie is geschreven moet je je brief aan de redactiesecretaris sturen.

Bij elk artikel tref je één, twee of drie cirkeltjes aan. Daarmee proberen we de moeilijkheidsgraad aan te geven. Hoe meer cirkeltjes, des te moeilijker het artikel is. Maar, al lijkt een artikel op het eerste gezicht erg moeilijk, we adviseren je *toch* om het in elk geval globaal door te lezen.

BIJ DE TEKENING OP DE OMSLAG:

Een aantal evenwijdige lijnen en een aantal concentrische cirkels verdelen het vlak in een aantal kleine vlakjes van ongelijke vorm. We beschouwen het vlak als een schaakbord en maken de vlakjes om en om zwart. Kijk eens door je ooghaars naar de figuur of bekijk die van een grote afstand: er verschijnen parabolen. Zie verder het artikel: *Parabolen uit cirkels en rechten*.

°Parabolen uit cirkels en rechten

De figuur op de omslag is opgebouwd uit concentrische cirkels en evenwijdige rechten. De 'donker/licht' invulling suggereert de aanwezigheid van parabolen.

Van deze parabolen zijn echter alleen een aantal punten aanwezig als snijpunten van de cirkels met de rechten. Als we de snijpunten met elkaar verbinden, zoals in fig. 1, dan ontstaan twee groepen parabolen: één groep, die naar boven open is en de tweede groep (waarvan er maar één is getekend), die naar beneden openstaat. Elk exemplaar uit de ene groep snijdt alle parabolen van de andere groep loodrecht.

Is het lastig te bewijzen dat de krommen door de snijpunten in fig. 1 parabolen zijn? Dat ligt eraan hoe je de parabool definieert. We kunnen een parabool omschrijven als de verzameling van alle punten die gelijke afstanden hebben tot een vast punt F (het brandpunt) en een vaste lijn l (de richtlijn van de parabool); zie fig. 2. Uitgaande van deze definitie is er nauwelijks meer iets te bewijzen; fig. 3 toont duidelijk, dat de keuze der snijpunten zodanig is, dat ze voldoen aan de gegeven definitie.

Wellicht heb je nog nooit van deze definitie gehoord, en is voor jou een parabool de grafiek van een kwadratische functie, bijvoorbeeld van $y = ax^2$.

°In dat geval zal het niet moeilijk voor je zijn de volgende afleiding te volgen (fig. 4), waarin we laten zien, dat bovenstaande definitie leidt tot de bekende kwadratische functie.

We schrijven de stelling van Pythagoras op voor driehoek BFP , waarin $BF = y - p$, $BP = x$ en $FP = PP' = y + p$. Dit geeft: $x^2 + (y^2 - 2py + p^2) = y^2 + 2py + p^2 \rightarrow x^2 = 4py \rightarrow y = \frac{1}{4}p x^2$

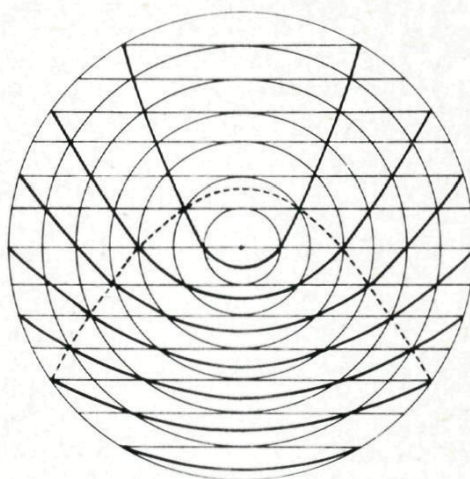


Fig. 1.

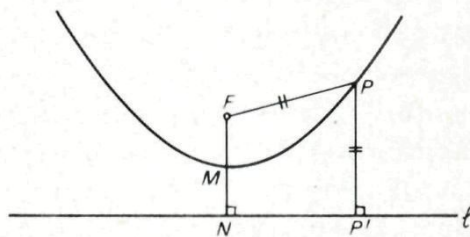


Fig. 2.

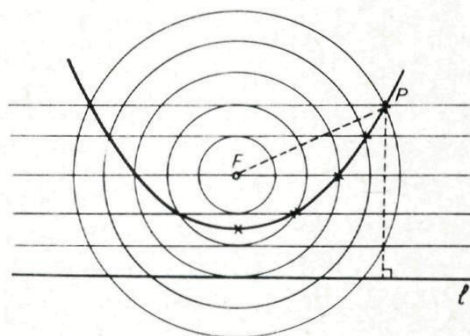


Fig. 3.

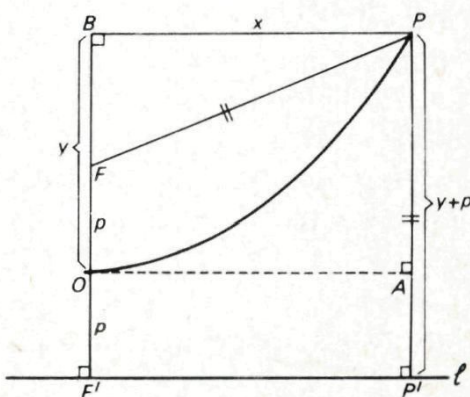


Fig. 4.

°Het punt van Torricelli

De plaats Emmeloord in de Noordoostpolder heeft een vignet ontworpen, waarbij de indruk gewekt wordt dat hier zich het middelpunt van Nederland bevindt (fig. 1). Overigens ondervindt Emmeloord al direct stevige concurrentie van de gemeente Ede, want op de Veluwe bij Lunteren ligt een grote steen (fig. 2), met daarop gebeiteld: *middelpunt Nederland* (fig. 3).

Wat moeten we eigenlijk onder het middelpunt van Nederland verstaan?

Misschien het zwaartepunt?

Het zwaartepunt van Nederland vinden, is niet zo moeilijk. We hebben Nederland in karton op schaal uitgeknipt en door balanceren het zwaartepunt van deze vlakke figuur bepaald. We komen dan uit in . . . Harderwijk. Dat is dan de derde plaats die in aanmerking wil komen voor het middelpunt van Nederland. Die plaats ligt zo'n beetje halverwege Ede en Emmeloord! Hoewel, voor we met de drooglegging van de Zuiderzee begonnen, lag het zwaartepunt beslist zuidelijker. En dan is Lunteren nog zo gek niet. Overigens gaat het kadaster bij zijn metingen uit van de toren van Amersfoort. Maar zijn we met dat begrip zwaartepunt of massamiddelpunt wel op de goede weg? Wat kan de praktische betekenis van dat woord middelpunt zijn?

In Emmeloord zeggen ze: Den Haag ligt hier even dichtbij als Enschede, je kunt hier even vlot vanuit Harlingen komen als vanuit Arnhem. De bedoeling is goed, maar Zwolle ligt natuurlijk altijd nog dichterbij dan Maastricht! We proberen een zinniger definitie te geven.

We spreken af dat het middelpunt van een aantal punten dat punt is, waarvoor de som van de afstanden tot het bedoelde punt zo klein mogelijk is. En dat is niet het zwaartepunt!

Omdat de Italiaan Torricelli het eerst berekeningen aan zo'n punt heeft gedaan, zullen we dit punt in het vervolg het punt *T* noemen.

Emmeloord

gemeente Noordoostpolder

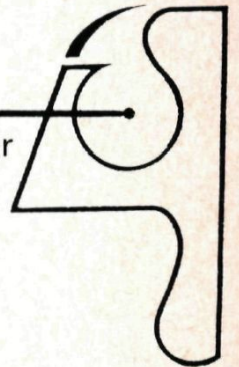


Fig. 1.

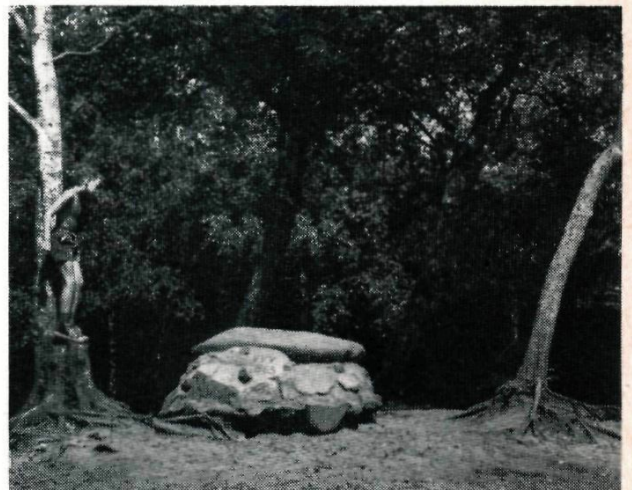


Fig. 2. De steen op de Veluwe bij Lunteren.

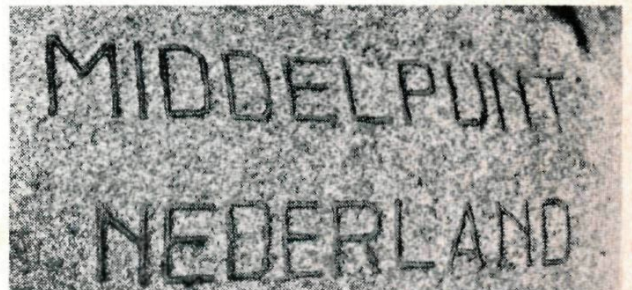


Fig. 3.

Waar ligt dat punt?

Stel we hebben twee punten *A* en *B* en

we zoeken de positie van het punt T (fig. 4).

Het zwaartepunt ligt natuurlijk halverwege A en B . De som van de beide afstanden van A en B tot dat punt wordt dan gelijk aan eenmaal de totale afstand AB .

Maar als we een ander punt van de verbindinglijn AB nemen, geldt daar hetzelfde voor.

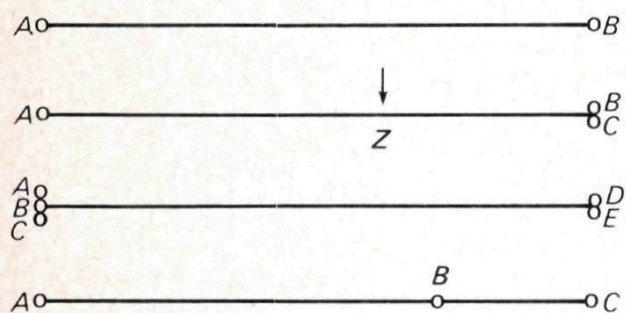


Fig. 4. Waar ligt punt T ?

Zo kan elk punt van AB als punt T dienen! In het volgende geval ligt er links één punt A en liggen rechts twee punten B en C .

Het zwaartepunt bevindt zich hier bij het pijltje op een derde van het lijnstuk, maar dat is punt T niet.

De som wordt voor punt Z gelijk aan $\frac{4}{3}AB$. Maar punt T valt samen met B en C . Voor dat punt wordt de som der drie afstanden juist gelijk aan de lengte AB en dat is dan tevens de kleinste waarde. Ga na dat als er op de einden een willekeurig aantal punten liggen, het punt T altijd op dat eindpunt komt waar de meeste punten liggen.

Liggen er op de einden evenveel punten, dan is de positie van T onbepaald.

Ten slotte bekijken we nog het geval van drie punten op een rechte met onderling verschillende afstanden. In dat geval valt T altijd samen met het tussenliggende punt.

Onderzoek dat maar.

In alle gevallen blijkt dat het zwaartepunt of het punt van Torricelli iets anders is.

Bij drie punten niet op één lijn

Stel eens voor: drie gemeenten, A , B en C , gaan een fusie aan en er moet een nieuw stadhuis gebouwd worden. Men wil het op een zodanige plek zetten dat de inwoners gemiddeld even weinig hoeven te fietsen. Dat betekent dat we ervoor moeten zorgen dat de som der drie afstanden zo gering mogelijk wordt. De vraag wordt dan: waar ligt bij drie punten, niet op een rechte, het punt T ? In fig. 5 zijn op de zijden van driehoek ABC telkens gelijkzijdige driehoeken aangebracht, met toppen P , Q en R . Als we de verbindingslijnen AP , BQ en CR trekken, blijken die door één punt te gaan en dat is dan achteraf ook nog het gezochte punt T !

De som $AT + BT + CT$ moet daar dan dus minimaal zijn.

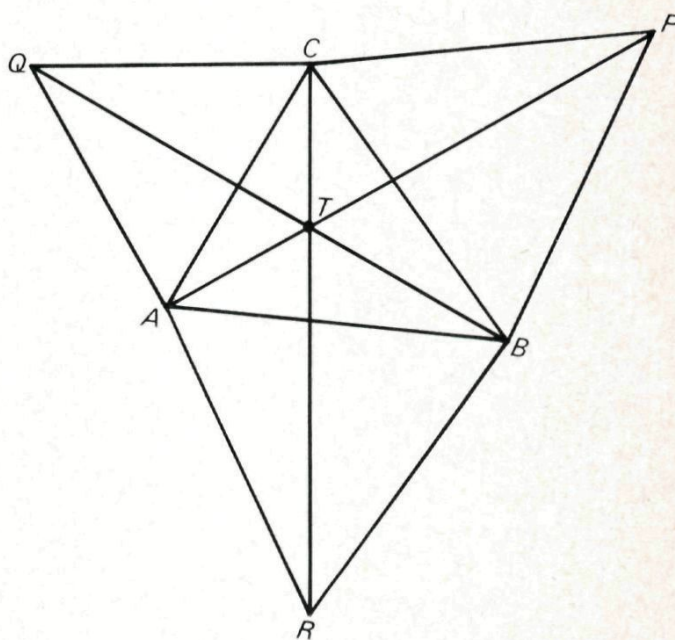


Fig. 5. Constructie van punt T bij drie punten, niet op een rechte.

°° Het bewijs van Torricelli

Dat dit minimaalpunt inderdaad zo geconstrueerd kan worden, werd door Torricelli in 1647 bewezen. Hij kreeg dat klaar door de stukken AT , BT en CT in elkaars verlengde, op één rechte te brengen. En korter dan een rechte verbinding is er niet. Dat lukte als volgt.

Laten we beginnen alleen op zijde AC een gelijkzijdige driehoek te tekenen (fig. 6).

Neem binnen driehoek ABC een willekeurig punt D . Verbind D met de drie hoekpunten. Roteer vervolgens driehoek ADC om punt C rechtsom over 60° . Driehoek QEC is dan congruent met driehoek ADC . Verder wordt driehoek EDC weer gelijkzijdig.

Uit de tekening is nu af te lezen dat de som $AD + BD + CD$ gelijk wordt aan de som $QE + BD + ED$. De drie laatste stukken vormen een gebroken rechte. De som der drie afstanden wordt minimaal als die lijn gestrekt wordt. De punten Q , E , D en B moeten dan op één rechte lijn komen. Punt D is dus in ons geval niet het minimaalpunt.

Maar dit weten we nu zeker: het echte punt T ligt op de rechte QB .

Zo ligt T ook op de lijnen AP en CR van fig. 5. En daarmee is de ligging van T aangetoond. Dat punt valt in het algemeen niet samen met het bekende zwaartepunt.

Een mechanisch model

Het is mogelijk, door middel van een apparaat, het punt T experimenteel te bepalen.

Er blijkt namelijk nog een bijzonderheid te zitten in de ligging van dat punt T .

Men kan bewijzen dat de drie hoeken ATB , BTC en ATC in fig. 5 alle drie 120° zijn. We kunnen ook zeggen: het punt T ligt zó binnen driehoek ABC dat alle drie de stompe hoeken daar gelijk worden. Dat is theoretisch te bewijzen. En daar is dan een mechanisch model voor te ontwerpen. Immers, als in één punt drie krachten aangrijpen die alle drie even groot zijn, dan kunnen ze elkaars werking alleen opheffen, als ze onderling gelijke hoeken maken. In dit geval 120° (fig. 7). Met het toestel van fig. 8 vinden we dat punt automatisch. Bij de hoekpunten van de driehoek bevinden zich licht lopende katrolletjes. Daarover hangen draadjes en daaraan gelijke gewichtjes. De drie draadjes knopen we aan elkaar. Door alles los te laten, stelt zich vanzelf een evenwicht in, waardoor punt T wordt gevonden.

Voor meer dan drie punten

Dat dezelfde experimentele methode ook werkt voor meer dan drie punten, werd in 1961 bewezen door Dr. W. Balk van het bureau voor statistiek van Amsterdam. Hoe gaat het bij vier punten?

Vier gelijke krachten kunnen elkaars werking alleen dan opheffen, als ze twee aan twee in elkaars verlengde komen (fig. 9). We komen dan, in het geval van vier punten A , B , C en D , terecht bij het snij-

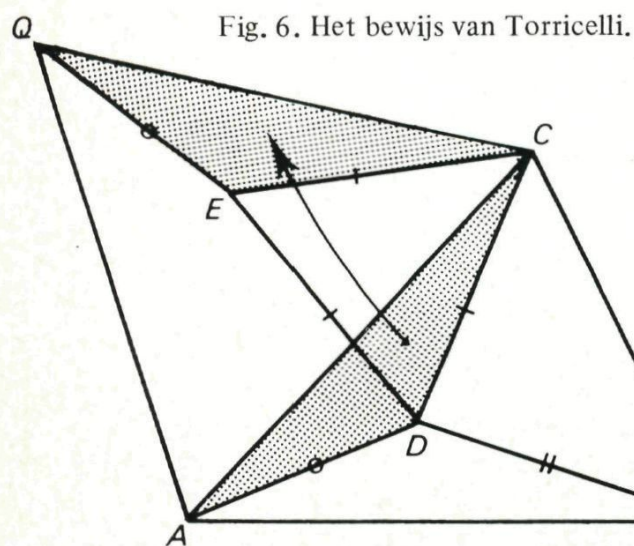


Fig. 6. Het bewijs van Torricelli.

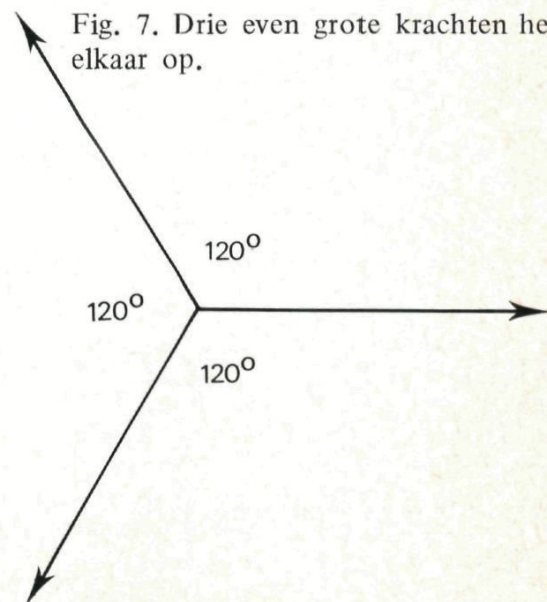


Fig. 7. Drie even grote krachten heffen elkaar op.

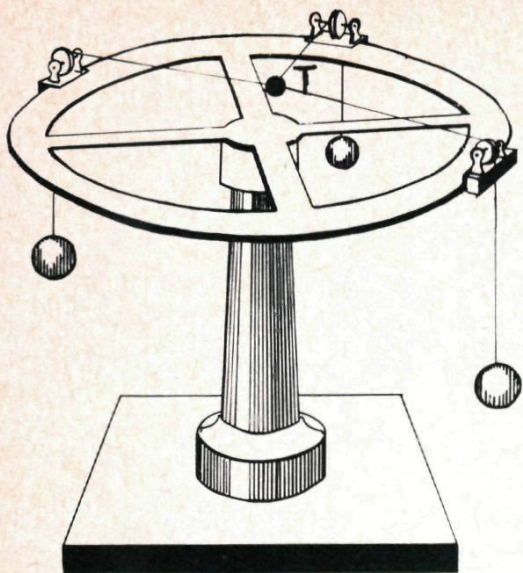


Fig. 8. Toestel om het minimaalpunt te bepalen.

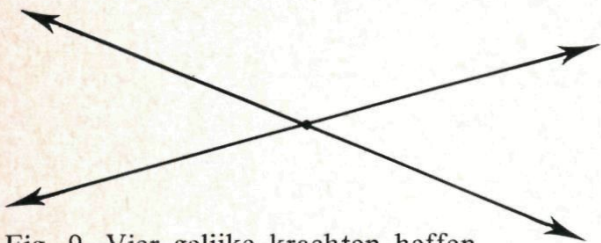


Fig. 9. Vier gelijke krachten heffen elkaar op.

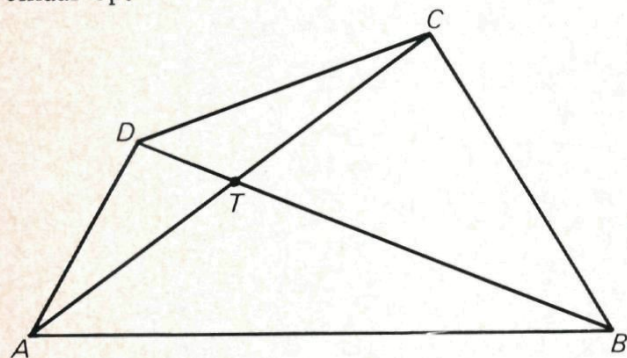


Fig. 10. Minimaalpunt bij vier punten.

punt van de beide diagonalen. Dat is het minimaalpunt T (fig. 10). En zo kan men verder zoeken bij vijf punten, bij zes punten, enz.

De gemeente Amsterdam heeft enige tijd geleden een model van de stad laten maken om het minimaalpunt van Amsterdam te vinden. Nu zal het duidelijk zijn dat in geval van een stad niet elke oppervlakte-eenheid van gelijk belang is. Het gaat hier om wooneenheden.

Daarom werden op de kaart van Amster-

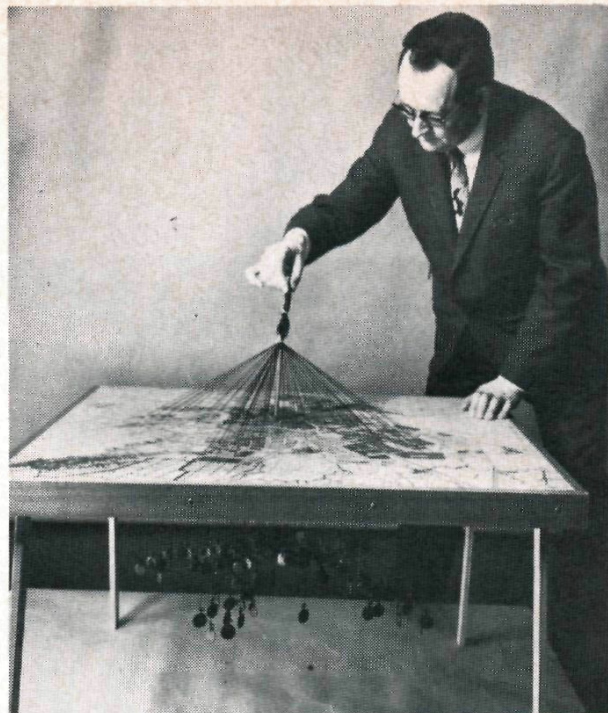
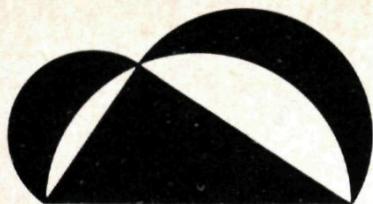


Fig. 11. Bepaling van het minimaalpunt van Amsterdam.

dam 128 punten aangegeven die telkens 2 500 woningen vertegenwoordigen. Bij die punten van de op triplex geplakte kaart werden gaatjes geboord (fig. 11). Door zo'n gaatje gaat een draadje, waarvan telkens een zelfde massa hangt, in dit geval 5 g. Vervolgens worden alle draadjes door een knoop verbonden. Aan die knoop zit nog een lange verticale draad, die dient om de wrijving te compenseren. Door de knoop langzaam te laten zakken, werd het minimaalpunt gevonden. Het bleek op de kruising van Hobbemakade en Hobbemastraat te liggen, vlakbij het Rijksmuseum.

Wanneer er sanering plaatsvindt of een bepaald stadsdeel wordt ontvolkt, kunnen we eenvoudigweg het betreffende gewichtje afknippen, waardoor het draadje daar slap valt. Door aan het verticale touwtje voorzichtig te trekken, stelt zich het nieuwe punt T in.

(Dit artikel kwam tot stand in samenwerking met de dienst publieke werken van de gemeente Amsterdam.)



Pythagoras Olympiade

Je kent natuurlijk de Nederlandse Wiskunde Olympiade: een wedstrijd in het oplossen van wiskundige vraagstukken, die elk jaar wordt georganiseerd door de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde. Aan de eerste ronde ervan nemen jaarlijks duizenden scholieren deel. Een klein aantal van hen krijgt een uitnodiging voor de tweede ronde.

De Olympiade in de vorm waarin zij nu bestaat, heeft een aantal bezwaren. Om organisatorische redenen kan er bij de eerste ronde alleen naar *antwoorden* worden gevraagd. Redeneringen en bewijzen blijven buiten beschouwing. Op deze manier kunnen *rekenfouten* bijvoorbeeld fataal zijn. Bij de tweede ronde wordt er wel naar de motivatie van het antwoord gevraagd, zodat dit nadeel dan niet aanwezig is. Een bezwaar van de beide rondes is dat de oplossingen binnen een zeer beperkte tijdsduur gevonden moeten worden, terwijl echt wiskundig werk het beste in alle rust gedaan wordt. Vaak zie je de oplossing van een probleem pas als je er eens een nachtje over hebt kunnen slapen. Om aan deze bezwaren tegemoet te komen, zal er in de toekomst naast de *Nederlandse Wiskunde Olympiade* ook een *Pythagoras Olympiade* georganiseerd worden. Ook bij deze olympiade moeten er vraagstukken worden opgelost; in elk nummer van *Pythagoras* zullen er drie verschijnen. Je kunt in alle rust thuis aan de oplossingen werken. Er zal steeds ongeveer een maand de tijd zijn om de oplossingen te vinden.

Wedstrijdvoorwaarden

1. Alle leerlingen van het voortgezet onderwijs kunnen aan de Pythagoras Olympiade deelnemen door een oplossing van één of meer van de opgaven in te sturen.
2. Papier waarop oplossingen staan, mag slechts aan één zijde beschreven zijn. Voor verschillende opgaven moeten

ook verschillende vellen genomen worden.

3. Slechts goed leesbare oplossingen worden bekeken. Alle tekstgedeelten moeten helder en duidelijk in goed lopende zinnen zijn geformuleerd.
4. Op elk vel moet vermeld staan: *naam, adres, leeftijd, school, schooltype* en *klas* van de inzend(st)er.
5. De oplossingen moeten binnen de vermelde inzendtermijn gestuurd worden naar:
Pythagoras Olympiade
Brederode 29
2261 HG Leidschendam
Zorg voor voldoende frankering!

Prijzen

1. Bij elke opgave worden onder de inzenders van een goede oplossing twee boekenbonnen verloot.
2. Alle opgaven van één jaargang (vijf nummers) van *Pythagoras* vormen te zamen een *ladderwedstrijd*. Elke goede oplossing geeft één punt. De drie inzenders die in één jaar de meeste punten verzamelen, krijgen een extra boekenbon. Bij gelijke puntenaantallen beslist het lot.
3. De beste tien van de ladderwedstrijd die niet in een eindexamenklas zitten, krijgen *automatisch* een uitnodiging voor de tweede ronde van de *Nederlandse Wiskunde Olympiade*. Zij behoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

De oplossingen van de opgaven zullen in

Pythagoras verschijnen. Hierbij zal zoveel mogelijk de oplossing van één van de deelnemers gevolgd worden, eventueel met commentaar van de jury. Zijn er maar weinig goede oplossingen, dan worden de namen van de inzenders vermeld. Als het er veel zijn, dan vermelden we alleen de aantallen.

Naast de vraagstukken van de *Pythagoras*

Olympiade, die natuurlijk tamelijk moeilijk zullen zijn, blijven er ook *Denkertjes* van verschillende moeilijkheidsgraad verschijnen. De oplossingen hiervan vind je steeds in het volgende nummer; je moet ze niet insturen!

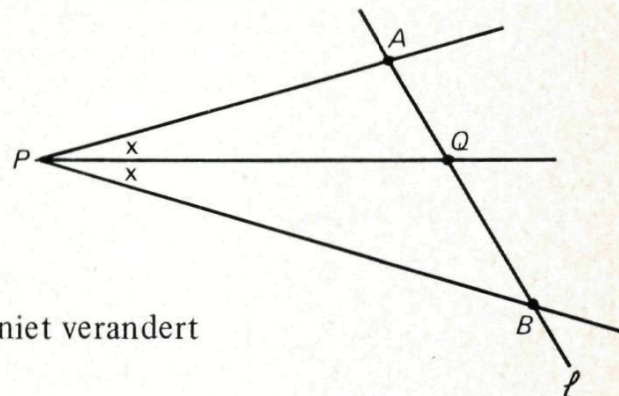
De oplossingen van de eerste drie opgaven moeten ingezonden worden *vóór 1 december 1979*.



Opgaven Pythagoras Olympiade

1. Een dambord heeft 10×10 velden. Een rechthoekig deel van het bord dat bestaat uit een geheel aantal velden heet een *deelbord*.
 - a. Hoeveel deelborden heeft een dambord?
 - b. Hoeveel *vierkante* deelborden heeft een dambord?

2. Op de bissectrice van een hoek P bevindt zich een punt Q . Door Q trekt men een lijn l , die de beide benen van de hoek snijdt in de punten A en B .



Bewijs dat de som $s = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}$ niet verandert als men l om Q draait.

3. a. Bewijs dat voor elk positief getal $r \neq \sqrt{2}$ de uitdrukking $\frac{3r + 8}{4r + 3}$ een betere benadering is van $\sqrt{2}$ dan r zelf.
- b. Bepaal positieve gehele getallen a, b, c en d zo, dat voor elk positief getal $r \neq \sqrt{3}$ de uitdrukking $\frac{ar + b}{cr + d}$ een betere benadering is van $\sqrt{3}$ dan r zelf.

∞ Zomaar een driehoek, dus een stomphoekige F. van der Blij

Teken zomaar eens een driehoek. Hoe groot is de kans dat hij rechthoekig is? Ik denk dat je zult zeggen 0%, dat is zo'n toeval. Hoe groot is de kans dat hij scherphoekig is? Denk je 50% en ook 50% voor stomphoekig? Hoe los je zo'n vraag op?

75% stomphoekig

We gaan een andere vraag stellen: in een 'vaas' stoppen we alle driehoeken, we kie-

zen er één willekeurig uit. Is hij scherp- of stomphoekig?

Nu gaat het eigenlijk alleen maar om de

vorm van de driehoek; we kunnen dus van alle onderling gelijkvormige driehoeken er maar één in de vaas stoppen; dat is net zo goed. Maar dan behoeven we eigenlijk alleen maar de *hoeken* van de driehoek te bekijken. Nog eenvoudiger, we hoeven maar *twee* hoeken te bezien, want de som is 180° .

We kunnen dus uit een vaas met hoeken achter elkaar twee hoeken trekken en zien of we er een scherp- of een stomphoekige driehoek mee kunnen bouwen.

In de vaas stoppen we alle hoeken groter dan 0° en kleiner dan 180° . Is de eerste hoek die we kiezen 120° en de tweede 85° , dan hebben we pech gehad. Er is geen driehoek met deze twee hoeken te construeren! De som van de twee hoeken moet in ieder geval kleiner dan 180° zijn.

We maken een plaatje (fig. 1).

De eerste hoek noemen we α , de tweede β en we tekenen een paar hoeken (α, β) als een punt in het vlak.

De punten op de lijn l of rechts boven deze lijn horen niet bij driehoeken, want voor die punten geldt $\alpha + \beta > 180^\circ$. Ook de punten op de lijn mogen niet meedoen. Maar ieder punt in het inwendige van de driehoek OPQ geeft twee hoeken $\alpha + \beta$, waarbij een derde hoek γ te vinden is, zodat $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. En dus een driehoek!

Voor de punten op KM geldt $\alpha = 90^\circ$; we hebben dus een rechthoekige drie-

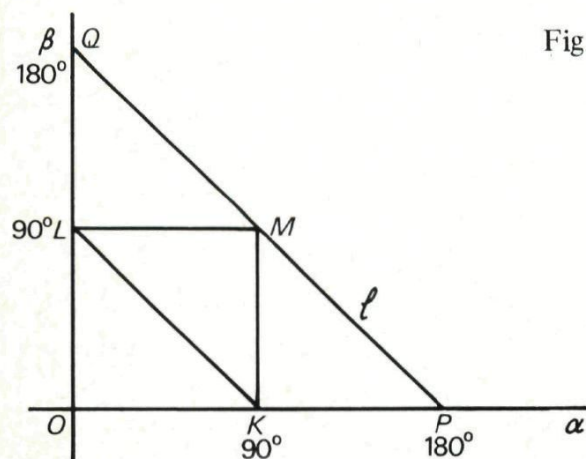


Fig. 1.

hoek. Voor de punten op ML geldt $\beta = 90^\circ$, dus ook een rechthoekige driehoek. Voor de punten op LK geldt $\alpha + \beta = 90^\circ$, dus $\gamma = 90^\circ$, dus opnieuw een rechthoekige driehoek. Voor de punten binnen de driehoek KLM geldt $\alpha < 90^\circ$, want links van MK , $\beta < 90^\circ$, want onder ML en $\gamma < 90^\circ$, want rechts van LK en dus $\alpha + \beta > 90^\circ$. In driehoek KLM vinden we uitsluitend scherphoekige driehoeken voorgesteld.

In driehoek KPM geldt echter $\alpha > 90^\circ$, dus stomphoekig, in driehoek LMQ geldt $\beta > 90^\circ$, dus stomphoekig. In driehoek OKL geldt $\alpha + \beta < 90^\circ$, dus $\gamma > 90^\circ$, dus ook stomphoekig.

Samenvattend: de punten binnen driehoek KLM geven scherphoekige driehoeken; de punten binnen driehoek KMP , driehoek LMQ en driehoek OKL geven stomphoekige driehoeken; de punten op KL , KM en LM geven rechthoekige driehoeken. Het lijkt redelijk om te zeggen dat aantal scherphoekige driehoeken: aantal stomphoekige driehoeken: aantal rechthoekige driehoeken = $1 : 3 : 0$.

Met andere woorden: 75% van alle driehoeken is stomphoekig en 25% is scherphoekig.

Zeven op de elf driehoeken zijn stomphoekig!

We gaan het probleem nog eens op een andere manier bezien. Twee gelijkvormige driehoeken zijn voor ons probleem hetzelfde. We mogen ons dus best beperken tot driehoeken waarvan één zijde gegeven is. Laten we zeggen dat AB de grootste zijde van de driehoek is. We gaan nu punt C willekeurig in het vlak kiezen en kijken weer wanneer de driehoek rechthoekig, stomphoekig of scherphoekig is (fig. 2).

C mag niet op AB of op het verlengde van AB of BA liggen, want dan hebben we geen echte driehoek. In rechthoekige driehoeken moet dan $\angle C = 90^\circ$, want AB was de grootste zijde en daar tegenover moet de grootste hoek liggen. Alle punten

C liggen op de omtrek van een cirkel met AB als middellijn, zodat $\angle ACB = 90^\circ$. Voor de punten C in het inwendige van deze cirkel, maar niet op AB gelegen, geldt dat $\angle ACB$ stomp is; dit zijn dus allemaal stomphoekige driehoeken. Hoe zit het met punten buiten de cirkel-omtrek?

Een punt als K is fout, want van driehoek ABK is AB niet de grootste zijde! De punten moeten liggen binnen een cirkel met A als middelpunt en AB als straal. Maar natuurlijk ook binnen een cirkel met B als middelpunt en BA als straal. Alleen de punten binnen het lensvormige figuurtje komen voor punt C van een driehoek ABC met AB als grootste zijde in aanmerking. De punten op de randen van de 'lens' geven gelijkbenige driehoeken met AB als grote zijde; deze zijn allemaal scherphoekig. Driehoek ABS en driehoek ABT zijn gelijkzijdig (en dus scherphoekig).

De punten in het gearceerde gebied geven dus scherphoekige driehoeken.

Noemen we $AB = 2r$, dan is de oppervlakte van de cirkel gelijk aan πr^2 . Wat is de oppervlakte van de gearceerde gebieden? We knippen de figuur via de lijn ST doormidden. De rechterhelft is een stukje gesneden uit de cirkel met middelpunt A . Het is de sector $ASBT$ en daarvan afgetrokken de driehoek AST . De oppervlakte van de sector is een derde deel van de oppervlakte van de hele cirkel van $\angle SAT =$

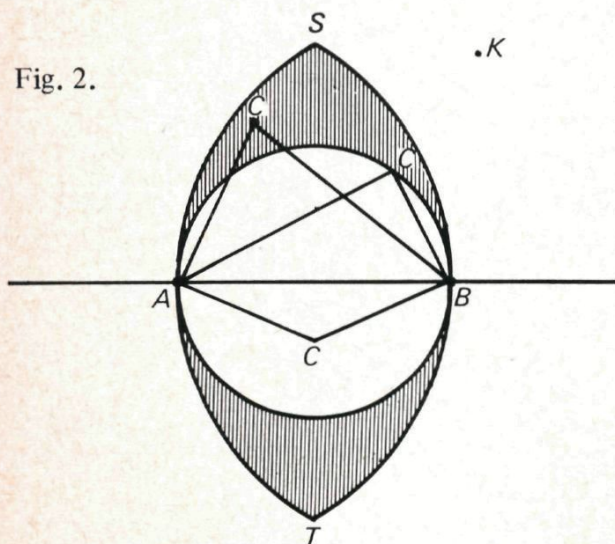


Fig. 2.

120° . Deze oppervlakte is dus $\frac{4}{3} \pi r^2$. De oppervlakte van driehoek AST is gelijk aan $r^2 \sqrt{3}$. De oppervlakte van de halve lens is dus $\frac{4}{3} \pi r^2 - r^2 \sqrt{3}$. De oppervlakte van de hele lens is $\frac{8}{3} \pi r^2 - 2r^2 \sqrt{3}$. De oppervlakte van het gearceerde gebied is dus $\frac{8}{3} \pi r^2 - 2r^2 \sqrt{3} - \pi r^2$.

We vinden nu voor de verhouding van aantal scherphoekige driehoeken : aantal stomphoekige driehoeken : aantal rechthoekige driehoeken = $(\frac{5}{3} \pi r^2 - 2r^2 \sqrt{3}) : \pi r^2 : 0$. Anders geschreven als $(5\pi - 6\sqrt{3}) : 3\pi : 0$. Bij benadering als 5, 3157 : 9,4248 : 0, of een beetje grover als 4 : 7 : 0.

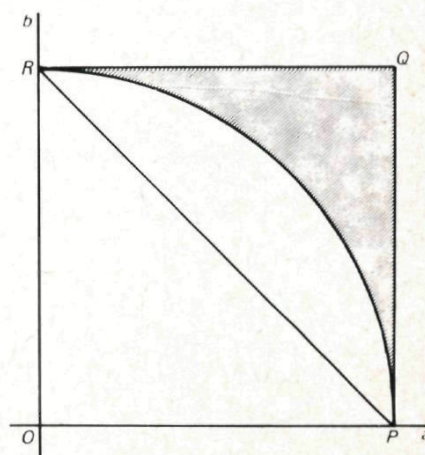
Vier op de zeven driehoeken zijn stomphoekig

Omdat we een beetje onzeker geworden zijn, gaan we het nog maar eens doen. We kunnen weer zeggen: laat de grootste zijde gelijk aan 1 zijn. De andere zijden zijn dan a en b met $a \leq 1, b \leq 1$.

We gebruiken weer een grafische voorstelling; de punten (a, b) zijn punten in het vlak (fig. 3).

Alleen de punten binnen of op de rand van het vierkant $OPQR$ komen in aanmerking. De lijnen OP en OR mogen niet mee doen. Nu weten we nog niet of we met de zijden 1, a en b altijd een driehoek kunnen tekenen. Een nodige voorwaarde is dat $a + b > 1$. Dus alleen de punten rechts boven de lijn PR komen in aanmerking, voor de andere lukt het niet

Fig. 3.



een driehoek te construeren met zijden 1, a en b .

Wanneer is de driehoek rechthoekig?

Omdat $a \leq 1$, $b \leq 1$ kan dit alleen als a en b rechthoekszijden zijn, en de hypotenusa lengte 1 heeft. Dus als $a^2 + b^2 = 1$. Op de kwart cirkelboog liggen dus de punten met rechthoekige driehoeken. In het gearceerde gebied hebben we $a^2 + b^2 > 1$, dus scherphoekige driehoeken; binnen de cirkelboog $a^2 + b^2 < 1$, dat geeft stomphoekige driehoeken.

De oppervlakte van het gearceerde gebied is $1 - \frac{1}{4}\pi$. De oppervlakte van het cirkel-segmentje rechts boven de lijn PR is $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$. We vinden nu dus aantal scherphoekige driehoeken : het aantal stomphoekige driehoeken : het aantal rechthoekige driehoeken = $(1 - \frac{1}{4}\pi) : (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}) : 0$. Bij benadering $0,2146 : 0,2854 : 0$. Of, wat ruwer $3 : 4 : 0$.

Helaas weer wat anders. Het lijkt er wel op dat er meer stomphoekige driehoeken dan scherphoekige driehoeken zijn. Maar wat is de verhouding?

Zijn alle driehoeken dan stomphoekig?

Misschien vond je het wat raar dat ik de grootste zijde van te voren vast legde. We proberen het nog maar eens. Laat AB zomaar één van de zijden van de driehoek zijn. Dan mag C bijna overal in het vlak gekozen worden, alleen op de lijn AB gaat het fout (fig. 4).

Alle punten in de vakken A , C , D en F

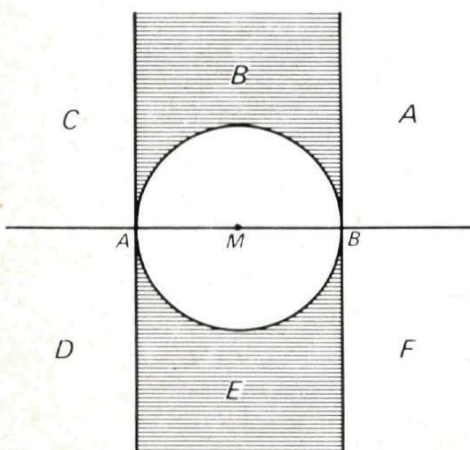


Fig. 4.

geven stomphoekige driehoeken. De punten van B en E die buiten de getekende cirkel liggen, geven scherphoekige driehoeken. De punten binnen de cirkel geven weer stomphoekige driehoeken. De punten op de cirkelomtrek en op de verticale lijnen geven rechthoekige driehoeken.

We arceren weer het gebied van de stomphoekige driehoeken.

Je ziet zo wel dat er 'veel' meer punten in het gearceerde gebied liggen dan erbuiten. Helaas heeft zowel het gearceerde gebied als het niet gearceerde gebied een oneindig oppervlakte. Voor de verhouding is niet zoveel te zeggen. Maar nemen we een blad papier en tekenen we de figuur met M midden op het blad, dan is wel wat te berekenen.

We zouden nu steeds grotere bladen papier kunnen nemen en zien of de verhouding scherphoekig tot stomphoekig een limiet heeft. Ik denk dat je het, na wat proberen, met mij eens zult zijn dat deze limiet 0 is. Dus 0% van alle driehoeken is scherphoekig en 100% is stomphoekig!

Omdat het nu al te gek wordt, gaan we het nog één keer doen. We kiezen één zijde 1, niet noodzakelijk de grootste; de andere noemen we a en b . We gaan weer een plaatje maken. Natuurlijk moet weer gelden $a + b > 1$. Maar ook moet gelden $a + 1 > b$ en $b + 1 > a$. Want de som van twee zijden van een driehoek is altijd groter dan de derde.

Met enig nadenken zie je dat op l (fig. 5) geldt $b + 1 = a$ en op m geldt $a + 1 = b$ en dat de bruikbare punten liggen in dat deel van de strook begrensd door l en m , rechts boven de lijn $a + b = 1$.

Waar liggen de rechthoekige driehoeken? Daarvoor geldt óf $a^2 + b^2 = 1$ óf $a^2 + 1 = b^2$ óf $b^2 + 1 = a^2$. De eerste liggen op een kwart cirkelboog van P naar S . Die van de tweede soort op een kromme lijn (stuk van een hyperbool) die rechts boven vlak bij de lijn $a = b$ komt te lopen (deze lijn als asymptoot heeft).

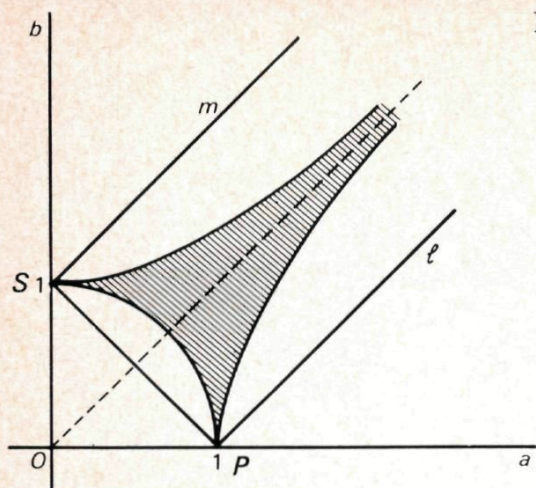


Fig. 5.

Waar liggen de scherphoekige en waar de stomphoekige driehoeken?

In fig. 5 geven we door arcering weer het gebied van de scherphoekige driehoeken aan. Helaas is ook nu weer de oppervlakte van het gebied van de scherphoekige driehoeken en van dat van de stomphoekige driehoeken oneindig. We zouden weer kunnen proberen via een limiet een verhouding te definiëren. Het lijkt het meest redelijk ook nu weer 0% scherphoekig tegen 100% stomphoekig te zeggen.

Moraal

De resultaten zijn nogal vreemd. Maar er zijn geen rekenfouten gemaakt. Het probleem is dat het begrip 'kans' niet zo goed omschreven is in deze gevallen. Een heel extreem voorbeeld:

Ik stop alle driehoeken in drie vazen: in één vaas alle scherphoekige, in een andere vaas alle stomphoekige en in een derde vaas alle rechthoekige driehoeken. Ik kies nu zomaar een vaas en pak er een driehoek uit. Natuurlijk is dan de kans scherp : stomp : recht als 1 : 1 : 1. Maar nu zeg je, dat is niet eerlijk, zitten in alle vazen evenveel driehoeken? Maar het zijn

er in iedere vaas oneindig veel, wat zegt dan evenveel?

Ik heb het anders gedaan; ik stopte bijvoorbeeld alle hoeken in een vaas en zei dat iedere hoek dezelfde kans had om gekozen te worden. Maar in een andere methode stopte ik alle zijden in een vaas en zei dat iedere zijde dezelfde kans had om gekozen te worden. Maar ook hier weer vazen met oneindig veel dingen erin.

Het gaat allemaal beter als we met vazen met *eindig* veel dingen erin werken. Bijvoorbeeld een vaas waarin hoeken van 1° , 2° , 3° , . . . t.e.m. 179° zitten. Bij een trekking heeft iedere hoek dezelfde kans. We leggen de hoek terug en trekken nog een keer. Nu kun je precies uitrekenen wat de kans is dat je twee hoeken getrokken hebt, waarmee je óf geen óf een scherphoekige óf een stomphoekige óf een rechthoekige driehoek kan maken. Reken het zelf maar eens uit!

Met zijden is het vervelender; er zijn zelfs als we gehele getallen voor de lengtes gebruiken al oneindig veel mogelijkheden. Wat is dan de kans om lengte 3 te trekken? Veel anders als 0 zou je niet kunnen zeggen, maar dan komt er niets van terecht. We zouden in een vaas alleen maar lengte 1, 2, . . . t.e.m. 100 kunnen stoppen. En dan drie keer met teruglegging een lengte kiezen en onderzoeken welke kans er is op geen, een scherphoekige, een stomphoekige of een rechthoekige driehoek met deze drie gekozen zijden.

Zou het antwoord veranderen als je 100 vervangt door 10 of door 1 000? Reken het zelf maar eens uit!

De vraag naar de kans op een scherphoekige driehoek is niet zo'n goede vraag als je eerst niet duidelijk beschrijft hoe je 'zomaar' een driehoek kiest!

°Hoe deel je een hoek in drieën?

Trisectrices van een driehoek zijn de lijnen die de hoeken in *drie* gelijke delen verdelen. Je kent allemaal de *bissectrices*, en je weet ook hoe je een bissectrice van een hoek met passer en liniaal kunt construeren (zie fig. 1).

Maar hoe deel je een hoek in *drieën*? De oude Grieken hebben al geprobeerd hiervoor ook een constructiemethode met passer en liniaal te vinden, maar tevergeefs. We weten nu dat hun pogingen wel schipbreuk *moesten* lijden. In het begin van de vorige eeuw is namelijk met algebraïsche middelen de *onmogelijkheid* aangetoond van het bestaan van zo'n 'recept' om een willekeurige gegeven hoek in eindig veel stappen met passer en liniaal in drieën te delen.

Waarom kan het niet met passer en liniaal?

Je zult je afvragen hoe het mogelijk is met *algebraïsche* hulpmiddelen de onmogelijkheid van een *meetkundige* constructie aan te tonen. Ik zal proberen uit te leggen hoe zo'n bewijs in grote lijnen loopt. Een hoek is volledig gegeven door zijn hoekpunt O en twee punten E en A , op elk een één. Kies een rechthoekig coördinatenstelsel met O als oorsprong, waarin E de coördinaten $(1, 0)$ heeft. Stel dat (a, b) de coördinaten zijn van A (zie fig. 2). De klassieke *constructieregels* zijn:

1. Je mag door elk tweetal bekende punten een lijn trekken (punten zijn 'bekend' als ze tot de oorspronkelijk gegeven punten behoren of bij eerdere constructiestappen zijn ontstaan).

2. Je mag elke cirkel trekken die een bekend punt als middelpunt en de afstand tussen twee bekende punten als straal heeft.

Nieuwe punten kunnen hierbij ontstaan:

- a. als snijpunt van twee lijnen;
- b. als snijpunt van een lijn en een cirkel;
- c. als snijpunt van twee cirkels.

We kunnen de constructieregels in een *algebraïsche* vorm gieten: een lijn door twee punten geeft een *lineaire* vergelijking en een cirkel geeft een bepaald type *kwaadratische* vergelijking. De coördinaten van een snijpunt bepaal je door ze uit de twee bijbehorende vergelijkingen op te lossen.

In de oorspronkelijke gegevens komen de coördinaten a en b van het punt A voor, en je begrijpt dat de coördinaten van alle nieuwe punten die je via de gegeven regels construeert, ook van a en b afhangen. Je kunt bewijzen dat de uitdrukkingen in a en b die je zo krijgt allemaal van een heel bijzonder type zijn. Bij het oplossen van de vergelijkingen moet je namelijk alleen maar optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en soms ook nog vierkantswortels trekken.

Fig. 1. De constructie van een bissectrice.

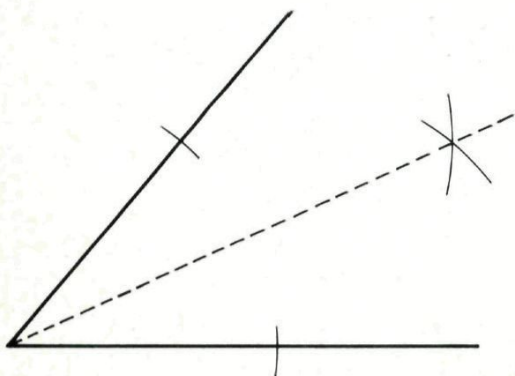
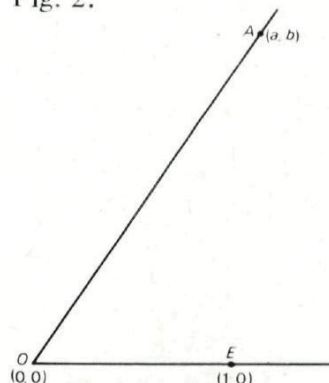


Fig. 2.



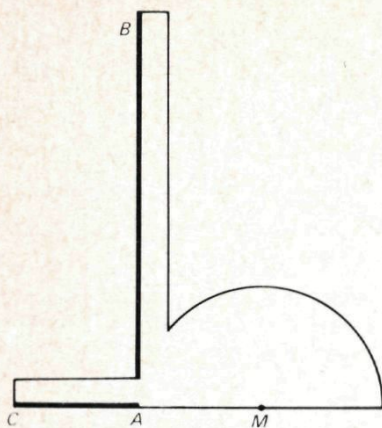


Fig. 3. De trisector.

Je kunt verder bewijzen dat als het mogelijk zou zijn elke hoek op de hier toegestane wijze in drieën te delen, je ook punten op zulke trisectrices kunt construeren, waarvan de coördinaten geschreven worden met uitdrukkingen in a en b , waarin ook *derdemachtswortels* voorkomen. Het is echter met middelen uit de hogere algebra mogelijk te bewijzen dat een getal dat zo'n uitdrukking in derdemachtswortels is, niet tegelijkertijd van het eerder aangeduide type met hoogstens vierkantswortels kan zijn, en dus kan zo'n constructiemethode niet bestaan. Op de details van dit bewijs kunnen we hier niet ingaan, maar je weet nu wel wat de ideeën erachter zijn.

De trisector

Met passer en liniaal lukt het dus niet om elke hoek in drieën te delen. We kunnen echter gemakkelijk een ander instrument maken, waarmee het wel kan. In fig. 3 zie

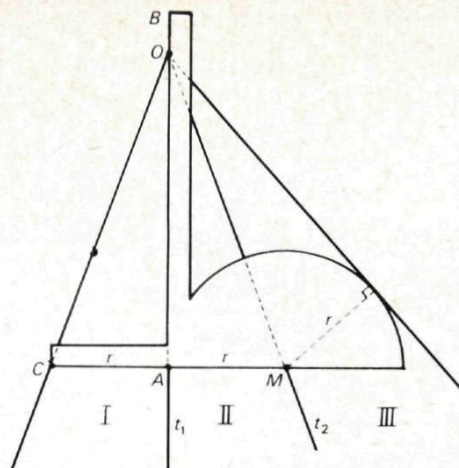
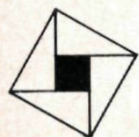


Fig. 4.

je een *trisector* afgebeeld. Het is een halve cirkelschijf waarop het middelpunt van de cirkel M is aangegeven, met daaraan vast twee rechte stukken. Alleen de vet aangegeven zijden AB en AC zijn hierbij van belang. AC is net zo lang als de straal AM van de cirkel, en AB moet des te langer zijn, naarmate de hoeken die we in drieën willen delen, kleiner zijn. Je kunt zelf van hout of karton zo'n trisector maken. Hij wordt als volgt gebruikt (zie fig. 4). Leg hem zó op de hoek die je in drieën wilt delen, dat de zijde AB op het hoekpunt O van de hoek valt, terwijl het ene been van de hoek door C gaat en het andere been de cirkelrand raakt. Teken dan de punten A en M op het papier, en trek $t_1 = OA$ en $t_2 = OM$. Door spiegelen in t_1 gaan de gebieden I en II in elkaar over, en door spiegelen in t_2 gaan II en III in elkaar over. t_1 en t_2 zijn dus inderdaad de trisectrices van de gegeven hoek!



Denkertjes

1. Hoe kun je met twee (even grote) trisectoren een willekeurige hoek in *vijven* delen?
2. Gegeven is hoek EOA , net als in fig. 2.
 - a. Druk de coördinaten van het snijpunt van de lijn OA met de eenheids-cirkel uit in a en b .

- b. Druk de coördinaten van de snijpunten van de eenheidscirkel met de binnen- en buitenbissectrices van hoek EOA uit in a en b .
- c. Stel (x, y) is het snijpunt met de eenheidscirkel van de trisectrice van hoek EOA die het dichtst bij het been OE ligt. Bewijs dat x en y voldoen aan de *derdegraadsvergelijkingen*:

$$4x^3 - 3x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad 4y^3 - 3y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

In het algemeen komen in de oplossing van deze vergelijkingen derdemachtswortels voor.

(De oplossingen van deze denkertjes zullen in het volgende nummer verschijnen.)

°° De wig van Wallis

Een ruimtelijk lichaam ziet eruit als een vierkant in de x -richting, in de y -richting als een driehoek en in de z -richting als een cirkel (fig. 1). Dat lijkt een vreemde toestand! Kan zoiets? Welzeker, we bedoelen de wig van Wallis (fig. 2). Die zit als volgt in elkaar.

Neem als grondvlak een cirkel met middellijn AB . Zet loodrecht op het vlak van de cirkel een vierkant $ABCD$. Breng vervolgens vlakken aan, loodrecht op AB , die CD in P en de cirkel in Q en R snijden. De lijnen PQ en PR noemen we beschrijvende van het lichaam en ze vormen de mantel.

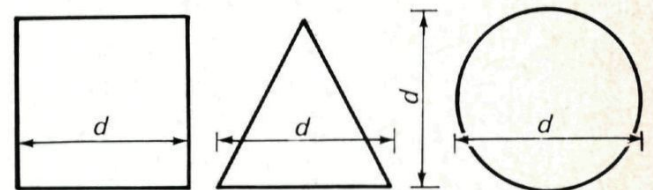


Fig. 1. Drie aanzichten van een zelfde lichaam.

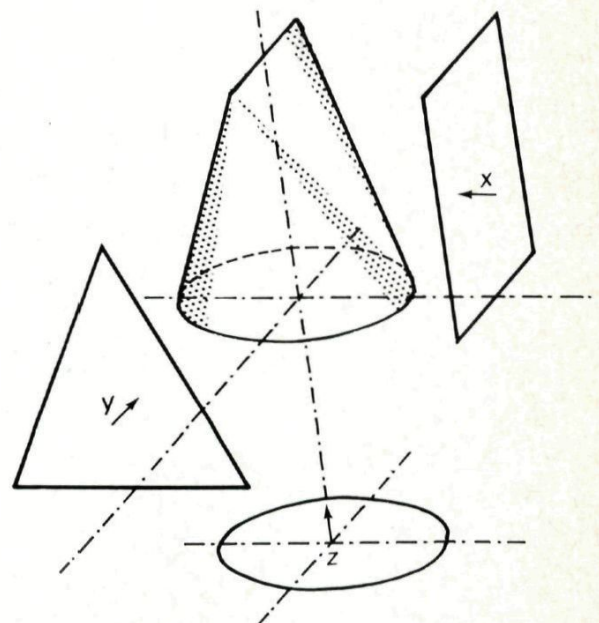
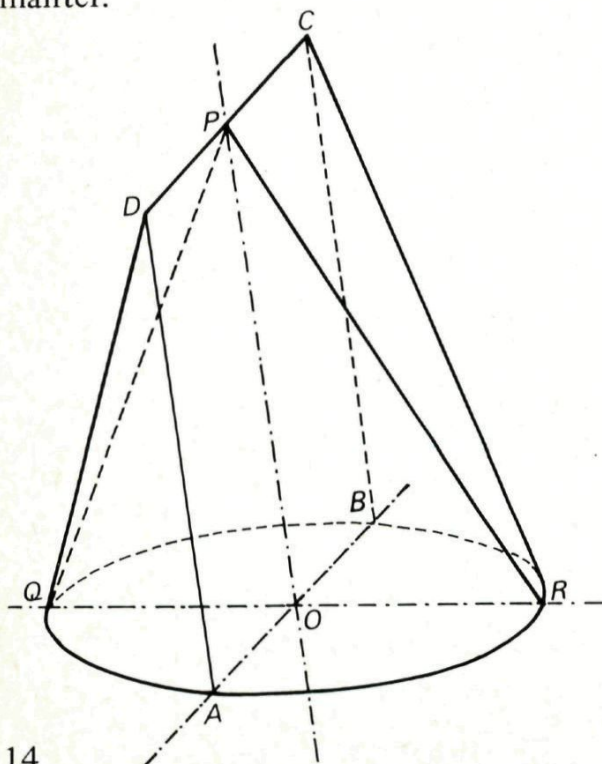


Fig. 2. De wig van Wallis in drie richtingen.

Ga zelf na dat het aanzicht in de drie richtingen vierkant, driehoek en cirkel wordt. We noemen zo'n oppervlak ook wel een *regeloppervlak*. Daarbij wordt de mantel altijd gevormd door rechten te trekken die punten van twee vlakke figuren of rechten met elkaar verbinden.

Zo is ook een cilinder een regeloppervlak. En ook een kegel. De wig van Wallis is een soort kegel, niet met een toppunt, maar met een topréchte. Daarbij is de toprechte even lang als de middellijn van de cirkel.

Een koffiefilter

Bij een koffiefilter is de toprechte korter dan de middellijn van de richtcirkel (fig. 3).

Als we op de drie zijaanzichten letten, zien we weer een cirkel en een driehoek, maar het vierkant is hier vervangen door een trapezium.

We krijgen ook een goede indruk van deze alternatieve kegel, als we het filter recht op zetten, de gaatjes sluiten en er water ingieten (fig. 3). Zo zien we de hoogtelijnen in het dalgebied van een berglandschap. De oeverbegrenzing van zo'n waterplas benaderen we door een recht-hoeksfiguur, afgesloten door twee halve

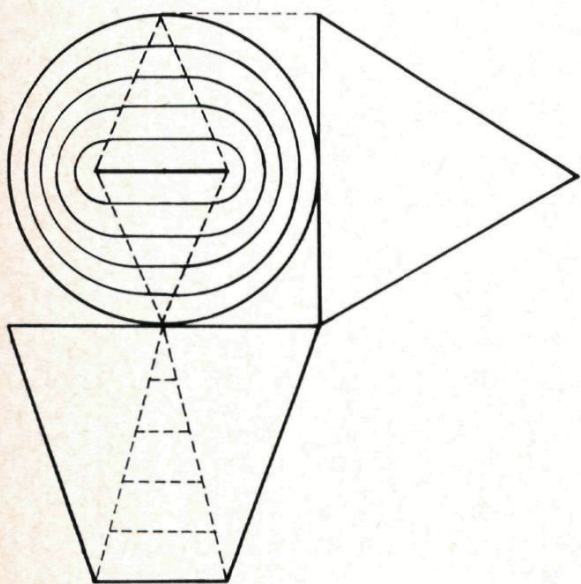


Fig. 3. Een koffiefilter met 'hoogtelijnen'.

cirkels. Daartoe denken we het filter opgebouwd uit twee halve kegels (fig. 4) en daartussen een viervlak. We hebben vijf doorsnijdingen ingetekend en we hebben daarvoor de totale hoogte in vijf gelijke delen verdeeld.

Het volume van het filter

Uitgaande van twee halve kegels en een tussenliggend viervlak zijn we ook in staat de inhoud van zo'n filter te berekenen. Het totale volume is dan de som van de drie deelinhouden.

We gaan uit van de volgende maten:

- de straal van de cirkel is r ;
- de lengte van de toprechte is s ;
- en de hoogte van het filter is h .

Voor een kegel geldt dat het volume gelijk is aan een derde deel van het produkt van grondoppervlakte en hoogte.

Meer moeite hebben we met het viervlak. Het volume daarvan gaan we bepalen met een zeer merkwaardige formule.

De regel van Simpson

Er is een inhoudsformule, bekend als de regel van Simpson. Deze geldt alleen voor lichamen, begrensd door platte vlakken, waarbij alle hoekpunten zich bevinden in twee onderling evenwijdige vlakken.

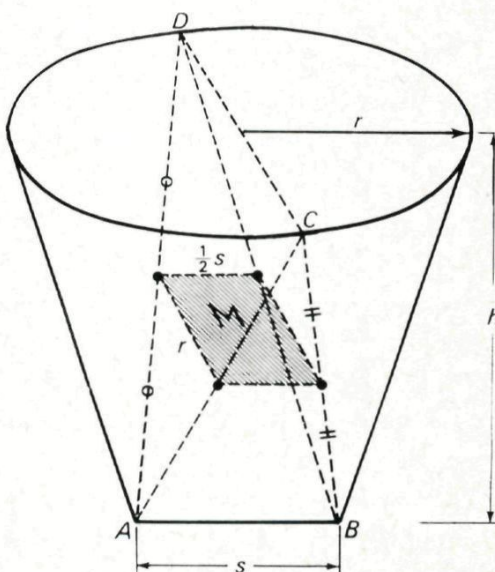


Fig. 4. Twee stukken kegel en een viervlak.

Dat is hier voor ons viervlak het geval. Immers door AB en CD (fig. 4) zijn twee zulke vlakken te denken.

De formule luidt nu: $V = \frac{1}{6}h(G+B+4M)$. Hierin stelt h de afstand van die evenwijdige vlakken voor, G de oppervlakte van het grondvlak, B de oppervlakte van het bovenvlak en M die van het middenvlak.

Onder M verstaan we de figuur die ontstaat als we het lichaam halverwege de evenwijdige vlakken doorsnijden.

In ons geval geldt: $G = O$, $B = O$ en $M = \frac{1}{2}rs$.

Zo vinden we voor het volume van het viervlak:

$$\frac{1}{6}h(4 \cdot \frac{1}{2}rs) \text{ of } \frac{1}{3}hrs$$

De totale inhoud

Als we de drie volumina (twee halve kegels en een vierkant) optellen, krijgen we de totale inhoud.

Daarvoor vinden we:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) h + \frac{1}{3}hrs \text{ of}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi rh \left(r + \frac{s}{\pi} \right)$$

Als $s = 0$ gaat deze formule over in $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ en dat is de bekende uitkomst voor een hele kegel.

Als we stellen: $s = 2r$ begint het filter te lijken op de wig van Wallis.

Dan wordt het volume: $\frac{1}{3} \pi r^2 h \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) = 0,55 \pi r^2 h$ en dat is ongeveer de helft van het volume van omschreven cilinder van het koffiefilter.

Bij de officiële wig van Wallis is de inhoud precies de helft van de omschreven cilinder. Maar daar hebben we geen tussenliggend viervlak (zie de beschrijving in het begin).

Controle

We hebben de maten opgemeten van een koffiefilter en gevonden: $r = 6$, $h = 10$ en $s = 5$ cm.

Dan zou de inhoud moeten worden:

$$\frac{1}{3} \pi \cdot 6 \cdot 10 \left(6 + \frac{5}{\pi} \right) = 477 \text{ cm}^3$$

En dat was uitstekend na te meten door het filter aan de lange zijde af te plakken, te vullen met water en dat uit te gieten in een maatbeker.

° Met ballen en eieren

In het museum Moerman in Apeldoorn is een tentoonstelling *Met en met maten* gehouden. Daar stond o.a. een mand gevuld met houten ballen (fig. 1). De begeleidende tekst vertelde dat men in het verleden inhouden van manden en vaten bepaalde met behulp van bollen. Zo kon men uit het aantal standaardbollen, dat in zo'n mand ging, de inhoud schatten.

Al een paar duizend jaar geleden behielp men zich met dergelijke werkwijzen.

In oude joodse boeken wordt op vele plaatsen melding gemaakt van een inhoudsmaat de 'efa', overeenkomend met . . . een hoeveelheid van 432 eieren van gewone hoenders. Het wordt gebruikt als volumemaat voor stoffen als meel, gort, gerst en graan.

Hier twee citaten.

In het boek *Ruth* staat: Ze bleef tot de



Fig. 1.
Volumemeting
met bollen.

avond aren lezen op de akker, dan schudde ze uit wat ze geraapt had; het was bijna een hele efa gerst.

En in het boek *Leviticus*: Wees niet oneerlijk in gewicht en maat; een zuivere weegschaal en een juiste efa moet je hebben.

De manier van meten doet een beetje denken aan een volumebepaling met een maatglas; alleen wij gebruiken daar watermoleculen in plaats van kippeëieren.

Onze nieuwsgierigheid was dermate gewekt dat we zelf aan het meten en rekenen gingen. We vulden vazen en kannen met glazen knikkers en pingpongballetjes, om een en ander na te spelen. Speciaal de nauwkeurigheid interesseerde ons.

Een experiment

We vullen een koffiekop met een binnendiameter van 64 mm en een hoogte van 69 mm met glazen knikkers. Na schudden en gladstrijken gaan er 50 in.

De knikkers hebben een middellijn van 16,5 mm. Volgens de formule voor de inhoud van een bol hebben de knikkers een volume $\frac{1}{6}\pi d^3$ of 2,3 cm³.

Het kopje is op te vatten als een cilinder met inhoud $\frac{1}{4}\pi d^2 h$ of 222 cm³. Dat is 97 keer zo groot als de inhoud van één knikker. Omdat er maar 50 ingaan, kunnen we besluiten dat ongeveer de helft van de ruimte met knikkers gevuld is.

Tweede experiment

We vullen vervolgens een cilindrische plastic doos, met een diameter van 114 mm en een hoogte van 133 mm, geheel tot de rand met dezelfde soort knikkers. De inhoud van de cilinder blijkt 1 360 cm³ te worden, ofwel 590 keer de inhoud van één knikker. We tellen, na vullen en schudden, 265 knikkers. Dat komt neer op een vulrendement van 45%.

Vullen met bollen

Het lijkt nu verstandig om eerst na te gaan welk deel van de ruimte door bollen

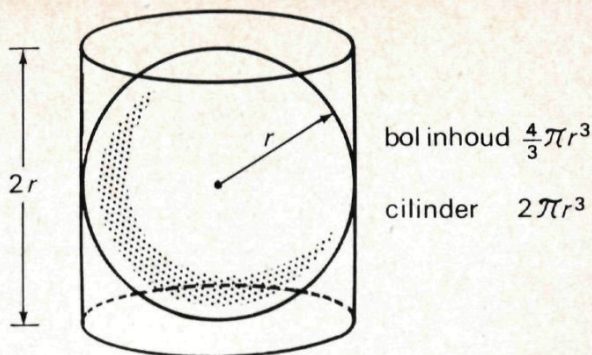


Fig. 2. Bezettingsgraad 67%.

wordt ingenomen, als we een vat daarmee vullen.

In fig. 2 staat een bekend voorbeeld. Een bol met straal r past precies in een cilinder met straal r en hoogte $2r$. Ga zelf maar na dat de inhoud van de bol precies tweemaal zo groot is als de overblijvende open ruimte. We zeggen: het vulrendement of de bezettingsgraad is 67%.

We denken nu ruimten die groot zijn ten opzichte van het eigen volume van de knikkers.

We zouden de knikkers volgens bepaalde patronen kunnen rangschikken.

Het zou kunnen volgens rijen en kolommen, zoals in fig. 3a. De naburige middelpunten vormen daar hoekpunten van een kubus met ribbe $2r$. Een knikker in een volgende laag komt dan telkens recht boven één uit een laag daaronder.

Van de kubusruimte met ribbe $2r$ en inhoud $8r^3$ wordt telkens aan bolinhoud bezet $\frac{4}{3}\pi r^3$. De verhouding $\frac{4}{3}\pi : 8 = 52 : 100$, zodat 52% van de ruimte door bollen wordt bezet, althans bij deze wijze van stapelen.

In fig. 3b is een volgende laag iets verdiept aangebracht tussen de vorige bollen. De lagen komen nu iets dichtër op elkaar en wel in verhouding $2 : \sqrt{3}$, zodat de bezettingsgraad nu 60% wordt en dus 40% lege ruimte.

Ten slotte staat in fig. 3c de situatie waarbij elke bol uit een hogere laag precies in de holte tussen vier onderliggende knikkers komt. Een berekening leert dat de laagafstanden nu weer kleiner worden en

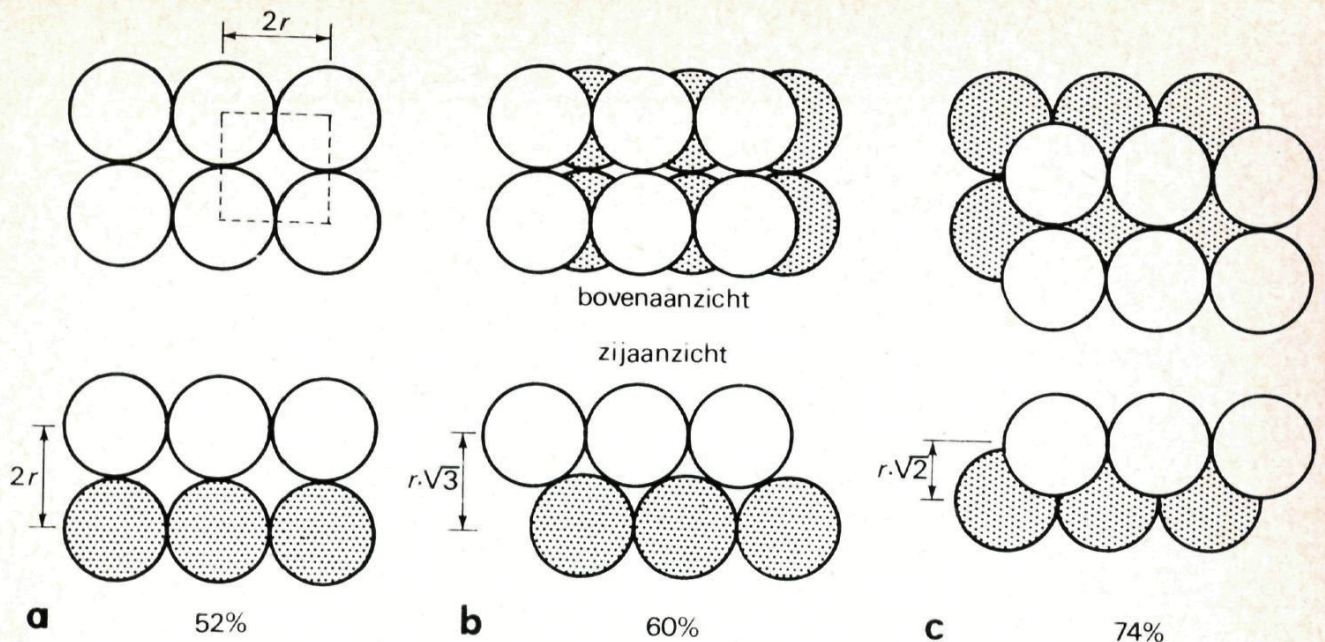


Fig. 3. Bezettingsgraad bij verschillende pakking.

wel in de verhouding $\sqrt{3} : \sqrt{2}$. De bezettingsgraad wordt nu 74% ofwel 26% leeg. Het zal duidelijk zijn dat, als er zomaar knikkers in een vaas worden gedaan, het patroon beslist niet zo regelmatig zal zijn als net is voorgesteld.

Schudden zal dat wel wat bevorderen. Maar de situatie van fig. 3c wordt zó zeker niet bereikt.

Volgens onze metingen is een bezettingsgraad van rond 50% de meest waarschijnlijke.

Pingpongballtjes en eieren

We hebben vervolgens geëxperimenteerd met pingpongballtjes. Deze hebben een middellijn van 38 mm en een inhoud van 29 cm^3 .

Ten slotte hebben we het, in het spoor van de oude boeken, ook nog met eieren geprobeerd.

Een ei van een 'gewone' hoender had bij ons thuis een buikdiameter $d = 4,5 \text{ cm}$ en een ashoogte $h = 6 \text{ cm}$.

Voor een ei geldt in navolging van een bol de inhoudswaarde $\frac{1}{6} \pi d^2 h$. Voor zo'n ei komt er dan 60 cm^3 uit (fig. 4). Een aantal van 432 eieren wordt dan 26 liter. En

als we ze in een mand doen en ze vullen die mand 'precies', dan heeft die mand, gelet op een bezettingsgraad 50%, ruim 50 liter inhoud. En daar houden we een 'efa' dan maar op.

Nauwkeurigheid

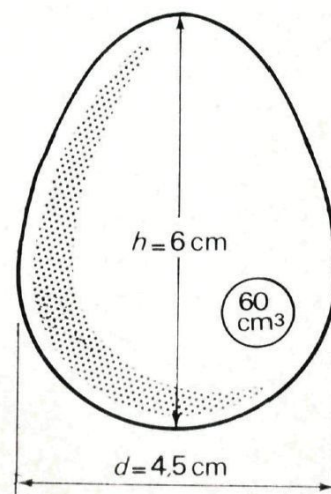
We waren erg benieuwd wat de nauwkeurigheid van zulk soort metingen zou zijn. We lieten verschillende proefpersonen de cilindrische bus van het tweede experiment met knikkers vullen.

Er werden hierbij hooguit verschillen van 1% tot 2% als afwijking van een gemiddelde meetwaarde geconstateerd. De meting blijkt dus redelijk nauwkeurig te zijn.

We hoeven dus geen vrees te hebben voor de profeet Amos als deze waarschuwt: Wee hem, die de weegschaal vervalst en de efa verkleint.

Fig. 4.

$$\text{volume} \frac{1}{6} \pi d^2 h$$



Hoeveel kleuren heb je nodig om een landkaart — een kaart van landen — zó te kleuren dat elk land een kleur krijgt en dat de landen die een grens gemeen hebben, een verschillende kleur krijgen? De kaart van fig. 1 vereist vier kleuren.

Kom je er ook altijd met vier kleuren? Een vermaard probleem — het vierkleurenprobleem genaamd — dat lang de aanvallen van wiskundigen heeft getrotseerd en pas kort geleden, met grootscheepse hulp van de computer, is opgelost: inderdaad, vier kleuren zijn voldoende.

Maar er zijn ook kaarten, waar met *minder* dan vier kleuren kan worden volstaan. Bij een bepaald soort kom je er steeds met twee, namelijk zwart en wit, als je die tenminste kleuren wilt noemen.

De fig. 2 t.e.m. 6 stellen voor wat men *gesloten krommen* noemt, in een bepaalde zin volgens de pijlen doorlopen. De krommen mogen zichzelf een eindig aantal keren overkruisen. We laten dus geen krommen toe als fig. 7, waarvan hele stukken dubbel of meervoudig doorlopen worden.

Gesloten krommen met eindig veel zelf-overkruisingen delen het vlak in een aantal delen. We beweren: *deze kaarten laten steeds kleuring met twee kleuren toe.*

In de plaatjes 2 t.e.m. 5 zie je getallen. We zullen deze toelichten.

Als C de gesloten kromme is en p een punt niet op C , dan kunnen we vragen hoe vaak de kromme C het punt p omloopt: we trekken een straal van p naar het punt x dat die kromme doorloopt en tellen hoeveel volle draaiingen (van 360°) de straal px uitgevoerd heeft wanneer x bij zijn startpunt terug is. Hierbij tellen we, zoals in de wiskunde gebruikelijk, een draaiing tegen de klokwijzer in positief,

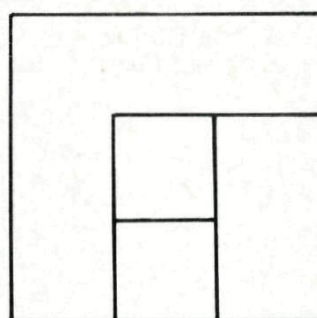


Fig. 1.

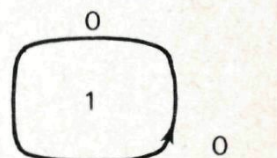


Fig. 2.

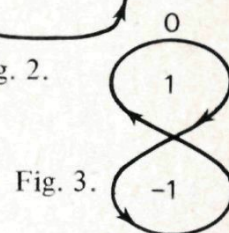


Fig. 3.

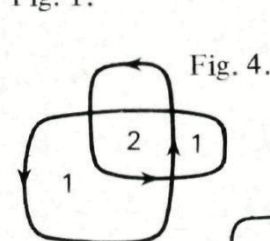


Fig. 4.

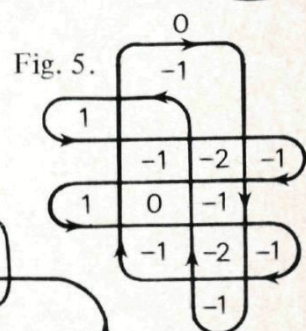


Fig. 5.

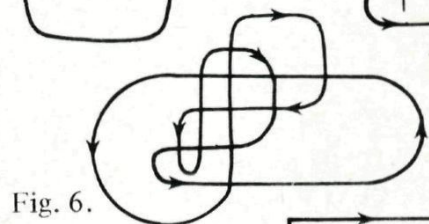


Fig. 6.

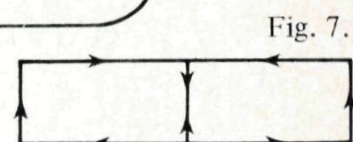


Fig. 7.

met de klokwijzer mee negatief. Het kan best dat de rechte px af en toe terugloopt, als x op C loopt; het komt echter op het uiteindelijke aantal draaiingen aan.

In fig. 8 wordt p door C vier keer rondgelopen; draaien we de pijl van C om, dan wordt het -4 keer. Het punt q daarentegen wordt maar twee keer rondgelopen: als x in a begint te lopen, dan is bij b een eerste omgang rond q voltooid, bij c begint de straal qx terug te lopen, van d tot e loopt hij weer vooruit, van e tot f terug, van f tot a weer vooruit, om de tweede omgang te voltooien. (Kijk ook naar de fig. 2 t.e.m. 5 en de vermelde getallen.)

Het omlooptal is iets gemakkelijker vast te stellen. Trek vanuit p een vaste straal S . Die zal door C een aantal keren worden doorboord, soms in de positieve zin, soms in de negatieve. Tel dit bij elkaar met het juiste teken. Wat er uit komt, is het omlooptal. Bijvoorbeeld: trek in fig. 8 uit p de horizontale straal naar rechts; het is net vier keer. Trek uit q de horizontale straal naar links; het is drie keer positief en één keer negatief, dus twee keer (fig. 8a).

Het zodoende berekende aantal hangt niet af van welke straal S we hebben gekozen. Veranderen we de straal, dan kunnen we wel doorboringen van C kwijt raken of erbij krijgen, maar dat geschiedt dan altijd in paren, een positieve en een negatieve samen; zie in fig. 9 de zes verschillende posities van S . (Kijk ook weer naar de fig. 2 t.e.m. 5.)

Wat gebeurt er nu als we het punt p verplaatsen?

We nemen twee punten p_1 en p_2 en kijken hoe vaak p_1 door C wordt omlopen en hoe vaak p_2 . Ik verbind p_1 en p_2 door een lijnstuk L . Stel dat L door C niet wordt geraakt (fig. 10).

Ik verleng L tot een straal S . Die snijdt C even vaak of hij vanuit p_1 of p_2 is gezien. Dus worden p_1 en p_2 even vaak door C omlopen. Hetzelfde geldt bijvoorbeeld voor p_2 en p_3 ; ook die kan ik door een lijnstuk verbinden dat C niet treft, dus worden ze even vaak omlopen. Idem voor p_3 en p_4 , voor p_4 en p_5 . Ze worden dus allemaal even vaak door C omlopen.

Dus: *punten uit hetzelfde door C bepaalde vlakdeel, worden door C even vaak omlopen.*

Hoe is het nu met punten uit aangrenzende vlakdelen gesteld?

Laat p en q twee van dergelijke punten zijn. Trek de straal uit p die q bevat. Het aantal doorboringen van de straal, bekeken vanuit p en vanuit q , scheelt net 1: positief of negatief (fig. 11).

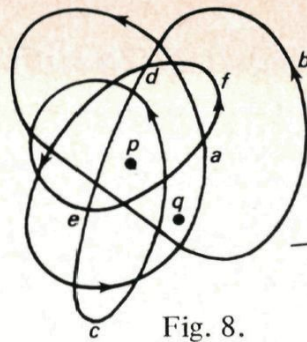


Fig. 8.

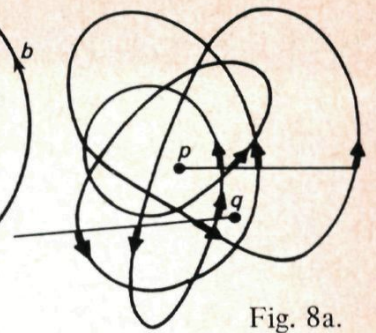


Fig. 8a.

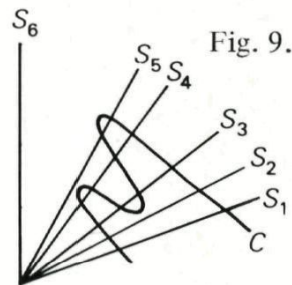


Fig. 9.

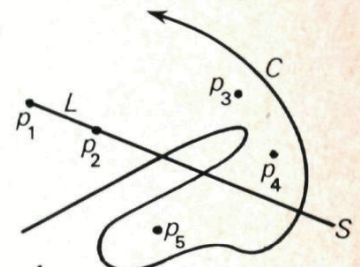


Fig. 10.

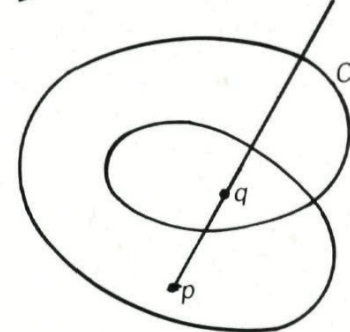


Fig. 11.

Dus: *de omlooptallen van punten uit naburige vlakdelen schelen ± 1 .* (Kijk ook naar de fig. 2 t.e.m. 5.)

Nu de bewering dat voor het kleuren van kaarten, door een kromme bepaald, twee kleuren toereikend zijn. Kleur de vlakdelen met punten die door C een even aantal keren omlopen worden, wit, die door C een oneven aantal keren omlopen worden, zwart. Elk gebied heeft dan één kleur. Grenzen twee gebieden aan elkaar, dan schelen de omlooptallen ± 1 . Heeft het ene gebied dus punten met een even omlooptal, dan heeft het andere punten met een oneven omlooptal, en omgekeerd. Aangrenzende gebieden zijn dus verschillend gekleurd.

Het is bewezen: *vlakverdelingen voortgebracht door gesloten krommen met een eindig aantal zelfoverkruisingen, kunnen met twee kleuren worden gekleurd.*

°° Hoe krom is een kromme?

Hoe scherp is de bocht?

Een cirkel kan een lijn raken, maar een cirkel kan ook een kromme raken. Wat gebeurt er eigenlijk bij raken?

In fig. 1 is een cirkel getekend en een middellijn AB . We verschuiven nu de lijn evenwijdig aan zichzelf, waardoor de snijpunten dicht bij elkaar komen. Er is een punt waar beide snijpunten samen gaan vallen. Dat is het raakpunt P . De snijlijn is dan in de gestippelde stand gekomen.

Een cirkel raakt een kromme

Als een willekeurige kromme en een lijn elkaar raken, of als twee krommen elkaar raken, gebeurt iets dergelijks. In fig. 2 is een parabool door $(0, 0)$ getekend en een cirkel, met de y -as als symmetrie-as, die de parabool in vier punten A, B, C en D snijdt.

We laten de cirkel nu zo ver omlaag gaan tot deze door de oorsprong gaat. Daarbij gaan de punten A en B steeds dicht naar elkaar toe en ten slotte vallen ze in de oorsprong samen.

Volgens onze norm van zojuist, raakt de cirkel nu de parabool. Dat neemt niet weg dat er toch nog steeds twee snijpunten (C en D) overblijven.

We kunnen het ook zo zeggen: twee krommen raken elkaar als in het betreffende raakpunt de raaklijnen aan beide krommen samenvallen. En dat klopt hier, want cirkel en parabool raken beide de x -as in de oorsprong en zodoende ook elkaar.

Vier samenvallende punten

Er zijn meer cirkels die volgens de gestelde definitie de parabool in de oorsprong raken.

Elke cirkel, gaande door de oorsprong en met middelpunt op de y -as, doet dat.

In fig. 3 is de parabool met vergelijking $y = x^2$ getekend en een aantal van dergelijke inwendig rakende cirkels. Een exemplaar van deze verzameling met middelpunt M en straal 2 snijdt de parabool nog

Fig. 1. Raaklijn als snijlijn met twee samenvallende snijpunten.

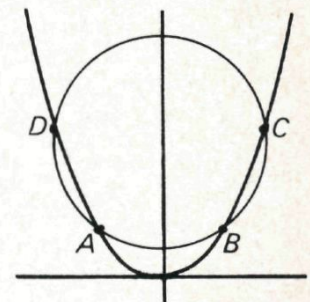
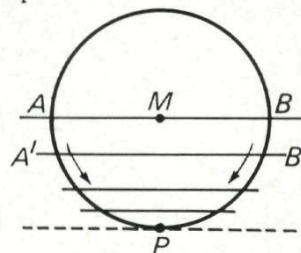


Fig. 2. Cirkel snijdt parabool.

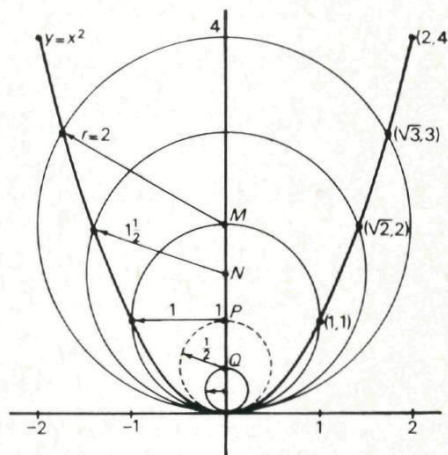


Fig. 3. Parabool met kromte-cirkel.

in de punten $(\sqrt{3}, 3)$ en $(-\sqrt{3}, 3)$. Een andere cirkel met middelpunt P heeft een kleinere straal, en wel 1. De coördinaten van de twee snijpunten zijn hier $(1, 1)$ en $(-1, 1)$.

Inmiddels zien we wel dat, hoe kleiner de straal wordt, des te dicht de beide nog aanwezige snijpunten in de richting van de oorsprong komen.

Zou er misschien een cirkel in de verzameling zijn, waarbij die beide snijpunten inderdaad in de oorsprong terecht zijn gekomen?

In dat geval zijn alle vier de snijpunten van fig. 2 in de oorsprong beland.

Dat wordt dan een soort super-raken!

De kromtestraal

We willen de straal van die bijzondere cirkel berekenen. Daartoe moeten we de vergelijking van zo'n willekeurige cirkel uit die verzameling opstellen en de snijpunten trachten te bepalen met de parabool. We moeten dan nog de straal van die cirkel zó bepalen dat van alle vier de snijpunten de x -coördinaat nul is.

Een cirkel met straal r , gaande door de oorsprong en met het middelpunt op de y -as, heeft als vergelijking:

$$(y - r)^2 + x^2 = r^2 \text{ of nader uitgewerkt: } y^2 - 2ry + x^2 = 0$$

Deze moeten we dan snijden met $y = x^2$.

Als we nu in de cirkelvergelijking voor y de waarde x^2 invullen, dan krijgen we:

$$x^4 - 2rx^2 + x^2 = 0 \text{ of } x^2(x^2 - 2r + 1) = 0$$

Deze vierdegraadsvergelijking levert in het algemeen vier snijpunten. Twee ervan vallen al samen met $x = 0$.

Immers, de cirkel raakt de parabool in de top.

De beide andere snijpunten volgen dan uit de vergelijking:

$$x^2 - 2r + 1 = 0 \text{ of } x^2 = 2r - 1.$$

Indien we nu hier $r = \frac{1}{2}$ kiezen, krijgen we nog tweemaal voor x de waarde 0. En hiermee is ons probleem opgelost.

De cirkel met straal $\frac{1}{2}$ heeft hier vier samenvallende punten in de top met de parabool gemeenschappelijk. Dat is een vorm van super-raken.

Deze cirkel valt 'over een breder interval' samen met de parabool, meer dan enig ander exemplaar van de verzameling. Bedoelde cirkel past zich meer dan enig andere aan de kromming van de parabool in de top aan. Deze cirkel volgt de kromming van de parabool daar het meest. We noemen die cirkel de kromtecirkel; de straal ervan heet de kromtestraal.

Nog kleinere cirkels

Wat doen cirkels met een straal kleiner dan $\frac{1}{2}$?

Wel, voor zulke waarden van r heeft $x^2 = 2r - 1$ geen oplossingen meer. Immers dan zou x^2 negatief worden.

Deze cirkels liggen geheel binnen de parabool en hebben er slechts twee samenvallende punten mee gemeenschappelijk. In fig. 3 hebben we zo'n cirkel (met straal $\frac{1}{4}$) getekend.

Kromming bij een ellips

We gaan de kromtestraal nog eens proberen te bepalen bij een andere kromme. We kiezen daarvoor een ellips.

In fig. 4a staat een ellips met lange as 4 en korte as 2.

De vergelijking van deze ellips is:

$$4x^2 + y^2 - 4y = 0.$$

Ga zelf maar na dat de grafiek zo klopt.

De ellips gaat door de oorsprong. We willen ook hier weer de kromtecirkel berekenen in die oorsprong.

Daartoe moeten we weer snijpunten zoeken van ellips en cirkel. We gaan uit van de cirkelverzameling van fig. 3. Eén ervan snijdt de ellips nog in A en B . We moeten de cirkel zo ver verkleinen dat de twee overige snijpunten A en B in de oorsprong samenvallen.

Ze volgen uit de vergelijkingen:

$$\text{ellips } 4x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$\text{cirkel } y^2 - 2ry + x^2 = 0$$

Vul nu in de eerste vergelijking voor x^2 in: $x^2 = 2ry - y^2$.

Dat geeft:

$$4(2ry - y^2) + y^2 - 4y = 0$$

of:

$$3y^2 - 8ry + 4y = 0$$

of:

$$3y^2 = 4y(1 - 2r)$$

We vinden hieruit direct een oplossing $y = 0$, want elke cirkel uit de verzameling raakt de ellips in $(0, 0)$.

In het geval dat we $r = \frac{1}{2}$ nemen, wordt ook de y -coördinaat van beide andere snijpunten A en B nul!

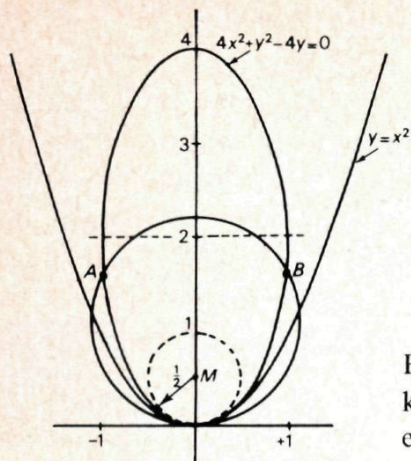


Fig. 4a. Kleinste kromtestraal bij een ellips.

De kromtecirkel heeft hier toevalligerwijs weer de straal $\frac{1}{2}$.

In fig. 4a hebben we die cirkel ingetekend. Hij volgt de kromming van de ellips op het einde van de lange as volledig.

Het zou betekenen dat de parabool van fig. 3 de ellips daar ook perfect omsluit. De parabool raakt de ellips uitwendig. Tevens hebben we hiermee de kleinste kromtestraal bij deze ellips gevonden.

De punten met de kleinste kromtestraal liggen bij een ellips op de einden van de lange as. Daar is de ellips het sterkst gekromd.

Op de einden van de korte as daarentegen is de ellips het minst gekromd. De kromtestraal is daar het grootst.

In fig. 4b hebben we ook die kromtestraal berekend. Daartoe hebben we eerst de ellips gedraaid, zodat het bedoelde punt weer in (0, 0) komt. Dat geeft een eenvoudiger rekenwerk.

De vergelijking van diezelfde ellips wordt nu:

$$x^2 + 4y^2 - 8y = 0$$

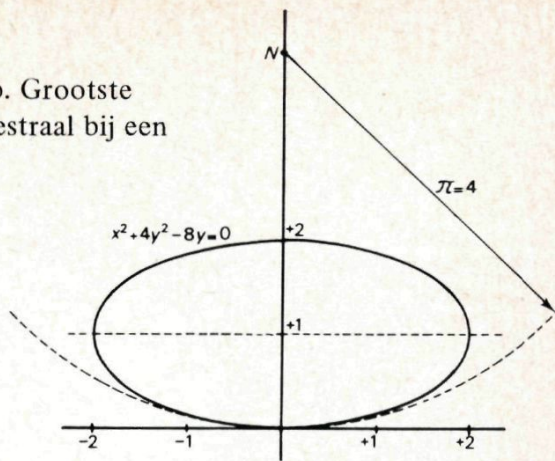
Ga zelf maar na dat we nu voor de kromtestraal 4 vinden.

Kromtestraal en kromming

De kromtestraal van deze ellips verloopt dus van een kleinste waarde $\frac{1}{2}$ tot een grootste waarde 4.

Omgekeerd is de kromming het grootst bij de einden van de lange as en het kleinst bij de einden van de korte as. In

Fig. 4b. Grootste kromtestraal bij een ellips.



de wiskunde wordt de kromming in een punt gedefinieerd als het omgekeerde van de kromtestraal, dus als $\frac{1}{r}$. De grootste kromming is hier 2 en de kleinste $\frac{1}{4}$. Een rechte lijn heeft een kromtestraal oneindig en een kromming nul!

De kromming van de bocht in een weg

Ook bij een bocht in een weg kunnen we spreken over de straal. Een aansluiting van een recht stuk op een kwart cirkel is een slechte wegconstructie.

De kromming verspringt dan plotseling van nul naar een zekere positieve waarde. Als je met een auto zo'n weg af moet rijden, zou je bij het ingaan van de bocht een forse ruk aan het stuur moeten geven.

Als zo'n weg toch zo aangelegd zou zijn, zullen we de neiging vertonen om de

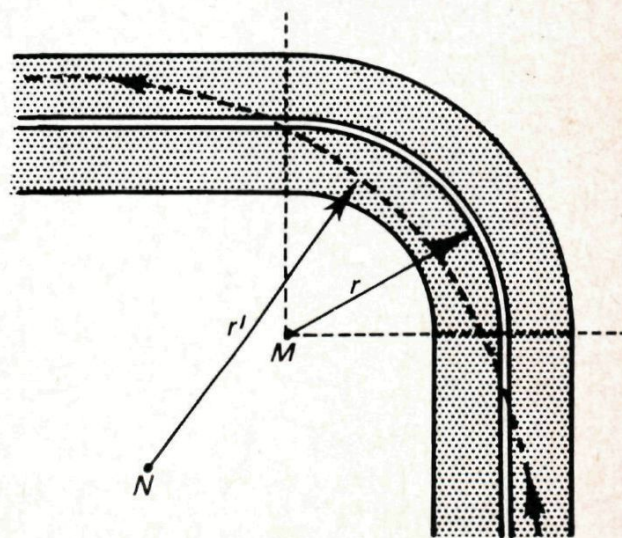


Fig. 5. Het afsnijden van een bocht.

bocht af te snijden en daarbij de kromming continu te laten verlopen (fig. 5). De kromming wordt dan het grootst midden in de bocht. We draaien constant aan het stuur tot halverwege en gaan dan weer terugdraaien.

Tevens proberen we op die manier de kromtestraal kunstmatig te vergroten (r' is groter dan r) en daarmee de kromming van de bocht te verkleinen.

Overigens, de witte streep over het midden van de weg waarschuwt ons dat het wiskundig allemaal wel interessant is, maar uit verkeersoogpunt af te keuren.

De punt van de naald

In fig. 6 staat de foto van een naald in een stereogroef van een langspeelplaat. Met behulp van een elektronenmicroscop is de naald een aantal duizenden keren vergroot. Van de 'punt' van de naald is zo niet veel meer overgebleven. Het lijkt meer een parabool dan een punt. Een punt bestaat ook niet.

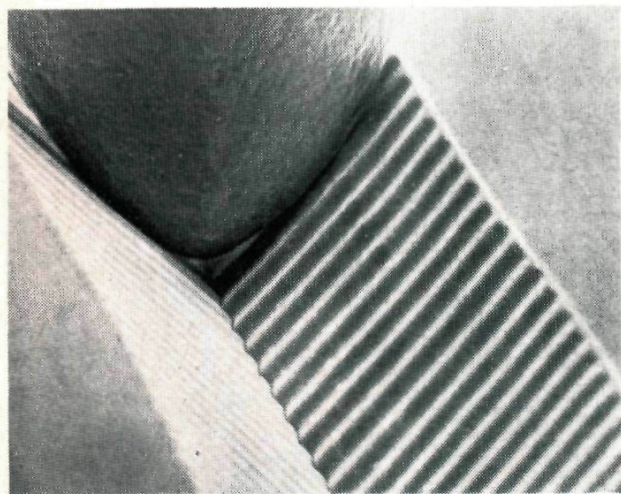


Fig. 6. De punt van de naald.

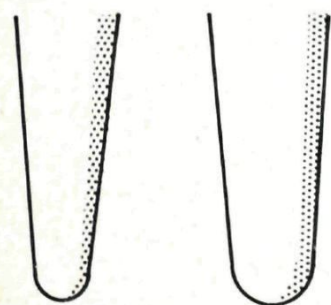


Fig. 7. Scherp – stomp: een verschil in straal.

In fig. 7 staan een scherpe naald en een stompe naald getekend. Het verschil is alleen dat bij een scherpe punt de kromtestraal klein is en dus de kromming groot en bij een stompe naald net andersom.

Als we dus een puntje aan ons potlood slijpen, verkleinen we alleen maar de kromtestraal . . . maar niet tot nul.

Hoe scherp ook, iets met een punt bestaat niet.

°°° *Drie samenvallende punten*

Alleen bij de toppen van parabool en elips wordt de kromtecirkel gevonden door vier snijpunten samen te laten vallen. In de overige punten blijkt de kromtecirkel slechts drie samenvallende punten te hebben. We willen dat nog met een voorbeeld toelichten.

In fig. 8 hebben we opnieuw de parabool $y = x^2$ getekend, maar nu met de top iets verschoven naar $(1, -1)$.

De vergelijking wordt nu: $y = x^2 - 2x$.

We willen weer de kromtecirkel in 0 bepalen.

Daartoe moeten we eerst de raaklijn in dat punt aan de parabool bepalen. Dat blijkt dan $y = -2x$ te zijn.

Het middelpunt van de kromtecirkel komt dan op de normaal, zijnde $y = \frac{1}{2}x$. Een punt op deze lijn kunnen we dan coördinaten geven $(2a, a)$. Een cirkel, gaande door 0, met middelpunt $(2a, a)$ heeft dan als vergelijking:

$$(x - 2a)^2 + (y - a)^2 = r^2$$

of:

$$x^2 + y^2 - 4ax - 2ay = 0$$

De snijpunten van cirkel en parabool vinden we door in de cirkelvergelijking voor y in te vullen: $x^2 - 2x$.

$$x^2 + (x^2 - 2x)^2 - 4ax - 2a(x^2 - 2x) = 0.$$

Uitgewerkt geeft dit:

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2ax^2 = 0$$

of:

$$x^2(x^2 - 4x) = x^2(2a - 5)$$

Hieruit volgen direct, zoals te verwachten was, twee oplossingen $x = 0$. Immers, de

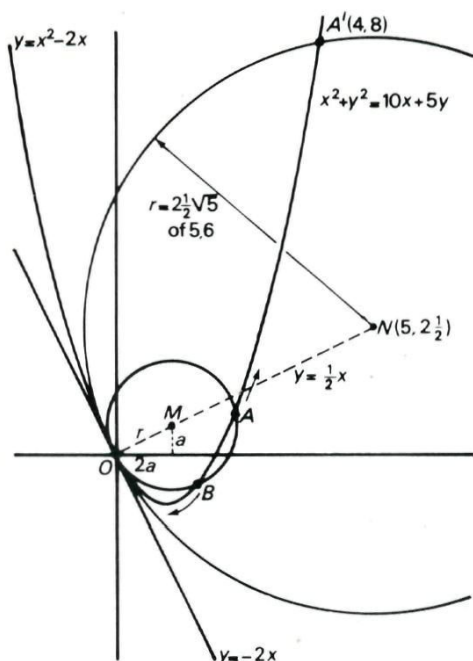


Fig. 8. Drie samenvallende punten.

cirkel raakt de parabool. Uit $x^2 - 4x = 2a - 5$ volgt dan de ligging van eventueel twee volgende snijpunten A en B .

Voor a kleiner dan $\frac{1}{2}$ heeft de vierkantsvergelijking geen oplossingen meer. De cirkel is dan te klein en valt binnen de parabool. Voor $a = \frac{1}{2}$ raakt de cirkel de parabool ook aan de andere kant. Nemen we a , uitgaande van de waarde $\frac{1}{2}$, steeds groter, dan zal punt A langs de rechte tak steeds hoger klimmen, maar punt B gaat de andere kant, rondom de top, op weg naar 0. Als we stellen: $2a - 5 = 0$ of $a = 2\frac{1}{2}$, dan is dit punt B precies in 0. Er zijn nu drie samenvallende snijpunten. De kromtecirkel N gaat nu door de kromme heen. Het vierde snijpunt blijft en komt uit in $(4, 8)$.

Bij nog grotere waarde van a passeert B het raakpunt en zijn er weer twee echte snijpunten.

Omdat $r = a\sqrt{5}$ vinden we voor de kromtestraal in 0 de waarde $2\frac{1}{2}\sqrt{5}$ of ongeveer 5,6.

Steeds hoger gaande op de parabool stijgt de straal van de kromtecirkel vrij snel.



Denkertje

3. Bereken de kromtestraal in de top van de hyperbool: $(y + 1)^2 - x^2 = 1$.

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

- < W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn.
- ⚡ Ir. H. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginniken.
- ✓ G.A. Vonk, Wagnerlaan 18, 1411 JE Naarden.
- ∫ Dr. J. van de Craats, Postbus 9512, 2300 RA Leiden.

Redactiesecretariaat

- ★ Bruno Ernst, Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht.
Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

W. Ganzevoort, M.C. van Hoorn, H. Pot, W. Pijls, D.K. Wielenga.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,- per jaargang. Voor anderen f 11,50.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

Inhoud

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| ★ Parabolen uit cirkels en rechten 1 | ∫ Hoe deel je een hoek in drieën? 12 |
| ⚡ Het punt van Torricelli 2 | ⚡ De wig van Wallis 14 |
| ∫ Pythagoras Olympiade 6 | ⚡ Met ballen en eieren 16 |
| Zomaar een driehoek, dus een | Kleurenprobleem in zwart en wit 19 |
| stomphoekige 7 | ⚡ Hoe krom is een kromme? 21 |

