

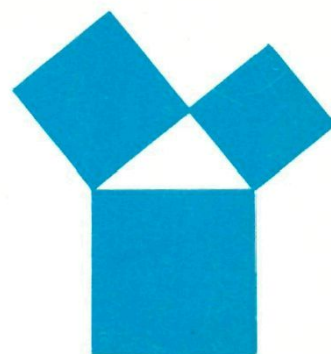


2

jaargang 19 / november 1979

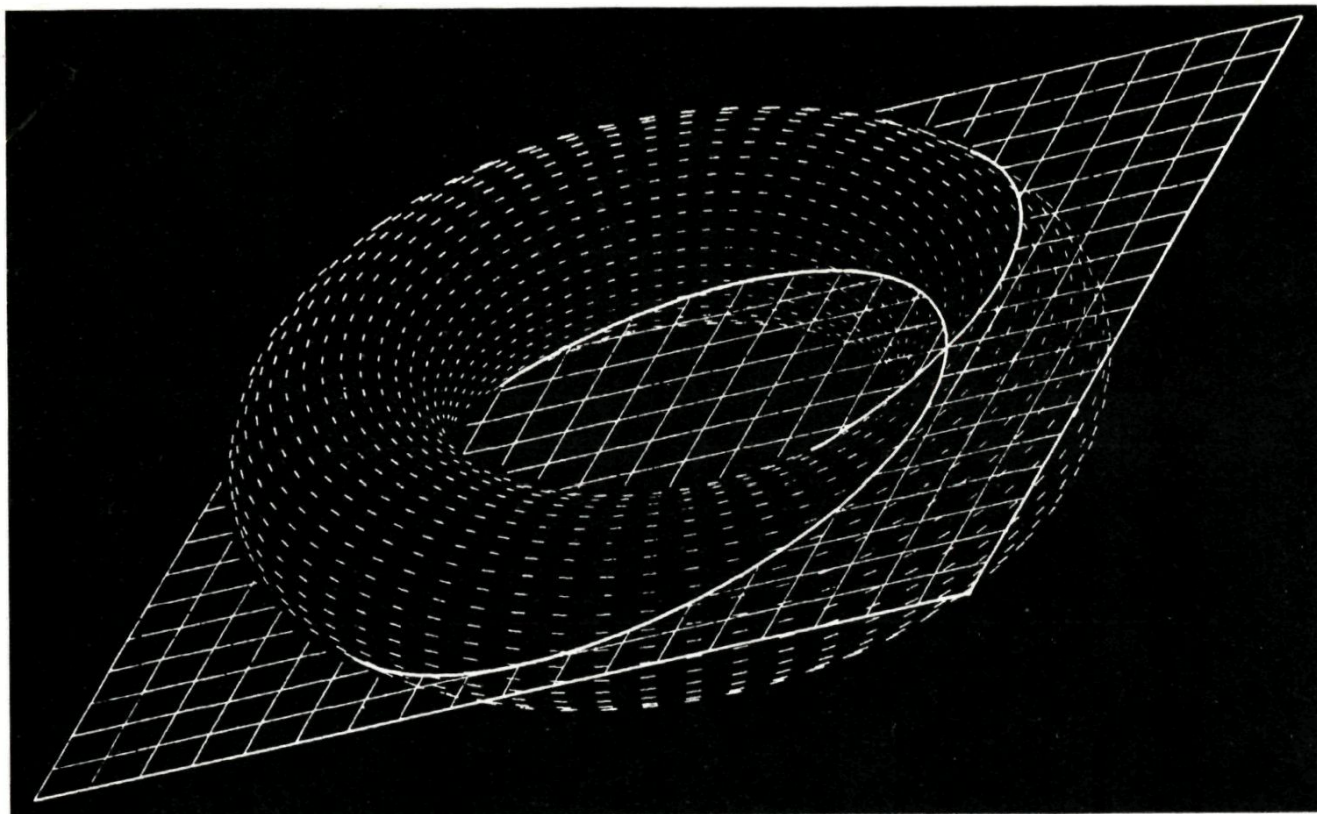
wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Torus met dubbel raakvlak. De snijfiguur bestaat uit twee cirkels (ontwerp R. Brand). De Franse astronoom Villarceau heeft in de vorige eeuw als eerste het bestaan van deze cirkels ontdekt. Zie het artikel 'Cirkels op een torus'.

BIJ DE FOTO OP DE OMSLAG

Een *astrolabium*, vervaardigd door Hartman in 1525, in het bezit van het Universiteitsmuseum, Trans 8 te Utrecht.

Een astrolabium is een fascinerend meet- en rekeninstrument, dat in de zesde eeuw werd uitgevonden. Men kan er de hoogte van de zon of van heldere sterren mee meten en door het verdraaien van de schijf de tijd aflezen. Men kan de stand van de hemellichamen op een bepaald tijdstip voorspellen, de hoogte van een gebouw bepalen en vele andere dingen meer.

In talrijke musea worden deze astrolabia als grote kostbaarheden bewaard en tentoongesteld. Zie verder het artikel 'De stereografische projectie'.

°°Cirkels op een torus

O. Bottema

Als de cirkel c met middelpunt A en straal r een volledige omwenteling verricht om de in zijn vlak gelegen as OZ ($OA = R$, $R > r$), (fig. 1), dan heeft hij een oppervlak T voortgebracht dat de gedaante heeft van een opgepompte binnenband of een reddingsboei en dat de naam ringoppervlak of *torus* draagt. Zou $R = 0$ zijn, dan ontstaat een bol.

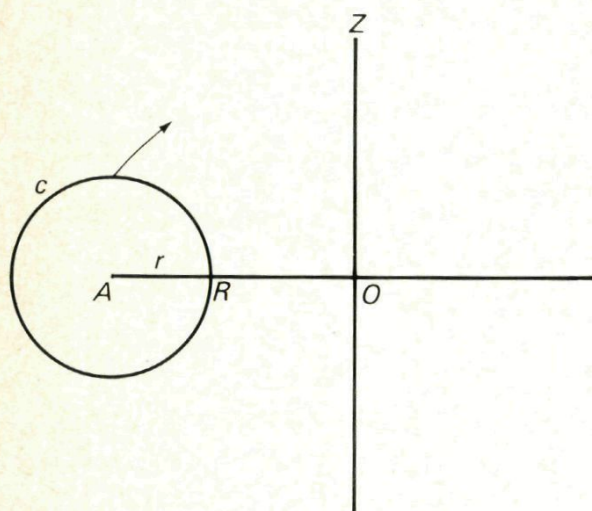


Fig. 1. Zo ontstaat een torus.

Meridianen en breedtecirkels op de torus

Torus en bol hebben wel enige kenmerken gemeen. Zo kan men ook op de torus van *meridianen* spreken (fig. 2), de doorsneden met vlakken door de as, cirkels alle met straal r ; in elk vlak liggen er twee. *Breedtecirkels* zou men de doorsneden kunnen noemen met vlakken loodrecht op de as, evenzeer in elk vlak twee, concentrisch en met wisselende straal. De torus heeft een buiten- en een binnen-equator, met stralen $R + r$ en $R - r$, samen de doorsnede met het vlak OXY . De bovenste en de onderste breedtecirkel, beide met straal R , komen min of meer in de plaats van de polen op de bol.

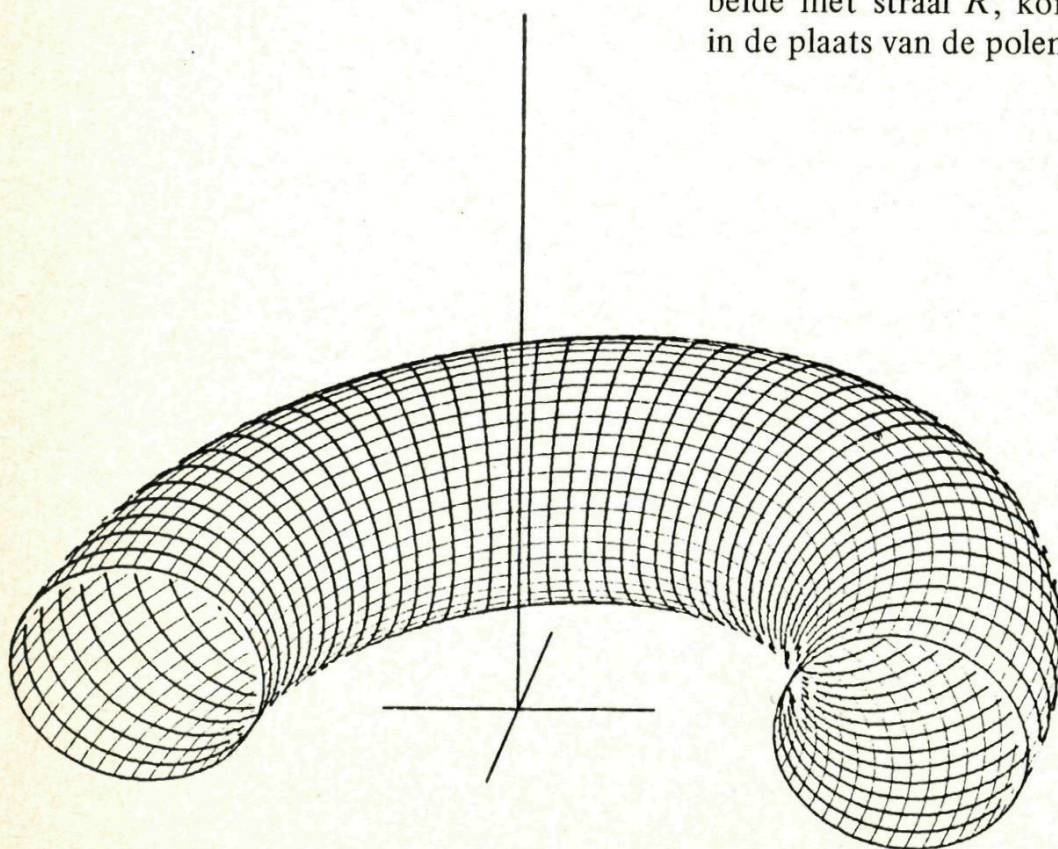


Fig. 2. Scheve parallelprojectie van een halve torus met meridianen en breedtecirkels. Door de projectiemethode verschijnen deze cirkels als ellipsen. (Ontwerp R. Brand).

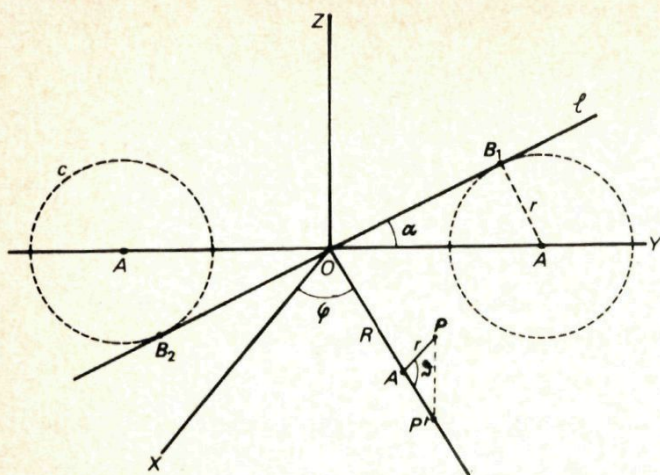


Fig. 3.

Meridianen en breedtecirkels kunnen gebruikt worden voor *plaatsbepaling* op de torus op overeenkomstige wijze als dit op aarde met lengte en breedte gebeurt. Door elk punt op T gaat immers één meridiaan en één breedtecirkel. Zo kan de plaats van P in fig. 3 bepaald worden door de hoek φ (de 'lengte') tussen het meridiaanvlak door P en het vlak XOZ (van de 'nulmeridiaan'). Als φ een hoek is tussen 0° en 360° bepaalt hij ondubbelzinnig de meridiaancirkel. Op die cirkel wordt P nader bepaald door de hoek ϑ (de 'breedte'), die AP met het verlengde van OA maakt. Daarbij loopt ϑ eveneens van 0° tot 360° . Alle punten van een meridiaan hebben gelijke lengte, alle punten op een breedtecirkel gelijke breedte. Op de buitenequator is de breedte nul, op de binnenequator is zij 180° .

Een *bol* wordt door elk snijvlak volgens een cirkel gesneden. Op een torus is dat ten duidelijkste niet zo; een willekeurige doorsnede is een heel wat ingewikkelder figuur.

De cirkels van Villarceau

Een der merkwaardigste eigenschappen van een torus is nu dat er behalve meridianen en breedtecirkels nog oneindig veel andere cirkels op liggen. Wij zullen dat in wat volgt trachten te bewijzen.

Wij trekken in fig. 3 een inwendige gemeenschappelijke raaklijn l van de beide

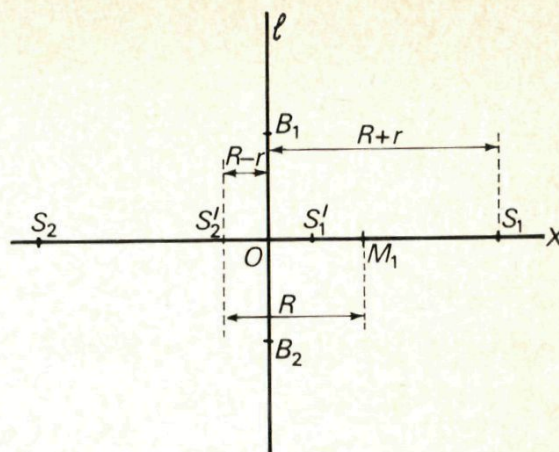


Fig. 4. $OM_1 = R - (R - r) = r$.

meridianen in het YOZ -vlak en onderzoeken de doorsnede van T met het 'dubbel-raakvlak' U door l en OX , dus door l loodrecht op het vlak van de tekening. Het lijkt niet eenvoudig om door aanschouwing een idee te krijgen van de gedaante van die doorsnede (zie binnenzijde van de omslag). Enige punten van de doorsnede zijn dadelijk aan te wijzen (fig. 4), die op l , namelijk de raakpunten B_1 en B_2 , en die op OX , de snijpunten S_1 , S_2 met de buitenequator en S'_1 , S'_2 met de binnenequator. Wij beweren nu dat de vier punten B_1 , B_2 , S_1 en S'_2 op een cirkel liggen. Van deze cirkel, die wij C_1 noemen, moet het middelpunt M_1 het midden van $S_1 S'_2$ zijn. Daar $OS_1 = R + r$, $OS'_2 = R - r$, is de middellijn $S'_2 S_1 = 2R$ en dus de straal gelijk aan R . Voorts is $OM_1 = R - (R - r) = r$. Zij nu (fig. 3) α de hoek van l met OY , dan is $OB_1 (= OB_2) = R \cos \alpha$ en verder $OM_1 = r = R \sin \alpha$. Daaruit volgt met Pythagoras dat $M_1 B_1 = M_1 B_2 = R$, wat te bewijzen was. Een cirkel C_2 gaat door B_1 , B_2 , S_2 en S'_1 .

Villarceau, een Frans astronoom uit de vorige eeuw, bewees dat *alle* punten van zo'n doorsnede op een cirkel liggen.

Hier volgt een eenvoudig bewijs dat met enig doorzettingsvermogen (meerekenen!) goed te begrijpen is.

°°° Het bewijs

Om aan te tonen dat *elk* punt van de doorsnede van het vlak U met de torus op C_1 of op C_2 ligt, gaan wij als volgt te werk. In fig. 1 hebben wij al een recht-hoekig coördinatenstelsel $OXYZ$ aange-bracht; elk punt van de ruimte heeft drie coördinaten, x, y, z . Laat men uit het punt $P(\varphi, \vartheta)$ van de torus de loodlijn PP' neer op OA , dan is $PP' = r \sin \vartheta$ en $OP' = R + r \cos \vartheta$. De coördinaten van P zijn dus

$$\begin{aligned} x &= (R + r \cos \vartheta) \cos \varphi, \\ y &= (R + r \cos \vartheta) \sin \varphi, \\ z &= r \sin \vartheta, \end{aligned}$$

of, daar $r = R \sin \alpha$,

$$\begin{aligned} x &= R(1 + \sin \alpha \cos \vartheta) \cos \varphi, \\ y &= R(1 + \sin \alpha \cos \vartheta) \sin \varphi, \\ z &= R \sin \alpha \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (1)$$

Voor de punten van l en daarmee voor alle punten van U geldt $z = y \tan \alpha$. Daaruit volgt dat de punten P van onze doorsnede voldoen aan

$$\sin \varphi = \frac{\cos \alpha \sin \vartheta}{1 + \sin \alpha \cos \vartheta}. \quad (2)$$

Daaruit volgt na enige herleiding, die wij de lezer toevertrouwen

$$\cos \varphi = \pm \frac{\sin \alpha + \cos \vartheta}{1 + \sin \alpha \cos \vartheta}. \quad (3)$$

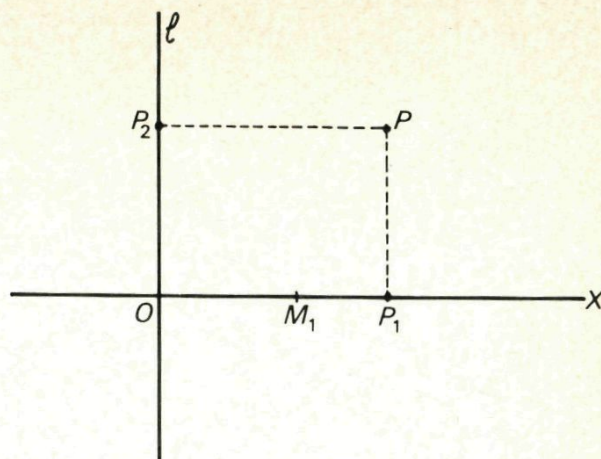


Fig. 5.

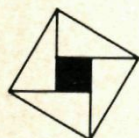
Voor (1) krijgen wij derhalve

$$\begin{aligned} x &= \pm R(\sin \alpha + \cos \vartheta), \\ y &= R \cos \alpha \sin \vartheta, \\ z &= R \sin \alpha \sin \vartheta, \end{aligned} \quad (4)$$

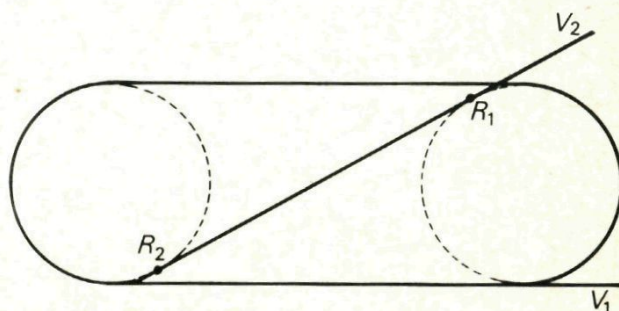
geldend voor elk punt P van de doorsnede. In het vlak U hebben wij dus (fig. 5), als bij x het plusteken geldt, $PP_2 = R(\sin \alpha + \cos \vartheta)$, waaruit wegens $OM_1 = r = R \sin \alpha$ volgt $M_1 P_1 = R \cos \vartheta$. Verder is $PP_1^2 = y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \vartheta$ en dus $M_1 P^2 = R^2$; m.a.w. P ligt op C_1 . Geldt bij x het minteken dan ligt P op C_2 . De doorsnede van de torus met het vlak U bestaat dus uit twee cirkels, beide met straal R en beide gaande door de raakpunten.

De stelling geldt uiteraard voor elk dubbelraakvlak. Op een torus liggen dus behalve de meridianen en de breedtecirkels nog oneindig veel andere cirkels.

Denkertje



1. Gegeven is het 'zijaanzicht' van een torus liggend op een vlak V_1 . Vlak V_2 raakt de torus in R_1 en R_2 . Teken zo nauwkeurig mogelijk het 'bovenaanzicht' van de torus met de twee Villarceau-cirkels.



°Een schoonheidsprijs voor een stelling?

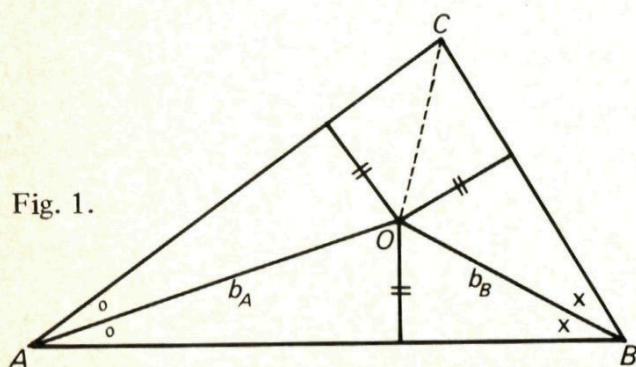
Als een wiskundige enthousiast wordt over zijn werk, zul je hem vaak horen spreken over 'mooie resultaten', 'mooie methodes', 'mooie stellingen'. Een buitenstaander zal dit waarschijnlijk verbazen. Hij wil best accepteren dat wiskunde *nuttig* is, hij weet soms uit ervaring dat wiskunde dikwijls *moeilijk* is, hij moet constateren dat sommige mensen wiskunde *leuk* vinden, maar kan wiskunde ook nog *mooi* zijn? Toch is *mooi* het woord dat wiskundigen zelf het meest passend vinden bij de beschrijving van de gedeeltes van hun vak die hun het meest dierbaar zijn.

Wat de een mooi vindt, laat de ander onverschillig, en ook binnen de wiskundige wereld heeft niet iedereen dezelfde smaak. Als er echter een soort 'schoonheidswedstrijd' voor stellingen gehouden zou worden, zou de stelling die in dit verhaal beschreven wordt vrijwel zeker in de prijzen vallen. Ik heb geen zin om te filosoferen over wat nu eigenlijk schoonheid is in de wiskunde, of te verklaren waarom deze stelling nu wel zo mooi is. Je zult zien dat in de beschrijving zelf de meest overtuigende argumenten besloten liggen.

Bissectrices

Een lijn die een hoek verdeelt in twee gelijke delen heet een *bissectrice*. Elk punt er op ligt even ver af van het ene als van het andere been, want vouw je het papier dubbel langs zo'n bissectrice, dan vallen de benen van de hoek op elkaar. Trek je binnen een driehoek ABC de bissectrices b_A van hoek A en b_B van hoek B , dan is de afstand van het snijpunt O tot de zijde AB zowel gelijk aan de afstand tot BC (want O ligt op b_B) als aan de afstand tot AC (want O ligt op b_A) (fig. 1). O ligt dus ook even ver af van AC als van BC , en dan kan het niet anders of O moet ook liggen op de bissectrice b_C van hoek C . De drie bissectrices binnen een driehoek gaan dus door één punt.

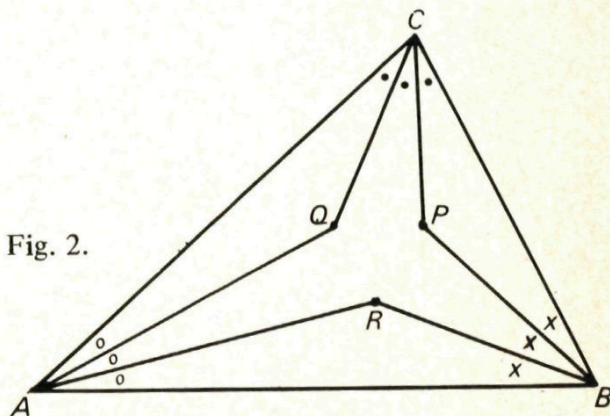
Fig. 1.



Trisectrices

Je hebt zelf natuurlijk wel eens de bissectrices van een driehoek getekend. Nu moet je echter de hoeken van een driehoek eens in *drie* gelijke delen verdelen. Bepaal daarbij ook de drie in fig. 2 aangegeven snijpunten P , Q en R van de zes *trisectrices* (je moet de snijpunten hebben die het dichtst bij de zijden liggen). De driehoek die jij op papier zet hoeft er helemaal niet net zo uit te zien als de mijne: je kunt hem tekenen zoals je wilt, scherphoekig, rechthoekig, stomphoekig, het doet er niet toe. Meet nu de zijden van driehoek PQR op. Als je nauwkeurig hebt gewerkt, zul je constateren dat PQR een *gelijkzijdige* driehoek is, *hoe je driehoek ABC ook hebt getekend!*

Fig. 2.



Frank Morley

Rond 1900 bestudeerde de Amerikaanse wiskundige *Frank Morley* bepaalde soorten vlakke krommen. Bij deze onderzoeken ontdekte hij als eerste deze wonderlijke eigenschap van trisectrices. Al snel ging het resultaat als de 'stelling van Morley' de wiskundige wereld rond, en velen zochten naar eenvoudige bewijzen ervan, want Morley zelf had hem gevonden als een klein nevenresultaatje van tamelijk gecompliceerde beschouwingen. In de afgelopen 75 jaar zijn er tientallen manieren ontdekt om de stelling te bewijzen en de stroom van publikaties erover is nog lang niet opgedroogd. Het zo verrassende resultaat dat elke driehoek op deze manier blijkbaar een *gelijkzijdige* driehoek met zich meedraagt, blijft iedere wiskundige met belangstelling voor meetkunde fascineren.

°° Hoe zit Morley's figuur in elkaar?

Het bewijs dat je hieronder van de stelling van Morley zult vinden is voor iedereen te volgen die wel eens iets met lijnspiegelingen heeft gedaan en die weet dat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan 180° . Voordat we er aan beginnen, zullen we eerst de figuur van een driehoek ABC met zijn zes trisectrices eens wat nader bekijken. Het is handig om de grootte van de hoeken op 3α , 3β en 3γ te stellen, zodat de trisectrices ze in stukken van resp. α , β en γ verdelen. Omdat $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$ is, geldt $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. Laat M het snijpunt zijn van de trisectrices AQ en BP (fig. 3).

We denken ons even alles buiten driehoek AMB weg. R is het snijpunt van twee bissectrices van driehoek AMB , dus MR moet ook een bissectrice van hoek M zijn (fig. 4). De grootte van hoek M is $180 - 2\alpha - 2\beta = 180 - 2(60 - \gamma) = 60 + 2\gamma$, dus de hoeken bij M zijn allebei $30 + \gamma$. We denken nog meer weg en kijken alleen naar hoek M en zijn bissectrice MR (fig. 5). Op de benen liggen ergens de punten

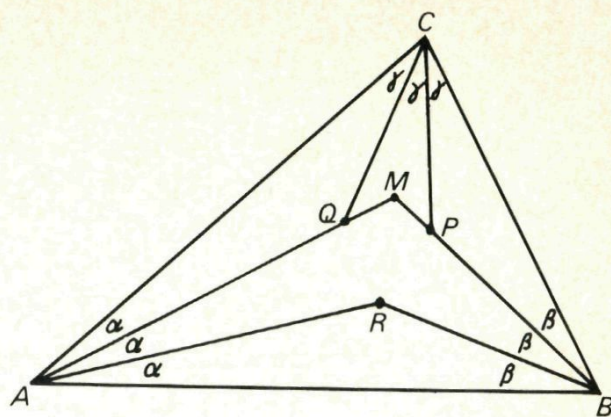


Fig. 3.

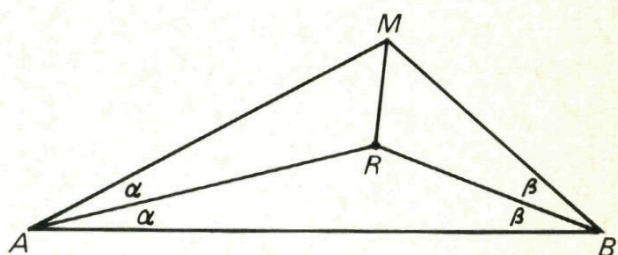


Fig. 4.

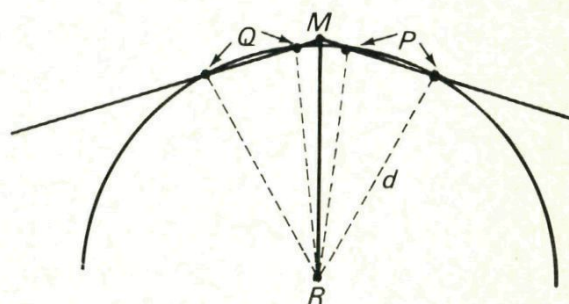


Fig. 5.

P en Q en als Morley's stelling waar is, moet driehoek PQR gelijkzijdig zijn. In het bijzonder moet dus gelden $PR = QR$. Een cirkel met middelpunt R snijdt elk been in hoogstens twee punten. De snijpunten op het ene been zijn de spiegelbeelden in MR van de snijpunten op het andere been. Als dus voor zekere d geldt $d = PR = QR$, zijn er voor P en Q elk twee mogelijke posities op de benen van de hoek M . Nu geeft een beetje experimenteren ons al snel het vermoeden dat P en Q in alle gevallen *symmetrisch* liggen t.o.v. MR . Dat zou mooi zijn, want dan is MR niet alleen de bissectrice van hoek M , maar ook van hoek R binnen driehoek

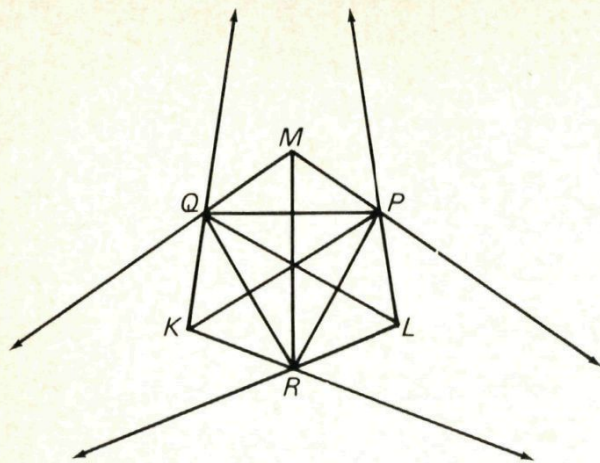


Fig. 6.

PQR . We maken ons voorlopig niet druk over een bewijs van dit vermoeden, maar redeneren verder. M zou dus moeten liggen op de (verlengde) bissectrice van hoek R in de (naar verwachting) gelijkzijdige driehoek PQR , en wel zo, dat $\angle PMR = \angle QMR = 30 + \gamma$. De snijpunten K en L van de overeenkomstige andere paren trisectrices liggen dan natuurlijk op de andere verlengde bissectrices van PQR , en de bijbehorende hoeken zullen $30 + \alpha$ en $30 + \beta$ zijn (fig. 6).

Als driehoek ABC gegeven is, liggen de trisectrices en de snijpunten P , Q en R volledig vast. Als onze veronderstellingen van hierboven juist zijn, kun je omgekeerd blijkbaar ook A , B en C terugvinden als je uit zou kunnen gaan van de gelijkzijdige driehoek PQR , en α , β en γ kent. Op dit idee berust het bewijs dat we nu zullen geven. Alle veronderstellingen laten we weer vallen en we beginnen met een schone lei.

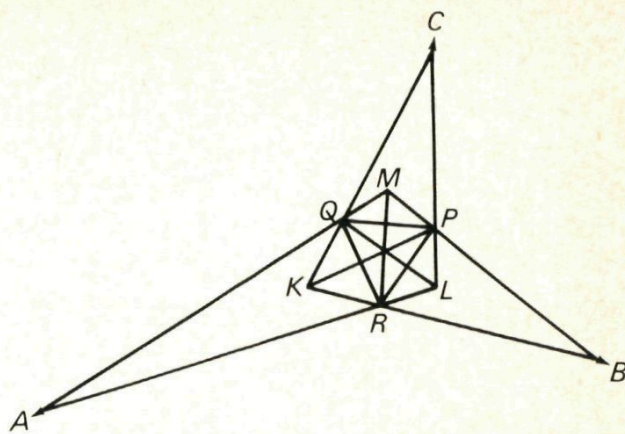


Fig. 7.

Het bewijs van de stelling

Laat gegeven zijn een willekeurige driehoek met hoeken 3α , 3β en 3γ . Om in het bewijs de gewone letters te kunnen blijven gebruiken, noemen we de hoekpunten A , B en C en de trisectricesnijpunten uit fig. 2 noemen we ook P , Q en R . We tekenen op een apart blaadje een willekeurige gelijkzijdige driehoek PQR , en bepalen op de verlengde binnenbissectrices punten K , L en M zo, dat

$$\angle QKP = \angle RKP = 30 + \alpha,$$

$$\angle RLO = \angle PLQ = 30 + \beta,$$

$$\angle PMR = \angle QMR = 30 + \gamma \text{ (fig. 7).}$$

Noem $A = LR \times MQ$, $B = MP \times KR$ en $C = KQ \times LP$. Er geldt $\angle PLQ = 30 + \beta$, $\angle LQC = 180 - \angle LQR - \angle RQK = 180 - 30 - (90 - \angle QKP) = 60 + (30 + \alpha) = 90 + \alpha$, dus $\angle C = 180 - \angle PLQ - \angle LQC = 180 - (30 + \beta) - (90 + \alpha) = 60 - \beta - \alpha = \gamma$. Evenzo is $\angle A = \alpha$ en $\angle B = \beta$.

Spiegelen van de lijn AM in de lijn AR

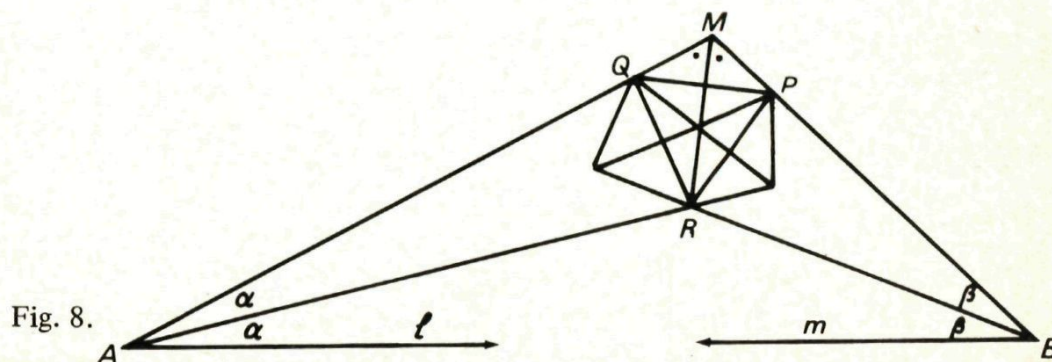


Fig. 8.

geeft een lijn l , en spiegelen van BM in BR geeft een lijn m . Hierbij worden de hoeken bij A en B verdubbeld (fig. 8). l en m zijn *evenwijdig*, want de som van de hoeken bij A , M en B is $2\alpha + (60 + 2\gamma) + 2\beta = 180$. R ligt op een bissectrice van hoek M , dus R ligt even ver van AM als van BM . R ligt bovendien op de beide spiegelassen AR en BR , en dus ook even ver van de evenwijdige lijnen l en m . Dat kan alleen als ze samenvallen, dus $l = m = BC$. Op dezelfde wijze toon je aan dat de zijden AC en BC een derde hoek α bij A , een derde hoek β bij B en twee extra hoeken γ bij C insluiten. Alles wat we nu nog moeten doen is de gehele figuur tot de juiste grootte verkleinen of vergroten en hem daarna netjes over de oorspronkelijke driehoek $\overline{ABC}$ heenleggen. Alles past dan precies op elkaar en driehoek $\overline{PQR}$ is dus ook gelijkzijdig.

Nu zelf aan het werk

Je hebt hierboven een bewijs gezien van een van de mooiste en meest verrassende stellingen uit de vlakke meetkunde. Wat we hebben bewezen maakt echter deel uit van een veel groter geheel en het is de bedoeling dat jullie die uitbreiding zelf gaan ontdekken! We zullen je wel een eindje op weg helpen.

De hoeken van een driehoek hebben niet alleen *binnentrisectrices*, maar ook nog *buitentrisectrices*, en wel twee verschillende soorten. Bij hoek A bijv. zijn er twee lijnen die de *nevenhoek* van $180 - 3\alpha$ in drie gelijke delen verdelen van elk $60 - \alpha$,

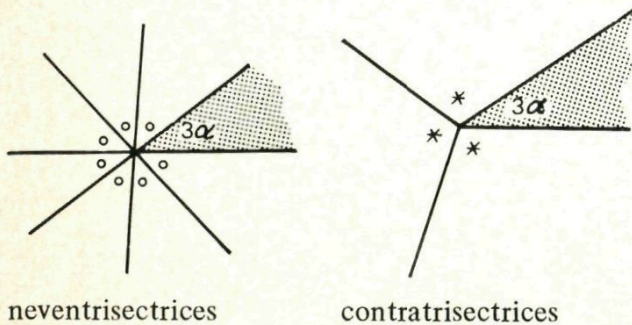


Fig. 9.

en ook twee lijnen die de *inspringende* hoek van $360 - 3\alpha$ in drie gelijke delen van $120 - \alpha$ verdelen. De eerste soort zullen we *neventrisectrices* noemen en de tweede soort *contratrisectrices* (fig. 9).

Als je op de juiste wijze drie van de snijpunten van de neventrisectrices neemt, krijg je weer een gelijkzijdige driehoek, en hetzelfde geldt voor de contratrisectrices. Maar ook als je op zekere manier *verschillende* soorten trisectrices combineert, kunnen er gelijkzijdige driehoeken ontstaan. We vragen jullie om dit uit te zoeken en ons de resultaten van je werk te sturen. De volgende vragen kunnen je hierbij tot leidraad dienen:

1. Welke snijpunten van welke trisectrices geven gelijkzijdige driehoeken?
2. Hoeveel van zulke driehoeken zijn er?
3. Kun je in alle gevallen ook bewijzen dat al die driehoeken gelijkzijdig zijn?
4. Hoe liggen al die gelijkzijdige driehoeken ten opzichte van elkaar en ten opzichte van de oorspronkelijke driehoek?
5. Als je bij 4 iets bijzonders hebt ontdekt, kun je je vermoeden dan ook bewijzen?

Je kunt je onderzoeken helemaal alleen uitvoeren, maar je mag ook in een groep of met de hele klas werken, al dan niet onder leiding van een leraar. Het is niet nodig dat je de hierboven gestelde vragen allemaal beantwoordt. Elk goed verzorgd werkstuk, beknopt of omvangrijk, is welkom. In het bijzonder zijn we erg benieuwd naar goede tekeningen van een driehoek met (in dezelfde figuur) zoveel mogelijk 'Morley-driehoeken' getekend. In *Pythagoras* zullen we nog terugkomen op de ontvangen werkstukken. Heel bijzondere inzendingen zullen op passende wijze gehonoreerd worden. We willen graag bij elke inzending vermeld zien:

1. naam, klas en school van iedereen die eraan heeft meegewerkt,

2. of het werkstuk onder leiding van of in samenwerking met een leraar tot stand is gekomen.

Stuur ook een aan jezelf geadresseerde gefrankeerde enveloppe of briefkaart mee, zodat wij daarmee de ontvangst van je

werkstuk kunnen bevestigen. Je kunt je werk tot 1 januari 1980 sturen naar J. van de Craats, Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit, Postbus 9512, 2300 RA LEIDEN.

°De stereografische projectie

In het begin van de zesde eeuw werd het *astrolabium* uitgevonden. Tot het begin van de achttiende eeuw werden astrolabia gemaakt en gebruikt. Met een astrolabium kan niet alleen de hoogte van zon, maan en sterren gemeten worden, maar het biedt tevens de mogelijkheid om deze waarnemingen direct te verwerken om allerlei opgaven over plaats en tijd op te lossen.

Het astrolabium berust op de stereografische projectie. Deze wordt (met een interessante toepassing) in dit artikel behandeld. In een vervolgartikel komt het astrolabium zelf aan de orde.

In de loop der eeuwen hebben vooral astronomen, geografen en navigators zich met het probleem van het afbeelden van een bol op een plat vlak beziggehouden. Op een bol zelf kunnen we perfect de aarde en het hemelgewelf afbeelden; daarom werd er vroeger veel gebruik gemaakt van aard- en hemelglobes, ook voor navigatiedoeleinden. In vergelijking met een vel papier is een globe echter moeilijker te maken en te hanteren, terwijl men bovendien vrij grote globes nodig heeft als men ze wil gebruiken voor nauwkeurige metingen.

Een bol is echter geen plat vlak en bij projectie van een bol of deel van de bol op een plat vlak zullen altijd enige eigenschappen van de figuren op het boloppervlak in de projectie verloren gaan. Een gelijkvormige afbeelding van de bol op het platte vlak is onmogelijk.

De projectie waarmee wij het meest vertrouwd zijn zien we in fig. 1. Zo wordt een bol met meridianen en breedtecirkels op ons netvlies geprojecteerd, zo zien we hem dus en zo verschijnt hij ook op een foto. We kunnen ons ook voorstellen dat de figuur ontstaat als schaduw van een

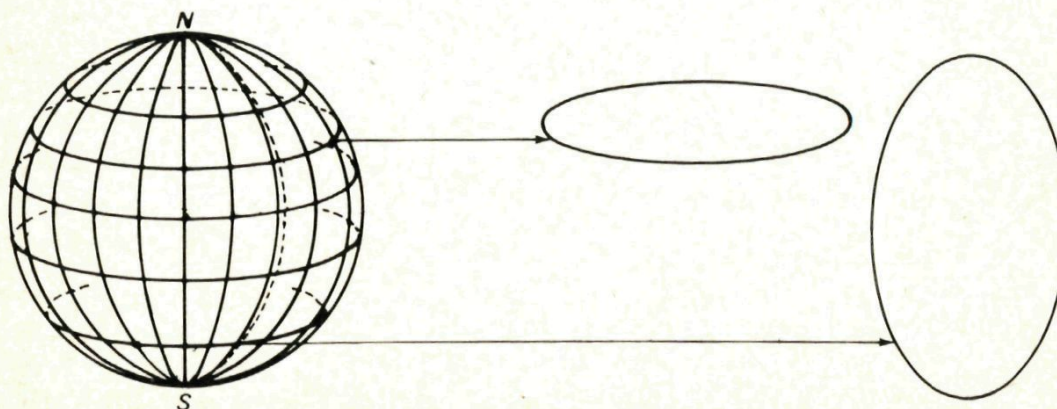


Fig. 2.

bolgeraamte op een muur, als we de bol van enige afstand met een puntvormige lichtbron beschijnen.

Bij het tekenen van een bol gebruiken we deze projectie ook (fig. 2), maar met een kleine vervorming: we kantelen de bol iets, zodat de breedtecirkels allemaal van bovenaf gezien worden, maar laten de polen (die dan eigenlijk ook mee moeten kantelen) op de cirkelomtrek staan. Dit geeft voor het tekenen veel voordelen. Bij deze afbeelding (fig. 1 en 2) blijven niet veel eigenschappen van de figuren op de bol behouden. Vrijwel alle cirkels worden ellipsen, de oppervlakte in het centrum van de afbeelding wordt groter dan aan de randen, de hoeken die lijnen op de bol met elkaar maakten zijn in de afbeelding niet hetzelfde enz. Eigenlijk een heel slechte afbeelding, waarvan we alleen kunnen zeggen dat wij ermee vertrouwd zijn.

De *stereografische projectie* mist deze herkenbaarheid, maar ze heeft twee belangrijke eigenschappen die haar uniek maken: ze is hoekgetrouw en cirkelgetrouw. Dat wil zeggen: de hoeken op de projectie zijn even groot als op de bol en alle cirkels op de bol (ook bijv. die in fig. 3 getekend zijn) komen in de projectie terug als cirkels.

Gezien vanuit de zuidpool

De stereografische projectie wordt als volgt uitgevoerd (fig. 4). We kiezen een punt N op de bol en brengen daardoor een raakvlak aan. We trekken de middel-lijn NMS . Het raakvlak is het projectievlak en het punt S is het centrum van de projectie.

De projectie van een punt P op de bol vinden we als snijpunt van SP met het projectievlak. De letters S en N zijn gekozen, omdat we in een aantal toepassingen het projectievlak door de noordpool (N) (van aard- of hemelglobe) kiezen en dan projecteren vanuit de zuidpool (S).

Voor constructies kunnen we beter uit-

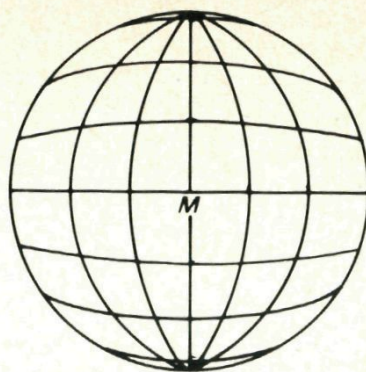


Fig. 1.

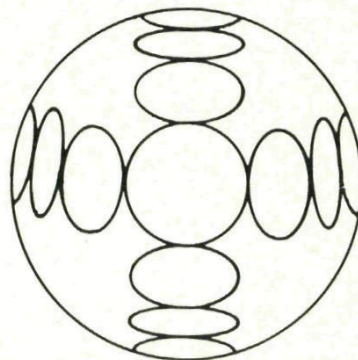


Fig. 3.

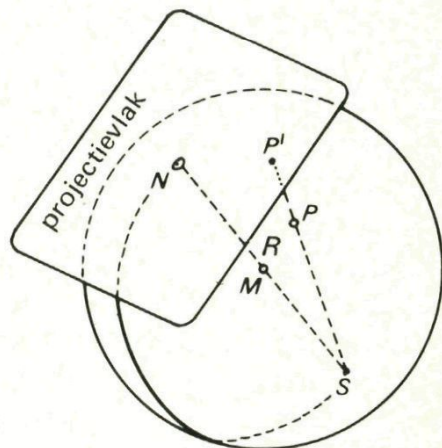


Fig. 4.

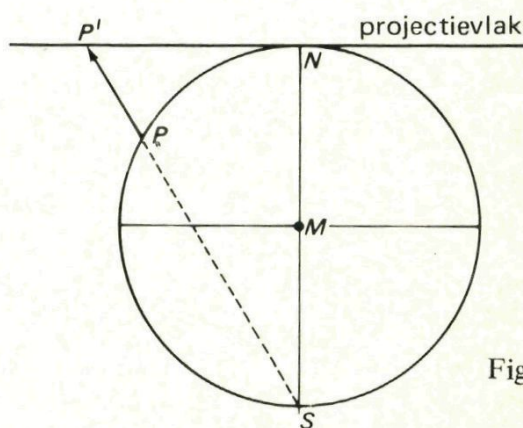
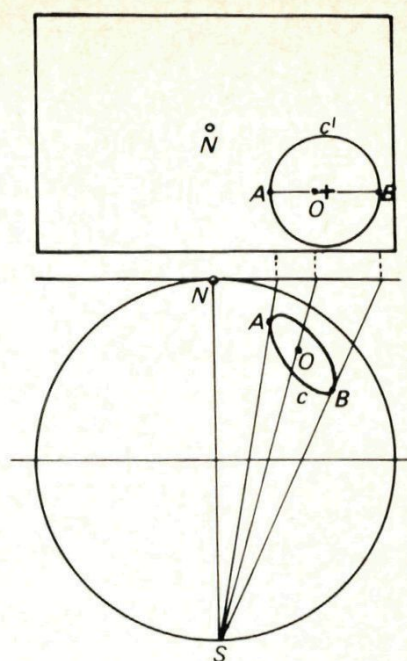
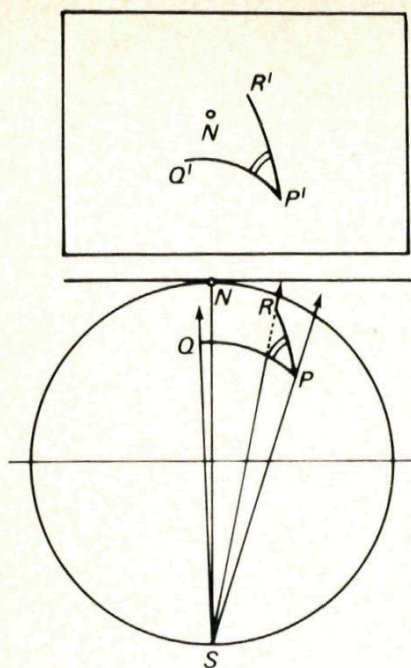


Fig. 5.

gaan van een vlak dat door NS en P gaat (fig. 5). P en P' liggen dan beide in het vlak van de tekening.

De bijzondere eigenschappen van deze projectie: hoekgetrouwheid en cirkelge-



trouwheid zijn in fig. 6 en 7 geïllustreerd. In een vervolgartikel zullen we het bewijs van deze eigenschappen geven.

Realiseren we ons nog eens op een andere manier wat die cirkel- en hoekgetrouwheid betekenen. We nemen een bol van doorzichtig plastic en tekenen daarop een groot aantal cirkels, grote en kleine, met vele snijpunten. Deze bol leggen we op een groot stuk wit tekenpapier en tegenover het punt waar de bol het papier raakt markeren we een punt S . Nemen we nu een lampje en beschijnen we de bol vanuit een willekeurig punt, dan verschijnt op het tekenpapier een netwerk van ellipsen van allerlei vorm: hyperbolen en misschien enkele cirkels en parabolen. Naderen we met het lampje punt S , dan naderen alle figuren tot een cirkelvorm en als we het lampje exact in S houden, wordt de schaduw een netwerk van zuivere cirkels die elkaar onder precies dezelfde hoeken snijden als op de bol zelf.

De projectie van een willekeurige cirkel

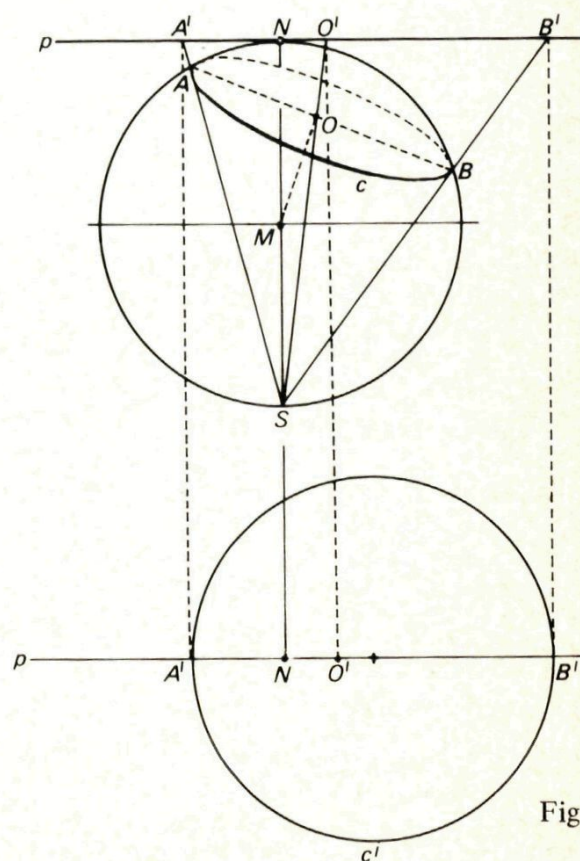
Gegeven een willekeurige cirkel c , met het middelpunt O (fig. 8).

We kiezen nu als tekenvlak een vlak door NS en O .

De middellijn AB ligt in dit tekenvlak.

Trek SA ; waar deze p snijdt, ligt A' .
Op dezelfde manier vinden we B' . De
middellijn van de geprojecteerde cirkel is
 $A'B'$.

Onder de figuur die reeds getekend is, tekenen we het projectievlak van bovenaf gezien. We kunnen nu de cirkel c' met de



middellijn $A'B'$ ook echt tekenen.

We gaan eens kijken waar het middelpunt O van de oorspronkelijke cirkel gebleven is. Daartoe trekken we SO , deze snijdt het projectievlak in O' . Het is duidelijk dat in het algemeen $A'O' \neq O'B'$.

Het middelpunt van de projectie is dus niet de projectie van het middelpunt van de oorspronkelijke cirkel!

De projectie van breedtecirkels en meridianen

In fig. 9a is de noordpool boven, verder zijn getekend de equator en enige breedtecirkels en een aantal meridianen. Natuurlijk kan ook het zenit boven zijn, dan stelt de grootste horizontale cirkel de horizon voor. Het bovenste punt kan ook een geheel willekeurig punt op de bol zijn, maar om er gemakkelijk over te kunnen praten, gebruiken we deze algemeen bekende aardrijkskundige termen.

We willen een stereografische projectie van meridianen en breedtecirkels om de 10° tekenen. Voor de breedtecirkels tekenen we in fig. 9b middelpuntshoeken om de 10° en projecteren die vanuit S op de raaklijn. Daarna brengen we de geprojecteerde middellijnen over naar fig. 9c. Ze komen daar te voorschijn als een aantal concentrische cirkels. In dit speciale geval valt de projectie van de middel-

punten samen met het middelpunt van de projectie.

Het is duidelijk dat de projectie van de meridianen getekend moet worden als stralen van de geprojecteerde equatorcirkel. Zoals we zien komt deze projectie nog vrij goed overeen met het visuele beeld: het is alsof we een globe met de noordpool boven, van bovenaf bekijken. Alleen komen in het laatste geval de breedtecirkels dichter bij elkaar, naarmate ze dichter bij de equator liggen.

We hebben nu een halve bol geprojecteerd. Natuurlijk kunnen we een groter deel van de bol projecteren, maar dan komen de breedtecirkels steeds verder van elkaar te liggen.

Het stereografische meetlatje

De geprojecteerde breedtecirkels liggen, zoals we zagen, niet op gelijke afstanden van elkaar. Dat wil zeggen: gelijke bogen op de meridianen worden in de projectie niet aan elkaar gelijk. Om deze bogen toch in graden te kunnen meten, maken we een zg. stereografisch meetlatje, dat we construeren met behulp van fig. 9b. Het resultaat zien we in fig. 9d.

Voor het meten van bogen op de stereografische projectie moet het beginpunt (90°) van dit meetlatje altijd samenvallen met de pool.

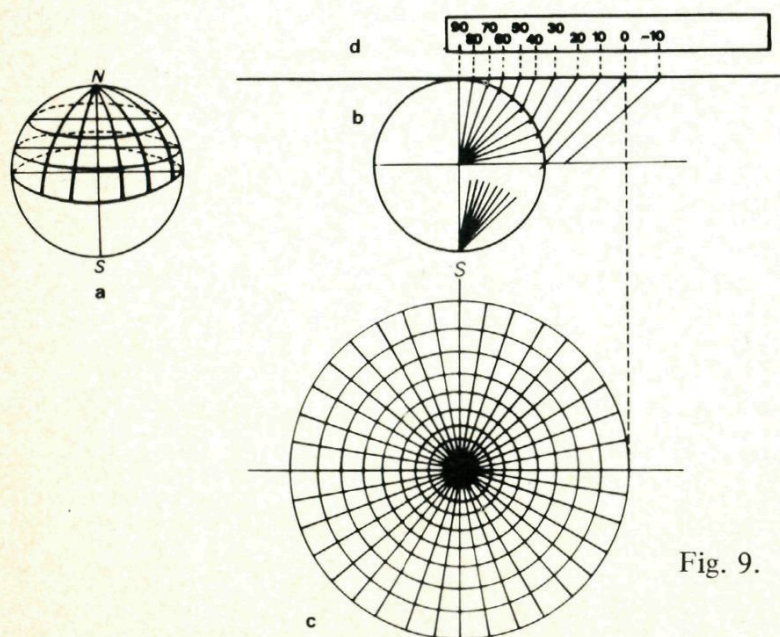


Fig. 9.

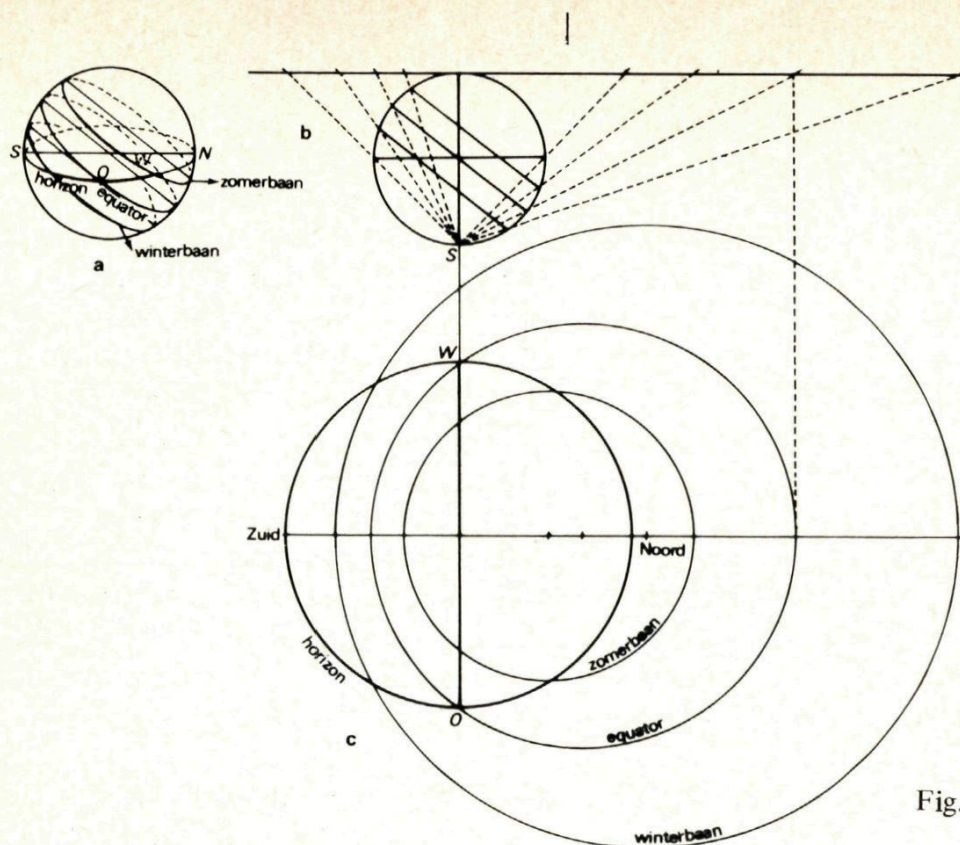


Fig. 10.

De projectie van de horizon en enige zonnebanen

Fig. 10a stelt een hemelbol voor, waarbij het hoogste punt het zenit is en de horizontale cirkel de horizon.

De grootcirkel door oost en west is de equator. In de doorsnedetekening van fig. 10b maakt deze (voor midden-Nederland) een hoek van 38° (nl. $90^\circ - 52^\circ$) met de horizon. Op 21 maart en 23 september valt de baan die de zon langs het hemelgewelf volgt samen met de equator. Verder zijn getekend de banen die de zon op 21 december (winterbaan) en op 21 juni (zomerbaan) doorloopt. Deze banen liggen resp. $23\frac{1}{2}^\circ$ zuidelijker en $23\frac{1}{2}^\circ$ noordelijker dan de equator, zodat ze op de doorsneefiguur uitgezet kunnen worden.

Na het voorgaande is de constructie gemakkelijk van fig. 10b en c af te lezen.

In fig. 10c zijn de bogen binnen de horizon de dagbanen van de zon en buiten de horizon de nachtbanen. Ook de punten van opkomst en ondergang van de zon op de genoemde data liggen nu vast. We zien dat de zon in maart en september in het

oosten opkomt en in het westen ondergaat.

Als we nu nog de cirkels voor de andere maanden zouden construeren en daar bovendien nog een tijdschaal op zouden kunnen aanbrengen, dan hadden we in onze stereografische projectie een mooi overzicht van de plaats van de zon aan het hemelgewelf over het hele jaar.

Het eerste zouden we nu al kunnen doen als we uit een tabel de hoekafstand van de zon tot de equator (de declinatie) voor het begin van elke maand zouden halen. Voor het construeren van de uurlijnen moeten we eerst een nieuwe grondconstructie behandelen.

De constructie van uurlijnen

In fig. 11a zijn de grootcirkels 1 en 2 ingetekend. Cirkel 1 zien we als een rechte lijn en cirkel 2 als een ellips. Beide grootcirkels maken een hoek α met elkaar.

Het projecteren van grootcirkel 1 geeft geen moeilijkheden (zie fig. 11b en c). Cirkel 2 kunnen we echter niet op deze manier projecteren.

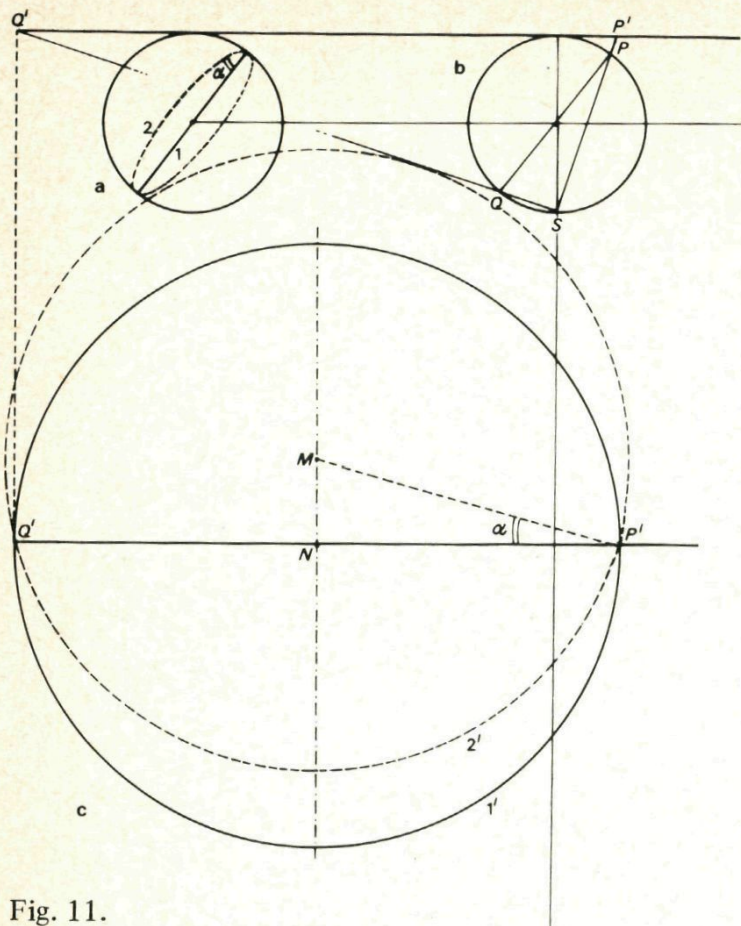


Fig. 11.

We bedenken het volgende. De projectie van grootcirkel 2 is in ieder geval een cirkel die door P' en Q' gaat, want P en Q zijn de snijpunten van beide cirkels. Het middelpunt van $2'$ ligt dus op de middelloodlijn van $P'Q'$.

Verder weten we dat ook de projecties elkaar onder een hoek α snijden. Maar dan moeten ook de stralen $P'N$ (van $1'$) en $P'M$ (van $2'$) elkaar onder een hoek α snijden. Daarmee kunnen we het middelpunt M van cirkel $2'$ vinden.

De constructie van $2'$ voeren we dus helemaal in fig. 11c uit.

In fig. 12 is op deze wijze de projectie getekend van een aantal grootcirkels die door P en Q gaan en die onderling een hoek van 15° met elkaar maken. We vinden een cirkelbundel door P' en Q' .

De zonnekaart

We kunnen een bijzonder handig instrument maken, door de constructies uit bei-

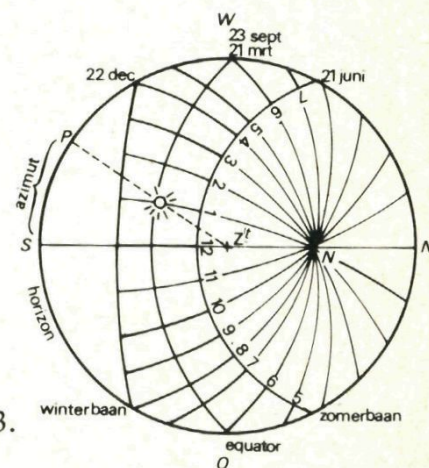


Fig. 13.

de vorige paragrafen te combineren. We krijgen dan een stereografische projectie van de horizon, met als middelpunt het zenit (Z^t), van de zonnebanen en van de uurlijnen (fig. 13).

Op deze kaart is de positie van de zon voor elke datum en elk uur van het jaar vastgelegd. Hoe nauwkeurig we deze kunnen aflezen hangt af van de fijnheid waarmee wij verschillende schalen intekenen.

In fig. 13 hebben we slechts zonnebanen getekend voor vier data in het jaar en uurlijnen om het hele uur. Met de constructieprincipes die we nu kennen is het niet moeilijk om bijv. voor elke maand zonnebanen te tekenen (met de gegevens uit een declinatietabel van de zon) en ook halfuur- en kwartierlijnen aan te geven. Bij grote zonnekaarten kan men nog verder gaan. Dat is een probleem van het afwegen van overzichtelijkheid tegen nauwkeurigheid.

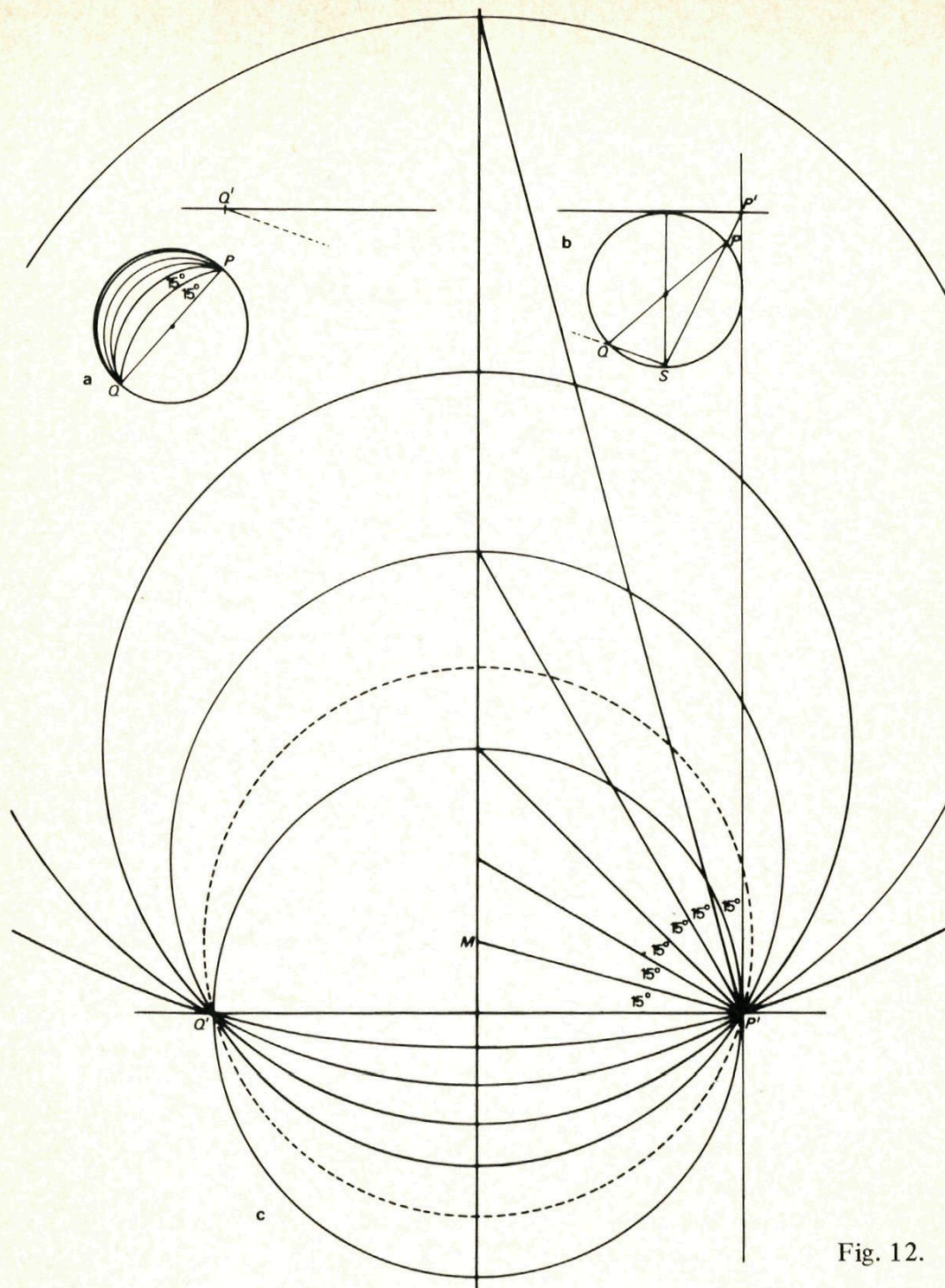


Fig. 12.

De positie van de zon aan de hemel wordt bepaald door zijn *azimut* en zijn *hoogte*. Nemen we aan dat het 1 uur ware zonnentijd is op 23 maart. We trekken een lijn door het door deze gegevens bepaalde punt (zie fig. 13, de stippellijn). De boog *SP* is nu het azimut van de zon. De horizon moet een graadverdeling van $0^{\circ} - 360^{\circ}$ dragen (van zuid naar west) om dit azimut direct te kunnen aflezen.

De hoogte van de zon meten we met het stereografische meetlatje vanuit het zenit.

De zonnekaart is een handig hulpmiddel voor ieder die rekening moet houden met de stand van de zon op bepaalde tijdstippen, bijv. fotografen en architecten.

De XXle Internationale Wiskunde Olympiade 1979

Twee Nederlanders hebben een prijs behaald bij de 21ste Internationale Wiskunde Olympiade 1979 te Londen. Freek Wiedijk uit Den Burg kreeg een tweede prijs en Jan Koen Annot uit Veenendaal een derde prijs.

Aan deze Olympiade namen 166 leerlingen van het vwo uit 23 landen deel. De leerlingen kregen in twee zittingen van vier uren in totaal zes wiskundige vraagstukken voorgelegd. De wedstrijd vond plaats in het Westfield College van de University of London op 2 en 3 juli 1979. Elke deelnemer kon maximaal 40 punten behalen. De acht deelnemers met 37 – 40 punten ontvingen een eerste prijs, de 32 scholieren met 29 – 36 punten een tweede en de 42 deelnemers met 20 – 28 punten kregen een derde prijs. Een scholier uit Vietnam ontving een schoonheidsprijs voor zijn oplossing van opgave 3.

De resultaten van de Nederlandse deelnemers waren: Jan Koen Annot 22 punten, Harry Bruning 10 punten, Jos van der Bijl 17 punten, Hugo Cramer 18 punten, Carel Faber 11 punten, Paul Louis Iske 8 punten, Jan Luuk Roelfsema 11 punten en Freek Wiedijk 33 punten. In het officiële landenklassement kwam Nederland met 130 punten op de 16e plaats. Dit klassement werd aangevoerd door de Sowjetunie (267 punten), Roemenië (240 punten) en West-Duitsland (235 punten).

In dit nummer vind je de opgaven van de Olympiade. De oplossingen van de nummers 1 en 6 staan er bij. In het volgende nummer komen de oplossingen van de opgaven 2 t.e.m. 5.

The XXI International Mathematical Olympiad, London 1979

Maandag 2 juli 1979

Beschikbare tijd: 4 uren

1. Gegeven zijn positieve gehele getallen p en q zo, dat

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Bewijs dat p deelbaar is door 1979.

2. Gegeven is een prisma met de vijfhoeken $A_1A_2A_3A_4A_5$ en $B_1B_2B_3B_4B_5$ als boven- en ondervlak. Elke zijde van elk van de twee vijfhoeken en elk van de lijnstukken A_iB_j voor $i, j = 1, \dots, 5$ is rood of groen gekleurd. Elke driehoek waarvan de hoekpunten ook hoekpunten zijn van het prisma en waarvan de zijden alle drie gekleurd zijn, heeft twee zijden van verschillende kleur.

Toon aan dat alle 10 zijden van boven- en ondervlak dezelfde kleur hebben.

3. In het vlak liggen twee elkaar snijdende cirkels C_1 en C_2 . A is een van de snijpunten. Twee punten P_1 en P_2 doorlopen de cirkels C_1 resp. C_2 in dezelfde omloopszin met constante snelheden. Zij beginnen tegelijkertijd in A en komen na één omloop ook weer gelijktijdig in A terug.

Bewijs dat er een vast punt P in het vlak is zo, dat P op elk tijdstip gelijke afstanden heeft tot P_1 en P_2 .

Dinsdag 3 juli 1979

Beschikbare tijd: 4 uren

4. Gegeven zijn een punt P in een vlak π en een punt Q niet in π .

Bepaal alle punten R in π waarvoor het quotiënt $\frac{PQ + PR}{QR}$ maximaal is.

5. Bepaal alle reële getallen a waarvoor er niet-negatieve reële getallen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bestaan die voldoen aan de voorwaarden

$$\sum_{k=1}^5 k x_k = a, \quad \sum_{k=1}^5 k^3 x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^5 k^5 x_k = a^3.$$

6. A en E zijn diametraal tegenover elkaar liggende hoekpunten van een regelmatige acht-hoek. Een pion legt een weg af langs de hoekpunten van de achthoek. Hierbij kan hij telkens van een hoekpunt naar één van de twee aangrenzende hoekpunten springen. Elke weg begint in A en eindigt zodra de pion voor het eerst E bereikt. Het aantal ver-schillende wegen van precies n sprongen geeft men aan door a_n .

Bewijs dat voor elke $k = 1, 2, 3, \dots$

$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^{k-1} - y^{k-1}), \text{ waarbij } x = 2 + \sqrt{2}, y = 2 - \sqrt{2}.$$

N.B.: Een 'weg van precies n sprongen' is een rij hoekpunten

$(P_0, \dots, P_n)$ zo, dat: (i) $P_0 = A, P_n = E$;

(ii) voor iedere $i, 0 \leq i \leq n-1$, is P_i verschillend van E ;

(iii) voor iedere $i, 0 \leq i \leq n-1$, zijn P_i en P_{i+1} aangrenzende hoekpunten.

Oplossing van opgave nr. 1

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1319} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1318} \right) = \\ &= 1 + \dots + \frac{1}{1319} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{659} \right) = \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \dots + \frac{1}{1319}. \end{aligned}$$

Deze som telt 660 termen. Nemen we de eerste en de laatste, de tweede en de voorlaatste enz. samen, dan ontstaat

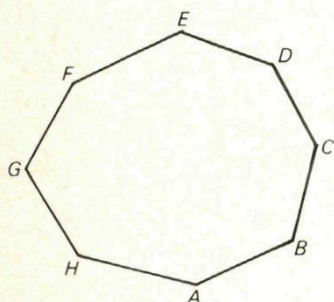
$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319} \right) + \left(\frac{1}{661} + \frac{1}{1318} \right) + \dots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990} \right) = \\ &= \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} + \dots + \frac{1979}{989 \cdot 990} = 1979 \left(\frac{1}{660 \cdot 1319} + \dots + \frac{1}{989 \cdot 990} \right). \end{aligned}$$

Wat er tussen haakjes staat, kun je onder één noemer brengen: het produkt van de getal-len 660 t.e.m. 1319. 1979 is een *priemgetal*, dus de factor 1979 in de teller van S kan niet door factoren in de noemer worden weggedeeld, en hoe men S ook schrijft als $S = \frac{p}{q}$, altijd is p deelbaar door 1979.

Oplossing van opgave nr. 6

Laat $ABCDEFGH$ de achthoek zijn. Bij elke sprong gaat de pion van een punt uit de verzameling $\{A, C, E, G\}$ naar een punt uit de verzameling $\{B, D, F, H\}$, of omgekeerd. Na een oneven aantal sprongen vanuit A is hij dus in $\{B, D, F, H\}$ en daarom geldt voor alle $k = 1, 2, 3, \dots$ dat $a_{2k-1} = 0$.

Na twee sprongen kan de pion nog niet in E zijn, dus $a_2 = 0$, in overeenstemming met de formule uit de opgave. Voor $k = 2$ geeft de formule $a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x - y) = 2$, en inderdaad zijn er twee wegen van vier sprongen van A naar E . Neem nu $n = 2k$ met $k > 2$.



Na twee sprongen is de pion in A, C of G . Laten we het aantal wegen van n sprongen van C naar E aangeven door b_n (ook hierbij eindigt een weg zodra de pion voor het eerst het punt E bereikt). Op grond van symmetrie is b_n dan natuurlijk ook gelijk aan het aantal wegen van n sprongen van G naar E . Elke weg van $2k$ sprongen vanuit A is na twee sprongen in A, C of G . Hierbij kunnen C en G beide slechts op één manier vanuit A in twee sprongen worden bereikt, maar er zijn twee manieren om weer in A terug te komen (ABA en AHA). Er geldt dus

$$a_{2k} = 2 a_{2k-2} + 2 b_{2k-2} \quad (1)$$

want na twee sprongen zijn er nog $2k - 2$ sprongen over om in E te komen.

We kunnen ook b_{2k} uitdrukken in a_{2k-2} en b_{2k-2} . Na twee sprongen vanuit C is de pion in E (maar dit mag niet als $k > 1$), in C (dit kan op twee manieren) of in A . Dit geeft

$$b_{2k} = 2 b_{2k-2} + a_{2k-2} \quad (\text{mits } k > 1). \quad (2)$$

Nu gaat het er om uit (1) en (2) de 'hulpvariabele' b weg te werken. Uit (1) volgt

$$2 b_{2k-2} = a_{2k} - 2 a_{2k-2}$$

en met $k + 1$ in plaats van k :

$$2 b_{2k} = a_{2k+2} - 2 a_{2k}.$$

Dit vullen we in (2) in na links en rechts met twee te hebben vermenigvuldigd:

$$a_{2k+2} - 2 a_{2k} = 2 a_{2k} - 4 a_{2k-2} + 2 a_{2k-2}, \text{ d.w.z.}$$

$$a_{2k+2} = 4 a_{2k} - 2 a_{2k-2}. \quad (3)$$

Dit geldt voor $k > 1$. Voor $k = 2$ geeft dit wegens $a_2 = 0$, $a_4 = 2$ dat $a_6 = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8$. Zo voortgaande kun je de hele rij a_n voor alle even n met behulp van (3) bepalen. Deze formule legt met de twee beginwaarden a_2 en a_4 de rij a_n blijkbaar volledig vast. Met andere woorden, als gegeven is een rij die voor $k = 2, 3, \dots$ aan (3) voldoet en de beginwaarden $a_2 = 0$ en $a_4 = 2$ heeft, moet hij met de rij a_n samenvallen (voor even n). De rij waarvan de formule in de opgave gegeven is, voldoet inderdaad aan (3):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (x^k - y^k) \stackrel{?}{=} \frac{4}{\sqrt{2}} (x^{k-1} - y^{k-1}) - \frac{2}{\sqrt{2}} (x^{k-2} - y^{k-2}).$$

Omwerken geeft

$$x^{k-2} (x^2 - 4x + 2) \stackrel{?}{=} y^{k-2} (y^2 - 4y + 2)$$

en dit klopt want $x^2 - 4x + 2 = y^2 - 4y + 2 = 0$, zoals je onmiddellijk controleert door de waarden van x en y in te vullen. De beginwaarden $a_2 = 0$ en $a_4 = 2$ kloppen ook, dus hiermee is het bewijs geleverd.

Het spel van Jaap en Joop

Opgave 6 van de Internationale Wiskunde Olympiade 1979 heeft een aardige interpretatie in termen van kansrekening. Jaap en Joop hebben beiden vier gulden. Ze werpen om de beurt met een zuivere munt. Bij kruis betaalt Jaap een gulden aan Joop en bij munt betaalt Joop een gulden aan Jaap. Het spel eindigt zodra een van beiden blut is. Wat is de kans dat het spel precies bij de n -de beurt eindigt? Je kunt het spel natuurlijk onmiddellijk vertalen in termen van de opgave: in plaats van het betalen van een gulden komt het schuiven van de pion langs de achthoek, bijv. linksom bij kruis en rechtsom bij munt. Bij het werpen met een zuivere munt heeft elke rij uitkomsten dezelfde kans. Er zijn twee mogelijke uitkomsten bij één worp (kruis of munt), vier bij twee worpen (kk , km , mk of mm), acht bij drie worpen, en in het algemeen 2^k bij k worpen. De kans op een bepaalde serie van k -uitkomsten is dus $\frac{1}{2^k}$. We hebben het aantal wegen van precies n sprongen van A naar E in de achthoek a_n genoemd, en a_n is dus ook gelijk aan het aantal manieren waarop het spel van Jaap en Joop in precies n beurten kan eindigen. Elke manier heeft een kans van $\frac{1}{2^n}$, dus de totale kans dat het spel in precies n beurten eindigt is gelijk aan $a_n/2^n$. Voor oneven n is dit nul, en voor even n , $n = 2k$, is deze kans gelijk aan

$$p_{2k} = \frac{a_{2k}}{2^{2k}} = \frac{a_{2k}}{4^k} = \frac{1}{4^k \sqrt{2}} (x^{k-1} - y^{k-1}). \quad (4)$$

De weddenschap van Hanneke en Janneke

Hanneke en Janneke, de vriendinnen van Joop en Jaap, zitten zich onder het spel danig te vervelen. Hanneke wil wedden dat het spel na hoogstens tien beurten afgelopen zal zijn. Janneke, die de beste van de klas is in wiskunde, denkt even na en zegt dan dat dit voor haar wel een gunstig voorstel is. Ze neemt daarom de weddenschap aan. Hoe zag Janneke zo snel dat haar kans om de weddenschap te winnen groter is?

De kans dat het spel na hoogstens tien beurten is afgelopen, is gelijk aan de som van de kansen dat het in precies k beurten met $k \leq 10$ is afgelopen. Alleen p_4 , p_6 , p_8 en p_{10} zijn ongelijk aan nul. Je kunt ze natuurlijk met formule (4) berekenen, maar het gaat veel vlugger als je, net als Janneke, formule (3) deelt door 4^{k+1} :

$$\frac{a_{2k+2}}{4^{k+1}} = \frac{4 \cdot a_{2k}}{4 \cdot 4^k} - \frac{2 \cdot a_{2k-2}}{4^2 \cdot 4^{k-1}}.$$

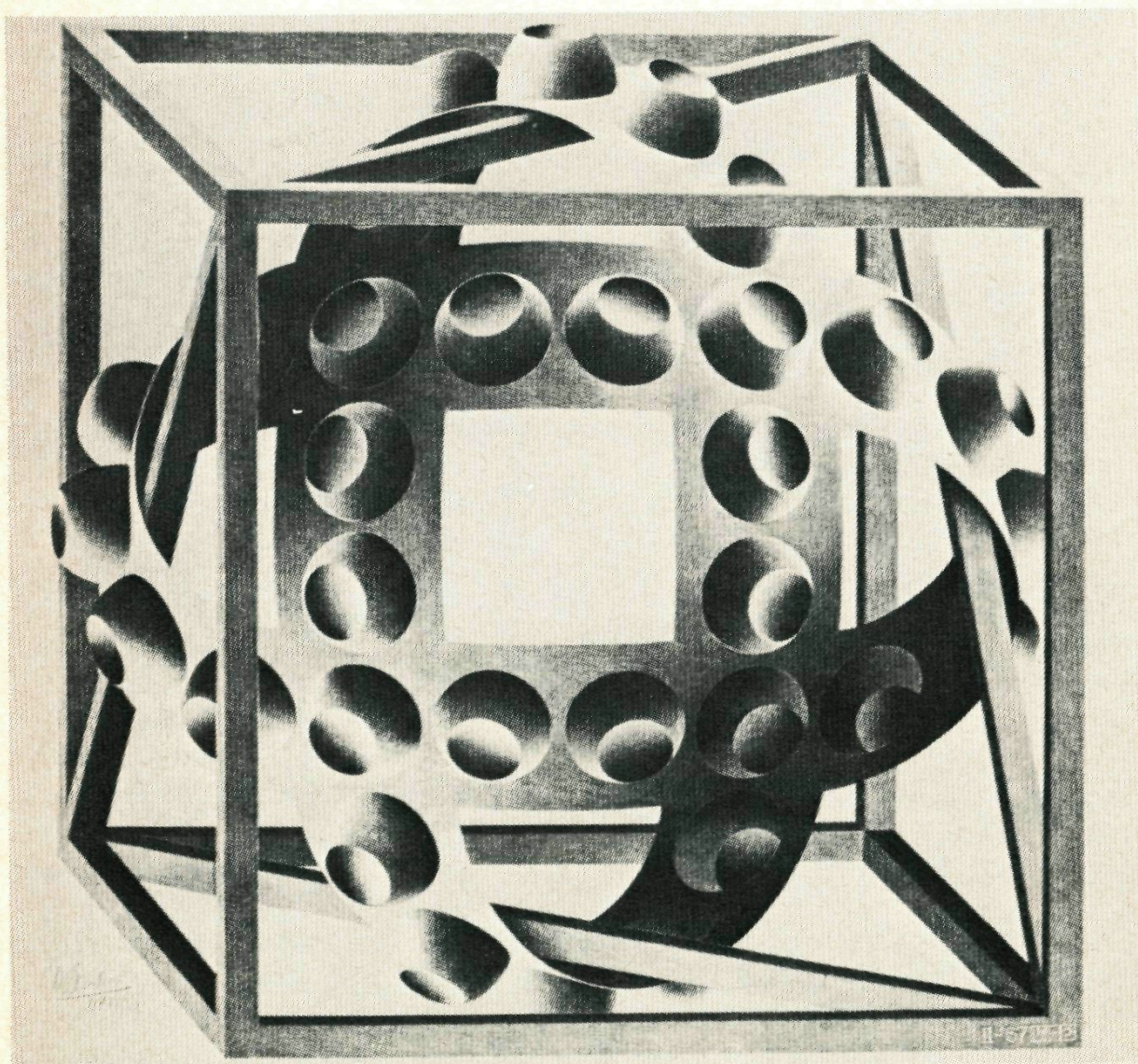
Omdat $p_{2k} = (a_{2k})/(4^k)$ geeft dit

$$p_{2k+2} = p_{2k} - \frac{1}{8} p_{2k-2}. \quad (5)$$

De kansen vormen dus een *dalende* rij; de eerste waarde, p_4 , is gelijk aan $\frac{1}{8}$ (want $a_4 = 2$), dus $p_4 + p_6 + p_8 + p_{10}$ is kleiner dan $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Met formule (5) kun je de p 's ook gemakkelijk precies berekenen:

$p_4 = \frac{1}{8}$, $p_6 = \frac{1}{8}$, $p_8 = \frac{7}{64}$, $p_{10} = \frac{3}{32}$, $p_{12} = \frac{41}{512}$. De som van de kansen t.e.m. p_{12} is $\frac{273}{512} > \frac{1}{2}$. Het zou dus verstandiger zijn geweest als Hanneke had gewed dat Joop en Jaap na twaalf beurten zouden zijn uitgespeeld.

Sommigen van onze lezers zullen de somformule voor een eindige meetkundige reeks wel kennen. Met deze formule kun je in het algemeen uit (4) een uitdrukking afleiden voor de kans dat het spel na hoogstens N beurten zal zijn afgelopen. Je kunt, door N onbeperkt te laten stijgen, ook verifiëren dat deze kans op den duur tot één nadert. Hanneke en Janneke kunnen er dus wel op rekenen dat Jaap en Joop na eindig veel beurten uitgespeeld zullen zijn!



Kubus met banden, een litho van Escher uit 1957.

Het volgende nummer van Pythagoras zal geheel gewijd zijn aan het werk van deze kunstenaar die ons telkens weer voor verrassingen stelt met zijn prenten. Wiskunde was voor Escher meer kunst dan kunde; we mogen hem daarom een echte *wiskunstenaar* noemen.



Pythagoras Olympiade

Wedstrijdvoorwaarden

1. Alle leerlingen van het voortgezet onderwijs kunnen aan de Pythagoras Olympiade deelnemen door een oplossing van een of meer van de opgaven in te sturen.
2. Papier waarop oplossingen staan mag slechts aan één zijde beschreven zijn. Voor verschillende opgaven moeten ook verschillende vellen genomen worden.
3. Slechts goed leesbare oplossingen worden bekeken. Alle tekstgedeelten moeten helder en duidelijk in goed lopende zinnen zijn geformuleerd.
4. Op elk vel moet vermeld staan: *naam, adres, leeftijd, school, schooltype en klas* van de inzend(st)er.
5. De oplossingen moeten binnen de vermelde inzendtermijn gestuurd worden naar:
Pythagoras Olympiade,
Brederode 29,
2261 HG LEIDSCHENDAM.
Zorg voor voldoende frankering!

Prijzen

1. Bij elke opgave wordt onder de inzenders van een goede oplossing een boekenbon verloot.
2. Alle opgaven van één jaargang (5 nummers) van *Pythagoras* vormen te zamen een *ladderwedstrijd*. Elke goede oplossing geeft één punt. De drie inzenders die in één jaar de meeste punten ver-

zamelen, krijgen een extra boekenbon. Bij gelijke puntentaallen beslist het lot.

3. De beste 10 van de ladderwedstrijd die niet in een eindexamenklas zitten, krijgen *automatisch* een uitnodiging voor de tweede ronde van de *Nederlandse Wiskunde Olympiade*. Zij behoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.



Opgaven Pythagoras Olympiade

PO 4. Gegeven is een positief getal a . Bewijs dat er zich onder de getallen $a, 2a, 3a, \dots, 999a$ altijd minstens één bevindt die hoogstens 0,001 verschilt van een geheel getal.

PO 5. Gegeven zijn de gehele getallen a en b . Het getal b is oneven. Bewijs dat voor alle rationale getallen r geldt
$$r^3 + 6ar^2 + 12a^2r + 2b \neq 0.$$

PO 6. Gegeven is een vierhoek $ABCD$ zonder inspringende hoeken. $ABCD$ is geen parallellogram. Binnen $ABCD$ ligt een punt P op de verbindinglijn van de middens van de diagonalen AC en BD . Bewijs:
$$\text{opp } (\triangle ABP) + \text{opp } (\triangle CDP) = \text{opp } (\triangle BCP) + \text{opp } (\triangle DAP).$$

De oplossingen van deze opgaven moeten ingezonden worden vóór 1 januari 1980.

°° Rollend naar de vierde dimensie . . .

In een vorige jaargang van *Pythagoras* hebben we geprobeerd via punt, lijnstuk, vierkant, kubus in de vierde dimensie terecht te komen.

We willen dat nu doen via cirkel en bol.

Het is wel een stoutmoedige bezigheid. Het vraagt ons te fantaseren over een gebied dat voor ons ruimtevaarders niet te betreden is. Toch willen we iets weten over wat er na een bol komt. Wel, een hyperbol . . . wat is dat voor iets?

Van puntenduo tot hyperbol

We kunnen ons afvragen waar zich punten bevinden die op zekere afstand afliggen van een ander punt dat we middelpunt noemen. Wat zegt een lijnlander daarvan?

Wel, hij kan zich maar twee punten voorstellen die zo'n eigenschap hebben (fig. 1, linksboven).

Voor een platlander verschijnt nu als verzameling met die eigenschap de cirkel.

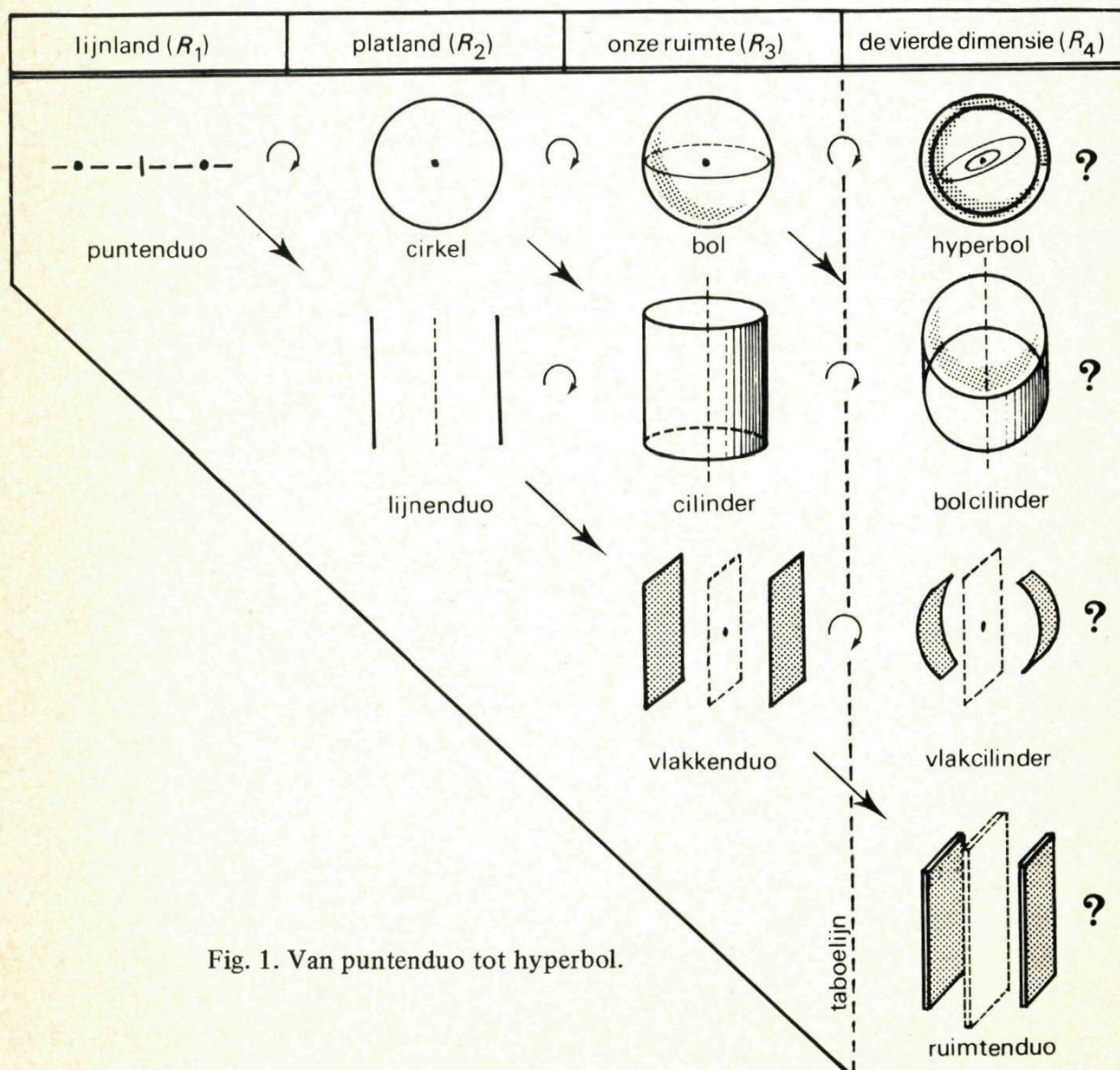


Fig. 1. Van puntenduo tot hyperbol.

Voor ons ruimtevaarders is die verzameling een bol. Telkens blijken er meer punten te zijn voor wezens van een hogere orde. Voor vierdimensionalisten zijn er nog meer punten te vinden. Voor hen zijn ze gelegen op een hyperbol.

We kunnen ons die uitbreiding als volgt trachten voor te stellen. We gaan uit van een tweetal punten in R_1 . We kiezen dan een plat vlak door die punten en laten ze vervolgens om het midden wentelen. Zo ontstaat de cirkel. Laat die cirkel weer wentelen om één van zijn assen. Er komt een bol te voorschijn. Als we nu zo'n bol 'om een of ander centraal vlak wentelen', moet de hypersfeer verschijnen.

Het lijkt allemaal wat raadselachtig. Maar bedenk wel dat platlanders ook met hun platte oren klapperen als wij, ruimtereizigers, hun proberen over een bol te vertellen.

Een cirkel kan een lijn afrollen en heeft daar steeds één punt mee gemeenschappelijk. Zo kan een bol wentelen over een plat vlak en zo moet een hyperbol onze ruimte kunnen afrollen. Steeds zal daarbij één punt in rust verkeren en wel het momentele contactpunt tussen de hyperbol en onze ruimte.

Een cirkel rolt in één richting over een lijn, een bol in twee richtingen over een vlak, een hyperbol in drie richtingen over onze ruimte (of een andere!).

Nog eens vanaf het puntenduo

Het lijkt interessant via een andere transformatie dan de rotatie nog eens uit te gaan van het puntenduo. We bedoelen een translatie.

Laat beide punten een translatie maken in een richting loodrecht op de verbindingslijn in een of ander vlak dat door beide punten gaat. Er ontstaat dan een lijnenduo met hun as. Als we nu weer tot rotatie overgaan in R_3 , krijgen we de cilinder. En als we die weer 'om een centraal vlak van de cilinder wentelen', verschijnt in R_4 . . . laten we zeggen een bolcilinder.

Voeren we echter, uitgaande van het lijnenduo, weer een translatie uit in een richting loodrecht op het vlak van beide lijnen, dan hebben we een vlakkenduo samen met hun middelloodvlak. Dat alles staat uitgebeeld in fig. 1.

We kunnen nu twee kanten uit, óf weer een translatie uitvoeren óf een rotatie. In het eerste geval komt er in R_4 een ruimtenduo, in het tweede geval . . . een vlakcilinder.

Als je het allemaal niet zo helder voor de geest kunt krijgen, is dat niet verwonderlijk. Wij, al zijn we ruimtereizigers, hebben de magische stippellijn in fig. 1 niet weten te overschrijden. Over alles wat met vierde dimensie te maken heeft, kunnen we alleen maar stamelend praten.

Eindig en oneindig

De figuren links van de 'taboelijn' zijn ons voldoende vertrouwd. Hoe ze familieverbanden hebben, toonden we aan. Wat er rechts van de grens van onze driedimensionale wereld gebeurt, proberen we bescheiden te raden. Het is eigenlijk een kwestie van consequent doordenken. Neem eens een andere eigenschap.

Een cirkel heeft een binnengebied en een buitengebied. Dat binnengebied is eindig, dat buitengebied oneindig. Dit geldt ook voor puntenduo, bol en dus ook voor een hyperbol.

Bij alle volgende zes figuren echter zijn zowel binnen- als buitengebied oneindig uitgestrekt. Terwijl puntenduo enz. een zeker gebied afgrenzen, vertonen lijnenduo, cilinder enz. een open structuur.

Hoe dat zal zijn bij bolcilinder, vlakcilinder en ruimtenduo kunnen we nu zelf wel raden.

Doorsnijdingen

Als we een bol doorsnijden met een centraal vlak, ontstaat een grote cirkel. Doorsnijden we een cirkel met een middellijn, dan ontstaat een puntenduo. Zo gaan we steeds een stapje terug. Als we dus een

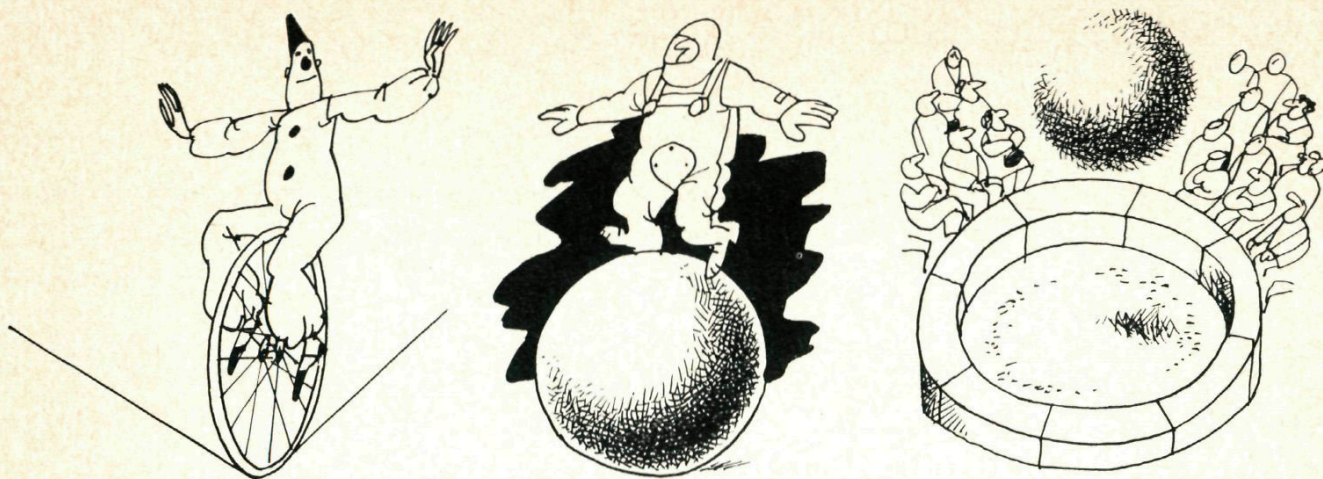


Fig. 2. Fietsen per cirkel, bol en hyperbol.

hyperbol doorsnijden met 'een centrale ruimte', dan ontstaat een grote bol van de hyperbol.

Zo kunnen wezens van een lagere orde iets van een figuur uit een ruimte die een dimensie hoger ligt dan de hunne, ervaren door middel van doorsnijdingen!

Wat gaat er gebeuren als we niet-centrale doorsnijdingen maken?

Als we een middellijn van een cirkel evenwijdig aan zichzelf verplaatsen, krijgen we een steeds kleiner wordend punten-duo, op steeds kleiner wordende afstand. Ten slotte vallen beide punten samen. Als we het centrale doorsnijdingsvlak van een bol evenwijdig aan zichzelf verplaatsen, krijgen we steeds kleiner wordende cirkels. Op zeker moment wordt het een puntcirkel. Het vlak raakt de bol dan. Als we op een overeenkomstige manier een cirkel doorsnijden met een evenwijdig verschuivende lijn, ontstaat een punten-duo met veranderende afstand.

Om de hypersfeer nader te verkennen, zouden we die moeten doorsnijden met een evenwijdig aan zichzelf verplaatsende ruimte. De doorsnijding zou dan een bol zijn met veranderende straal!

Fietsen in de vierde dimensie

In een circus zien we wel eens een man op een fiets met één wiel over een gespannen touw rijden. Hij kan zich alleen verplaatsen in een richting evenwijdig met het

touw. We zeggen: er is één vrijheid van rotatie.

Soms zien we er ook wel een persoon staande op een grote bol (fig. 2). Zo iemand kan zich met meer vrijheid verplaatsen, omdat de bol meer rotatie-assen heeft. Feitelijk worden er bij deze beweging twee benut. Een circusartiest, die op een hypersfeer zou rijden, kan de ruimte affietsen. Dat betekent dat hij telkens een ander punt van de ruimte als steunpunt heeft en drie graden van rotatievrijheid.

Het zal voor de toeschouwers, als ze tenminste van de driedimensionale soort zijn zoals uw schrijver, toch niet zo spannend zijn om daarnaar te kijken. We zouden van die hyperbol niet veel meer zien dan de doorsnijding ervan met onze driedimensionale wereld.

Ze zou zich aan ons voordoen als een bol met veranderlijke straal, zwerfend door de ruimte. En als de artiest zelf zich daarbij al te ver van onze ruimte verwijdert, zien we helemaal niets meer. We zullen ons dan wel erg ongelukkig voelen, vooral als we voor de voorstelling een hoge entreeprijs hebben betaald om de vierdimensionale fietser van nabij te zien.

Laten we ons troosten met de gedachte dat een lijnlander zich nog ongelukkiger moet voelen: hij heeft helemaal geen rotatievrijheid, fietsen op cirkel of bol kent hij niet. Met een punten-duo als vervoermiddel kom je in lijnland niet ver.

° Een wiskundig voorschrift voor een posttarief

Als we een brief op de post doen, moeten we juist frankeren en daartoe moeten we het gewicht in de gaten houden. Voor een brief tot 20 g betalen we op het ogenblik nog 55 ct.

De Duitse Bundespost heeft een heel apart goedkoop tarief voor lichtgewicht-brieven, die bovendien nog bepaalde afmetingen moeten hebben.

Deze standaardbrieven moeten aan de volgende voorwaarden voldoen: vooreerst maximaal 20 g, dan een lengte van de enveloppe tussen 14 en 23,5 cm, een breedte tussen 9 en 12 cm en een dikte van maximaal 0,5 cm.

Ten slotte moet de lengte minstens 1,41 keer de breedte zijn. Vierkante enveloppen bijvoorbeeld, zijn dus voor dit speciale tarief niet toegestaan.

Nu lijkt het een hele klus voor de Bundespost om snel te controleren of, afgezien van gewicht en dikte, de aangeboden brief aan de gestelde lengte- en breedtemaat voldoet.

Denk zo'n brief geplaatst in het eerste kwadrant van een rechthoekig coördinaatstelsel met één hoekpunt in de oorsprong. Leg de brief dan zo, dat de korte zijde langs de x -as valt en de lange zijde langs de y -as.

Stel nu de coördinaten van het hoekpunt tegenover de oorsprong (x, y) , dan moeten de volgende ongelijkheden gelden:

$$9 \leq x \leq 12 \text{ verder } 14 \leq y \leq 23,5 \text{ en } y \geq 1,41 x.$$

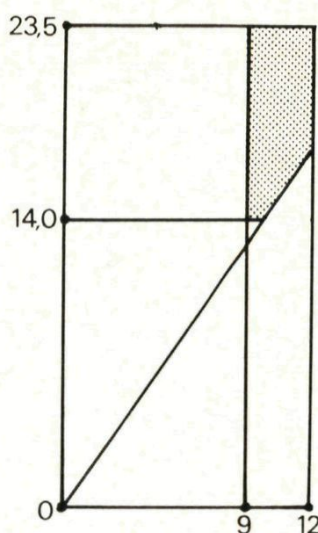


Fig. 1. Kenmerkende positie voor het vierde hoekpunt.

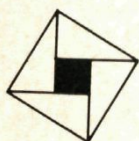
In fig. 1 is het gebied gearceerd waar het bedoelde hoekpunt terecht moet komen om gebruik te mogen maken van het goedkope tarief. Ga dat zelf maar na.

Het zal duidelijk zijn dat de schuine lijn door de oorsprong de richtingscoëfficiënt 1,41 heeft en dus de vergelijking $y = 1,41 x$.

De gearceerde vijfhoek is dus een soort meetinstrument waarmee standardeigenschappen van brieven gemakkelijk getest kunnen worden.

Bij de Bundespost is dat zelfs gemechaniseerd. Met behulp van lichtstraal en fotocel wordt de kritieke positie van het vierde hoekpunt getest.

Oplossing denkertjes vorig nummer



1. Hoe kun je met twee even grote trisectoren een hoek in vijven delen?
In de figuur hiernaast vind je de oplossing getekend.

2. a (Zie de figuur) $F = (\cos \varphi, \sin \varphi) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$.

b De formule

$$\cos \varphi = 2 \cos^2 \varphi/2 - 1 = 1 - 2 \sin^2 \varphi/2$$

geeft

$$\cos \varphi/2 = \sqrt{\left(\frac{\cos \varphi + 1}{2}\right)}, \quad \sin \varphi/2 = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \varphi}{2}\right)},$$

dus de snijpunten van de eenheidscirkel met de binnenbissectrice zijn

$$\left(\pm \sqrt{\left(\frac{a + \sqrt{(a^2 + b^2)}}{2\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right)}, \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)} - a}{2\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right)} \right)$$

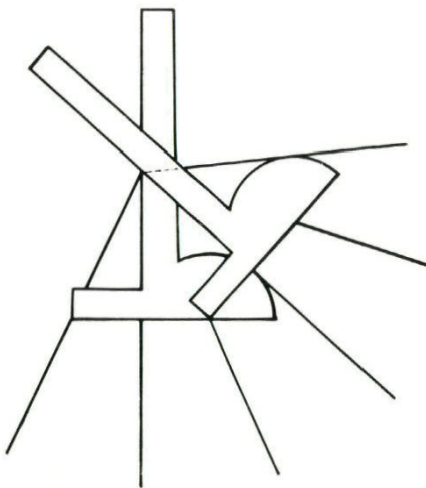
en die met de buitenbissectrice

$$\left(\pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)} - a}{2\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right)}, \mp \sqrt{\left(\frac{a + \sqrt{(a^2 + b^2)}}{2\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right)} \right).$$

c De formules $\cos \varphi = \cos \frac{2\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3} - \sin \frac{2\varphi}{3} \sin \frac{\varphi}{3} = 4 \cos \frac{3\varphi}{3} - 3 \cos \frac{\varphi}{3}$ en $\sin \varphi = \sin \frac{2\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3} + \sin \frac{\varphi}{3} \cos \frac{2\varphi}{3} = 3 \sin \frac{\varphi}{3} - 4 \sin \frac{3\varphi}{3}$ geven de gevraagde vergelijkingen.

3. Hyperbool $y^2 + 2y - x^2 = 0$;
cirkel $y^2 - 2ry + x^2 = 0$.

Voor $r = 1$ vallen alle snijpunten net samen.



Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

- < W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn.
- ↘ Ir. H. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginniken.
- ✓ G.A. Vonk, Wagnerlaan 18, 1411 JE Naarden.
- ∫ Dr. J. van de Craats, R.U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden.

Redactiesecretariaat

- ★ Drs. H.N. Pot, Tournoyveld 67, 3443 ER Woerden.
Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

W. Ganzevoort, M.C. van Hoorn, H. Pot, W. Pijls, D.K. Wielenga.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,40 per jaargang. Voor anderen f 12,10*.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

* Per abuis zijn op afl. 1 verkeerde abonnementsprijzen opgenomen.

Inhoud

- | | |
|---|--|
| Cirkels op een torus 25 | ∫ Pythagoras Olympiade 44 |
| ∫ Een schoonheidsprijs voor een stelling? 28 | ↘ Rollend naar de vierde dimensie . . . 45 |
| ★ De stereografische projectie 32 | ↘ Een wiskundig voorschrift voor een posttarief 48 |
| De XXIIe Internationale Wiskunde Olympiade 39 | Oplossingen denktjes vorig nummer 48 |

