3

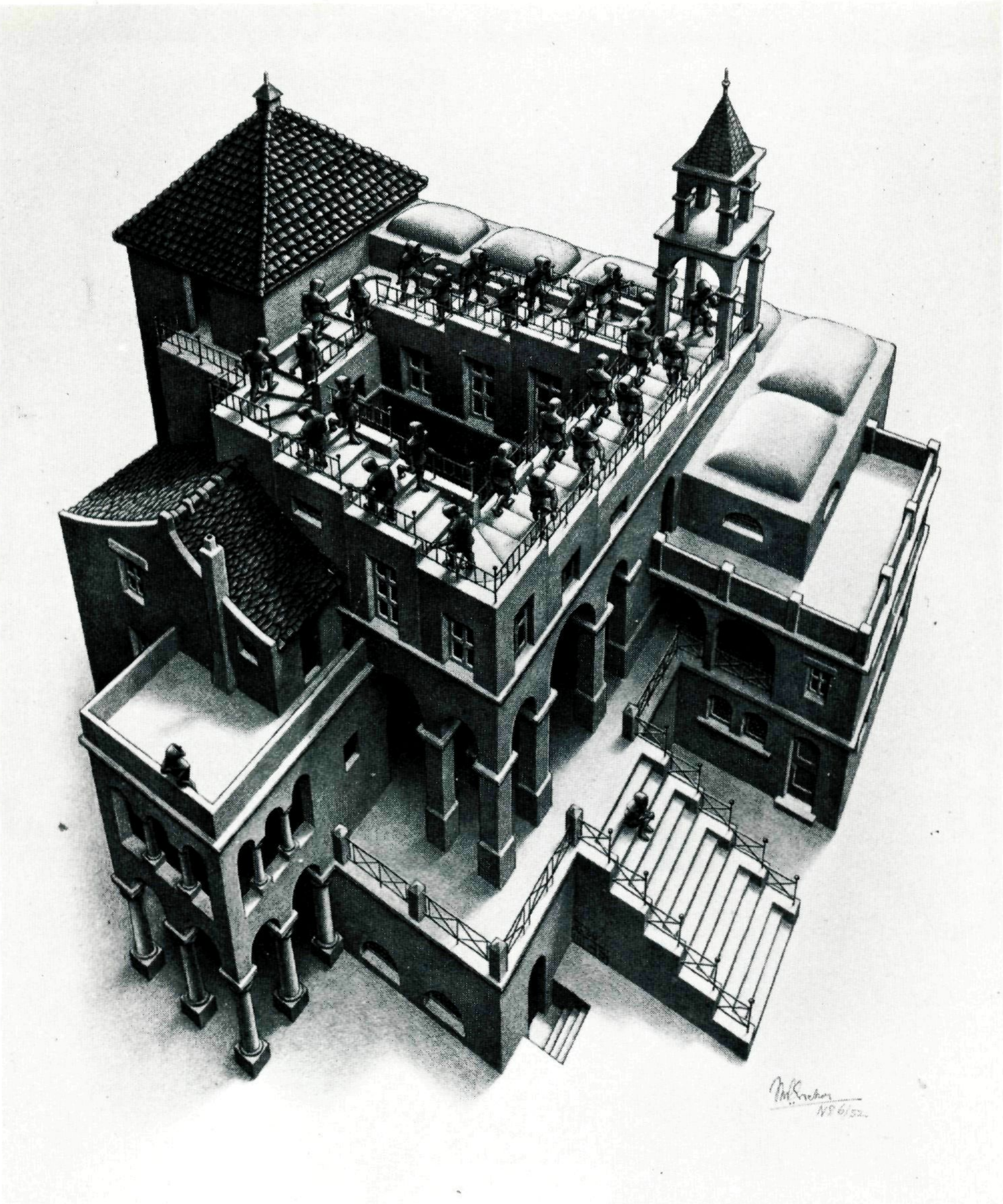
jaargang 19 / januari 1980

wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff

verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Doelloos klimmen en dalen deze mannen op een trap die nergens toe leidt. Zij komen hoger noch lager. Het geheim achter de constructie van deze trap vind je in het artikel 'Het quasi-eindeloze'.

BIJ DE PRENT OP DE OMSLAG
Een zelfportret van Escher op 45-jarige leeftijd. Hij gebruikte hiervoor een speciale techniek: met zwart vetkrijt werd eerst het hele blad diepzwart gemaakt, daarna krabde hij met een mesje het krijt weer weg op de delen die lichter moesten worden.

Maurits Cornelis Escher werd op 17 juni 1898 in Leeuwarden geboren en hij stierf in Laren op 27 maart 1972. Na zijn schoolperiode leefde en werkte hij tot vlak voor de tweede wereldoorlog in Italië. Zijn leven daar was uiterlijk vol afwisseling, omdat hij een groot deel van elk jaar het Middellandse-Zeegebied bereisde om schetsen te maken die hij thuis uitwerkte tot houtsneden en litho's. Wat hij toen maakte was goed vakwerk, maar het viel niet op tussen het werk van andere beoefenaars van de grafische kunst.
Na 1937 verandert zijn leven én zijn werk. Nadat hij in 1941 in Baarn is gaan wonen, lijkt zijn leven vrij eentonig. Hij maakt nog wel een aantal reizen, maar die schijnen weinig invloed op zijn werk te hebben. Dat concentreert zich hoe langer hoe meer op overdenkingen van het *verschijnsel tekenen*: het uitbeelden van iets ruimtelijks op een plat vlak. Wát hij in feite uitbeeldt is minder belangrijk dan het verschijnsel van het uitbeelden zélf. Elke nieuwe prent vertelt ons hoe ver hij gevorderd was met zijn onderzoek naar dat uitbeelden. Het uiterlijk schijnbaar eentonige leven is de achtergrond voor een fantastische reis in het onbekende.
Aanvankelijk voelden vooral studenten en beoefenaars van de exacte wetenschappen zich tot zijn werk aangetrokken en wat later werd hij ongekend populair, vooral in Nederland en in de Verenigde Staten. Op het ogenblik groeit ook de belangstelling in Frankrijk, Duitsland en Japan. Zijn originele prenten zijn bijna niet te krijgen en brengen op kunstveilingen meer dan het honderdvoudige op van wat hij er zelf eens voor vroeg. Het aantal verkochte reprodukties van zijn werk is al ver boven een miljoen gestegen!
In de afgelopen jaargangen van *Pythagoras* hebben we vele malen aandacht besteed aan de wiskundige achtergrond van Eschers werk en nog steeds bereiken de redactie verzoeken om nieuwe Escher-artikelen. Voor de meeste *Pythagoras*-lezers zijn echter de vroegere artikelen niet meer toegankelijk; je kunt ze alleen maar vinden in gebonden exemplaren van oude jaargangen in bibliotheken.
Daarom geven we hier een bloemlezing van Escher-artikelen die in vroegere jaargangen verschenen zijn. Wie een volledig overzicht wil hebben van Eschers werk, van het doel van elke prent, de middelen die hij gebruikte en de wiskundige achtergrond, verwijzen we naar *De toverspiegel van M. C. Escher* door Bruno Ernst, uitgegeven bij Meulenhoff te Amsterdam.

Prentententoonstelling

Toen ik de litho 'Prentententoonstelling' van Escher voor het eerst zag, was ik er niet van 'ondersteboven'. Bij een verder indringen kwam echter de verrassing: er is aan deze prent zeer veel te beleven. Het is misschien wel de knapste die Escher ooit bedacht en uitgevoerd heeft.

Laten we de prent eerst als een argeloze beschouwer tegemoet treden. Rechts onderaan is de ingang van een galerij waarin een prentententoonstelling gehouden wordt. Gaan we naar links, dan zien we een jongeman staan, die een van de prenten, die tegen de wand hangen, bekijkt. Hij ziet op die prent een schip en verderop, links boven dus, huizen langs de kade. Gaan we nu naar rechts, dan zet zich de huizenrij langs de kade voort. Helemaal rechts gekomen laten we de blik naar be-

neden dwalen tot we onderaan bij het hoekhuis komen: we zien een galerij waarin een prentententoonstelling gehouden wordt. Gaan we nu langs de onderkant weer naar links, dan komen we in de linkerhoek een jongeman tegen die naar een prent staat te kijken.
Het meest verrassende is wel, dat deze jongeman op dezelfde prent staat als waarnaar hij staat te kijken. Toen we hem voor de eerste keer ontmoetten was hij een bezoeker van de tentoonstelling en bij de tweede ontmoeting is hij een figuurtje op de prent waarnaar hij zojuist stond te kijken.
Met behulp van de gegevens die Escher zelf zo vriendelijk was te verstrekken, gaan we nu wat dieper in op de constructie van de prent.
Zijn bedoeling was een gesloten ringvormige uitdijing te verbeelden die nergens begint en nergens eindigt. We kunnen dit het beste verduidelijken met een paar eenvoudige schetsjes (fig. 1 en 2).
Rechts onderaan in het vierkant (fig. 1) is een figuurtje getekend. Gaan we nu langs

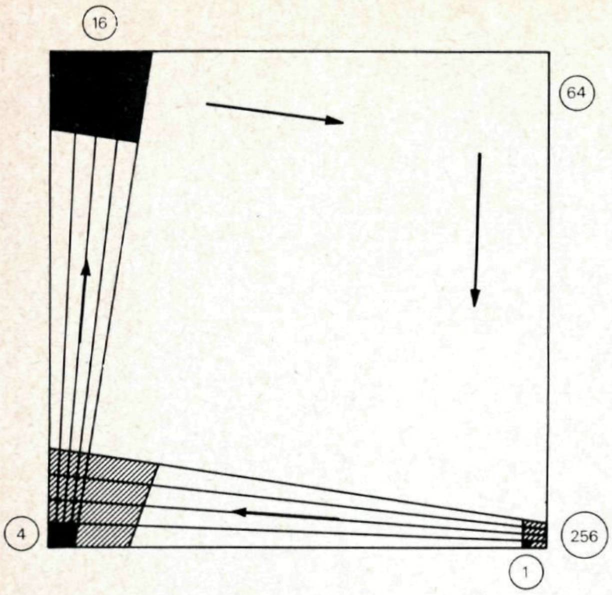


Fig. 1.

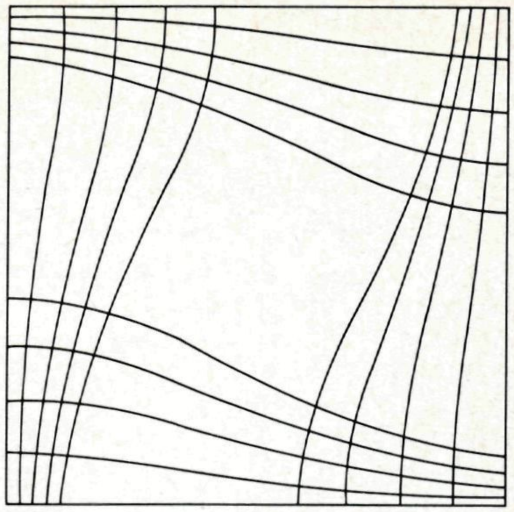


Fig. 2.

de onderrand naar links, dan wordt dit figuurtje steeds groter. Tegen de linkerrand is een viervoudige vergroting bereikt. De afmetingen van het kleine zwarte figuurtje zijn nu ook vier maal zo groot geworden.

Gaan we langs de linkerrand van onderen naar boven, dan is bovenaan weer een viervoudige lineaire vergroting bereikt, zodat de afmetingen van het oorspronkelijke zwarte figuurtje daar zestien maal vergroot terugkomen. Langs de bovenkant naar rechts wordt alles weer vier maal vergroot en ten slotte nóg eens van boven naar beneden. Wat oorspronkelijk 1 mm lang was onder in de rechterhoek, is na één maal rond te zijn geweest 256 mm geworden.

Misschien voel je al aan dat het een vrijwel onmogelijke opgave wordt dit idee in beeld te brengen. In het schetsje zijn we dan ook niet verder gegaan dan twee stappen, de twee overige stappen zijn slechts met pijltjes aangeduid.

Escher heeft aanvankelijk geprobeerd dit idee met behulp van rechte lijnen uit te werken. Intuïtief kwam hij echter op de gebogen lijnen die in het tweede schetsje zijn weergegeven (fig. 2). De oorspronkelijke vierkantjes blijven dan ook 'meer vierkant'. Met behulp van dit netwerk was al een groot deel van de prent te tekenen, er bleef echter een leeg 'vierkant' in het midden open.

Het bleek mogelijk dit 'vierkant' van een zelfde net te voorzien als het oorspronkelijke. Door dit nog enige keren te herhalen, ontstond het net dat je afgebeeld vindt in fig. 3. $A'B'C'D'$ is het oorspronkelijke vierkant. $ABCD$ is een uitbreiding naar buiten, die we nog niet vernoemd hebben.

Dit prachtige regelmatige netwerk nodigt zeker uit tot een nadere wiskundige bestudering. Verschillende wiskundigen (o.a. prof. Van Dantzig en prof. Van Wijngaarden) hebben getracht het te analyseren. Hun resultaten zijn echter te ingewikkeld om ze hier weer te geven.

In fig. 1 zie je dat slechts twee stappen van de vergroting getekend zijn. In feite doet Escher dit ook in zijn prent. Van rechts onder naar links boven zien we de galerij steeds groter worden. De laatste twee stappen zouden onmogelijk binnen het vierkant uitgevoerd kunnen worden, omdat er een steeds groter oppervlakte nodig is om de vergroting van het geheel weer te geven. Het is een prachtige vondst om voor de laatste twee stappen de aan-

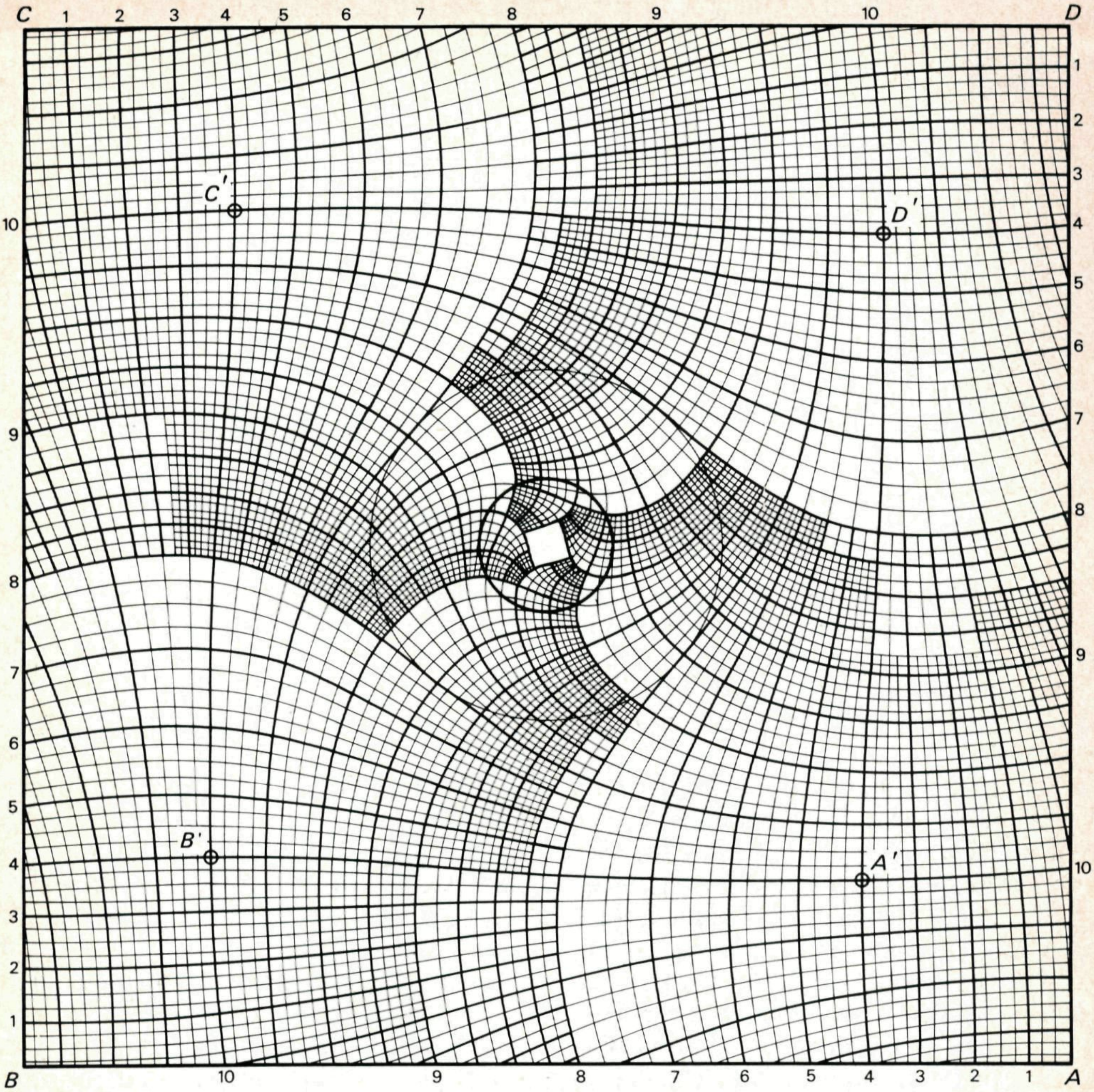


Fig. 3.

dacht te vestigen op een der prenten in de galerij. Deze prent kan weer binnen het vierkant weergegeven worden met toenemende vergroting (tot zestien maal). Een nieuwe vondst is nu weer dat Escher op de laatstgenoemde prent een galerij laat voorkomen die samenvalt met de galerij waarmee hij begonnen is.

Nu moeten we nog nagaan hoe Escher, uitgaande van een normale tekening, deze overgebracht heeft op het vooraf geconstrueerde net.

Van dit vrij ingewikkelde procédé zullen we slechts een klein gedeelte bekijken. Fig. 4 geeft een der deeltekeningen weer: de galerij. Over deze tekening is een net van vierkanten gelegd (je zou ook kunnen zeggen: het is op roosterpapier getekend). De punten A, B en A' vinden we ook op het net van fig. 3. We vinden daar ook hetzelfde rooster terug, maar nu vervormd: naar links steeds groter wordend. Nu is het beeld van elk ruitje van de oorspronkelijke tekening in het overeen-

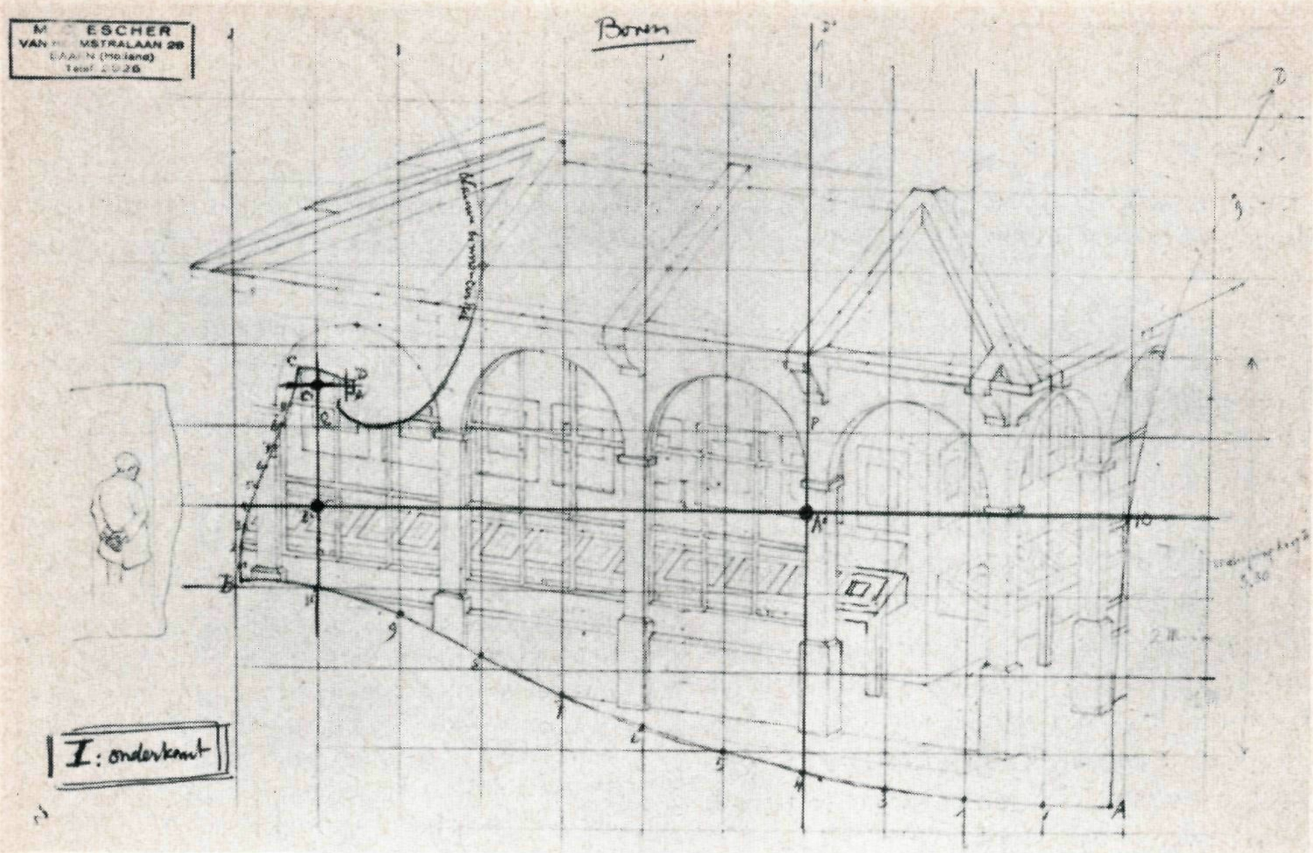


Fig. 4.

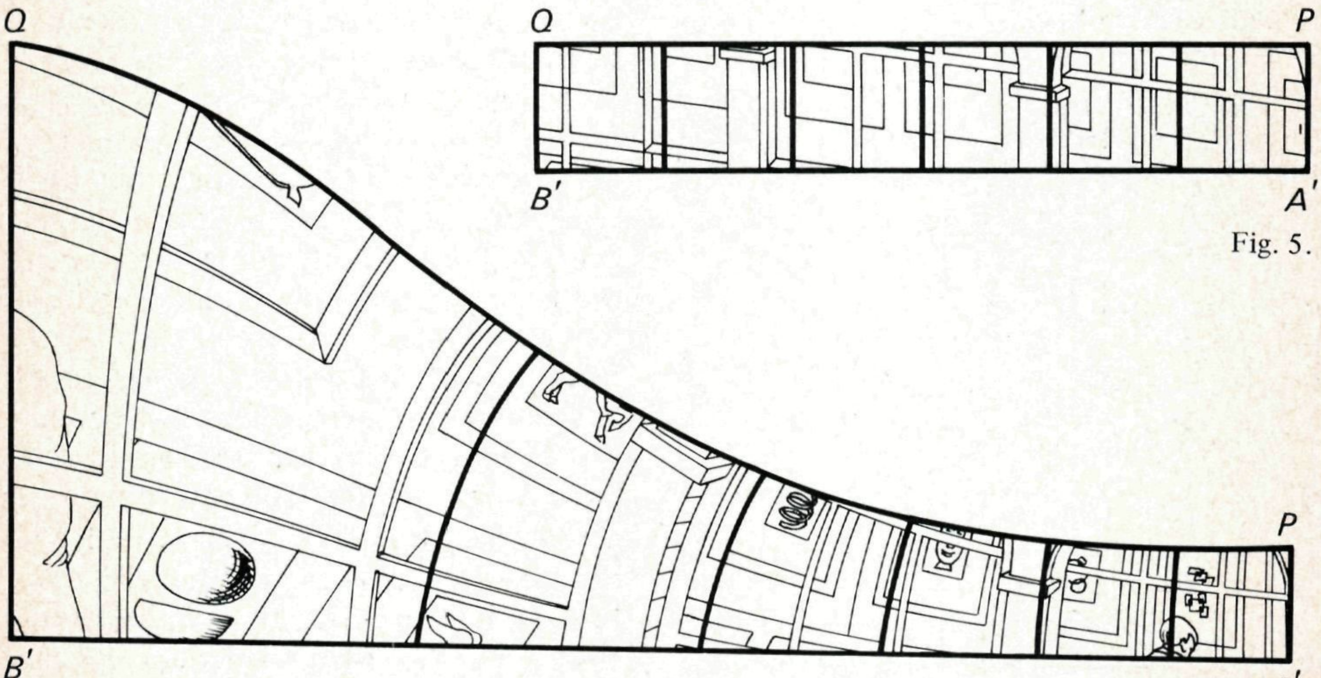


Fig. 5.

Fig. 6.

komstige ruitje van het net getekend. Daardoor ontstaat vanzelf de toenemende vergroting van het beeld.

Het is instructief na te gaan wat er gebeurd is met de rechthoek $A'PQB'$ uit de oorspronkelijke tekening. Fig. 5 en fig. 6 kunnen je daarbij helpen.

°Hol en bol

Als we fig. 1 bekijken, valt het ons moeilijk om slechts datgene te zien wat er getekend staat, nl. drie congruente ruiten, of als je wilt, een regelmatige zeshoek met drie halve diagonalen. We interpreteren de hele afbeelding onmiddellijk als een ruimtelijke figuur.

Het wonderlijke is nu, dat fig. 1 twee heel verschillende ruimtelijke figuren in ons kan oproepen en dat, bij aandachtig bekijken, nu eens de ene, dan weer de andere ruimtefiguur gezien wordt.

Let eens op het middelpunt van de zeshoek. Als je dit opvat als het dichtstbijzijnde punt van de ruimtefiguur, is het een kubus waarvan een hoekpunt naar ons toegericht is. Vat je dit punt op als het punt dat het verste van ons af ligt, dan kijk je *in* een kubus. In het eerste geval komen de drie vlakken naar je toe en in het tweede gaan ze van je af. Je zou het ook zo kunnen uitdrukken: in het eerste geval zien we de figuur bol en in het tweede geval hol.

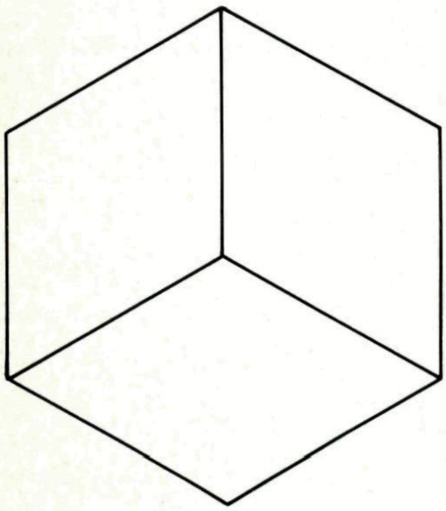


Fig. 1.

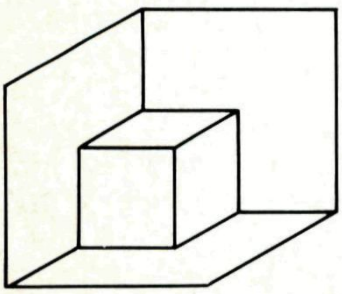


Fig. 2.

In fig. 2 zijn twee van dergelijke figuren in elkaar getekend. Elke figuur laat twee ruimtelijke interpretaties toe, zodat de hele afbeelding vier verschillende ruimtelijke figuren kan voorstellen. Probeer deze eens te zien. Drie ervan springen gemakkelijk in het oog, maar de vierde is erg ongewoon.

Fig. 3 laat theoretisch heel wat interpretaties toe. Het verband tussen de verschillende onderdelen is echter zo sterk, dat er maar twee gezien kunnen worden. Stel je eerst maar eens voor dat het een stucversiering is aan het plafond en denk daarna dat het hele geval op de grond staat. Ook de trap van fig. 4 kun je hangend of staand zien.

Escher heeft op dit thema een prachtige prent gemaakt met de titel 'Hol en bol'. De prent is symmetrisch opgebouwd. Aan de linkerkant is door schaduwwerking en door de kleine figuurtjes (de vrouw met een mand, de slapende jongen, de arbeider, de takel, de bloempot, de hagedis enz.) de suggestie gewekt dat het geval 'bol staat'. Als je de rechterkant van de figuur afdekt met een stuk papier, is het ook onmogelijk het anders te interpreteren. Op een geraffineerde manier is de rechterhelft van de prent zo getekend, dat je het alleen maar als 'hol' kunt interpreteren.
Het wonderlijke is nu, dat je bij het kijken van links naar rechts de interpretatie 'bol' een tijdlang kunt volhouden in het 'holle' gebied. Zo kun je bijvoorbeeld met de vrouw de trap aflopen, op het platform met het schelpvormige bekken blijven staan en dan een trap aan de rechterkant oplopen, tot . . . je ontdekt dat dit helemaal geen trap is maar een brug. Maar dan is het te laat en je hangt op een rare

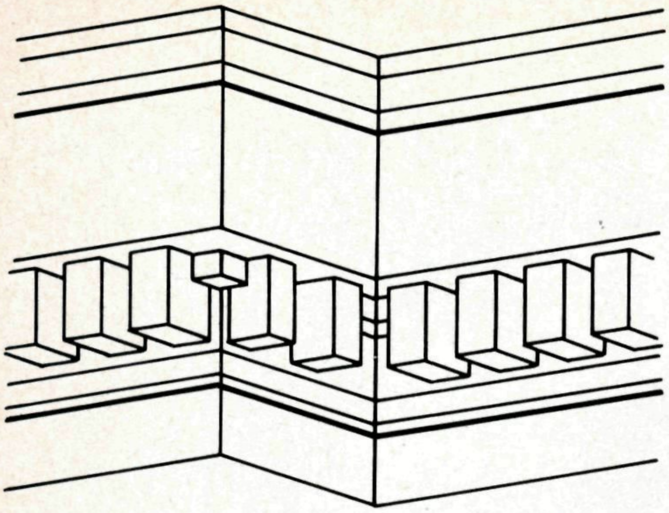


Fig. 3.

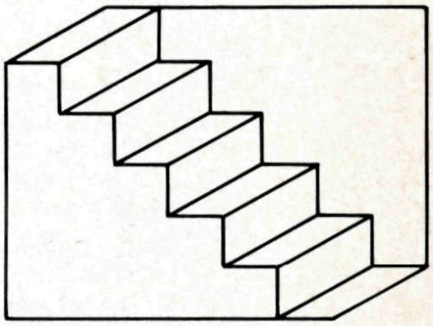
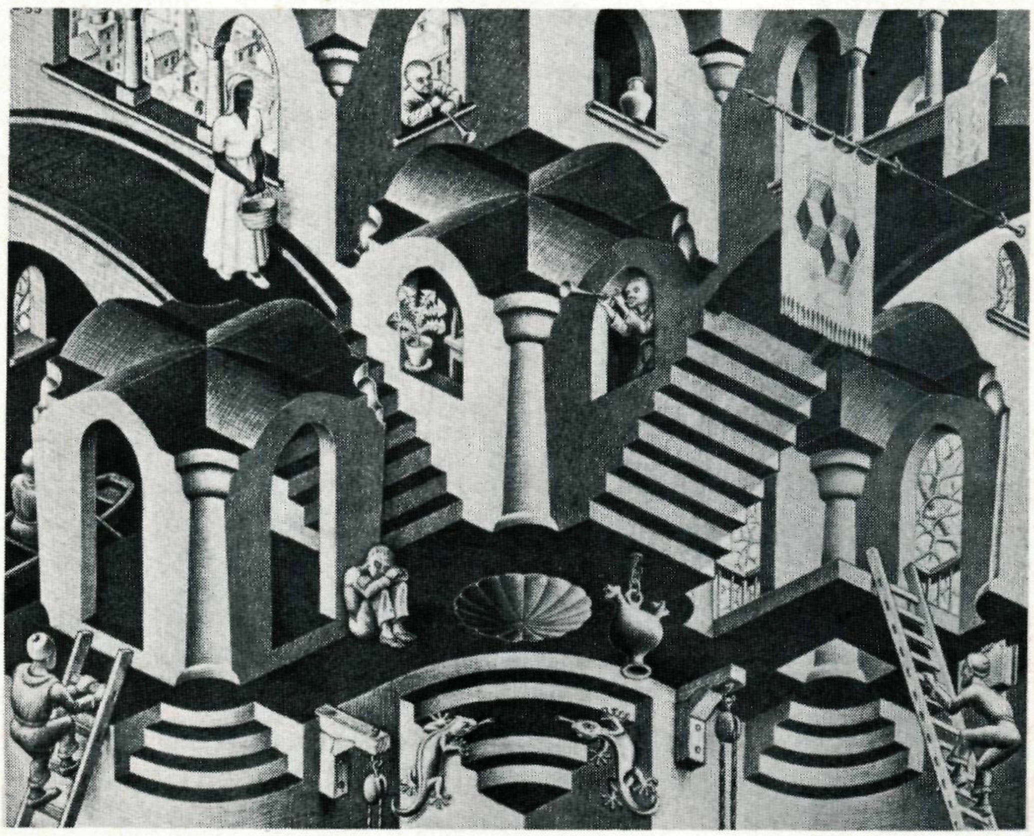


Fig. 4.

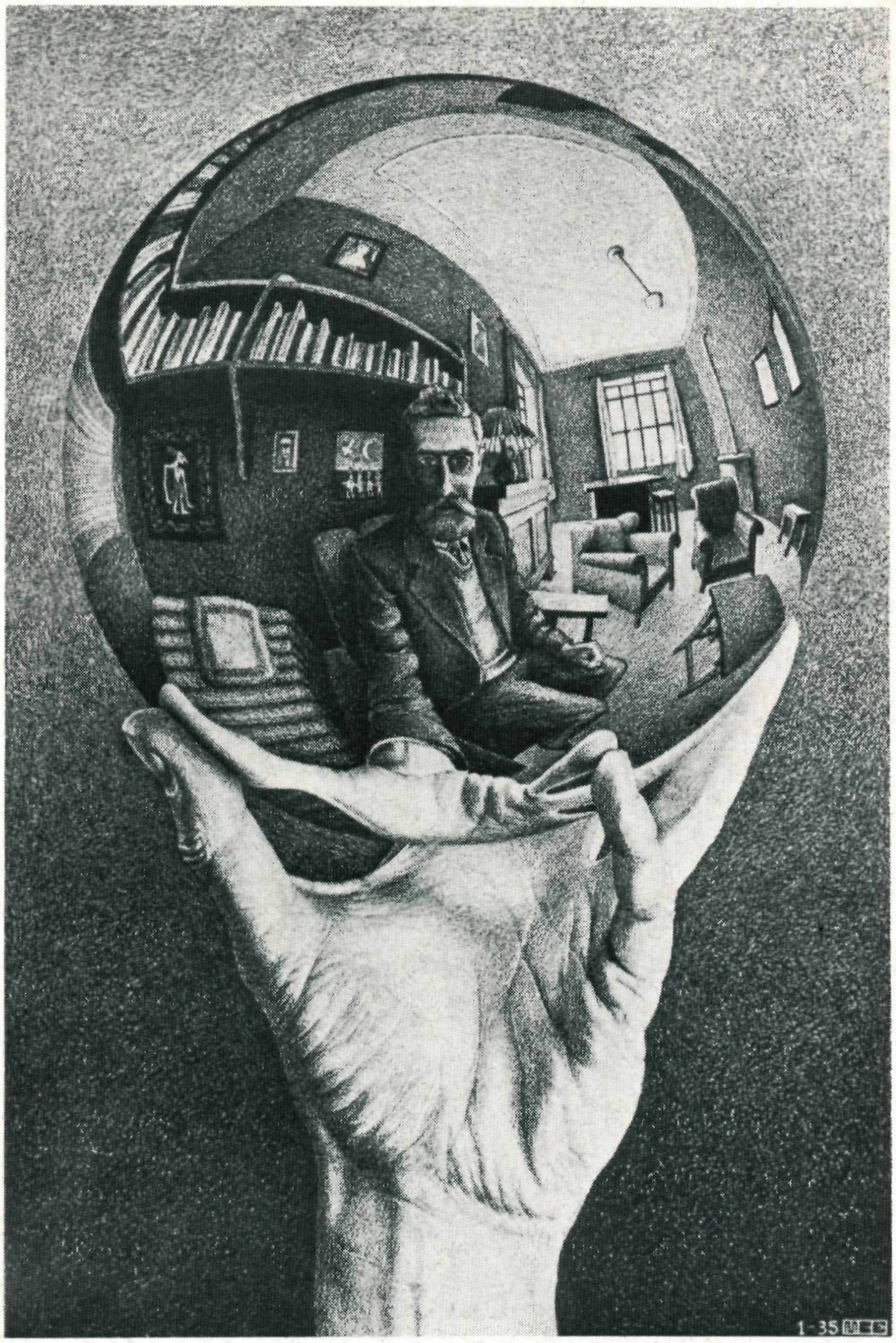
manier tegen de onderkant van de brug aan.
Begin je echter met aan de rechterkant onder tegen de brug aan te kijken, dan beleef je weer een andere vreemde gebeurtenis als je bij de slapende jongen gekomen bent.



Dit is slechts één voorbeeld van de vele wonderlijke belevenissen die je, al dwalende door deze vreemde ruimtesuggestie van Escher, kunt beleven. Onder aan de brug, rechts, is op een vlag het thema aangebracht waarop de prent berust.

Maar probeer nu niet de hele prent in aaneensluitende kubussen op te delen, dat lukt je niet, want . . . het onderliggende lijnenschema is veel ingewikkelder dan op de vlag staat aangegeven. Alleen de drie 'kapelletjes' zijn zonder meer als holle of bolle kubussen getekend.

Een handvol heelal



Wie met een gave kerstboombal in de hand op een klare sterrenacht buiten gaat staan, heeft in zijn hand een afbeelding van vrijwel het gehele, vanuit zijn standplaats zichtbare heelal.
Onze voorouders kenden de magische werking van de grote spiegelende tuinbal, waarin de tuin bijna geheel te overzien was onder een ruime hemel.
Het is geen wonder dat Escher gefascineerd werd door de spiegelende werking van zo'n bol. Hij tekende zich zelf met de bol in de hand in zijn litho 'Hand met spiegelende bol'. Voor we die litho gaan bekijken, is het goed eerst even de beeldvorming bij zo'n bol na te gaan.

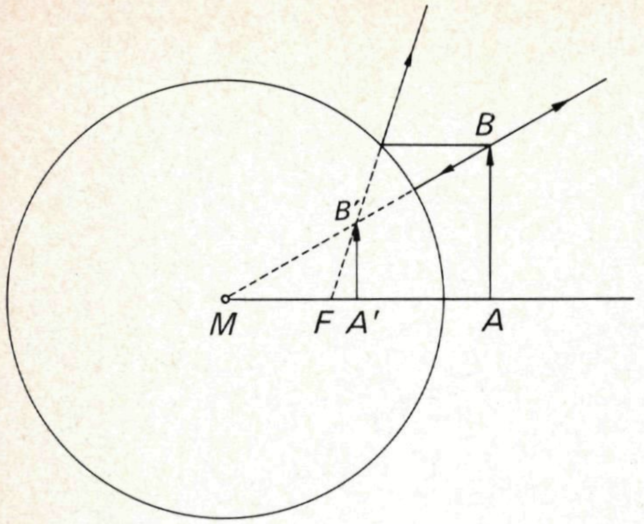


Fig. 1.

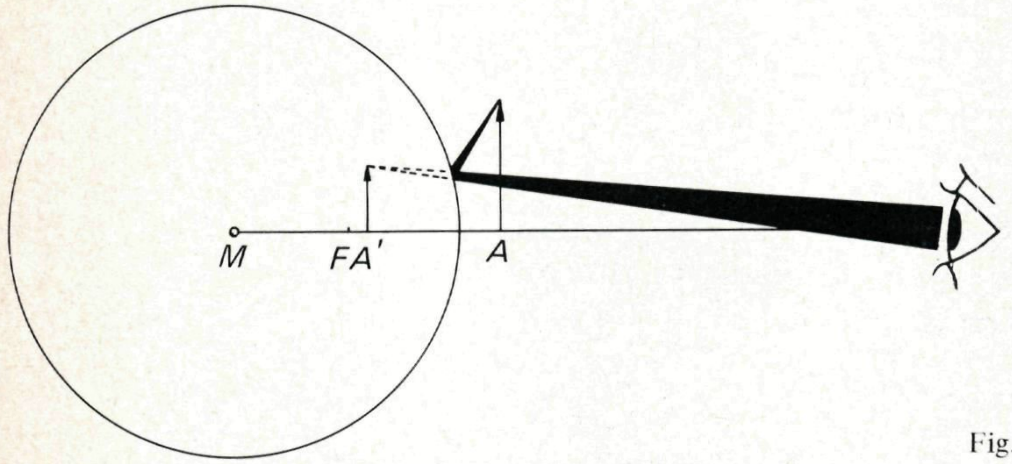


Fig. 2.

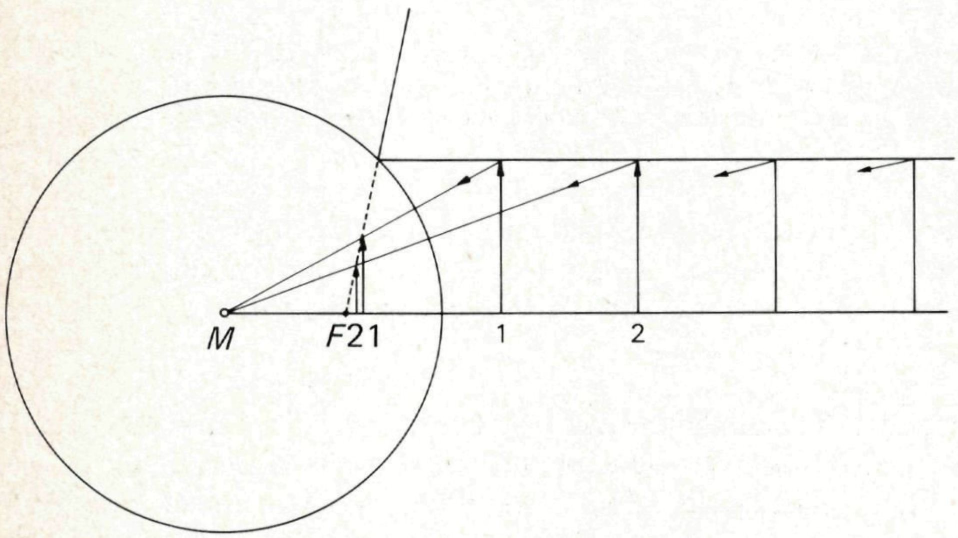


Fig. 3.

In fig. 1 is het beeld $A'B'$ van een pijltje AB geconstrueerd. Als het beeld eenmaal geconstrueerd is, kan men gemakkelijk nagaan hoe de stralen van het voorwerp via de spiegel in het oog komen (fig. 2). In fig. 3 zien we hoe een zelfde pijl steeds kleiner in de spiegel wordt afgebeeld naarmate hij verder van de spiegel verwijderd is. Hoe verder de pijl van de spiegel af staat, hoe dichter zijn beeld zich bevindt bij het brandpunt F, dat op het midden van de straal ligt, die deel uitmaakt van de rechte door het oog van de beschouwer en het middelpunt van de bol.

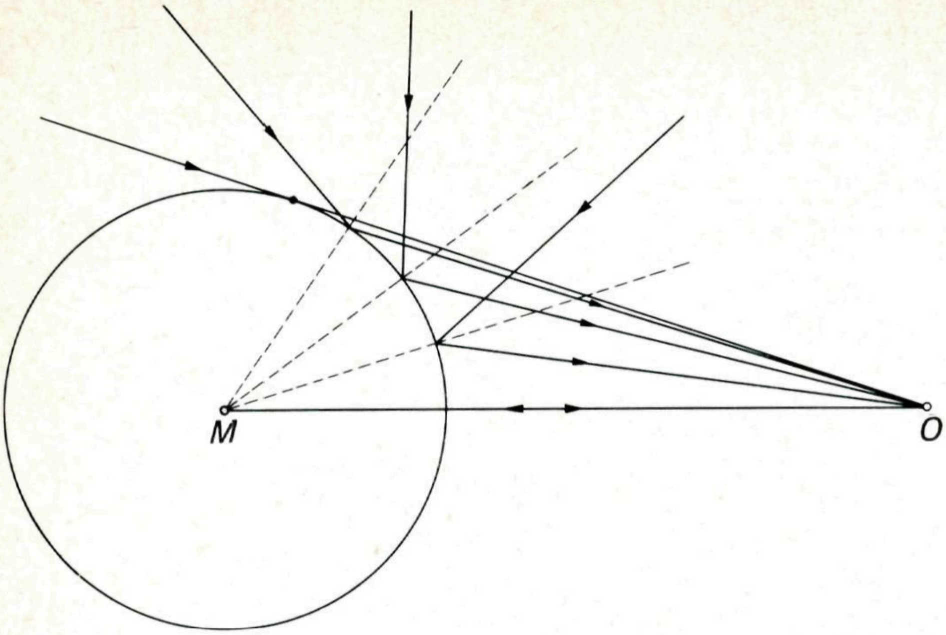


Fig. 4.

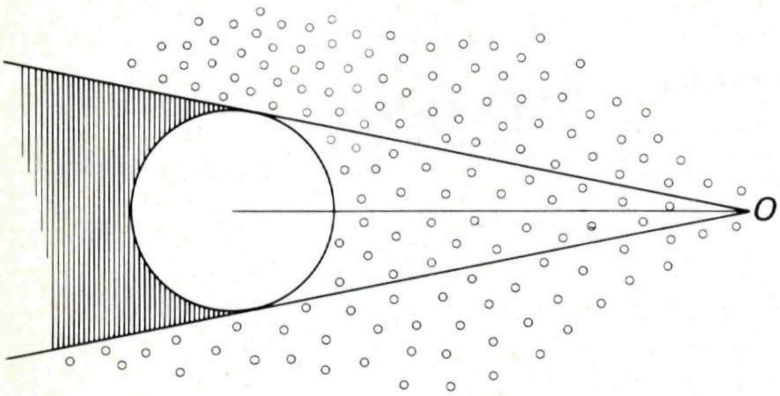


Fig. 5.

In fig. 4 gaan we na welke delen van de omgeving we nog in het beeld krijgen als het oog zich in *O* bevindt. We zien dat de kegel met *O* als top, die de bol omhult, het gebied begrenst dat niet meer in het beeld komt. Het in fig. 5 gearceerde deel stelt dit niet zichtbare gebied voor. De spiegel staat zichzelf daar in de weg.

De prent van Escher heeft de eigenaardigheid dat de beschouwer, tegelijk de tekenaar, de bol zelf vasthoudt. Je ziet zijn hand dan ook in werkelijkheid (en hoe knap getekend, heb je ooit geprobeerd een hand te tekenen?) en het spiegelbeeld daarvan in de bol.
Escher zelf schrijft hierover:

'. . . alles is, zij het verwrongen, in een kleine cirkel gecomprimeerd. Zijn eigen hoofd (dat van de tekenaar), exacter uitgedrukt: het punt midden tussen zijn ogen, ziet hij precies in het centrum van de cirkel weerspiegeld. Hoe hij zich ook wendt of draait, het gelukt hem niet uit dat middelpunt te komen: het ego blijft onwrikbaar de kern van zijn wereld.'

Een ruimtelijk gesloten kuboïde

Fig. 1 toont een detail van de litho 'Belvédère' (1958). De jongeman houdt een vorm in de hand die lijkt op een kubus, de ribben ervan zijn echter op een vreemde manier met elkaar verbonden. We zullen deze op een kubus lijkende vorm een kuboïde noemen.

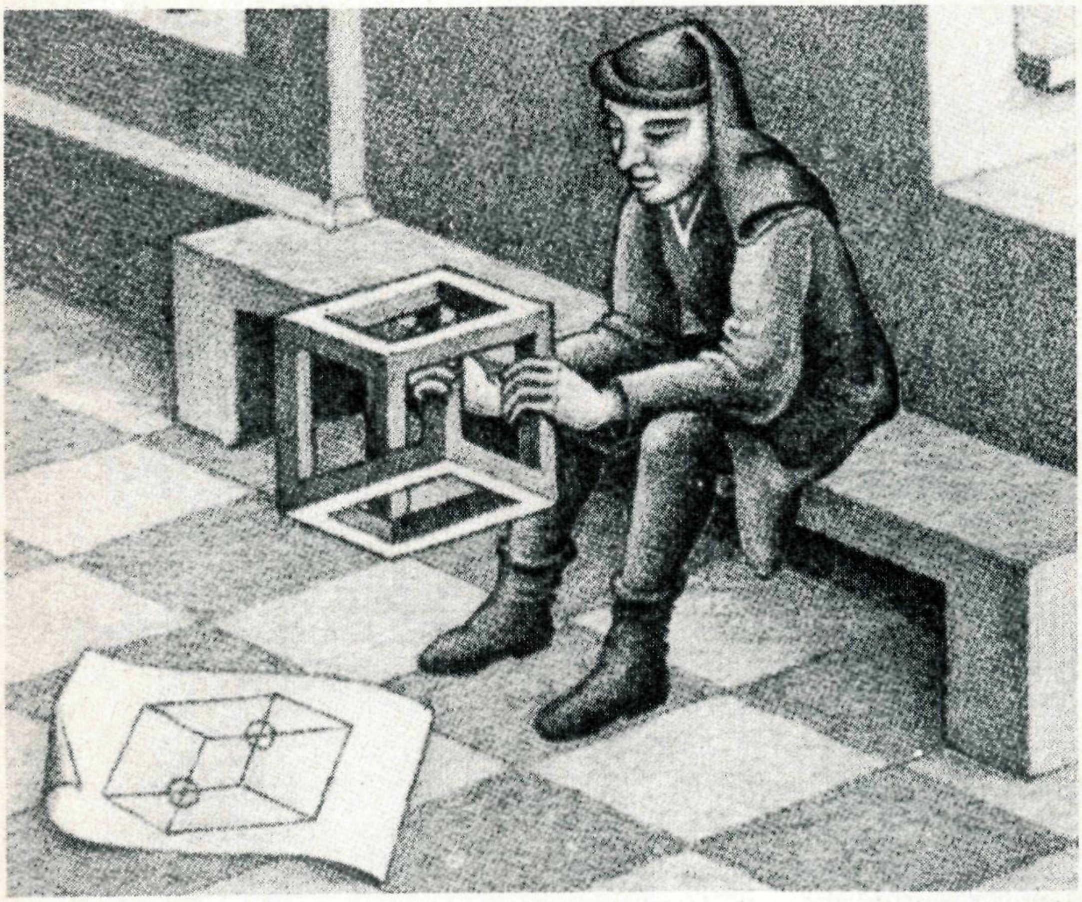


Fig. 1.

Hoe we tot een kuboïde kunnen komen, zien we in fig. 2. In fig. 2a zijn twaalf lijnstukken getekend. We kunnen ze echter moeilijk zien als een vlakke vorm. Ons voorstellingsvermogen geeft kennelijk de voorkeur aan een ruimtelijke interpretatie en we zien een kubus. De ruimtelijke vorm die we zien is echter niet stabiel: de vlakke figuur laat twee voor de hand liggende interpretaties open, naar gelang we punt P dichter bij ons denken dan Q, dan wel Q dichter bij dan P. Als we enige tijd naar fig. 2a kijken, zien we afwisselend deze twee interpretaties. In fig. 2b is door accentuering van enige details de interpretatie stabiel gemaakt. Daar zien we dan ook duidelijk twee verschillend georiënteerde kubussen.

Nu is het ook mogelijk door accentuering blijvende verwarring te stichten: zie fig. 2c. Hierin is een deel van de ene interpretatie en een deel van de andere interpretatie verenigd en er is een kuboïde ontstaan.

Nu is het eenvoudig om zo'n kuboïde in een plat vlak te tekenen, maar het is helemaal de vraag of deze vorm ook opgevat kan worden als de projectie van een ruimtelijke figuur, m.a.w. bestaat de kuboïde ook als ruimtelijke figuur?

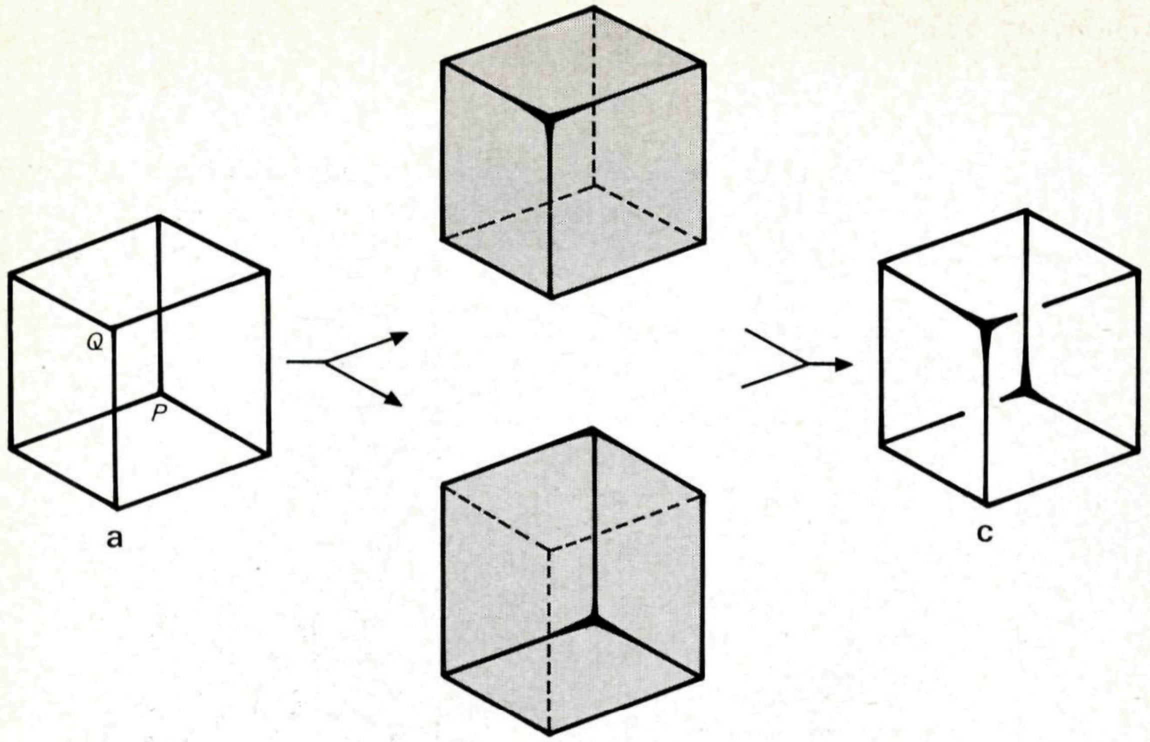


Fig. 2a, b, c.

Een bekende realisatie is die van de oogarts dr. Cochran (fig. 3). Het ziet er indrukwekkend realistisch uit. Als de ruimtelijke constructie echter vanuit een ander standpunt gefotografeerd wordt, zien we twee losse stukken (fig. 4).
Om te komen tot één ruimtelijk gesloten figuur, gaan we uit van fig. 5. We zien duidelijk de kuboïde, maar we stellen ons nu voor dat $ABCGHE$ een vlakke zeshoek is, die op de grond ligt. Van de punten D en F nemen we aan dat ze boven het vlak van tekening liggen. We kunnen nu F door stokjes verbinden met B, G en E, zodat er een viervlak ontstaat met BGE als grondvlak en F als top. Op dezelfde manier verbinden we D met A, C en H.

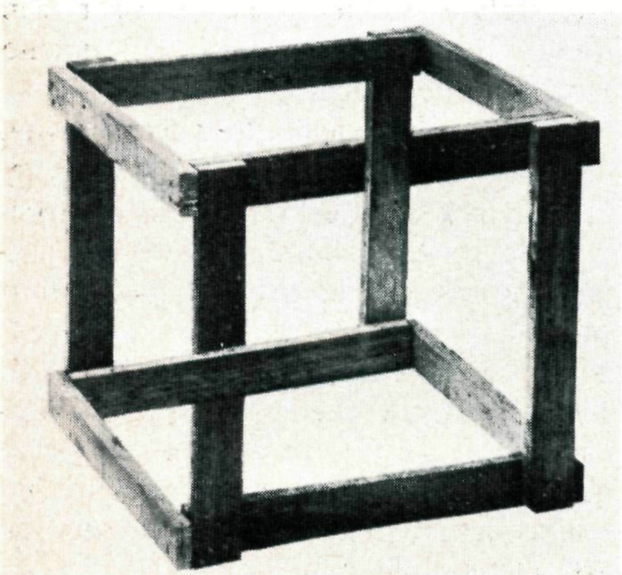


Fig. 3.

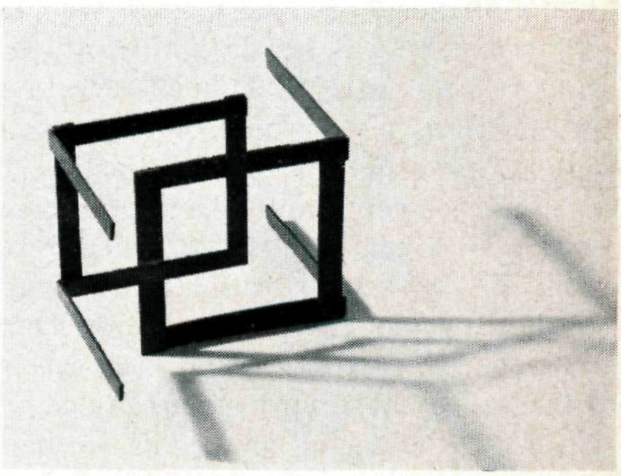


Fig. 4.

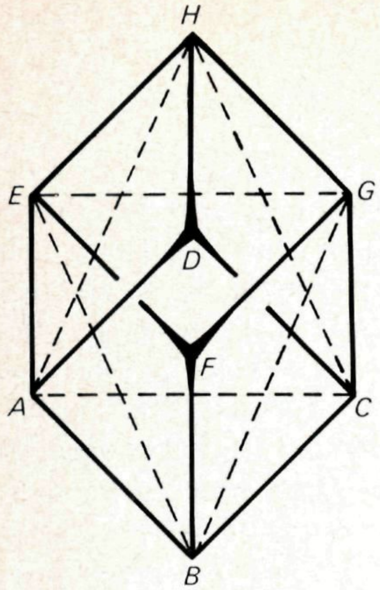


Fig. 5.

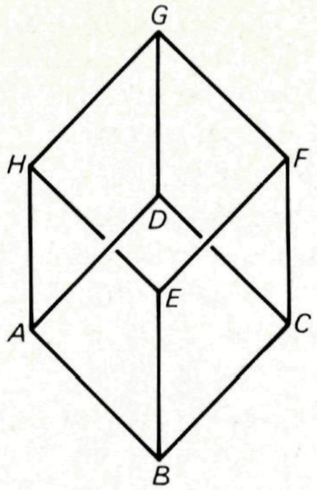


Fig. 6.

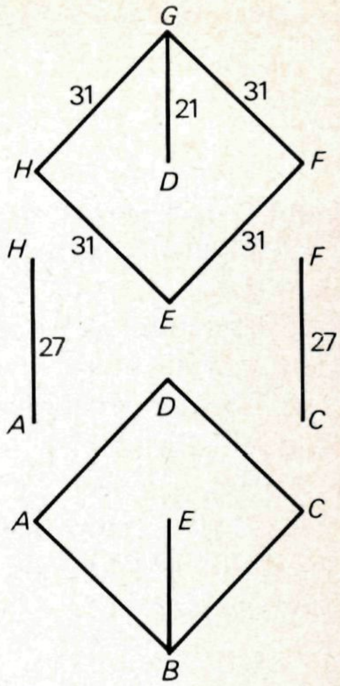


Fig. 7.

Bij de praktische uitvoering van dit idee merken we dat de opstaande stokjes elkaar in de weg zitten. Deze moeilijkheid is op te lossen door niet vast te houden aan een vlakke zeshoek *ABCGHE*. Enige oplossingen in die richting zijn gegeven door D. Baas Becking, een cineast uit Canberra. Ze leiden tot bijzonder fraaie gesloten ruimtelijke vormen, die vanuit één bepaald gezichtspunt een volmaakte kuboïde te zien geven. In mini-uitvoering heeft D. Baas Becking ze reeds toegepast als oorhangers. Bij de onderschriften van de volgende figuren staan de constructievoorschriften van één der modellen. De opgegeven maten zijn in millimeters; vanzelfsprekend kan het model vergroot of verkleind worden.

Wie wat kan solderen, kan zijn eerste exemplaren het beste maken van dik alpacadraad of koperdraad. Grote gedeelten kunnen dan eerst met een tang in vorm worden gebogen, zodat nog maar weinig soldeerplaatsen overblijven.

Fig. 6. Zo ziet het model er uit als een kuboïde.
Fig. 7. Het model bestaat uit vier losse stukken: het vierkant *ABCD*, waaraan een stukje diagonaal *BE*. Alle genoemde punten liggen in één vlak. Hetzelfde geldt voor het vierkant *HEFG* en het stukje diagonaal *GD*. Als men het vierkant *ABCD* bij *B* nog openlaat, kan het andere vierkant er in gestoken worden. De punten *EE* en *DD* worden dan tegen elkaar aangebracht en beide figuren worden zo gedraaid dat *A* boven *H* en *C* onder *F* komt. Daarna worden de losse draadstukken *AH* en *FC* op de juiste plaatsen vastgesoldeerd aan de vierkanten.

Fig. 8. Onder een bepaalde hoek zien we de ruimtelijke figuur zoals hier is afgebeeld.
Fig. 9. Als we de figuur zo kantelen dat we de punten *B*, *E*, *D* en *G* in elkaars verlengde zien, krijgen we dit beeld.

Fig. 8.

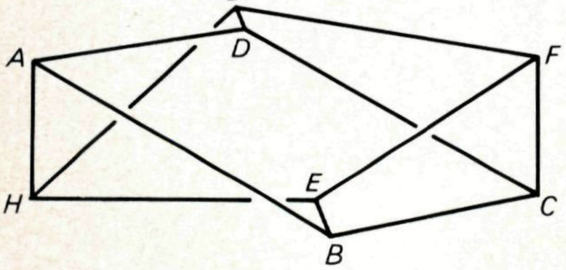
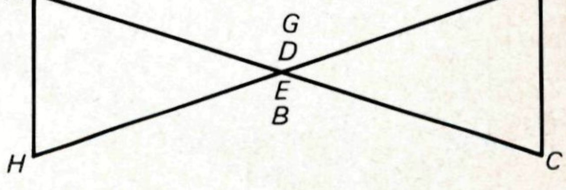


Fig. 9.



°°Het quasi-eindeloze

In de prent 'Klimmen en dalen', een litho uit 1960, worden wij geconfronteerd met een trap die 'alsmaar naar boven gaat' (of naar beneden gaat) zonder hoger te komen. Bekijken we de prent en volgen we de monniken stap voor stap, dan is er geen twijfel mogelijk: elke trede voert hen een trapje hoger. Maar na één rondgang merken we dat we weer bij het beginpunt gekomen zijn en dus, ondanks al ons stijgen, geen centimeter hoger. Het idee van dit quasi eindeloze stijgen (of dalen) vond Escher in een artikel van L. S. Penrose (fig. 1). Het bedrog komt duidelijk aan het licht als we het bouwwerk in plakken proberen te snijden: plak 1 (links boven) vinden we dan aan de onderkant (rechts voor) weer terug op een veel lager niveau (fig. 2). De plakken liggen dus niet in horizontale vlakken, maar lopen spiraalsgewijs naar boven (of naar beneden). Schijnbaar horizontaal is dus in werkelijkheid spiraalsgewijs naar boven lopend, en de trap zelf ligt juist wél in een horizontaal vlak.

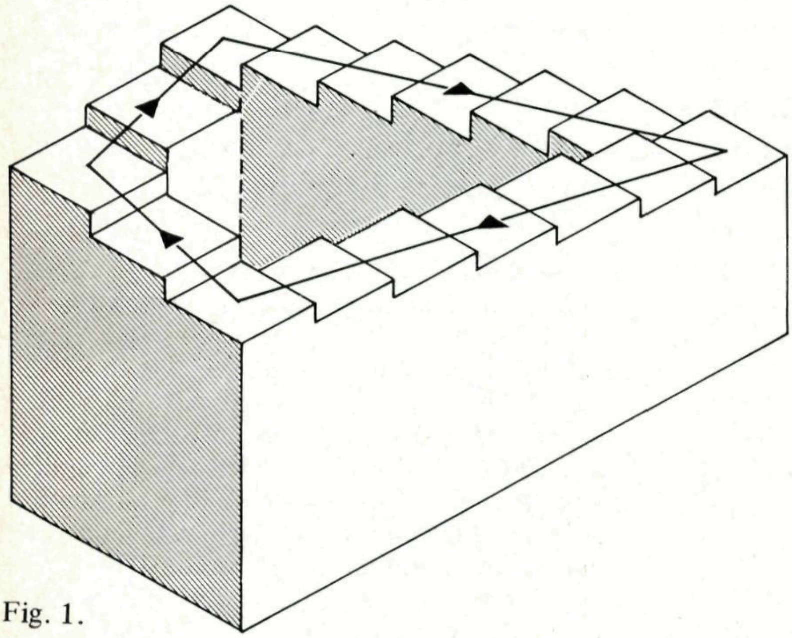


Fig. 1.

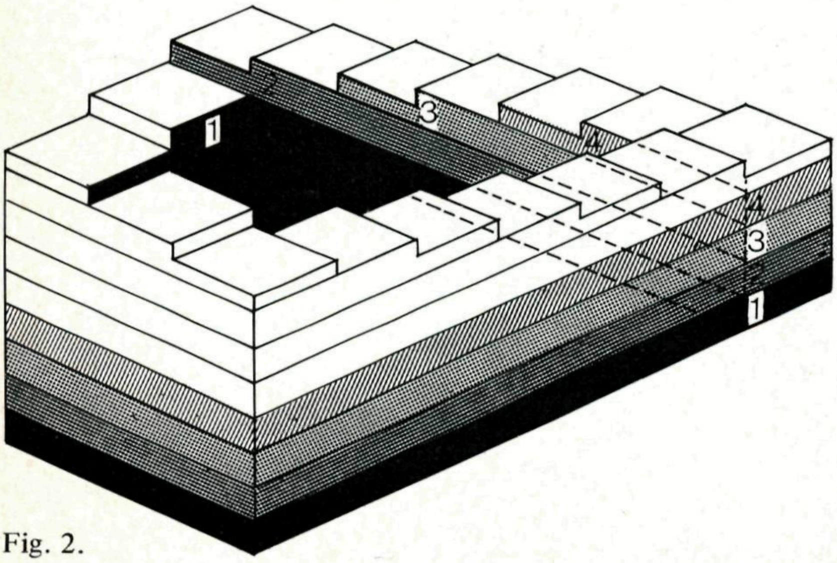


Fig. 2.

Om duidelijk te maken dat het mogelijk is in een horizontaal vlak een doorlopende trap te tekenen, proberen we er zelf een te construeren (fig. 3a, b, c, d). *ABCD* stelt een horizontaal liggend vierkant voor. In de middens der zijden tekenen we verticale lijntjes. Het is nu gemakkelijk treden te tekenen die van *A* over *B* naar *C* een stijgende trap moeten voorstellen (fig. 3a).

De moeilijkheid begint als we verder willen gaan van *C* over *D* terug naar *A*. In fig. 3b is dat zo gedaan dat de treden ons naar beneden voeren. Daarmee is de hele aardigheid verdwenen: we lopen twee treden op en twee treden af en het verwondert ons niet dat we dan op het uitgangspunt terugkomen. Doen we het echter wat anders (fig. 3c), dan blijft de trap inderdaad naar boven lopen en we zouden met het schema van fig. 3c genoegen kunnen nemen. Het gebouw dat om dit schema heen getekend zou kunnen worden, heeft dan echter een onaangename tekortkoming. De gestippelde lijnen die de richting van twee zijmuren aangeven, lopen rechts boven naar elkaar toe; dat is geen bezwaar, ze passen (met het verdwijnpunt V_1) in de perspectivische afbeelding van zo'n gebouw). De beide andere punt-streeplijnen komen echter samen in een punt V_2 rechts onder en dat verstoort de suggestie van een behoorlijk perspectivisch getekende prent.

We kunnen V_2 wel links boven krijgen als we de zijden *BA* en *DA* langer maken, bijvoorbeeld zoals in fig. 3d. Twee zijden zijn dan elk een trede langer geworden. Dat deze oplossing tot een natuurgetrouw lijkende afbeelding leidt, toont ons Eschers prent.

We hebben nu gevonden waar de prent ons misleidt: de trap ligt in een volkomen horizontaal vlak; de details van de rest van het gebouw, zoals de voetpunten der zuilen, de raamkozijnen etc. die eigenlijk in horizontale vlakken zouden moeten liggen, lopen spiraalsgewijs naar boven. De voorkant ziet er dus heel acceptabel uit, maar zou Escher op een andere prent de achterzijde getekend hebben, dan zouden we zien dat het hele gebouw in de vernieling zit.

We bekijken nu nog eens de trap uit de

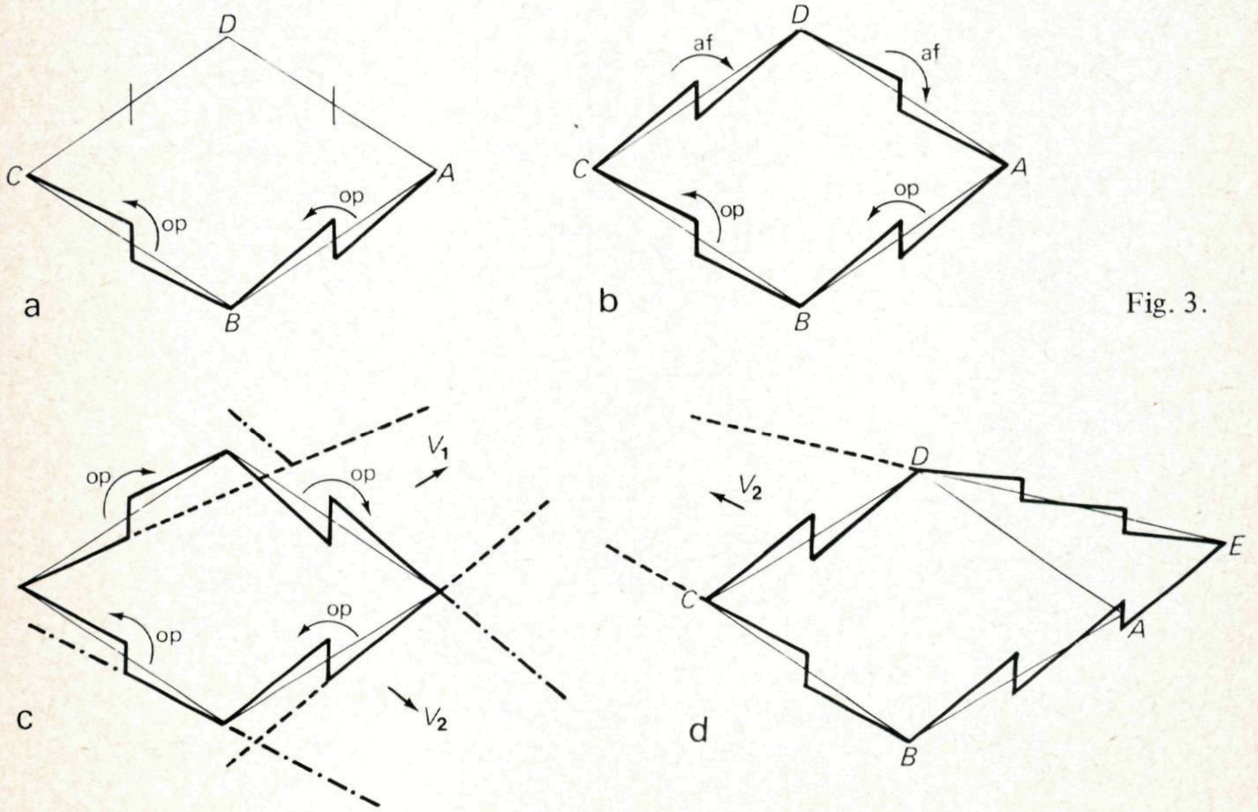


Fig. 3.

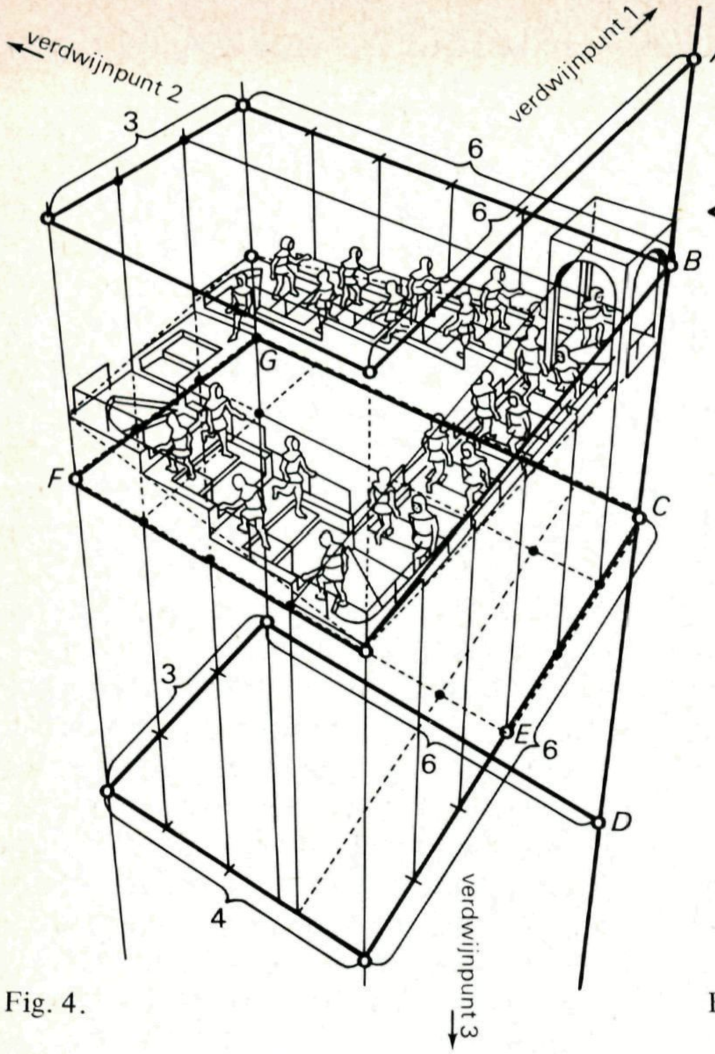


Fig. 4.

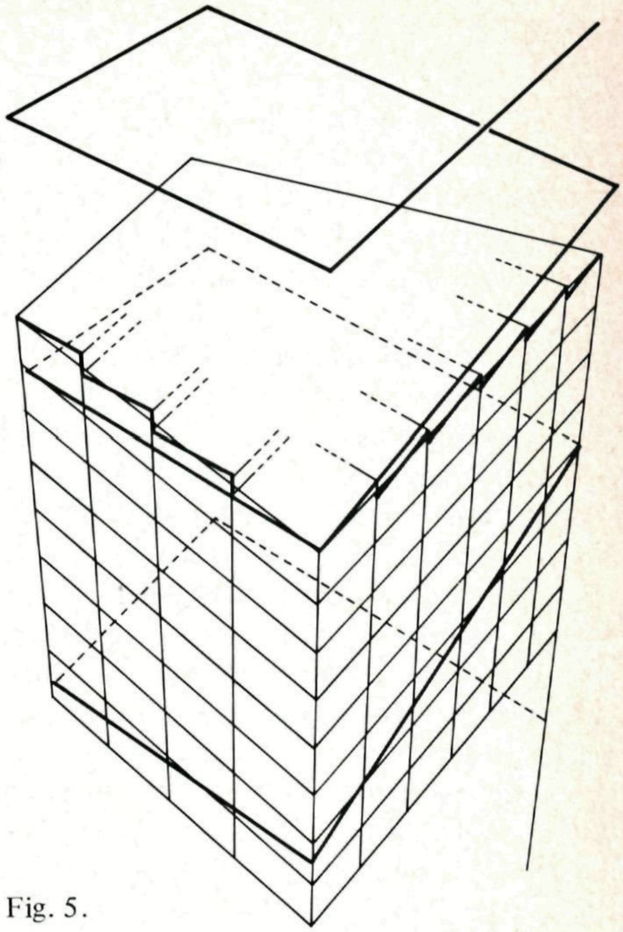


Fig. 5.

prent (fig. 4). Door verticale lijnen langs elke grote trede te trekken, merken we dat deze een prismatisch lichaam begrenzen waarvan de zijvlakken breedten hebben die zich verhouden als 6 : 6 : 3 : 4. Wat op de prent even hoog lijkt, vormt een spiraal (de dikke zwarte lijn).

Fig. 5 vat deze prent nog eens schematisch samen. De dunne zwarte lijnen geven echte horizontale vlakken (dus evenwijdig met de trap), de dikke zwarte spiraal geeft de quasi horizontale lijnen van het gebouw weer.

De prent die Escher nooit maakte

Er gaat een grote bekoring van uit als men twee werelden 'gelijkplaatselijk' ziet bestaan. Dat kan immers niet: waar het ene lichaam is, kan het andere niet zijn. We moeten er dan ook een nieuw woord voor verzinnen: gelijkplaatselijk, of het omschrijven met: tegelijkertijd dezelfde plaats innemend. Alleen de tekenaar kan ons die illusie geven en ons zo een sensatie van de eerste orde bezorgen.

Vanaf 1934 maakte Escher prenten waarin hij bewust zoekt naar de sensatie van de gelijkplaatselijkheid. Hij weet twee, soms drie werelden zo logisch en natuurlijk in één prent te verenigen, dat de beschouwer voelt: ja, zo kan het, zó kan ik in gedachten twee of drie werelden tegelijk omvatten.
Een belangrijk hulpmiddel vindt Escher in spiegelingen.
Als voorbeeld hiervan reproduceren we de litho 'Toverspiegel' uit 1946 (fig. 1).
Het spiegelbeeld is hier niet zonder meer aanwezig, maar er wordt gesuggereerd dat de spiegelbeelden tot leven komen en hun bestaan voortzetten in de andere wereld. Het doet denken aan de spiegelwereld uit *Alice in Wonderland* (door Escher hogelijk bewonderd).
Aan de kant van de spiegel die het dichtst bij de beschouwer is, zien we onder de schuine balk een vleugeltje ontstaan en zijn spiegelbeeld. Naarmate we verder gaan langs de spiegel, groeit er een volledige, gevleugelde hond uit. Maar dat niet alleen, ook het spiegelbeeld groeit en als

Fig. 1. 'Toverspiegel', M. C. Escher, litho, 1956. Escher Stichting – Haags Gemeentemuseum.

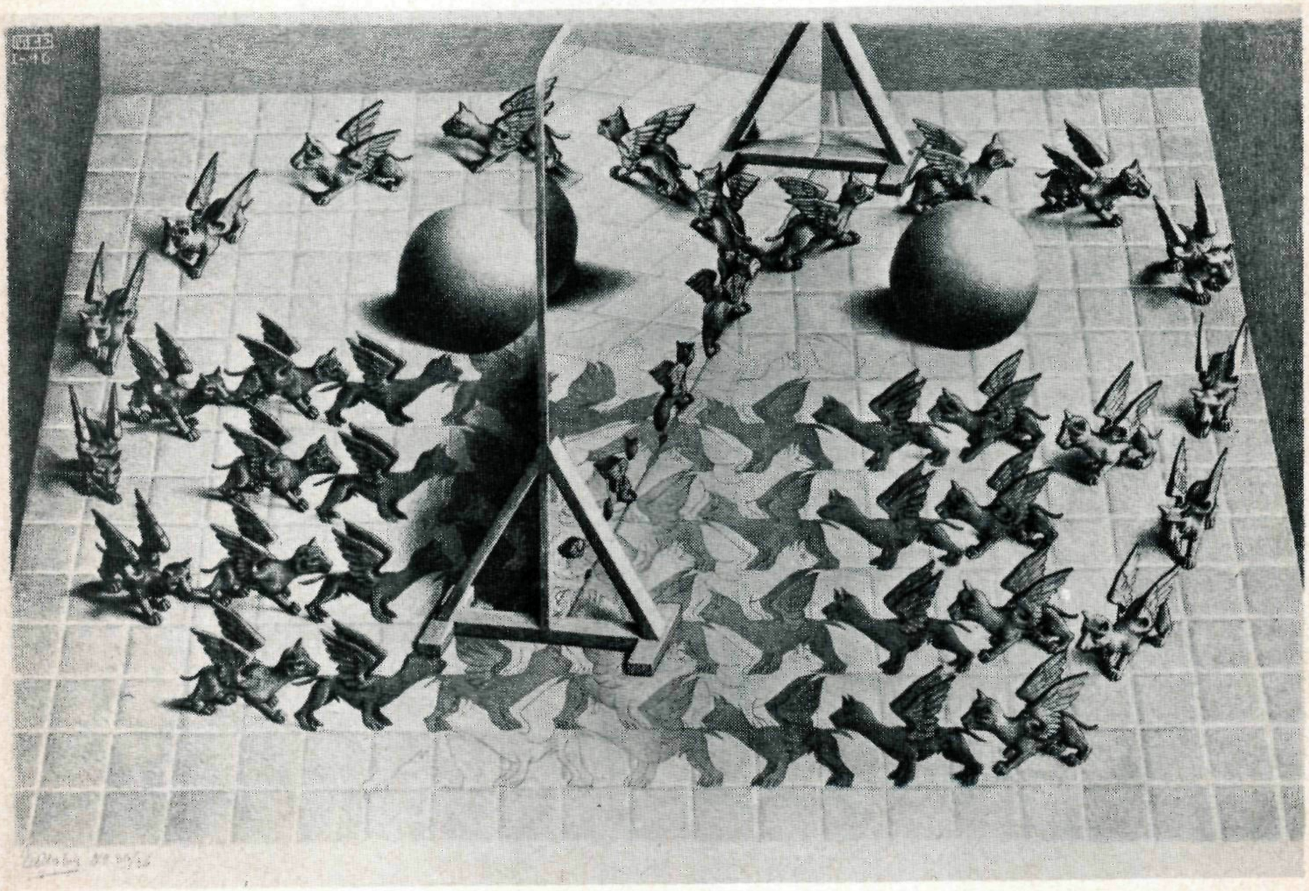


Fig. 2. 'Riemann-ruimtes', 1963. Tekening van prof. dr. J. A. Sparenberg.

de echte hond de spiegel verlaat, gaat het spiegelbeeld de andere kant op. Bij de rand gekomen blijkt dit spiegelbeeld overgegaan te zijn in de werkelijkheid. Beide stromen diertjes verdubbelen zich al voortgaande twee keer en vormen dan te zamen een regelmatige vlakvulling, waarbij witte honden nog eens overgaan in zwarte en omgekeerd.
Het is een bijzonder ingewikkeld verhaal: werkelijkheid en spiegelbeeld worden uit de spiegel geboren. Het spiegelbeeld wordt achter de spiegel werkelijkheid. Hoe vreemd dit is, wordt aangeduid met de twee echte bollen voor en achter de spiegel, waarvan de eerste nog gedeeltelijk in de spiegel te zien is.
Beide werkelijkheden vermenigvuldigen zich en metamorfoseren tot ondergrond.
De gelijkplaatselijkheid was ook het thema van een prent die Escher zoveel hoofdbrekens kostte, dat hij hem nooit gemaakt heeft.
Er zijn méérdere prenten waarvoor Escher wel voorschetsen getekend heeft en die nooit als prent voltooid werden. Maar van geen enkele prent speet hem dit zozeer als van die ik nu ga beschrijven.
Ken je het sprookje van de toverpoort? In een volkomen normaal landschap: weiden, boomgroepen, lage heuveltjes . . . staat een sierlijke poort. Een volkomen zinloze poort, want zij geeft toegang tot niets, je kunt er gewoon omheen lopen.
Zodra de poort opengaat, zien we dat ze toegang geeft tot een verrukkelijk, zonovergoten landschap, met vreemdsoortige plantengroei, gouden bergen en rivieren van vloeibaar diamant . . .
Dit sprookje is in verschillende variaties en in verschillende landen bekend.
Sedert 1963 is Escher met dit thema bezig geweest. Aanleiding daartoe was een bezoek van prof. Sparenberg, die hem iets vertelde van Riemann-ruimtes en hem een schets liet zien (fig. 2). Twee weken later schrijft Escher een brief aan prof. Sparenberg, waarin hij op de schets terugkomt en een ander voorstel doet.
Omdat de inhoud van deze brief zowel de werkwijze als de gedachtengang van Escher goed illustreert, volgen hier de belangrijkste passages:

"18-VI-1963 . . . Het idee is zó boeiend, dat ik hoop, . . ., toch eens de nodige rust en concentratie te zullen vinden, om Uw opzet uit te werken in een grafische prent. Mag ik, om te beginnen, even proberen onder woorden te brengen, wat de mathematische leek die ik ben, in Uw schets ziet . . . (fig. 3).
Gemakshalve noem ik Uw twee 'ruimtes': *H* (= heden) en *V* (= verleden). Pas bij nadere beschouwing van Uw tekening werd de 'clou' mij duidelijk, n.l., dat *H* niet alleen kan worden opgevat als een 'gat' in *V*, maar evenzeer als een schijf, die een deel van *V* bedekt. *H* is dus zowel vóór als áchter *V*; m.a.w.: zij liggen als projecties van ruimtelijkheden, beide in hetzelfde vlak van tekening.
Nu is er in Uw wijze van voorstelling iets dat mij niet geheel bevredigt, en wel, dat er aan *V* een veel grotere plaatsruimte wordt toegekend dan aan *H*. Is het verleden zoveel 'belangrijker' dan het heden? Als 'momenten', zoals zij hier worden afgebeeld, komt het mij voor dat het logischer, en ook compositorisch mooier zou zijn, als zij allebei een even grote plaatsruimte zouden innemen.
Om zulk een equivalentie te bewerkstelligen, onderwerp ik het hiernaast geschet-

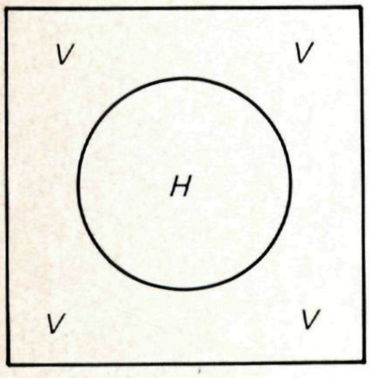


Fig. 3.

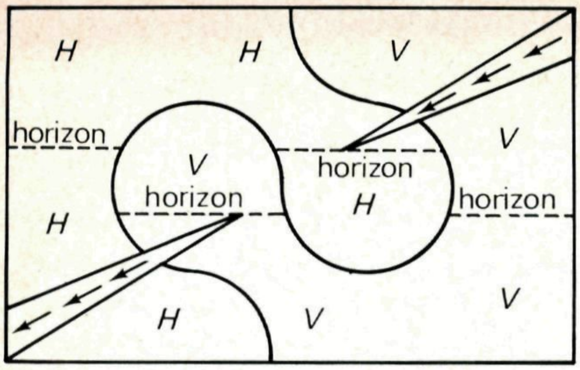


Fig. 4.

ste schema aan Uw oordeel (fig. 4). Het kan best zijn, dat ik daarmee Riemann geweld aandoe en de zuiverheid van de mathematische gedachte verkracht . . .
Het voordeel van mijn indeling boven de Uwe, lijkt mij ook dit: in het centrum liggen twee uitstulpingen naast elkaar; links is *V* omringd door *H* en rechts is *H* omringd door *V*.
Als ik mij de stroom van de tijd voorstel, dan beweegt die zich van het verleden via het heden, naar de toekomst. Er is dus (de toekomst, die wij niet kennen en dus ook niet in beeld kunnen brengen, buiten beschouwing latende) een stroom van *V* naar *H*. Slechts de historicus en de archeoloog bewegen zich in gedachten soms andersom; misschien vind ik een mogelijkheid om ook die in beeld te brengen.
Maar de logische stroom van *V* naar *H* zou bv. verbeeld kunnen worden door een perspectivische, naar de horizon zich verkleinende reeks van vliegende, praehistorische vogelachtige gediertes, die hun gedaante behouden (in hun domein *V*), tot zij de grens met *H* bereiken; zodra zij die grens overschreden hebben, veranderen zij (bv) in straalvliegtuigen, die in het domein *H* thuishoren.

Het voordeel is dan ook, dat er *twee* stromen kunnen worden afgebeeld: *links* van de horizon in de centrale *V*-uitstulping uitgaande, zich vergrotende in de richting van de rand, die daar *H* is; *rechts* van de *V*-rand zich voortspoedende en kleiner wordende, naar de horizon der *H*-uitstulping.
Hoe suggestief de telegraafdraden op Uw tekening ook zijn, zij bevredigen mij niet, want in een archaïsche, praehistorische wereld was er nog geen telegraaf! Ook suggereren zulke draden geen eenrichtingsverkeer . . .
U ziet wel hoe het hele probleem mij pakt! Door erover te schrijven, hoop ik tevens, dat mijn gedachten tot grotere klaarheid komen en dat ik er mijn 'inspiratie' (om dat dikke woord maar weer eens te gebruiken) mee 'stimuleer . . ."

Dit probleem is bij Escher blijven steken als het probleem van de toverpoort, die hij niet alleen wilde tekenen, maar die hij zodanig gestalte wilde geven dat het een dwingend bewijsstuk zou lijken voor de waarheid, de werkelijkheid van het afgebeelde. Het is jammer dat hij deze tour de force niet meer heeft kunnen volbrengen. De gedachte eraan bezorgde hem al hoofdpijn.

Toch is Escher misschien de enige die dit voor ons had kunnen uitbeelden met de middelen die hij in zijn andere prenten zo meesterlijk hanteerde: spiegeling, perspectief, vlakverdeling, metamorfose en oneindigheidsbenadering.

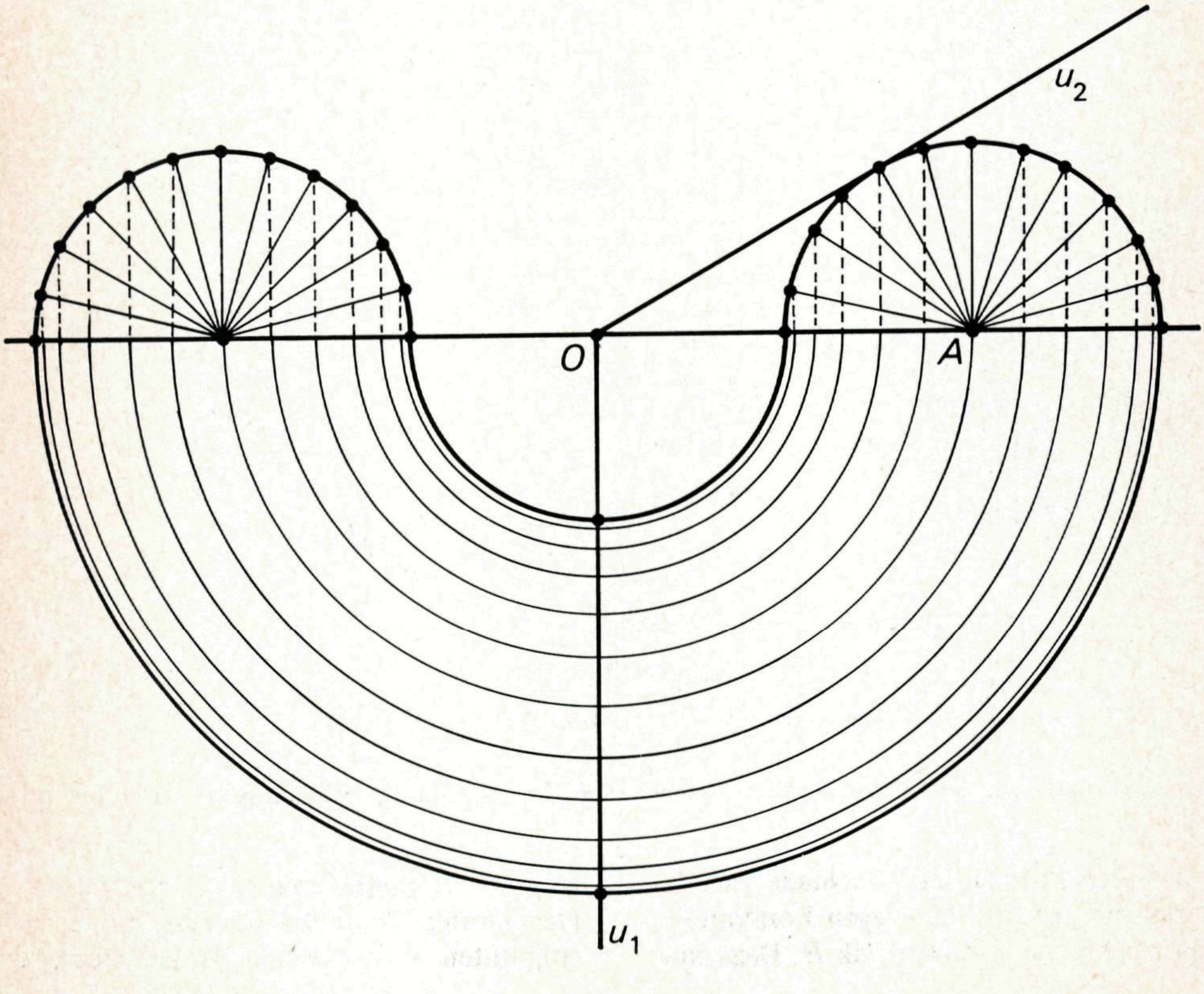
Cirkels op een torus, nog anders

In nr. 2 van deze jaargang stond een artikel over de *torus*. We willen dit nog eens op een andere manier bekijken.
Een torus is een ringvormige ruimtelijke figuur, zoiets als een auto-binnenband, met paren cirkels als doorsneden horizontaal en verticaal door het middelpunt O. In fig. 1 is geprobeerd een torus in een vlakke figuur weer te geven, je moet hierin het gedeelte boven de lijn OA verticaal omhoog vouwen (of gevouwen denken). Een stelsel concentrische cirkels op het torusoppervlak is geprojecteerd op het middenvlak (equatorvlak) getekend. Het projecteren komt hier overeen met het 'recht laten zakken' van de cirkels langs de streeplijntjes in de verticale doorsneden.

De lijnen u_1 en u_2 geven een schuinstaand vlak U aan dat de torus doorsnijdt. u_2 raakt juist aan de rechter verticale doorsnijdingscirkel (en wegens de symmetrie ook onder het equatorvlak aan de linker).

De vraag is weer: welke doorsnijdingsfiguur ontstaat? We gaan dit na met behulp van een methode die de *beschrijvende meetkunde* heet.

Fig. 1. Om lijn OA omhoog vouwen.



De B.M.-constructie

In fig. 2 is de rechter helft van fig. 1 nog eens getekend.

In het gebied boven de 'vouwlijn' OA (de *as* van de tekening) geeft de halve cirkel (A, r) en de daaraan rakende halve rechte u_2, de doorsnijding aan van een verticaal 'meridiaan'-vlak V met de torus en met het loodrecht op V naar voren gedachte dubbelraakvlak U.

In het gebied rechtsonder geven de kwartcirkels $(A, OA - r)$ en $(A, OA + r)$ en de halve rechte u_1, de doorsnijding aan van het horizontale vlak H met de torus en met het raakvlak U.

Het gebied linksonder is gereserveerd om details in te tekenen van het schuinstaande raakvlak U, dat neergeklapt gedacht is om u_1 tot in het horizontale vlak.

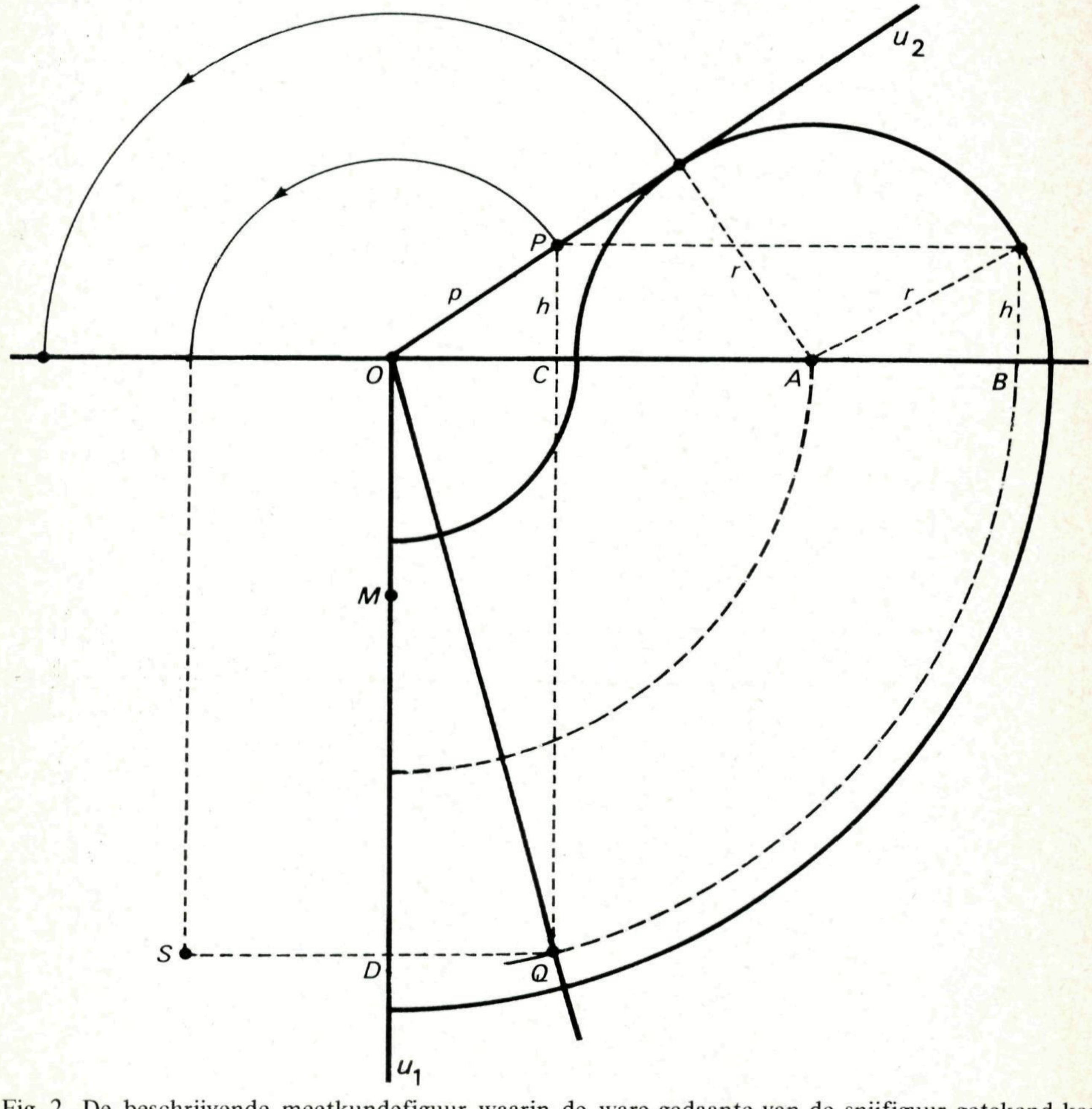


Fig. 2. De beschrijvende meetkundefiguur waarin de ware gedaante van de snijfiguur getekend kan worden.

We kijken nu naar de doorsnede van de torus met een in U gelegen horizontale lijn op hoogte h boven vlak H. Deze lijn snijdt V in punt P, en snijdt de torus in *vier* punten. Van het voorste van deze snijpunten is de positie in het neerge-

klapte raakvlak geconstrueerd (S). Probeer deze constructie te volgen!
Aanwijzing: denk de driehoek tussen de as en u_2 weer loodrecht op de rest van de tekening. En denk dit doorsnijdingsvlak zó ver om O naar voren gedraaid tot B recht onder P ligt (in Q).

Construeer nu zelf meer punten van de snijkromme, uitgaande van horizontale lijnen in U op andere hoogten boven H. Doe dit bijvoorbeeld ook voor de lijn in U op hoogte r. En ook voor de lijn door het raakpunt van u_2 aan de torus.

Klopt het dat alle zo gevonden punten op een cirkel liggen? We tonen dit hieronder aan.

Bewijs
Noem $OA = R$, en kies M op u_1 zó dat $OM = r$. Ga in de figuur na dat geldt: $h/p = r/R$ en $OB = R + \sqrt{r^2 - h^2}$.

Met 'Pythagoras' in $\triangle ODQ$ en $\triangle OCP$:

$$
\begin{aligned}
OD^2 &= OQ^2 - DQ^2 = OB^2 - OC^2 = \\
&= (R + \sqrt{r^2 - h^2})^2 - (p^2 - h^2) = \\
&= R^2 + r^2 - h^2 + 2R\sqrt{r^2 - h^2} - p^2 + h^2 \\
&= R^2 + r^2 + 2R\sqrt{r^2 - r^2p^2/R^2} - p^2 \\
&= r^2 + 2r\sqrt{R^2 - p^2} + R^2 - p^2 \\
&= (r + \sqrt{R^2 - p^2})^2.
\end{aligned}
$$

Nog eens 'Pythagoras' in $\triangle MSD$:

$$MS^2 = MD^2 + SD^2 = (OD - r)^2 + OP^2 = (\sqrt{R^2 - p^2})^2 + p^2 = R^2.$$

MS blijkt onafhankelijk van de gekozen hoogte h, waaruit volgt dat S steeds ligt op de *cirkel* (M, R)!
Probeer na te gaan dat de totale snijfiguur uit twee volle cirkels zal bestaan (de *cirkels van Villarceau*).

Werk voor tekenaars
Wanneer het schuinstaande vlak U door het middelpunt O nu eens niet raakt aan de torus, maar deze volgens een willekeurige hoek (α) met het equatorvlak doorsnijdt, hoe ziet dan de 'snijfiguur' eruit?
Voor 0° en voor 90° is het duidelijk. Voor andere hoeken kan deze figuur op precies dezelfde manier als hierboven punt voor punt geconstrueerd worden. Het is wel een heel karwei en het vereist goed tekenmateriaal (scherpe passer en potlood). Het gebruik van mm-papier bespaart je alle horizontale en verticale hulplijnen. Als je een mooi resultaat krijgt, mag je het als je wilt aan de redactie opsturen. Misschien kunnen we zo'n serie doorsnijdingen een keer gebruiken als omslagplaat. Fig. 3 geeft alleen een ruwe schets.

Werk voor rekenaars
Degenen die met een tekening alleen nog niet tevreden zijn, kunnen proberen de relatie $F(x, y, R, r, \sin\alpha) = 0$ te vinden waaraan de coördinaten (t.o.v. O als oorsprong) van de punten van de snijfiguur voldoen. F blijkt een vierdegraadsvorm in x en y, welke voor $\sin\alpha = 0$ of 1 of r/R te schrijven is als produkt van twee tweedegraadsvormen: twee cirkels.

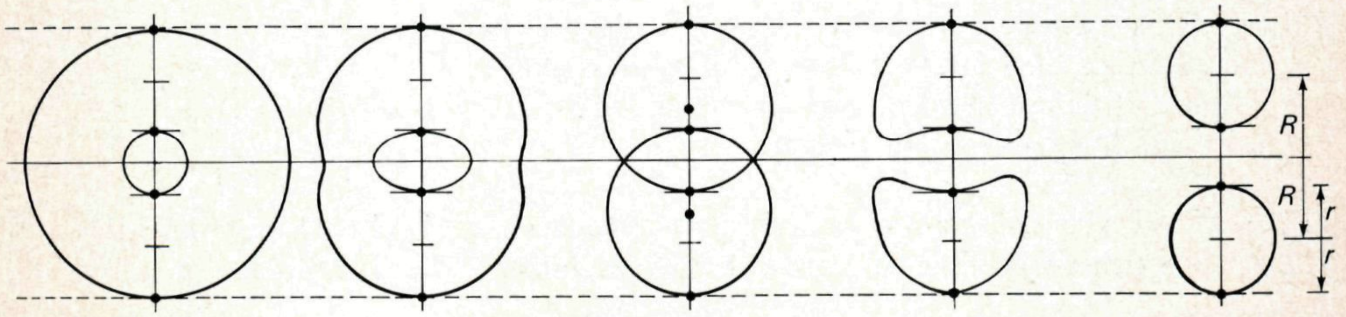


Fig. 3. De snijfiguur van een torus met een vlak door het midden, bij vijf verschillende hoeken.

Pythagoras Olympiade

Wedstrijdvoorwaarden

1. Alle leerlingen van het voortgezet onderwijs kunnen aan de Pythagoras Olympiade deelnemen door een oplossing van een of meer van de opgaven in te sturen.

2. Papier waarop oplossingen staan mag slechts aan één zijde beschreven zijn. Voor verschillende opgaven moeten ook verschillende vellen genomen worden.

3. Slechts goed leesbare oplossingen worden bekeken. Alle tekstgedeelten moeten helder en duidelijk in goed lopende zinnen zijn geformuleerd.

4. Op elk vel moet vermeld staan: *naam, adres, leeftijd, school, schooltype* en *klas* van de inzend(st)er.

5. De oplossingen moeten binnen de vermelde inzendtermijn gestuurd worden naar:
   Pythagoras Olympiade,
   Brederode 29,
   2261 HG LEIDSCHENDAM.
   Zorg voor voldoende frankering!

Prijzen

1. Bij elke opgave worden onder de inzenders van een goede oplossing twee boekenbonnen van *f* 10,– verloot.

2. Alle opgaven van één jaargang (5 nummers) van *Pythagoras* vormen te zamen een *ladderwedstrijd*. Elke goede oplossing geeft één punt. De drie inzenders die in één jaar de meeste punten verzamelen, krijgen een boekenbon van *f* 25,–. Bij gelijke puntenaantallen beslist het lot.

3. De beste 10 van de ladderwedstrijd die niet in een eindexamenklas zitten, krijgen *automatisch* een uitnodiging voor de tweede ronde van de *Nederlandse Wiskunde Olympiade*. Zij behoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

Opgaven Pythagoras Olympiade

PO 7. Bepaal alle natuurlijke getallen N met de volgende eigenschap: zowel in het tientallig als in het zeventallig stelsel schrijft men N met vier cijfers. Bovendien gebruikt de schrijfwijze in het ene stelsel dezelfde cijfers als die in het andere stelsel, maar in de omgekeerde volgorde.

PO 8. Bewijs dat elk positief geheel getal een geheel veelvoud heeft dat, geschreven in het tientallig stelsel, elk van de tien cijfers minstens één maal bevat.

PO 9. Voltooi de volgende staartdeling en bewijs ook dat dit slechts op één manier mogelijk is.

```
• • / • • • • 9 • \ • • • • •
      • •
      ———
      • • •
        • •
      —————
          • • 9
          • • •
          —————
              • •
              • •
              ———
                0
```

Oplossingen van de opgaven 7, 8 en 9 inzenden vóór 17 maart 1980!

Oplossing denkertje vorig nummer

Fig. 1 laat het zijaanzicht en het bovenaanzicht zien van de doorsnijding van de torus met het dubbelraakvlak V_2. De cirkels van Villarceau vertonen zich in projectie op het horizontale vlak V_1 als snijdende ellipsen.

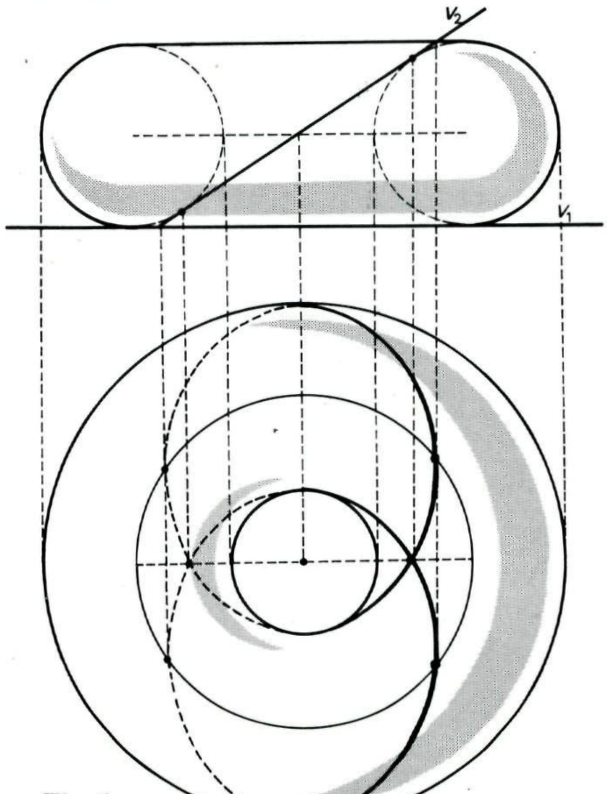


Fig. 1.

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,40 per jaargang. Voor anderen f 12,10*.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.
Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

* Per abuis zijn op afl. 1 verkeerde abonnementsprijzen opgenomen.

Inhoud