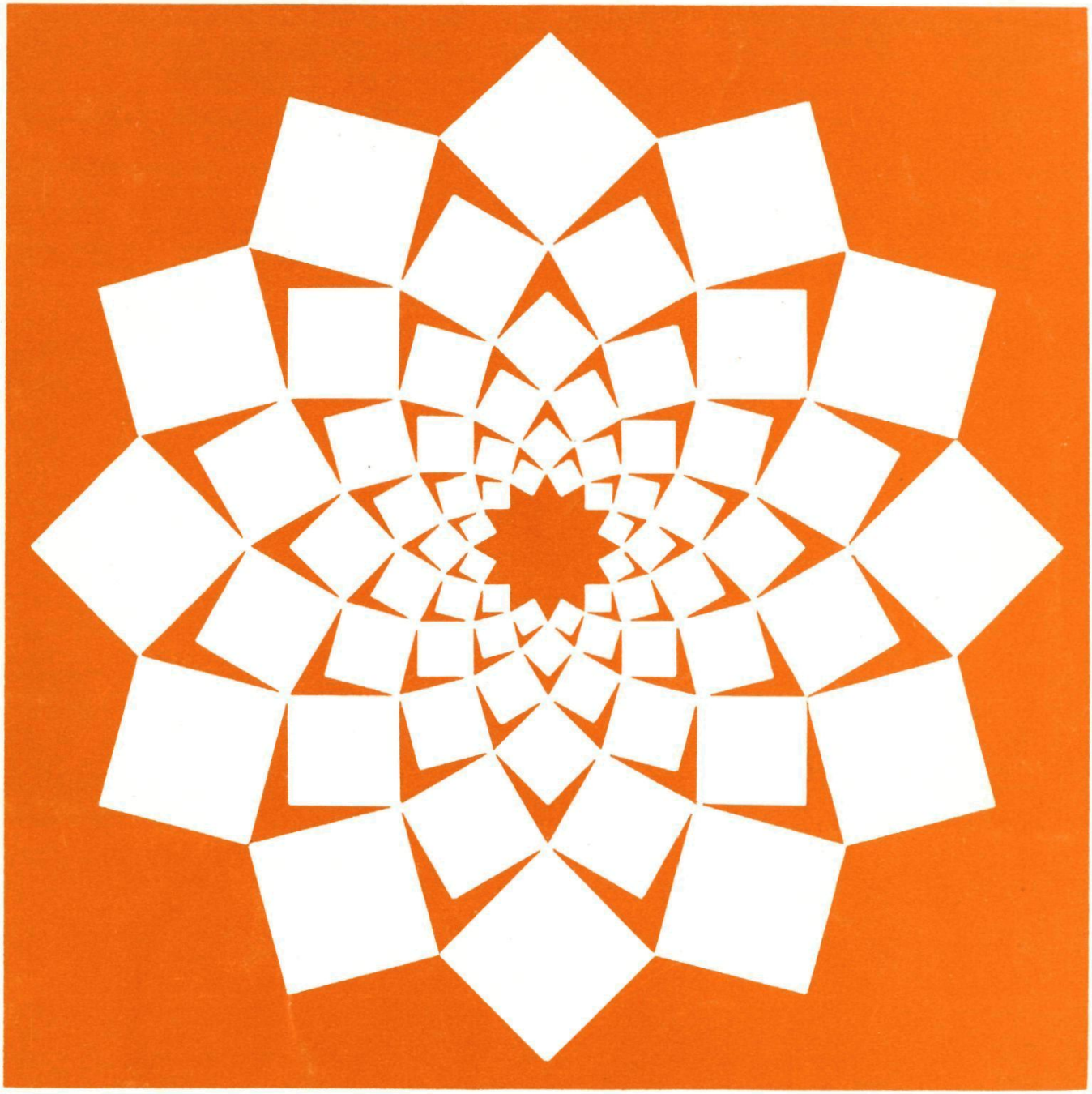
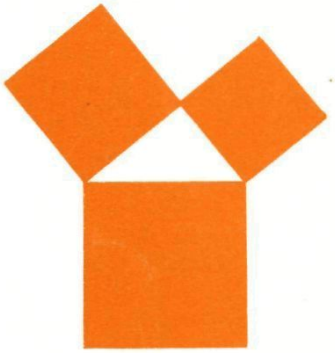


4

jaargang 19 / februari 1980

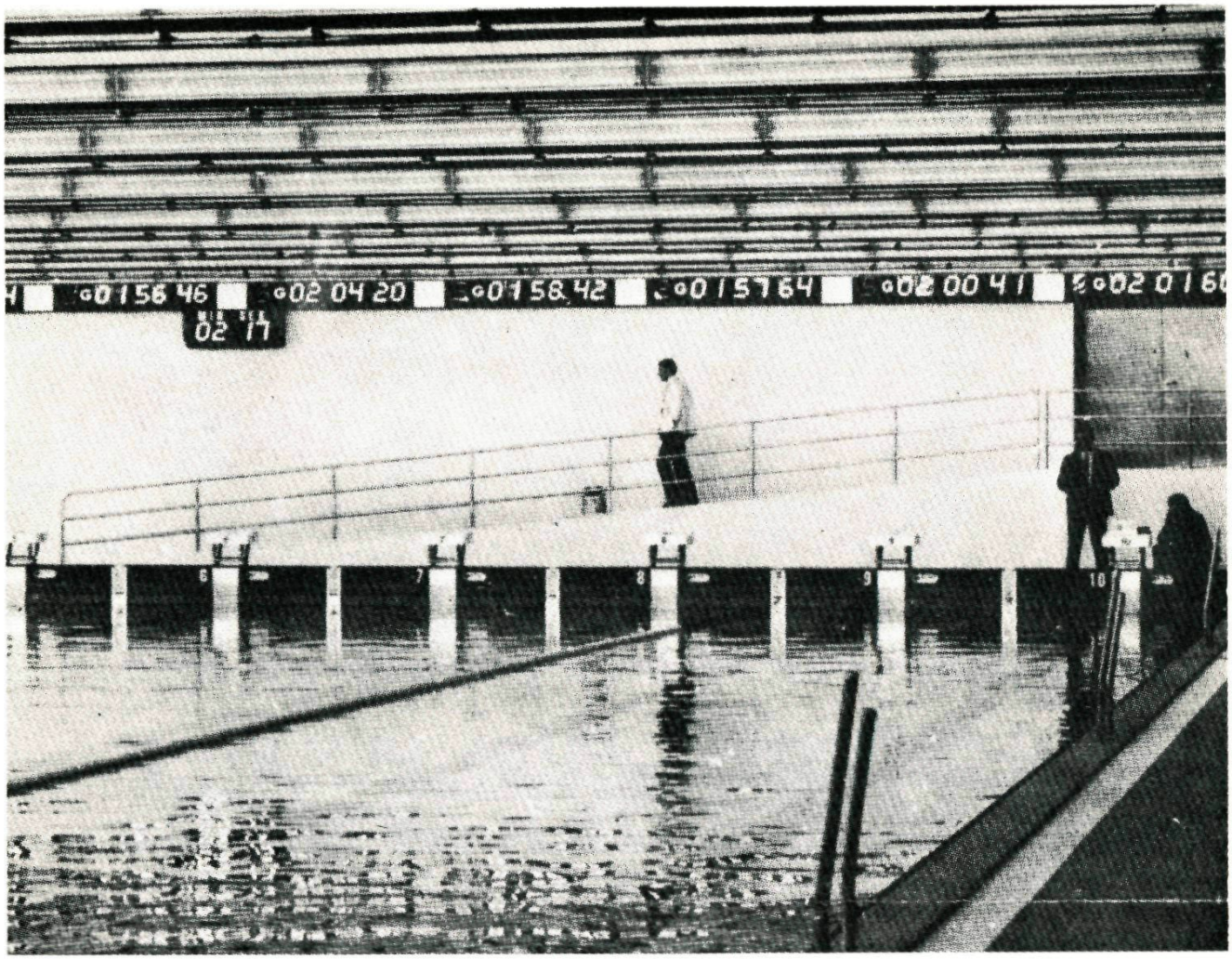
wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Wedstrijdbad van de Duitse zwembond te Heidelberg. Voor het belang van geautomatiseerde tijdregistratie, zie het artikel 'Tijdmeting bij zwemwedstrijden I'.

BIJ DE FIGUUR OP DE OMSLAG:
Een zonnebloem met vierkante pitten? Het zijn vierkanten, dat in ieder geval. Als je naar één bepaalde grootte kijkt zijn ze in cirkels gerangschikt. Opvallender is misschien nog, dat ze in opklimmende grootte van binnen naar buiten in spiralen lopen. Er zijn twee stelsels spiralen, een linksdraaiend en een rechtsdraaiend. Zo zijn ook de pitten in een zonnebloem gerangschikt. Zie verder het artikel 'Spiralen uit vierkanten'.

°Spiralen uit vierkanten

Als je de omslagfiguur wat langer bekijkt, begin je misschien te vermoeden dat er ook gelijkzijdige driehoeken in voorkomen, gevormd door twee zijden van buurvierkanten en de diagonaal van het meer naar binnen gelegen tussenvierkant. Bij nameten klopt dat goed.

Laten we aannemen dat het waar is. Je kunt dan gemakkelijk een constructievoorschrift vinden om de figuur naar het centrum toe en van het centrum af voort te zetten. Verder is het niet moeilijk om aan te tonen dat de oppervlakte van een vierkant uit een bepaalde ring tweemaal zo groot is als de oppervlakte van een vierkant uit de aangrenzende meer naar binnen gelegen ring.

Het constructievoorschrift

De figuur op de omslag is er slechts één uit een hele familie, die alle uit hetzelfde constructievoorschrift volgen:

Verdeel een cirkelomtrek in $2n$ gelijke delen (in het speciale geval op de omslag is $n = 12$). Trek alle stralen naar de punten op de omtrek, zie fig. 1. Trek AB, dit lijnstuk snijdt de tussenliggende straal in N. Maak NR en NP gelijk aan NA. Op deze manier ontstaat het vierkant $APBR$ en zo kunnen we een hele kring met vierkanten vullen.

Voor het construeren van de vierkanten op de volgende, meer naar het centrum gelegen ring, gaan we uit van de reeds aanwezige diagonalen, zoals PQ.

Hoe construeer je de vierkanten van de volgende, meer naar buiten gelegen ring?

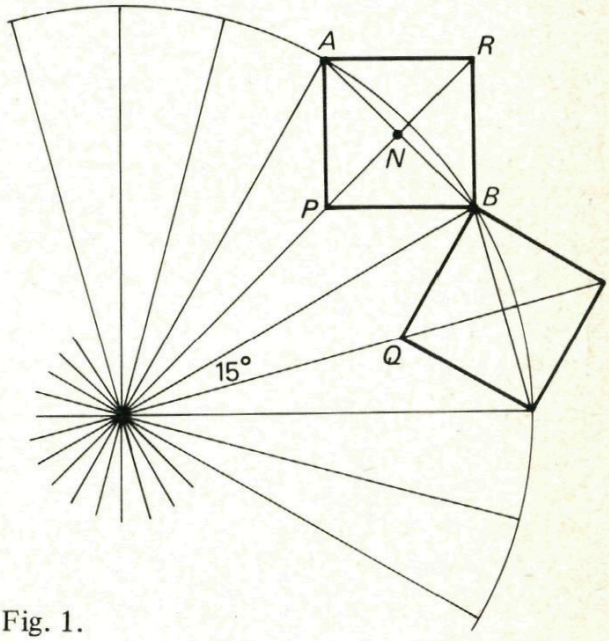


Fig. 1.

In het speciale geval van $n = 12$ is eenvoudig te bewijzen dat de bovengenoemde driehoeken gelijkzijdig zijn, en dat de lengten van de zijden in opvolgende ringen een meetkundige rij vormen met de reden $\sqrt{2}$.

Probeer het eens met andere waarden voor n. Wat is de kleinste nog bruikbare waarde voor n? Zou het ook gaan met een oneven aantal stralen?

Het zijn aardige puzzels en het resultaat is altijd een fraaie variant op de omslagfiguur.

De Nederlandse Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de 19de Nederlandse Wiskunde Olympiade zal op de scholen plaatsvinden op vrijdag 21 maart 1980 van 14.00 tot 17.00 uur. Begin maart krijgen de secties wiskunde het materiaal toegezonden. Deze Olympiade wordt georganiseerd door de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde (secretariaat: Mathematisch Instituut, Budapestlaan 6, Utrecht).
In 1979 namen 3168 leerlingen deel aan de eerste ronde. De 123 besten kregen een uitnodiging voor de tweede ronde. De opgaven van deze tweede ronde vind je hieronder. In het volgende nummer komen de oplossingen. De tien prijswinnaars waren:

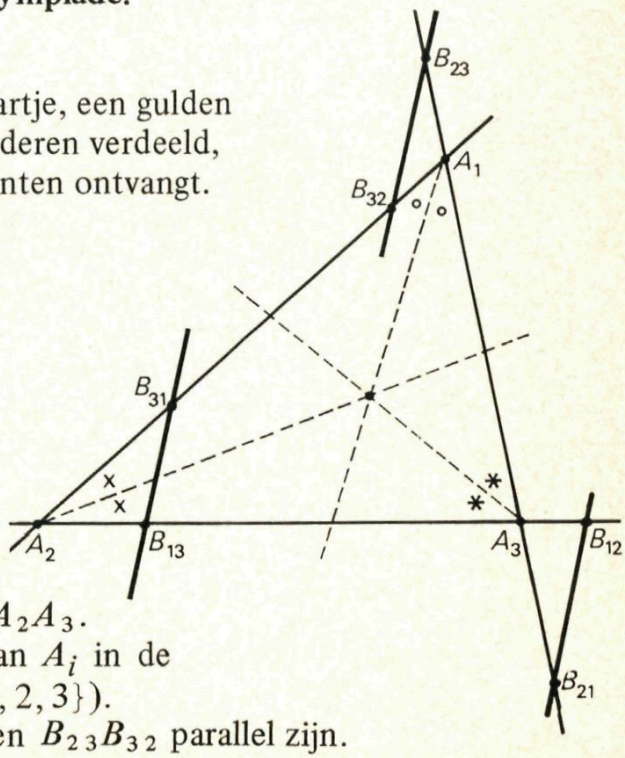
Karel Jan Schoutens	(Moller Lyceum, Bergen op Zoom)
Barteld Braaksma	(Ubbo Emmiuslyceum, Stadskanaal)
Herman Verlinde	(De Bruyne Lyceum, Utrecht)
Erik Verlinde	(De Bruyne Lyceum, Utrecht)
M. de Jeu	(O.S.G. Albert Einstein, Hoogvliet)
Jan Adriaan Leegwater	(Herman Jordan Lyceum, Zeist)
Willem Jan van Andel	(Eindhovens Prot. Lyceum, Eindhoven)
Peter Stevenhagen	(Gem. Gymnasium Feliseum, Velsen)
Hugo Cramer	(Augustinianum, Eindhoven)
Hans Schotte	(Gem. S.G. Woensel, Eindhoven)

Opgaven van de 18de Nederlandse Wiskunde Olympiade.
Tweede ronde: 30 augustus 1979, 13–16 uur.

1. Een cent, een stuiver, een dubbeltje, een kwartje, een gulden en een rijksdaalder worden zo onder vier kinderen verdeeld, dat elk van hen tenminste één van de zes munten ontvangt. Hoeveel van zulke verdelingen zijn er?

2. Bepaal alle positieve gehele getallen a, b en c die voldoen aan het stelsel vergelijkingen:
$$\begin{cases} a^3 = b^3 + c^3 + 12a \\ a^2 = 5(b+c) \end{cases}$$

3. Definieer $a_1 = 1979$ en $a_{n+1} = 9^{a_n}$ voor $n = 1, 2, \ldots$
Bepaal de laatste twee cijfers van a_{1979}.



4. Gegeven is de niet-gelijkzijdige driehoek $A_1A_2A_3$.
Onder B_{ij} verstaat men het spiegelbeeld van A_i in de (binnen-)bissectrice van hoek A_j $(i, j \in \{1, 2, 3\})$.
Bewijs dat de drie lijnen $B_{12}B_{21}$, $B_{13}B_{31}$ en $B_{23}B_{32}$ parallel zijn.

Pythagoras Olympiade

Wedstrijdvoorwaarden, prijzen

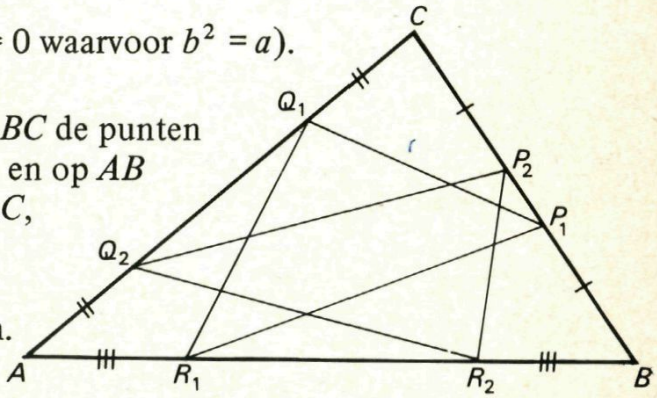
* Alle leerlingen van het voortgezet onderwijs kunnen aan de Pythagoras Olympiade deelnemen door een oplossing van een of meer van de opgaven in te sturen.
* Papier waarop oplossingen staan mag slechts aan één zijde beschreven zijn. Voor verschillende opgaven moeten ook verschillende vellen genomen worden.
* Slechts goed leesbare oplossingen worden bekeken. Alle tekstgedeelten moeten helder en duidelijk in goed lopende zinnen zijn geformuleerd.
* Op elk vel moet vermeld staan: *naam, adres, leeftijd, school, schooltype* en *klas* van de inzend(st)er.
* De oplossingen moeten binnen de vermelde inzendtermijn gestuurd worden naar: Pythagoras Olympiade, Brederode 29, 2261 HG LEIDSCHENDAM. Zorg voor voldoende frankering!
* Bij elke opgave worden onder de inzenders van een goede oplossing twee boekenbonnen van *f* 10,– verloot.
* Alle opgaven van één jaargang (5 nummers) van *Pythagoras* vormen te zamen een *ladderwedstrijd*. Elke goede oplossing geeft één punt. De drie inzenders die in één jaar de meeste punten verzamelen, krijgen een boekenbon van *f* 25,–. Bij gelijke puntenaantallen beslist het lot.
* De beste 10 van de ladderwedstrijd die niet in een eindexamenklas zitten, krijgen *automatisch* een uitnodiging voor de tweede ronde van de *Nederlandse Wiskunde Olympiade*. Zij behoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

Opgaven (oplossingen inzenden vóór 14 april 1980!)

PO 10. Los op: $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

(met $\sqrt{a}$ wordt bedoeld het getal $b \geqslant 0$ waarvoor $b^2 = a$).

PO 11. Gegeven is een driehoek ABC met op BC de punten P_1 en P_2, op CA de punten Q_1 en Q_2 en op AB de punten R_1 en R_2 zo, dat $BP_1 \overset{=}{\sim} P_2C$, $CQ_1 = Q_2A$ en $AR_1 = R_2B$. Bewijs dat de driehoeken $P_1Q_1R_1$ en $P_2Q_2R_2$ dezelfde oppervlakte hebben.



PO 12. Gegeven is een positief geheel getal k. Bewijs dat er in de rij

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots, 10^k$

net zo veel cijfers voorkomen als er nullen zijn in de rij

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, 10^{k+1}$

(alle getallen in de twee rijen moet je volledig uitgeschreven denken in het tientallig stelsel).

°°Priemgetallen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, . . .
Zo begint de rij van de *priemgetallen*, de gehele getallen groter dan 1 die je niet kunt schrijven als produkt van kleinere positieve gehele getallen. In fig. 1 staat een tabel van alle priemgetallen kleiner dan 1000. Ze liggen nogal chaotisch verspreid over de positieve gehele getallen. Het zoeken naar het antwoord op de vraag of een bepaald getal een priemgetal is, kan nogal veel werk zijn. Je ziet bijv. onmiddellijk dat 1978 geen priemgetal is, want het is even: $1978 = 2 \cdot 989$. Volgens de tabel is 989 geen priemgetal. Wat zijn dan de factoren? En zie je ook snel dat 1979 wel een priemgetal is? 1980 is natuurlijk geen priemgetal; het heeft zelfs erg veel factoren: $1980 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Er zijn een paar criteria bekend om te testen of een bepaald getal een priemgetal is. Een methode die altijd werkt, is systematisch proberen of het getal deelbaar is door 2, 3, 5, 7, . . . enz. Dit is echter ook de meest tijdrovende manier. Voor sommige soorten getallen zijn er snellere methoden.

Het grootste bekende priemgetal
Al in de Griekse oudheid was er speciale belangstelling voor getallen van de vorm

$$M_p = 2^p - 1.$$

Een andere keer kunnen we misschien nog wel eens uitleggen waarom deze getallen zo in de belangstelling stonden, maar nu wil ik alleen opmerken dat als p een priemgetal is, M_p ook vaak een priemgetal geeft:

$$M_2 = 2^2 - 1 = 3$$
$$M_3 = 2^3 - 1 = 7$$
$$M_5 = 2^5 - 1 = 31$$
$$M_7 = 2^7 - 1 = 127$$

Je ziet overigens dat M_p steeds groter is dan p. Vooral bij grote waarden van p is M_p veel en veel groter. We zullen dit verderop nog duidelijk zien. Als p *geen* priemgetal is, dus als $p = m \cdot n$ in twee kleinere factoren kan worden ontbonden, kan M_p ook geen priemgetal zijn, want dan is

$$M_p = 2^p - 1 = 2^{m \cdot n} - 1 = (2^m - 1) \cdot (2^{(n-1)m} + 2^{(n-2)m} + \ldots + 2^m + 1)$$

een ontbinding van M_p. Zo is bijv.

$$M_{10} = 1023 = 2^{10} - 1 = (2^2 - 1)(2^{4 \cdot 2} + 2^{3 \cdot 2} + 2^{2 \cdot 2} + 2^{1 \cdot 2} + 1) = 3 \cdot 341.$$

Je zou misschien kunnen denken dat M_p *altijd* een priemgetal geeft als p zelf een priemgetal is, maar dat is niet zo: $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,
101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199,
211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293,
307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397,
401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499,
503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599,
601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691,
701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797,
809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887,
907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

Fig. 1. De priemgetallen tot 1 000.

Er bestaat echter een criterium om op tamelijk eenvoudige wijze uit te maken of M_p een priemgetal is of niet. Het is in 1876 door de Fransman Lucas ontdekt en later door D. H. Lehmer vervolmaakt. Het luidt:

Als p een priemgetal groter dan 2 is, dan is $M_p = 2^p - 1$ ook een priemgetal precies voor die waarden van p waarvoor M_p een deler is van L_p. De getallen L_p definieert men hierbij successievelijk door $L_3 = 14$, $L_{k+1} = L_k{}^2 - 2$ $(k = 3, 4, 5, \ldots)$ (dus $L_4 = 14^2 - 2 = 194$, $L_5 = 194^2 - 2 = 37634$ enz.).

Met behulp van dit criterium heeft men voor het eerst bewezen dat $M_{127} = 2^{127} - 1$ een priemgetal is. Dit getal heeft 39 cijfers!
Om te controleren of M_{127} inderdaad een deler van L_{127} is, is er nog een vernuftig hulpmiddel nodig, want niet alleen M_{127} is erg groot, maar L_{127} is nog onvoorstelbaar veel groter. Op de truc die het criterium van Lucas en Lehmer toch nog bruikbaar maakt, kan ik hier niet ingaan. We kunnen echter wel voor een paar kleine waarden van p verifiëren dat het criterium klopt:

$p = 3 : M_p = 2^3 - 1 = 7 \quad L_p = 14,$

$p = 5 : M_p = 2^5 - 1 = 31 \quad L_p = 37634$

en inderdaad is 37634 deelbaar door $31 : 37634 = 31 \cdot 1214$.
Het getal M_{127} was van 1876 t.e.m. 1951 het grootste bekende priemgetal. Daarna vond men met behulp van computers nog een aantal grotere priemgetallen. Lange tijd was M_{19937}, ontdekt in 1971 door Tuckermann, de recordhouder. Het is een getal van 6002 cijfers. De afgelopen twee jaar is er echter weer beweging in de zaak gekomen en het laatste nieuws is, volgens een bericht in de 'Los Angeles Times' van 31 mei 1979, dat de Amerikanen Harry Nelson en David Slowinski een priemgetal hebben gevonden van 13395 cijfers. Als we aannemen dat dit weer één van de getallen M_p is (dit stond er in de krant niet bij, maar ik durf er mijn hand wel voor in het vuur te steken, want voor andere getallen kan men niet zo gemakkelijk uitmaken of ze priem zijn) kunnen we de waarde van p reconstrueren met behulp van een priemgetallentabel (de grootste bestaande priemgetallentabel gaat tot 10.006.721). Uit de tabel lezen we af dat 44491, 44497 en 44501 op elkaar volgende priemgetallen zijn. De bijbehorende getallen M_p hebben resp. 13394, 13395 en 13397 cijfers. M_{44497} moet dus de nieuwe recordhouder zijn.

Hoe bepaal je het aantal cijfers van M_p?
Misschien vraag je je af hoe je het aantal cijfers van zo'n getal als $M_{44497} = 2^{44497} - 1$ zou kunnen bepalen. Dat is niet zo moeilijk.
Om te beginnen heeft $2^p - 1$ altijd net zoveel cijfers als 2^p, want 2^p kan niet eindigen op nul. Dan zou het immers een veelvoud van 10, dus ook van 5 moeten zijn, maar 2^p bevat alleen maar factoren 2. Het aantal cijfers van 2^p vind je door 2 te schrijven als macht van 10:

$2 = 10^{0,301030\ldots}$

De exponent 0,301030... is de *logaritme met grondtal 10* van 2, en deze logaritme kun je in een tabel opzoeken of op je rekenmachine uitrekenen. Er geldt:

$2^p = (10^{0,301030\ldots})^p = 10^{p\,(0,301030\ldots)}$.

Deze exponenten reken je uit. Voor $p = 44491$, $p = 44497$ en $p = 44501$ geeft dit resp. 13393,12 . . ., 13394,93 . . ., en 13397,13 . . . . 10^2 heeft drie cijfers, 10^3 heeft vier cijfers, 10^4 heeft vijf cijfers enz., dus de drie getallen M_p waarvoor we de berekeningen hebben gemaakt, hebben respectievelijk 13394, 13395 en 13398 cijfers.

Er bestaat geen grootste priemgetal
Zou M_{44497} ook echt het grootste priemgetal zijn? Ook al zou er in geen duizend jaar een groter priemgetal worden gevon-

den, toch weten we zeker dat er grotere priemgetallen moeten bestaan. Al heel lang geleden bewees Euclides namelijk dat er *oneindig veel* priemgetallen zijn. Er bestaat dus geen grootste priemgetal! Euclides was een Grieks wiskundige, die omstreeks 300 v. Chr. in Alexandrië leefde. Zijn hoofdwerk is het dertien delen tellende boek *Elementen*, waarin hij op systematische wijze vrijwel de hele, op dat moment bekende wiskunde uit een klein aantal grondbeginselen (axioma's) afleidt. Het boek behandelt voornamelijk meetkunde en getallentheorie. Euclides' bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn, gaat als volgt.

Stel dat er maar eindig veel priemgetallen waren. Vorm dan het produkt p van alle priemgetallen. p is deelbaar door elk priemgetal. Het eerste getal na p dat deelbaar is door 2 is dus $p + 2$. Het eerste getal na p dat deelbaar is door 3 is $p + 3$ en in het algemeen is het eerste getal na p dat deelbaar is door het i-de priemgetal p_i gelijk aan $p + p_i$. Al deze getallen zijn groter dan het getal $p + 1$ en dat is dus door geen enkel priemgetal deelbaar. Maar dat is onmogelijk. De veronderstelling dat er slechts eindig veel priemgetallen zijn, leidt dus tot een ongerijmdheid.

Het feit dat er oneindig veel priemgetallen zijn wil nog niet zeggen dat er in de speciale rij van de getallen van de vorm $M_p = 2^p - 1$ ook oneindig veel priemgetallen moeten zitten. We zouden ze best op een bepaald moment eens allemaal gehad kunnen hebben. Dan moeten we onze toevlucht nemen tot andere middelen om nog grotere priemgetallen te bepalen. Er zijn echter wel aanwijzingen die er op duiden dat er ook in de rij M_p oneindig veel priemgetallen zijn en de computerfanaten zullen dan ook nog wel even doorgaan met hun pogingen het bestaande record te breken. Misschien is dit al gebeurd tussen het moment dat ik dit stukje schrijf en het tijdstip waarop jij dit leest!

De priemgetallenstelling

Er zijn oneindig veel priemgetallen, maar we kennen op dit moment geen enkel priemgetal met meer dan 13395 cijfers en ook *onder* deze grens kennen we er maar heel weinig. Zoals gezegd gaat de grootste volledige lijst niet verder dan het priemgetal 10.006.721 (nog maar acht cijfers). Toch is er over de verdeling van de priemgetallen over de positieve gehele getallen veel te vertellen. Laten we ze eerst eens proberen in beeld te brengen. Definieer hiertoe de functie $\pi(x)$ als het aantal priemgetallen kleiner dan of gelijk aan x. $\pi(x)$ begint dus bij $\pi(1) = 0$ en springt bij elk nieuw priemgetal 1 omhoog.

In fig. 2 vind je een grafiek van $\pi(x)$ (de beide assen hebben verschillende schalen). Hoewel deze grafiek nogal grillig is, zie je toch een vrij regelmatige stijging. Dit wordt nog veel duidelijker als we het domein van x sterk uitbreiden en de schalen aanpassen (fig. 3). De 'gladheid' van de

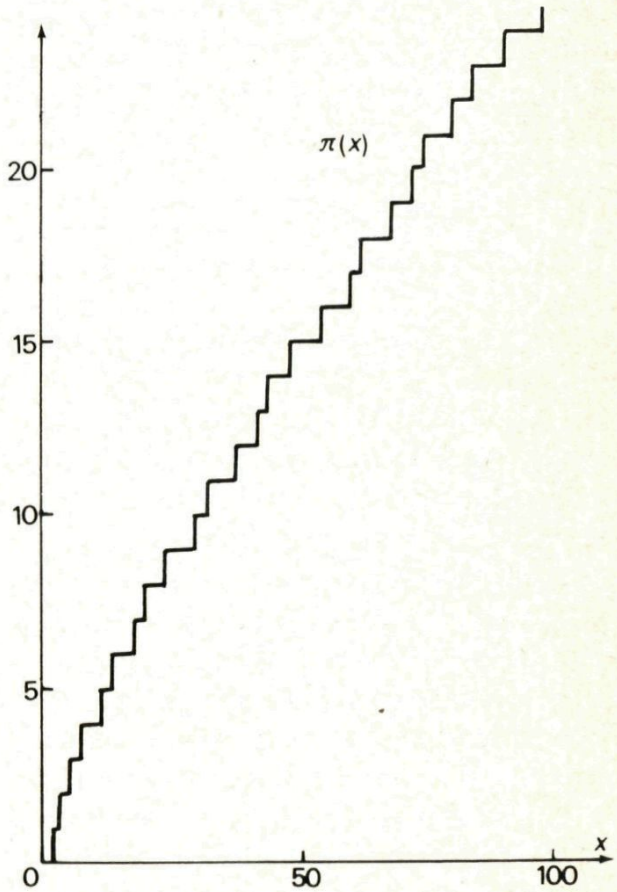


Fig. 2. $\pi(x)$ is het aantal priemgetallen $\leqslant x$.

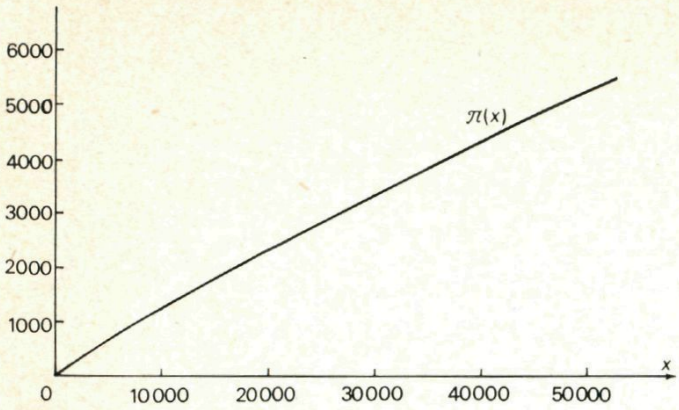


Fig. 3. Dezelfde functie bij een groter domein.

grafiek is verrassend en indrukwekkend. Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) ontdekte op 15-jarige leeftijd door het bestuderen van een priemgetallentabel in een boek met logaritmetafels dat de functie $\frac{x}{ln\, x}$ een goede benadering van $\pi\,(x)$ is.

Hij formuleerde het vermoeden dat het quotiënt $\pi\,(x) \Big/ \frac{x}{ln\, x}$ van beide functies tot 1 nadert als x onbeperkt toeneemt. Dit vermoeden is inderdaad bewezen, maar pas veel later, in 1896, door Hadamard en De la Vallée Poussin (onafhankelijk van elkaar). Het bewijs van deze stelling (de zg. 'priemgetallenstelling') is veel te moeilijk om hier te reproduceren. Voor de knappe koppen onder onze lezers – die zich afvragen hoe het mogelijk is überhaupt iets algemeens te bewijzen over zo'n grillige functie als $\pi\,(x)$, waarvan we bovendien de waarden alleen maar kennen op zo'n 'klein' stukje (slechts iets meer dan 10 miljoen x-waarden) van zijn domein – wil ik echter een resultaat over $\pi\,(x)$ afleiden dat toch een klein beetje in de richting gaat. *De minder ambitieuze lezers moeten het volgende gedeelte dan maar overslaan.*

°°°Een ongelijkheid voor $\pi\,(x)$

In 1850 bewees de Russische wiskundige Tsjebysjev dat er een getal N bestaat zo, dat voor alle $x > N$:

$$0{,}89\,\frac{x}{ln\, x} < \pi\,(x) < 1{,}11\,\frac{x}{ln\, x}$$

Dit betekent dus dat het quotiënt van $\pi\,(x)$ en $\frac{x}{ln\, x}$ 'op den duur' minder dan 0,11 van 1 afwijkt. Dit was het eerste belangrijke resultaat in de richting van de priemgetallenstelling. Ik zal hier een bewijs geven van een zwakkere vorm van een van deze twee ongelijkheden, nl.:

$$\pi\,(x) < 2\,\frac{x}{ln\, x}.$$

Deze ongelijkheid geldt voor alle waarden van x. Om het bewijs te kunnen volgen, moet je iets weten van logaritmen en van binomiaalcoëfficiënten.

Met een zakrekenmachine kun je (1) controleren voor kleine waarden van x, bijv. voor alle $x < 2^8 = 256$. Stel nu dat we er in geslaagd zijn (1) te bewijzen voor alle positieve gehele getallen x kleiner dan een zeker even getal $2n$ (met dus $n \geqq 128$). Ik zal een recept geven om (1) dan ook te bewijzen voor de waarden $x = 2n$ en $x = 2n + 1$. Met de zakrekenmachine waren we al gekomen tot $x = 255$. Het recept helpt ons dan aan $x = 256$ en $x = 257$, en daarna aan $x = 258$ en $x = 259$ enz. Stap voor stap kunnen we zo elk positief geheel getal bereiken en (1) moet dan dus gelden voor iedere x. De hier gebruikte bewijsmethode is die van de *volledige inductie*. Hier komt het bewijs van de zg. *inductiestap*.

Stel dat (1) geldt voor alle $x < 2n$ met $2n \geqq 256$, dus $n \geqq 128$.

Ik moet eerst iets afleiden over de zg. binomiaalcoëfficiënten.

Bij uitwerken van $(a + b)^k$ ontstaat

$$(a + b)^k = a^k + c_1 a^{k-1} b + c_2 a^{k-2} b^2 + \ldots + c_{k-1} a\, b^{k-1} + b^k.$$

De coëfficiënten c_j zijn gehele getallen. Men noteert ze meestal $\binom{k}{j}$ in plaats van c_j. Het is niet moeilijk om aan te tonen (met volledige inductie naar k) dat

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!\,(k-j)!} =$$

$$= \frac{k\,(k-1)\,(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-j+1)}{j\,(j-1)\,(j-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}.$$

Neem hierin $a = b = 1$ en $k = 2n$, dan ontstaat

$$2^{2n} = 1 + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{2n-1} + 1.$$

Deze som is natuurlijk groter dan elk van zijn termen, dus in het bijzonder is

$$2^{2n} > \binom{2n}{n}$$

en dit is de ongelijkheid die we nodig hebben. Omdat

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n\,(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)}{n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

is elk priemgetal tussen $n + 1$ en $2n$ een deler van de teller, maar niet van de noemer en dus van $\binom{2n}{n}$ zelf. Ook het produkt van al die priemgetallen is dus een deler van $\binom{2n}{n}$. Nu komt de functie $\pi\,(x)$ ter sprake. Dit produkt heeft namelijk precies $\pi\,(2n) - \pi\,(n)$ factoren, en al die factoren zijn groter dan n. Het produkt is dus groter dan

$$n^{\pi\,(2n) - \pi\,(n)}.$$

Het is echter ook kleiner dan $\binom{2n}{n}$, en dit is weer kleiner dan 2^{2n} zoals we hierboven hebben afgeleid. Er geldt dus

$$n^{\pi\,(2n) - \pi\,(n)} < 2^{2n}.$$

Neem links en rechts de natuurlijke logaritme en deel door $ln\,n$, dan ontstaat

$$\pi\,(2n) - \pi\,(n) < 2\,ln\,2\,\frac{n}{ln\,n}.$$

Ik had aangenomen dat (1) geldt voor alle $x < 2n$, dus zeker voor $x = n$. Dat geeft in de laatste ongelijkheid

$$\pi\,(2n) < \pi\,(n) + 2\,ln\,2\,\frac{n}{ln\,n} < (2 + 2\,ln\,2)\,\frac{n}{ln\,n}.$$

Omdat $ln\,2 < 0{,}7$ volgt hieruit

$$\pi\,(2n) < 3{,}4\,\frac{n}{ln\,n} = 1{,}7\,\frac{ln\,2n}{ln\,n}\cdot\frac{2n}{ln\,2n}. \quad (2)$$

Voor $n \geqq 2^7 = 128$ is $ln\,n \geqq 7\,ln\,2$, dus $ln\,2 \leqq (1/7)\,ln\,n$, en
$1{,}7\,ln\,2n = 1{,}7\,(ln\,2 + ln\,n) \leqq 1{,}7\cdot\frac{8}{7}\,ln\,n < 2\,ln\,n$.

Dit geeft in (2) de ongelijkheid (1) voor $x = 2n$.
Nu voor $x = 2n + 1$:
$\pi\,(x)$ stijgt telkens hoogstens één, dus

$$\pi\,(2n+1) \leqq \pi\,(2n) + 1 < 3{,}4\,\frac{n}{ln\,n} + 1. \quad (3)$$

De afgeleide van $\frac{x}{ln\,x}$ is $\frac{ln\,x - 1}{(ln\,x)^2}$. Deze functie is positief voor $x > e$, dus $\frac{x}{ln\,x}$ is zeker stijgend voor de waarden waarmee wij werken ($n \geqq 128$). $\frac{128}{ln\,128} > 25$, dus voor alle $n \geqq 128$ is $1 < \frac{1}{25}\cdot\frac{n}{ln\,n}$ en dit geeft in (3)

$$\pi\,(2n+1) < 3{,}4\,\frac{n}{ln\,n} + 0{,}04\,\frac{n}{ln\,n} =$$

$$= 1{,}72\,\frac{ln\,2n}{ln\,n}\cdot\frac{2n}{ln\,2n} \leqq 1{,}72\cdot\frac{8}{7}\,\frac{2n}{ln\,2n} <$$

$$< 2\,\frac{2n}{ln\,2n} < 2\,\frac{2n+1}{ln\,(2n+1)}.$$

Hiermee is (1) ook bewezen voor $x = 2n + 1$ en de inductiestap is voltooid. Je kunt overigens door wat nauwkeuriger afschattingen te gebruiken in (1) een iets kleinere constante dan 2 als factor voor $\frac{x}{ln\,x}$ krijgen, maar dan moet je wel meer beginwaarden met de rekenmachine controleren.

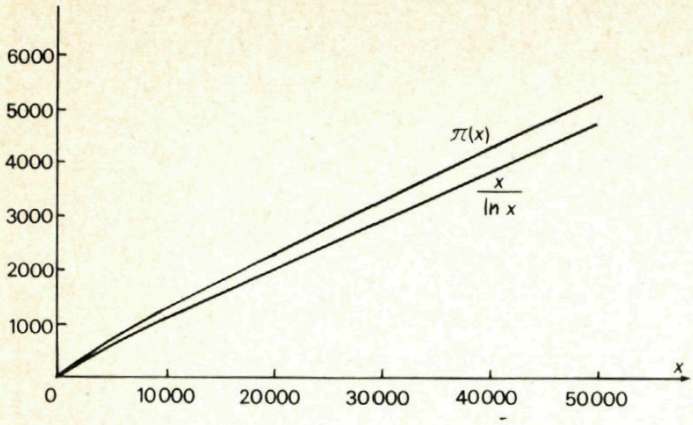


Fig. 4. $\pi(x)$ en een benaderingsfunctie.

Andere benaderingsfuncties voor $\pi(x)$

Een andere formulering van de priemgetallenstelling is, dat de relatieve fout bij de benadering van $\pi(x)$ door $\frac{x}{ln\, x}$ tot nul nadert als x onbeperkt toeneemt. De absolute fout, het verschil tussen de beide functies, groeit echter sterk, zoals fig. 4 laat zien.

De Franse wiskundige Legendre ontdekte in 1808 dat de functie

$$\frac{x}{ln\, x - 1{,}08366}$$

een veel betere benadering geeft. Gauss vond zelf ook een andere goede benadering, de zg. *logaritmische integraal*

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{ln\, t}.$$

In fig. 4 zouden binnen de nauwkeurigheid van de tekening de grafieken van deze beide benaderingsfuncties niet te onderscheiden zijn van $\pi(x)$.

Een derde benaderingsfunctie vond de Duitse wiskundige Riemann in 1859. De formule voor zijn functie is te ingewikkeld om hier te geven. In fig. 5 zie je echter grafieken van de *verschillen* tussen $\pi(x)$ en de benaderingen van Riemann, Legendre en de functie $Li(x)$ van Gauss. Zo is bijv. de grillige lijn waar 'Gauss' bij staat de grafiek van de functie $Li(x) - \pi(x)$. Je kunt het ook zo zeggen, dat van de 'gewone' functies telkens de functie $\pi(x)$ is afgetrokken. $\pi(x)$ zelf wordt dus de nulfunctie en zijn grafiek valt samen met de x-as. De verticale schaal is sterk uitgerekt om de verschillen nog zichtbaar te maken. Het getoonde bereik loopt ongeveer van -100 tot $+300$ of liever gezegd van $\pi(x) - 100$ tot $\pi(x) + 300$. De x-waarden lopen tot 10 miljoen.

Je ziet dat voor 'kleine' x (tot 5 miljoen ongeveer) Legendres approximatie veel beter is dan die van Gauss, maar dat daarna de functie van Gauss weer betere benaderingen geeft. Ook zie je dat Gauss' grafiek steeds *boven* die van $\pi(x)$ ligt, althans binnen het getekende domein. Men kan aantonen dat dit nog wel even zo blijft, zeker tot een miljard, maar de Engelse wiskundige Littlewood heeft bewezen dat er toch waarden van x moeten bestaan waarvoor $Li(x) < \pi(x)$ is. In 1966 heeft Lehman zelfs aangetoond dat er een interval van minstens 10^{500} opvolgende getallen moet zijn tussen

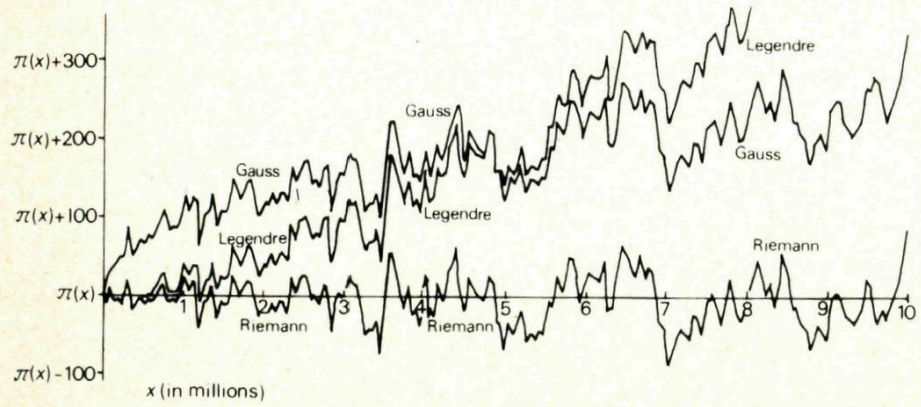


Fig. 5. De afwijking van $\pi(x)$ van drie benaderingsfuncties.

$1{,}53 \cdot 10^{1165}$ en $1{,}65 \cdot 10^{1165}$ waar deze ongelijkheid geldt! Dit illustreert hoe voorzichtig je moet zijn algemene conclusies te baseren uitsluitend op experimentele gegevens.
We hebben in dit verhaal heel wat merkwaardige eigenschappen van de verzameling van de priemgetallen de revue laten passeren. Als er één ding overduidelijk uit te voorschijn komt, dan is het wel het paradoxale feit dat deze verzameling enerzijds aan vaste wetmatigheden, zoals de priemgetallenstelling, gehoorzaamt, en anderzijds een van de meest chaotische en onvoorspelbare objecten van het wiskundig onderzoek is.

Bij het schrijven van dit artikel is o.m. gebruik gemaakt van de tekst van de inaugurele rede van prof. Don Zagier, gehouden op 5 mei 1975 aan de universiteit van Bonn. Van prof. Zagier zijn ook de figuren bij de tekst.
Een mooi boekje voor beginners is *Invitation to Number Theory* door Oystein Ore, uitgegeven voor The Mathematical Association of America door John Wiley & Sons (prijs ± *f* 18,–).

Denkertjes

1. Bewijs dat een kwadraat van een even getal altijd eindigt op 0, 4 of 6.

2. Laat de getallen L_k gedefinieerd zijn als in het artikel over priemgetallen, dus $L_3 = 14$, $L_{k+1} = L_k{}^2 - 2$ $(k = 3, 4, \ldots)$. Bewijs dat L_{k+1} altijd evenveel cijfers heeft als $L_k{}^2$.

3. Laat a_k het aantal cijfers van L_k zijn. Bewijs dat $a_k \geqq 2^{k-3} + 1$.
Als gevolg hiervan heeft a_{127} meer dan 2^{124} cijfers, en a_{44497} meer dan 2^{44494} cijfers. Het aantal cijfers van L_{44497} is dus zelf een getal met minstens 13395 cijfers!

4. Stel P is het produkt van de eerste honderd priemgetallen. Schrijf P op een willekeurige manier als produkt van twee kleinere positieve gehele getallen: $P = A \cdot B$. Bewijs dat het getal $A + B$ òf zelf een priemgetal is, òf alleen maar priemfactoren bevat die groter zijn dan het honderdste priemgetal.

5. Er zijn paren priemgetallen die precies 2 verschillen, zoals (5,7) of (29,31). Het is nog onbekend of er oneindig veel van deze *priemtweelingen* zijn. Bewijs dat er echter maar één *priemdrieling* is: drie priemgetallen $p_1 < p_2 < p_3$ met $p_3 - p_2 = p_2 - p_1 = 2$ namelijk (3,5,7).

6. Bewijs dat als de leden van een priemtweeling beide groter dan 3 zijn, hun som deelbaar is door 12.

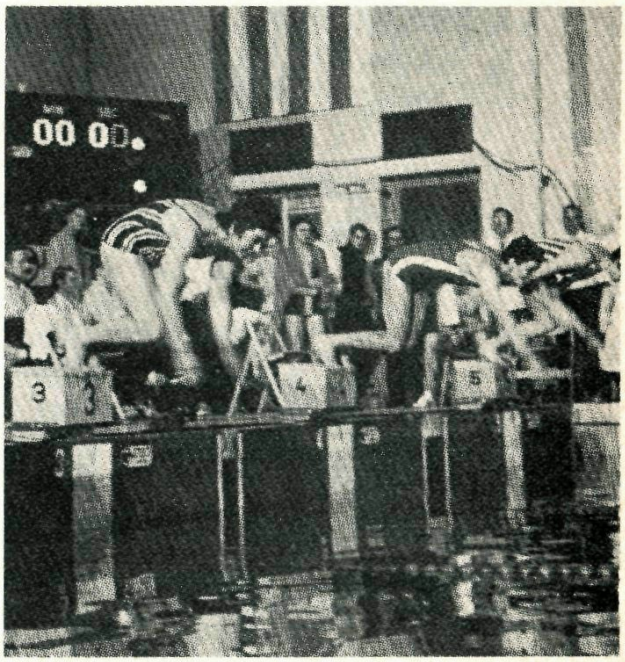
7. Bewijs dat er precies één priemgetal p is waarvoor het getal $2p + 1$ de derde macht van een geheel getal is.

8. Stel p is een priemgetal dat bij deling door 30 rest r geeft. Bewijs dat r dan zelf ook een priemgetal is of gelijk is aan 1. Geldt hetzelfde ook bij deling door 60?

°Tijdmeting bij zwemwedstrijden 1

Het opnemen van tijden is bij veel sporten en in het bijzonder bij zwemwedstrijden dikwijls een dubieuze zaak. Met de Gatsometer, genoemd naar zijn uitvinder de Nederlander Maus Gatsonides, is het probleem van onnauwkeurigheden ten gevolge van menselijke waarnemingsfouten en verschillen in reactiesnelheid bij tijdwaarnemers echter volledig te elimineren. Dit apparaat kreeg voor het eerst officiële erkenning toe het werd toegepast bij de Europese Zwemkampioenschappen van 1966 te Utrecht. Sindsdien is het verder vervolmaakt, en nu wordt het overal ter wereld bij belangrijke zwemwedstrijden gebruikt.

De gatsometer bestaat uit een kwartsklok, verbonden met startclaxons bij de startblokken, en een stel geperforeerde kunststof aantikplaten gemonteerd tegen de finishwand. Deze platen beslaan elk de gehele breedte van een baan, en steken tot de rand van het basin boven water uit. Langs de bovenrand en tussen de plaat en de bassinwand bevindt zich een stelsel dunne met lucht gevulde buisjes, dat er voor zorgt dat een lichte druk bovenop of tegen de plaat een drukschakelaar bedient waardoor de meter de tijd registreert. Deze wordt tot in duizendsten van een seconde op een papierstrook afgedrukt.
De mogelijkheid tijden zo nauwkeurig te meten heeft problemen geïntroduceerd die een wiskundig tintje hebben. Laat ik als inleiding op een stukje hierover in het volgende nummer een *denkertje* formuleren dat aangeeft wat voor problemen dit zijn.



Denkertje

9. Bij een belangrijke zwemwedstrijd is er een close-finish tussen de zwemmers op de banen 2 en 6 op het nummer 200 m vrije slag. Baan 2 heeft als gatsometertijd 1 minuut 58,122 seconde, baan 6 heeft 1.58,136. Baan 2 wordt dus tot winnaar uitgeroepen.
Laten we echter eens aannemen dat er in het bad, dat met grote zorg is gebouwd, tussen de banen 2 en 6 toch een klein lengteverschil is: stel dat baan 2 één centimeter korter is dan baan 6. Het is een 50 m bad. Is het onder deze veronderstellingen nog steeds terecht dat de zwemmer op baan 2 de eerste prijs kreeg?

°°°Van alles over twee cirkels

In het vlak liggen twee elkaar snijdende cirkels C_1 en C_2. A is een van de snijpunten. Twee punten P_1 en P_2 doorlopen de cirkels C_1 resp. C_2 in dezelfde omloopszin met constante snelheden. Zij beginnen tegelijkertijd in A en komen na één omloop ook weer gelijktijdig in A terug.
Bewijs dat er een vast punt P in het vlak is zo, dat P op elk tijdstip gelijke afstanden heeft tot P_1 en P_2.

Dit was de derde opgave van de 21e Internationale Wiskunde Olympiade. Het komt vaak voor dat er verschillende oplossingsmethoden gevonden worden bij een Olympiadevraagstuk, maar deze opgave spant in dit opzicht misschien wel de kroon. Letterlijk tientallen verschillende oplossingen werden er door de deelnemers op papier gezet. Sommigen werkten met een coördinatenstelsel, anderen gebruikten complexe getallen, en er waren ook erg veel verschillende meetkundige oplossingen. De manier waarop waarschijnlijk de meeste van onze lezers het vraagstuk zouden aanpakken, is als volgt. Kies een geschikt coördinatenstelsel, neem een tweetal bijzondere posities voor P_1 en P_2, bepaal hiermee het gezochte punt P en toon ten slotte aan dat P inderdaad op elk moment gelijke afstanden heeft tot P_1 en P_2. Op deze methode ga ik verder niet in, hoewel het bewijs best zo gegeven kan worden. Je moet daarbij erg handig en nauwkeurig werken, want anders verzand je snel in geweldige rekenpartijen. Erg mooi is deze methode in elk geval niet. Laten we het daarom eens anders proberen.

Een spiegeling en een rotatie

Hoe is de situatie? Op elk van de twee cirkels loopt een punt met constante snelheid. Na één omloop komen de twee punten tegelijk weer in het uitgangspunt A terug. Ze hebben dus dezelfde hoeksnelheid en op elk moment zijn de hoeken

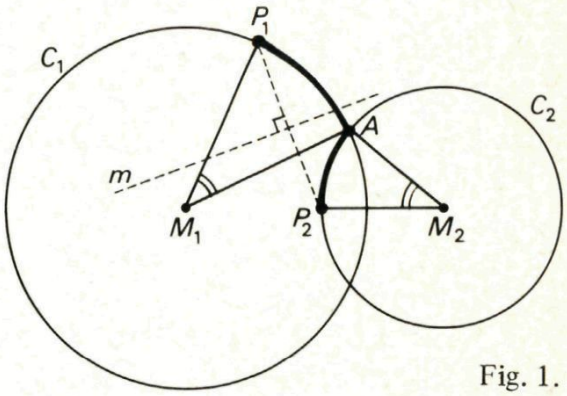


Fig. 1.

P_1M_1A en P_2M_2A daarom gelijk. Een punt P ligt even ver van P_1 als van P_2 betekent dat P op de *middelloodlijn m* van P_1P_2 ligt (fig. 1). Het is dus de bedoeling om aan te tonen dat *alle middelloodlijnen m door één punt gaan.* Je moet om dit te bewijzen natuurlijk eerst een idee krijgen waar dat punt P zou kunnen liggen. Als inderdaad alle lijnen m door één punt P gaan, kun je P al vinden als snijpunt van *twee* posities van m. Kunnen we bijzondere posities van P_1 en P_2 vinden waarbij M gemakkelijk te bepalen is? Eén positie ligt erg voor de hand: precies halverwege de omloop. P_1 en P_2 liggen dan diametraal tegenover A. Als je fig. 2 netjes hebt getekend, lijkt het wel of P_1P_2 door het tweede snijpunt B van de twee cirkels gaat. Dit is inderdaad waar, want P_1 en P_2 ontstaan uit M_1 en M_2 door een vermenigvuldiging met een factor 2 vanuit A. M_1M_2 gaat door het midden van AB, dus P_1P_2 gaat door B. De middelloodlijn m van P_1P_2 staat dus niet alleen loodrecht op P_1P_2, maar ook op M_1M_2

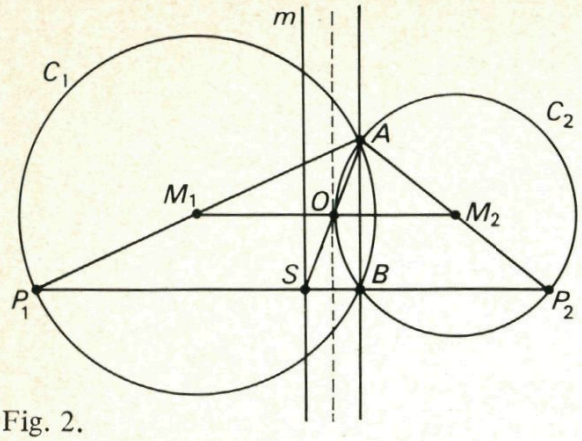


Fig. 2.

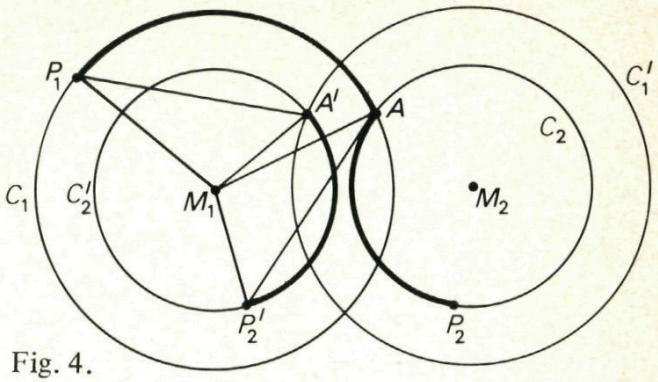


Fig. 4.

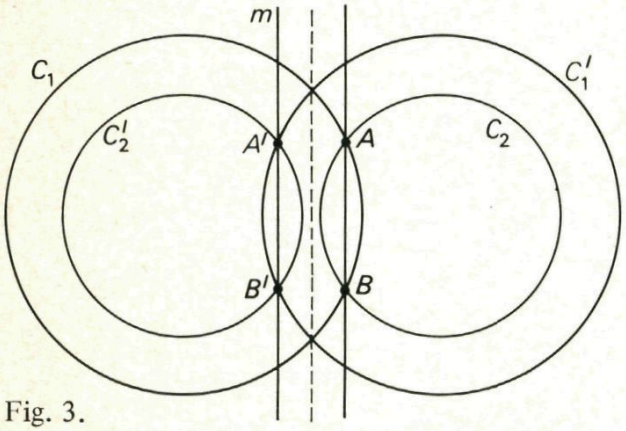


Fig. 3.

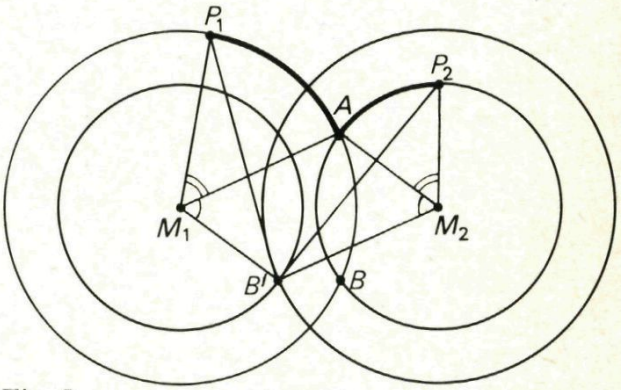


Fig. 5.

en hij is daarom evenwijdig aan AB. Het snijpunt S van P_1P_2 en m is het midden van P_1P_2, en S is dus bij deze vermenigvuldiging ontstaan als beeld van het midden O van M_1M_2. Je ziet hierdoor dat de lijn m en de lijn door A en B symmetrisch liggen t.o.v. de middelloodlijn van M_1M_2. We hebben dus ontdekt dat het gezochte punt P moet liggen op het beeld van AB na spiegeling in de middelloodlijn van M_1M_2. Laten we de cirkels C_1 en C_2 ook eens in deze lijn spiegelen. Spiegelbeelden geven we aan met accenten: C_1', C_2', A' en B' (fig. 3).

Voordat we nu de ingeslagen weg vervolgen en gaan zoeken naar andere bijzondere posities voor P_1 en P_2 om nog een stand van hun middelloodlijn m te bepalen, is het goed eens te kijken of we op de gevonden lijn m geen bijzondere punten aantreffen die het gezochte punt P zouden kunnen zijn. A' en B' zijn zeker bijzondere punten. Zou één van hen het gezochte punt kunnen zijn? Kies eens een willekeurige positie van P_1 en P_2 en bekijk de driehoeken $A'M_1P_1$ en $P_2'M_1A$ (fig. 4). Roteer nu $A'M_1P_1$ om M_1 totdat P_1 met A samenvalt. Het punt A' ligt dan op P_2' want $\angle AM_1P_1 = \angle AM_2P_2 = \angle A'M_1P_2'$. De driehoeken $A'M_1P_1$ en $P_2'M_1A$ zijn dus congruent, en $A'P_1 = AP_2'$. Maar AP_2' is het spiegelbeeld van $A'P_2$, dus $AP_2' = A'P_2$ en blijkbaar is A' het gezochte punt P!

Wat is B' voor een punt?

Op de lijn m van fig. 3 ligt nog een bijzonder punt, namelijk B'. Dit punt heeft de eigenschap dat het steeds gelijke afstanden heeft tot P_1 en P_2 als P_1 en P_2 *in tegengestelde zin* de cirkels doorlopen (ook weer met gelijke hoeksnelheid bij gelijktijdige start in A). Het bewijs hiervan is net zo eenvoudig: je moet er erg in hebben dat $M_1B'M_2A$ een *parallellogram* is (want de overstaande zijden zijn gelijk) (zie fig. 5). De overstaande hoeken AM_1B' en AM_2B' zijn dus ook gelijk. Omdat P_1 en P_2 met dezelfde hoeksnelheid bewegen, geldt $\angle P_1M_1A = \angle P_2M_2A$.

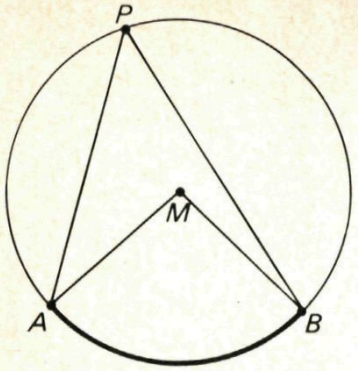


Fig. 6.

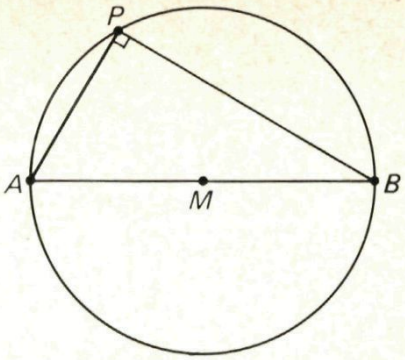


Fig. 8.

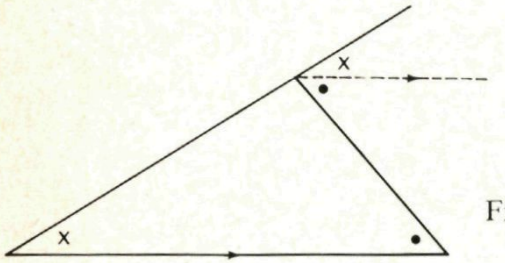


Fig. 7.

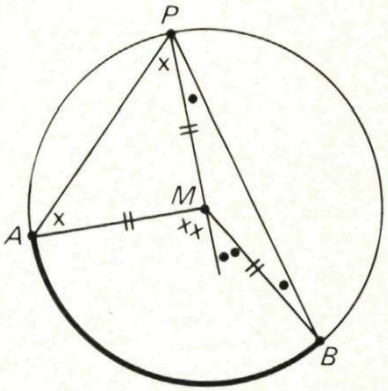


Fig. 9.

Hieruit volgt $\angle P_1M_1B' = \angle B'M_2P_2$. Er geldt ook $M_1B' = M_2P_2$ en $M_1P_1 = M_2B'$ dus de driehoeken P_1M_1B' en $B'M_2P_2$ zijn congruent, zodat $P_1B' = P_2B'$.

Omtrekshoek is halve middelpuntshoek

Hoe eenvoudig en elementair het bovenstaande ook is, je moet toch maar het idee krijgen de figuur in de middelloodlijn van M_1M_2 te spiegelen. Ik kan me indenken dat je daar niet zo snel op komt. Daarom is hier een andere oplossing, die gebruik maakt van een bekende eigenschap van cirkels. Deze hulpeigenschap leiden we eerst af.

Op een cirkel nemen we een vaste boog AB en een punt P buiten deze boog. M is het middelpunt van de cirkel (fig. 6). De hoek APB heet een *omtrekshoek op boog AB* en de hoek AMB heet de *middelpuntshoek op boog AB*. Een boog AB heeft één middelpuntshoek maar oneindig veel omtrekshoeken. Het merkwaardige is nu dat *alle omtrekhoeken op AB gelijk zijn,* en wel *half zo groot* als de bijbehorende middelpuntshoek AMB. Een bijzonder geval van deze stelling ken je waarschijnlijk wel: als boog AB precies een *halve cirkel* is, is $\angle AMB = 180^\circ$ en $\angle APB = 90^\circ$ voor alle punten P op de cirkel (fig. 7).

Het bewijs van de stelling is erg eenvoudig. Je moet weten dat bij een driehoek elke buitenhoek gelijk is aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken (in fig. 8 zie je het bewijs). Dit passen we twee keer toe in fig. 9, die verder bijna voor zichzelf spreekt: Trek PM; $PM = MA$ dus $\angle APM = \angle PAM$; $PM = MB$, dus $\angle BPM = \angle PMB$. Hieruit volgt $\angle AMB = 2\angle APM + 2\angle BPM = 2\angle APB$.

De oplossing die een schoonheidsprijs verdiende

Gewapend met deze kennis van omtrek- en middelpuntshoeken kunnen we nu een ander bewijs van de olympiade-opgave geven. In fig. 2 zagen we dat de verbindingslijn van P_1 en P_2 door B ging. Dit is niet alleen zo in de geschetste bijzondere positie, maar dit geldt *op elk moment* van de beweging! Hier is het bewijs.

Trek P_1B en laat Q het tweede snijpunt van deze lijn zijn met cirkel C_2. We zullen aantonen dat $Q = P_2$ (zie fig. 10). De middelpuntshoek P_1M_1A is twee maal

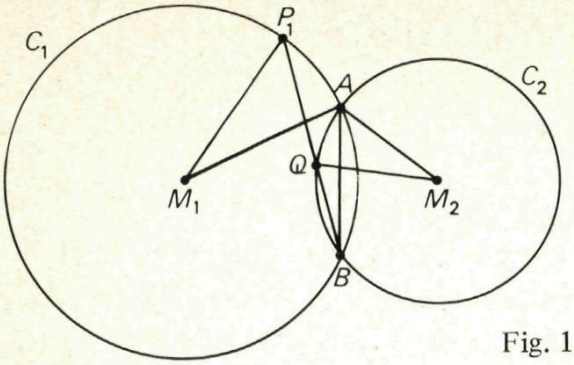


Fig. 10.

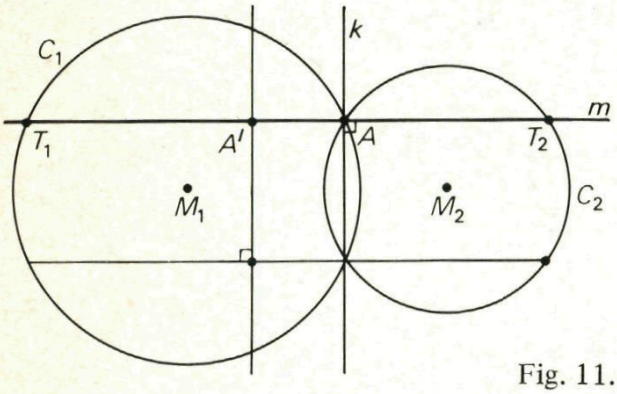


Fig. 11.

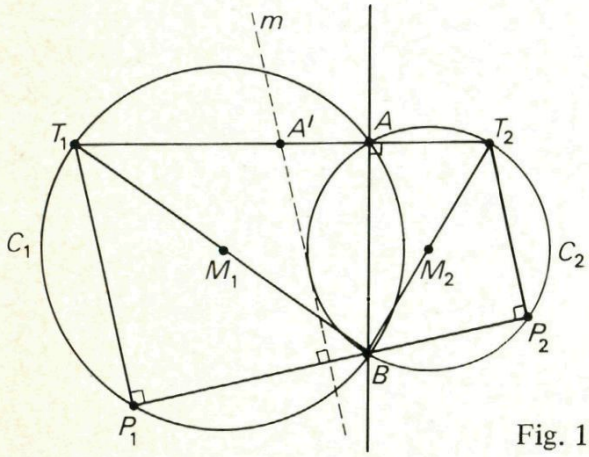
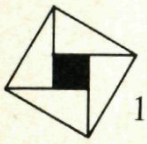


Fig. 12.

zo groot als de omtrekshoek $P_1BA = QBA$. Dit is ook een omtrekshoek in cirkel C_2, en dus de helft van middelpuntshoek QM_2A. Hieruit volgt $\angle P_1M_1A = \angle QM_2A$ dus $Q = P_2$. Je ziet nu hoe je de beweging van P_1 en P_2 zichtbaar kunt maken: wentel een lijn k om het punt B. De snijpunten met C_1 en C_2 zijn de punten P_1 en P_2. De middelloodlijn m zie je ook met dezelfde snelheid meedraaien, en behalve de bijzondere positie die we al gevonden en onderzocht hadden (k horizontaal) zien we nog een tweede bijzondere positie: k verticaal, dus door A. P_1 en P_2 vallen dan met A samen en de 'middelloodlijn' m, die nog steeds loodrecht op k staat, gaat dus *horizontaal* door A. Het snijpunt van de twee gevonden lijnen m is weer het punt A', dat we nu zonder spiegelen hebben gevonden (fig. 11). Omdat er bij A *rechte* omtrekshoeken in de twee cirkels zitten, gaan de lijnen BT_1 en BT_2 door resp. M_1 en M_2. Dit betekent dat voor een *willekeurige* positie van P_1 en P_2 de hoeken T_1P_1B en T_2P_2B ook beide recht zijn (fig. 12). De middelloodlijn van P_1P_2 is dus evenwijdig aan, en even ver verwijderd van T_1P_1 en T_2P_2. Hij deelt het lijnstuk T_1T_2 daarom ook altijd middendoor, met andere woorden, hij gaat door A'.
Het was voor deze oplossing dat een deelnemer uit Vietnam de enige schoonheidsprijs kreeg die er bij deze Olympiade is uitgereikt.



Denkertje

10. Is er als P_1 en P_2 *in tegengestelde zin* de cirkels C_1 en C_2 doorlopen (met dezelfde hoeksnelheid en bij gelijktijdig begin in A) in alle denkbare gevallen *precies één* punt P dat steeds gelijke afstanden heeft tot P_1 en P_2?

°°° De 21e Internationale Wiskunde Olympiade II

Zoals beloofd zijn hier de oplossingen van de opgaven 2, 3, 4 en 5.

Opgave 2: Gegeven is een prisma met de vijfhoeken $A_1A_2A_3A_4A_5$ en $B_1B_2B_3B_4B_5$ als boven- en ondervlak. Elke zijde van elk van de twee vijfhoeken en elk van de lijnstukken A_iB_j voor $i, j = 1, \ldots, 5$ is rood of groen gekleurd. Elke driehoek waarvan de hoekpunten ook hoekpunten zijn van het prisma en waarvan de zijden alle drie gekleurd zijn, heeft twee zijden van verschillende kleur.

Toon aan dat alle 10 zijden van boven- en ondervlak dezelfde kleur hebben.

Oplossing: In fig. 1 zie je zo'n prisma. Voor de overzichtelijkheid zijn niet alle verbindingslijnstukken A_iB_j getekend.

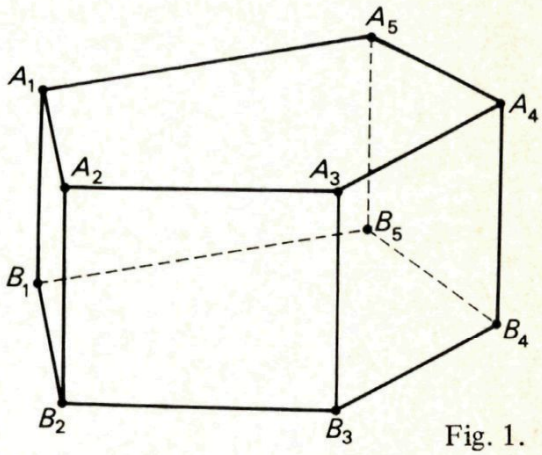


Fig. 1.

Het ligt voor de hand te proberen tot een tegenspraak te komen vanuit de veronderstelling dat er een kleuring mogelijk is zonder driehoeken van één kleur, waarbij niet alle zijden van boven- en benedenvlak gelijk gekleurd zijn. Deze methode leidt inderdaad tot het gewenste resultaat, en afhankelijk van de manier van aanpakken wordt het bewijs meer of minder gecompliceerd.

Een nuttige hulpstelling luidt als volgt:

Hulpstelling: stel A, A' en B, B' zijn paren aangrenzende hoekpunten van boven- resp. benedenvlak. Dan kunnen AA', AB en AB' niet alle drie van dezelfde kleur, zeg bijv. rood, zijn (fig. 2).

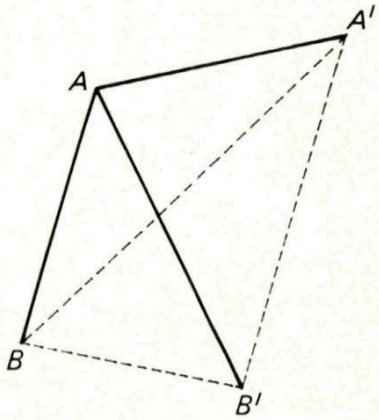


Fig. 2.

Bewijs: Om rode driehoeken te vermijden, zouden BB', $A'B$ en $A'B'$ dan alle drie groen moeten zijn, maar dan is $BA'B'$ een groene driehoek, tegenspraak.

Een zeer gestroomlijnde manier om het bewijs nu te voltooien, zelfs zonder een redenering uit het ongerijmde, is als volgt. Neem een hoekpunt, bijv. A_1, en bekijk de paren lijnstukken (A_1B_1, A_1B_2), (A_1B_2, A_1B_3), (A_1B_3, A_1B_4), (A_1B_4, A_1B_5), (A_1B_5, A_1B_1). Omdat het aantal lijnstukken A_1B_i *oneven* is, is er minstens één paar, stel bijv. (A_1B_1, A_1B_2), gelijk gekleurd, bijv. rood. Dan moet B_1B_2 groen zijn, en op grond van de hulpstelling moeten A_5A_1 en A_1A_2

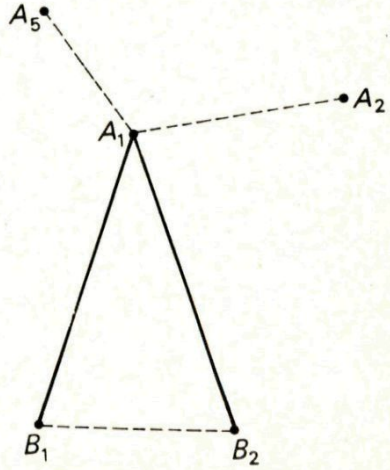


Fig. 3.

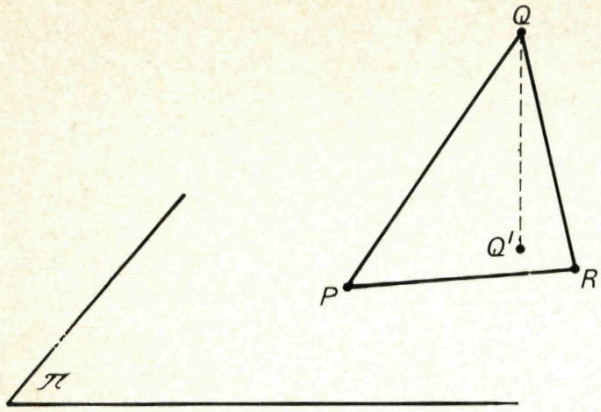


Fig. 4.

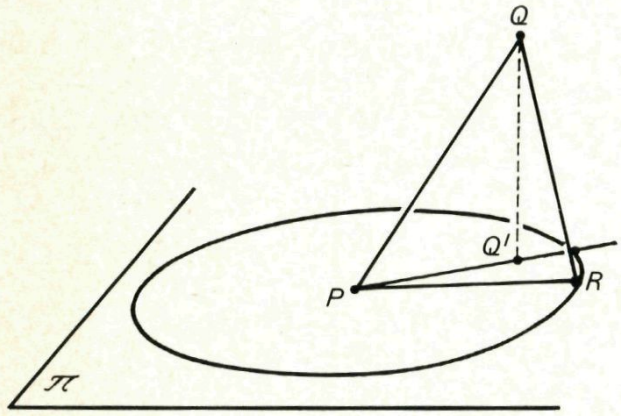


Fig. 5.

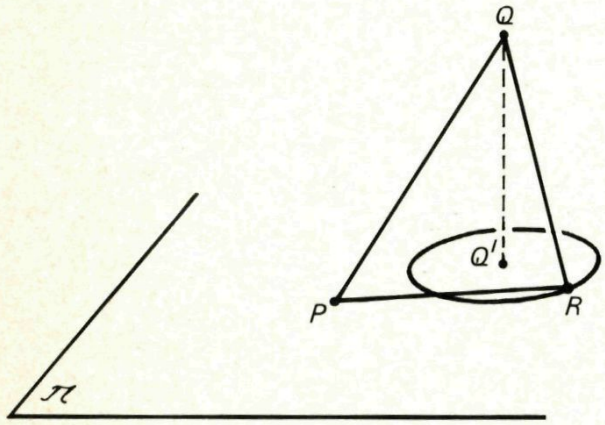


Fig. 6.

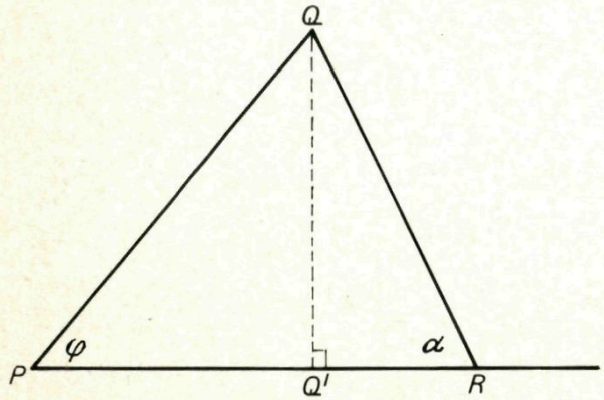


Fig. 7.

ook *beide* groen zijn (fig. 3). Dezelfde redenering passen we toe op A_2 met als gevolg dat A_1A_2 en A_2A_3 gelijk gekleurd, en dus groen zijn. Zo voortgaande bewijs je dat de gehele bovenvijfhoek groen is. Evenzo moet de gehele benedenvijfhoek van één kleur zijn, en omdat B_1B_2 al groen is, is ook de benedenvijfhoek helemaal groen.

Opgave 3: Aan deze opgave is een apart artikel in dit nummer gewijd: 'Van alles over twee cirkels'.

Opgave 4: Gegeven zijn een punt P in een vlak π en een punt Q niet in π. Bepaal alle punten R in π waarvoor het quotiënt $\dfrac{PQ+PR}{QR}$ maximaal is.

Oplossing: Neem een willekeurig punt R in π (fig. 4). We moeten de uitdrukking $(PQ + PR)/(QR)$ onderzoeken als R over het vlak varieert. In deze breuk veranderen dan zowel PR als QR. Laten we echter eerst R zo variëren dat hetzij PR, hetzij QR constant blijft. Als PR constant blijft, beschrijft R een cirkel met middelpunt P in π (fig. 5), en als QR constant blijft, beschrijft R een cirkel in π met als middelpunt de projectie Q' van Q op π (fig. 6). Het doet er niet zo veel toe welke van de twee manieren we kiezen; beide methodes leiden tot het juiste antwoord. Neem bij voorbeeld het eerste geval. R varieert dan over een cirkel met middelpunt P. De teller van $(PQ + PR)/(QR)$ is daarbij constant en de breuk is maximaal als QR zo klein mogelijk is. We moeten voor R dan het snijpunt van de cirkel nemen met de halfrechte vanuit P door Q'. Alle punten in het vlak waarvoor de breuk maximaal is, liggen dus zeker op deze halfrechte.

In fig. 7 is het vlak door P, Q en Q' getekend. De hoek φ is constant, en als R over de halfrechte loopt, varieert α tussen 0 en $\pi - \varphi$.

Volgens de sinusregel is

$$QR = PQ \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \quad \text{en}$$

$$PR = PQ \frac{\sin(\pi - \varphi - \alpha)}{\sin \alpha} = PQ \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\sin \alpha},$$

dus

$$\frac{PQ + PR}{QR} = \frac{\sin \alpha + \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \varphi} =$$

$$\frac{\sin((\alpha + \varphi/2) - \varphi/2) + \sin((\alpha + \varphi/2) + \varphi/2)}{\sin \varphi}$$

$$= \frac{2 \sin(\alpha + \varphi/2) \cos \varphi/2}{\sin \varphi}.$$

Dit is maximaal als $\alpha + \varphi/2 = \frac{\pi}{2}$ dus als $\alpha = \frac{\pi - \varphi}{2}$. Driehoek PQR is dan *gelijkbenig* en daarmee is het punt R waarvoor de breuk maximaal is, volkomen bepaald.
Er is één geval waarbij de bovenstaande redenering niet opgaat: als Q precies boven P ligt, en Q' dus met P samenvalt. Je moet zelf maar eens uitzoeken wat de oplossing in dat geval is.

Opgave 5: Bepaal alle reële getallen a waarvoor er niet-negatieve reële getallen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bestaan die voldoen aan de voorwaarden

$$\sum_{k=1}^{5} k\, x_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3.$$

Oplossing: Ook dit is weer een lastige opgave. Freek Wiedijk vond de volgende mooie oplossing.

$$0 = a \cdot a^3 - (a^2)^2 =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k\, x_k\right) \left(\sum_{m=1}^{5} m^5 x_m\right) - \left(\sum_{k=1}^{5} k^3 x_k\right)^2$$

(voor de duidelijkheid is éénmaal de sommatie-index k door m vervangen). Bij het uitwerken van deze uitdrukking vallen alle termen met $x_k{}^2$ tegen elkaar weg, en elke term met $x_k x_m$ $(k \neq m)$ heeft als coëfficiënt $km^5 + k^5 m - 2\, k^3 m^3 = km\,(k^2 - m^2)^2$. Al deze coëfficiënten zijn *positief* en omdat alle x_i groter dan of gelijk aan nul zijn, moeten alle produkten $x_k x_m$ met $k \neq m$ nul zijn. Zouden er twee verschillende x_i positief zijn, dan was hun produkt ook positief, en dat kan niet. Er is dus hoogstens één x_i positief, en de andere zijn nul. De gegeven vergelijkingen worden dan

$$i\, x_i = a, \quad i^3 x_i = a^2 \quad \text{en} \quad i^5 x_i = a^3.$$

Dit geeft $a = i^2$ en $x_i = i$ of $a = 0$ en $x_i = 0$. De gezochte waarden van a zijn dus $a = 0, 1, 4, 9, 16, 25$ en de bijbehorende oplossingen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ zijn resp. $(0,0,0,0,0)$, $(1,0,0,0,0)$, $(0,4,0,0,0)$, $(0,0,9,0,0)$, $(0,0,0,16,0)$ en $(0,0,0,0,25)$.

°Waar ligt dat punt op de bol?

Voor wie zich nooit verdiept heeft in de sterrenkunde zullen we hier een aantal termen toelichten uit de hemelmeetkunde. In het artikel 'Het astrolabium' wordt er veelvuldig gebruik van gemaakt.
Het graadnet op de aardglobe zal bekend zijn, zie fig. 1 met de bijbehorende namen. Een plaats op aarde wordt aangeduid door twee hoeken:
de *lengte* (= de hoek langs een breedtecirkel, in een vlak loodrecht op de aardas), en de *breedte* (= de hoek langs een meridiaan, een cirkel in een vlak door de aardas).

De lengtehoek wordt gerekend vanaf de nulmeridiaan (de halve cirkel door de polen en het observatorium te Greenwich bij Londen), zowel in oostelijke als in westelijke richting oplopend van 0° tot 180°. De breedtehoek wordt gerekend vanaf de equator (de evenaar) tot +90° bij de noordpool en –90° bij de zuidpool.
Voor plaatsbepaling van sterren, zon, etc. aan de hemel zijn in de praktijk een drietal verschillende graadnetten nodig: het horizonnet, het equatornet en het uurlijnennet. Gelukkig zitten ze wel alle drie net zo in elkaar als het aardse net, maar er is ook een belangrijk verschil. De aardglobe kun je je denken als een verkleinde vorm van de echte aarde, met jezelf *ergens op het oppervlak.* Een hemelglobe stelt niet een concrete bol voor, maar is een denkbeeldig hulpmiddel om ruimtelijke richtingen te kunnen aangeven vanuit een waarnemer *in het middelpunt.*

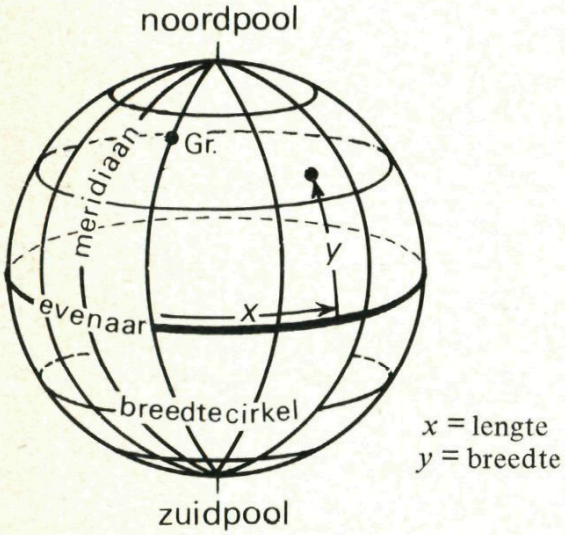


Fig. 1. De aardglobe met het aardse graadnet.

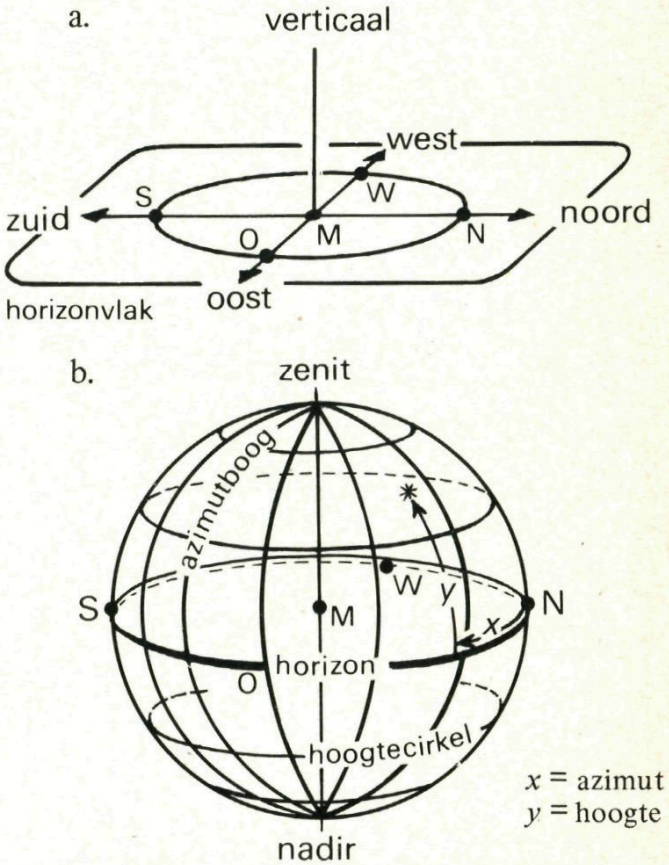


Fig. 2. De stilstaande hemelbol met het horizonnet.

Het horizonnet

Als je in het open veld staat word je blikveld begrensd door de horizon. De richtingen noord, oost, zuid en west worden voorgesteld door punten N, O, S en W. Zie fig. 2a, de waarnemer bevindt zich in M. Voor de waarnemer lijkt het alsof de hemel als een reusachtige halve bol op de horizon rust, en hij kan zich ook onder de horizon zo'n halve bol voorstellen.
Van 'buitenaf' bekeken krijgen we fig. 2b. De plaats op deze bol wordt weer aangeduid door twee hoeken: het *azimut* en de *hoogte.* In vergelijking met fig. 1 heeft de as zenit–nadir nu de rol overgenomen van de as noordpool–zuidpool in het aardse net.
De azimuthoek wordt gerekend vanuit het zuidpunt in de richting van het westpunt van 0° tot 360°; de hoogtehoek vanaf de horizon tot +90° (zenit) en tot –90° (nadir).

Het equatornet

's Nachts blijkt dat de sterren niet op een vaste plaats op de hemelbol staan. Maar wel lijken ze ten opzichte *van elkaar* vast te zitten op wat we de *sterrenbol* kunnen noemen. Deze draait met constante snel-

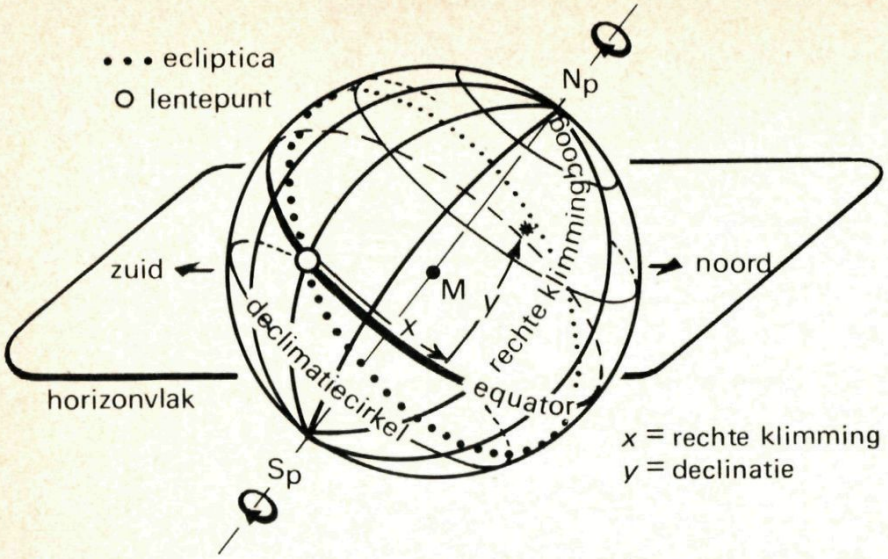


Fig. 3. De draaiende sterrenbol met het equatornet.

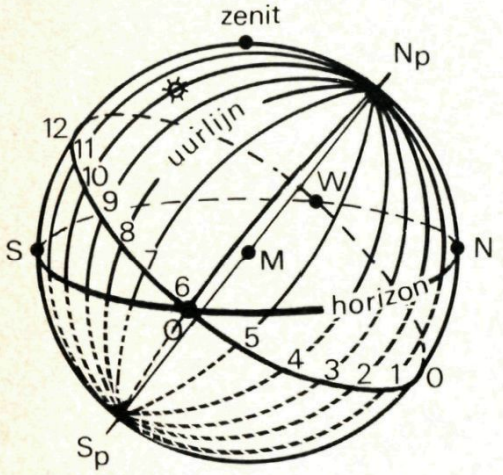


Fig. 4. De stilstaande hemelbol met het uurlijnennet.

heid om een as door de waarnemer en een punt op de hemelbol dicht bij de poolster, de *(hemel) noordpool.* Deze *hemelas* loopt in werkelijkheid evenwijdig met de aardas: voor een waarnemer op de (aard-) noordpool staat de poolster altijd (vrijwel) recht boven.

De sterrenbol maakt één omwenteling in iets minder dan een etmaal (door de beweging van de aarde om de zon ontstaat er na een jaar juist een totaal verschil van één vol etmaal). Zie fig. 3 met de bijbehorende namen. De vaste plaats van een ster wordt in het draaiend equatornet aangeduid door de *rechte klimming* (-hoek) en de *declinatie* (-hoek). Deze coördinaten zijn voor alle 'echte' sterren in tabellen te vinden (in een sterrenatlas).

Alleen van de zon ligt de plaats niet vast op de sterrenbol, in de loop van een jaar doorloopt de zon (weer ten gevolge van de draaiing van de aarde om de zon) de zg. *ecliptica* (-cirkel) op de sterrenbol. Wel kan door berekening of met een tabel voor elke datum in het jaar de rechte klimming en de declinatie van de zon gevonden worden.

De rechte klimming meten we langs de equator vanuit het lentepunt in oostelijke richting van 0° tot 360°, de declinatie vanaf de equator weer van –90° tot +90°. Het *lentepunt* is dát snijpunt van de ecliptica met de equator waar de zon (bij het begin van de lente) het zuidelijk halfrond van de sterrenbol verlaat.

Het uurlijnennet

Voor het vastleggen van de tijd van de dag aan de hand van de stand van de zon (de *zonnetijd*), gebruiken we nog een derde graadnet. Dit heeft dezelfde as als het equatornet, maar draait niet met de sterren en de zon mee. Het ligt vast t.o.v. het horizonnet, zie fig. 4. De zon passeert in een etmaal alle 24 *uurlijnen,* de (halve) uurcirkels bij de volle uren. De uurlijn van 12 uur zonnetijd gaat door het zuidpunt op de horizon.

De *uurhoek* en de declinatie bepalen de plaats van een punt in dit net.

Het astrolabium

Wie wel eens een astrolabium of een afbeelding ervan gezien heeft, en iets vernomen heeft over het veelzijdige gebruik ervan, laat het de indruk na van grote gecompliceerdheid, iets wonderbaarlijks, zelfs omgeven met een vleugje van geheimzinnigheid. De verwondering mag blijven, maar geheimzinnig of erg gecompliceerd hoeft dit instrument niet te zijn voor wie enige kennis van de stereografische projectie heeft.

Het principe

Op een astrolabium zijn *twee* hemelgraadnetten getekend in een plat vlak, op de manier van de stereografische projectie. In *Pythagoras* 79/80 nr. 2 staat een uitvoerige beschrijving van deze projectiemethode; in dat artikel werd uitgegaan van projectie op een vlak door het zenit. Hier wordt nu geprojecteerd vanuit de zuidelijke hemelpool S_p op een vlak π rakend aan de hemelbol in de (hemel)-noordpool, zie fig. 1. (Veel van de hier voorkomende termen worden behandeld in 'Waar ligt dat punt op de bol?', elders in dit nummer.)

Het *uurlijnennet* op de bol wordt zo in projectie erg eenvoudig. De declinatiecirkels gaan over in een stelsel concentrische cirkels om N_p, de uurcirkels in rechte stralen vanuit N_p, zie fig. 2.

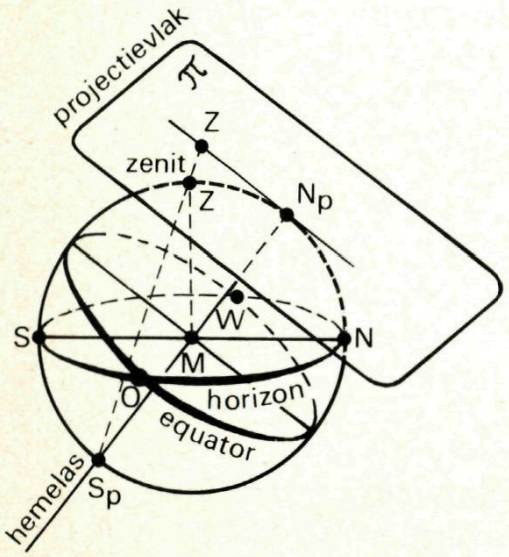
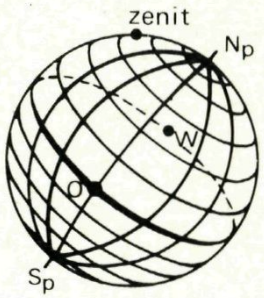


Fig. 1. De hemelbol wordt stereografisch geprojecteerd vanuit de zuidelijke hemelpool S_p.

Het *horizonnet* geeft in projectie een wat ingewikkelder stelsel (zie fig. 3), maar de hoogte- en azimutcirkels op de bol blijven in projectie toch wel cirkels! Dit is juist de essentiële eigenschap van deze projectiemethode: elke cirkel op de bol wordt weer een cirkel (of een rechte) in het projectievlak. Hierin zal ook wel de



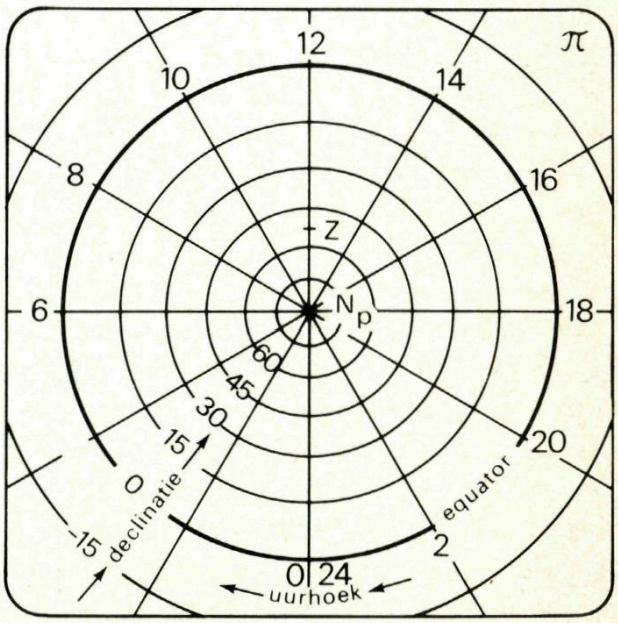


Fig. 2. De projectie van het uurlijnennet met declinatiecirkels en uurlijnen.

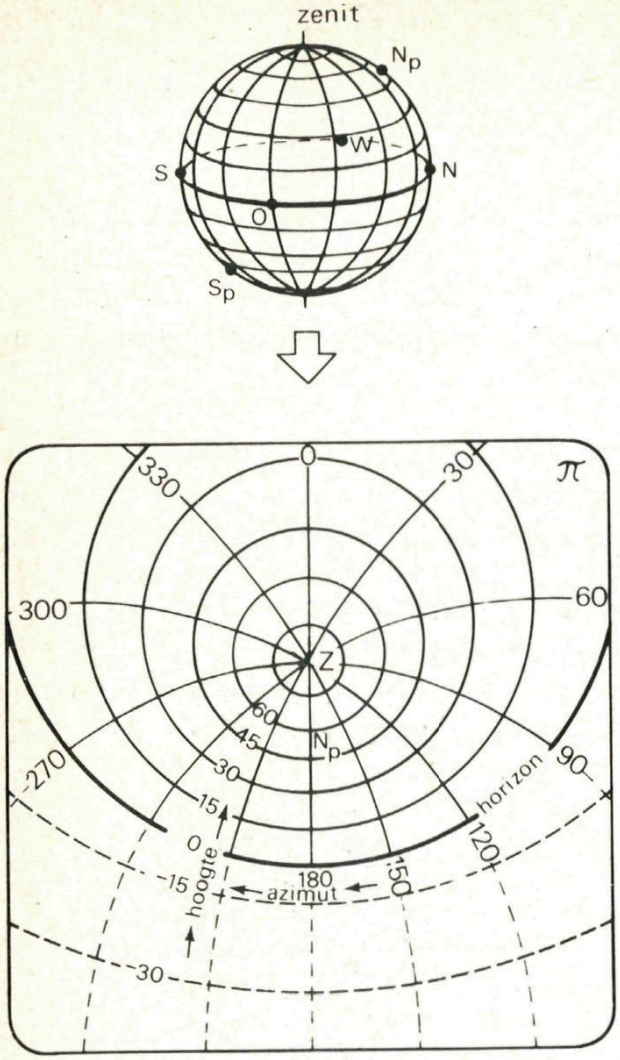


Fig. 3. De projectie van het horizonnet met hoogtecirkels en azimutbogen.

verklaring liggen voor het feit dat voor het astrolabium juist de stereografische projectie gebruikt wordt: andere kromme lijnen dan cirkels waren destijds (en zijn veelal nog) veel moeilijker zuiver te tekenen en in koperplaten te graveren!

De uitvoering

Het astrolabium bestaat in wezen uit twee cirkelvormige platen die draaibaar zijn om een gemeenschappelijke as door de middelpunten. In de onderste plaat is het geprojecteerde horizonnet gegraveerd. De bovenste plaat is verbonden met het geprojecteerde uurlijnennet. Maar omdat deze laatste schijf draaibaar is om de hemelpool N_p (het gemeenschappelijke punt van het uurlijnen- en het equatornet) is deze op elk moment van de dag ook zó in te stellen dat het *equatornet* wordt voorgesteld ten opzichte van het horizonnet op de onderste plaat. We zullen nu de onderdelen van het klassieke astrolabium één voor één beschrijven. Eerst de voorzijde, zie fig. 4.

a. De *mater* is een platte, cirkelvormige open doos, waar zowel de horizondrager (tympaan) als de sterrenkaart (rete) juist in passen. Aan de buitenzijde van de mater zit een ophangring (armilla), waardoor het astrolabium verticaal gehangen kan worden ter bepaling van een ster- of zonshoogte. De opstaande rand van de doos draagt een schaalverdeling in graden en/of in uren.

b. De *tympaan* is de schijf waar het geprojecteerde horizonnet in is gegraveerd (alleen het gedeelte boven de horizon). Dit had ook direct op de bodem van de mater kunnen gebeuren, maar men maakte meestal verschillende verwisselbare tympanen, omdat de afstand $Z'N_p$ (fig. 2), de geprojecteerde hoekafstand tussen zenit en (hemel)noordpool, afhangt van de breedtegraad op aarde waar het instrument wordt gebruikt.

De tympaan ligt vastgepind in de mater met de zuidkant naar het ophangpunt.

c. De *rete,* draaibaar bovenop de tympaan, is een meestal sierlijk gevormd hekwerk met zo groot mogelijk uitgezaagde openingen om het netwerk eronder zichtbaar te laten zijn. (Aan een schijf praktisch bruikbaar doorzichtig materiaal was vroeger niet zo gemakkelijk te komen als nu).

In het hekwerk zijn de namen gegraveerd van een 25 tot 50 sterren, en de vaste posities ervan in het equatornet worden aangewezen door fijn uitlopende spitsjes. Het eigenlijke graadnet van concentrische cirkels en stralen is niet op de rete aangegeven; een klein (maar

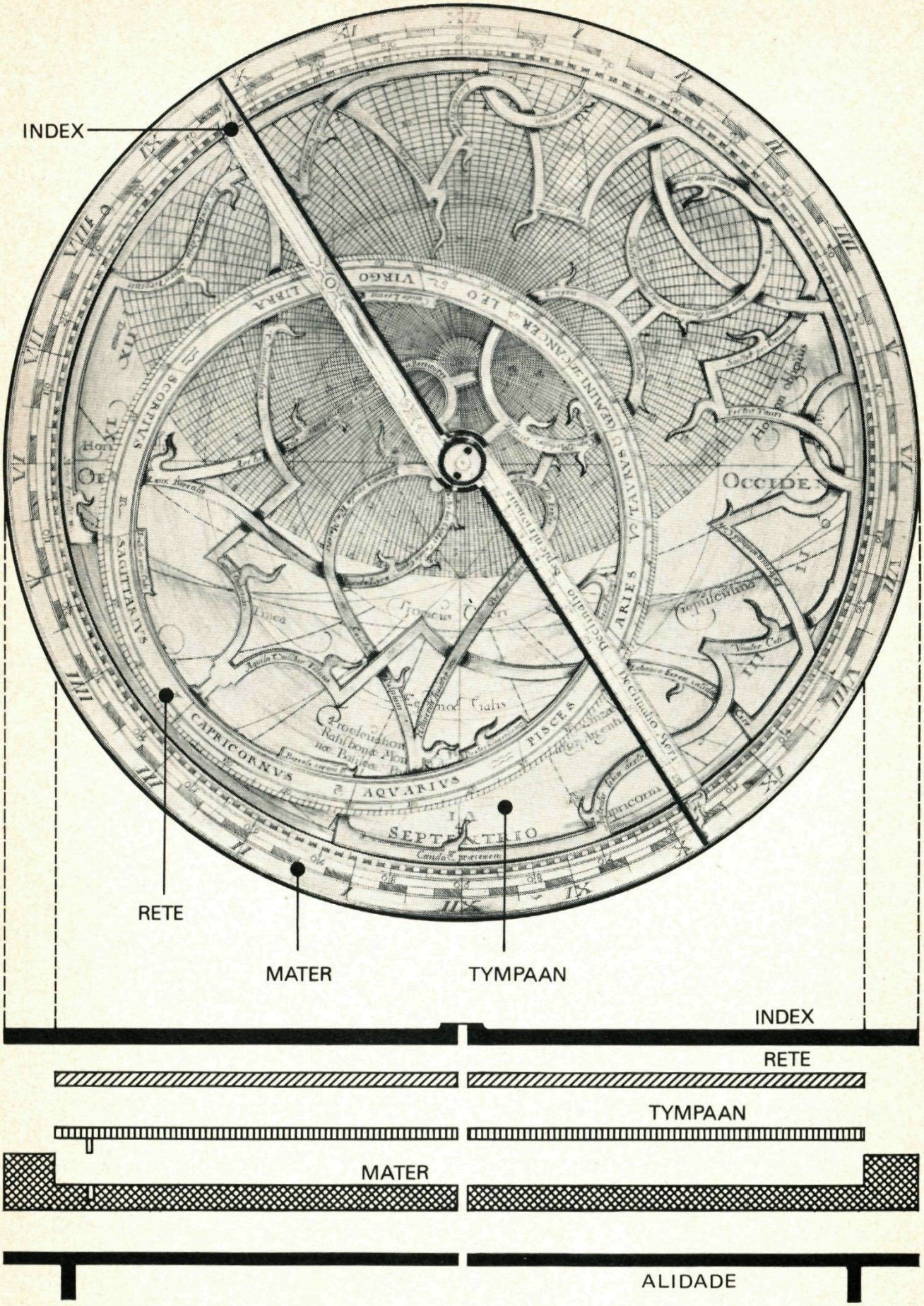


Fig. 4. De onderdelen van een astrolabium uit 1585, verguld koper, gesigneerd: Erasmus Habermel.

wel voldoende deel ervan wordt gevormd door de streepjes van het 'stereografische meetlatje' op de draaibare index.
In de rete bevindt zich nog een opvallende, excentrisch gelegen ring: de zonnebaan of ecliptica met een schaalverdeling langs de rand ervan, waarmee bij een gegeven datum de plaats van de zon in het equatornet aan te geven is.

d. De *index* is een draaibare afleeslineaal. Deze is dikwijls nog voorzien van een declinatieschaal, en verder bedoeld om de richting van een lijn door het middelpunt en een punt in het equatornet (een ster of de zon) af te kunnen lezen op de schaal langs de rand van de mater.

Op de achterzijde vinden we langs de rand nog een gradenschaal voor de hoogtemeting en ook een datumschaal, waarop voor elke gegeven datum de precieze plaats van de zon op de ecliptica kan worden afgelezen. Verder nog de *alidade,* overeenkomend met de index aan de voorkant, maar dan voorzien van een vizierinrichting voor de hoogtemeting van punten aan de hemel.

Het gebruik

Er zijn in de loop der eeuwen talloze verhandelingen over het astrolabium geschreven. Daarin worden de gebruiksmogelijkheden breed uitgemeten: men kan de declinatie van de zon op een gegeven tijdstip aflezen, de lengte van de dag bepalen voor een gegeven datum, en het tijdstip van opkomst en ondergang van de zon. Verder nog de plaats van een ster aan de hemel voor een bepaalde datum en tijd, etc., etc. Er zijn schrijvers die de lijst uitbreiden tot meer dan 50 mogelijkheden, maar de meeste ervan liggen voor de hand voor wie weet wat de schaalverdelingen en netwerken voorstellen.
Alle toepassingen berusten in principe op het feit dat de beweging van de sterrenbol ten opzichte van de stilstaande hemelbol bekend is. Dit geeft een relatie tussen:

- het tijdstip van waarneming van een ster of van de zon;
- de datum in het jaar;
- de plaats in het equatornet van het waargenomen object;
- de plaats in het horizonnet;
- de breedtegraad op aarde van het punt van waarneming.

Een voorbeeld

We proberen nu nog aan te geven hoe uit de stand van een ster de (zonne)tijd kan worden bepaald.

1. Met de alidade en de gradenschaal op de achterzijde meten we de hoogte en (met een kompas voor de zuidrichting) het azimut van een bekende ster. We zoeken het bijbehorende punt op in het horizonnet op de tympaan.
2. We draaien de rete zó, dat de positie van de gemeten ster in het equatornet precies boven het zojuist gevonden punt ligt.
   Het astrolabium is nu *ingesteld,* d.w.z. de oriëntatie van het equatornet komt overeen met de werkelijke oriëntatie van de sterren aan de hemel op het moment van waarneming.
3. Zoek, via de datumschaal op de achterkant, de positie van de zon op de eclipticaring in de rete.
4. Draai de index op deze zonpositie. De index geeft nu op de uurhoekschaal op de rand, de zonnetijd van het moment aan.

Computers in de Samenleving

Onder bovenstaande titel worden door de Vrije Universiteit te Amsterdam, naar aanleiding van het 100-jarig bestaan, een aantal activiteiten georganiseerd. Speciaal bedoeld voor o.m. leerlingen van het voortgezet onderwijs zijn:

- de foto-tentoonstelling *Computer en beroep*, over de rol van de computer in traditionele beroepen, en over een aantal nieuwe (computer-)beroepen;
- recreatie met computers, bezoekers kunnen via een vijftal terminals schaken en andere spelletjes doen;
- diverse films, o.a. over chips en over de PCGD;
- de demonstratie van *View Data* van de PTT;
- de expositie van op de markt zijnde hobby-computers, met stands van hobbycomputerclubs;
- en de demonstratie van computerbestuurde apparatuur in het ziekenhuis, de grafische industrie, en het onderwijs.

De genoemde activiteiten vinden plaats op dinsdag 1 en woensdag 2 april 1980, van 10 tot 22 uur, in het hoofdgebouw van de V.U., De Boelelaan 1105, Amsterdam-Buitenveldert.
Alleen de foto-tentoonstelling is ook nog te bezoeken van dinsdag 8 t.e.m. zaterdag 12 april, van 10 tot 18 uur, in het Natuurkundegebouw, De Boelelaan 1081.

Vraag je wiskunde-leraar voor meer bijzonderheden, er is ook nog een opgave in wedstrijdvorm voor scholieren (over een databank). Aan alle scholen moet een informatie-krant zijn toegestuurd.

Oplossing denkertjes

1 t.e.m. 9. In het volgende nummer.
10. Nee. Als beide cirkels gelijke straal hebben voldoet *elk* punt op de lijn door de twee snijpunten.

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

< W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn.
ϟ Ir. H. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginneken.
√ G.A. Vonk, Wagnerlaan 18, 1411 JE Naarden.
∫ Dr. J. van de Craats, R.U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
★ Bruno Ernst, Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht.

Redactiesecretariaat

Δ Drs. H.N. Pot, Tournoysveld 67, 3443 ER Woerden.
Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

W. Ganzevoort, M.C. van Hoorn, W. Pijls, D.K. Wielinga.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,40 per jaargang. Voor anderen f 12,10*.
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.
Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.
Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

* Per abuis zijn op afl. 1 verkeerde abonnementsprijzen opgenomen.

Inhoud

★ Spiralen uit vierkanten 73
∫ De Nederlandse Wiskunde Olympiade 74
∫ Pythagoras Olympiade 75
∫ Priemgetallen 76
∫ Tijdmeting bij zwemwedstrijden I 83
∫ Van alles over twee cirkels 84
∫ De 21e Internationale Wiskunde Olympiade II 88
★ Waar ligt dat punt op de bol? 90
★ Het astrolabium 93
Computers in de Samenleving 96a