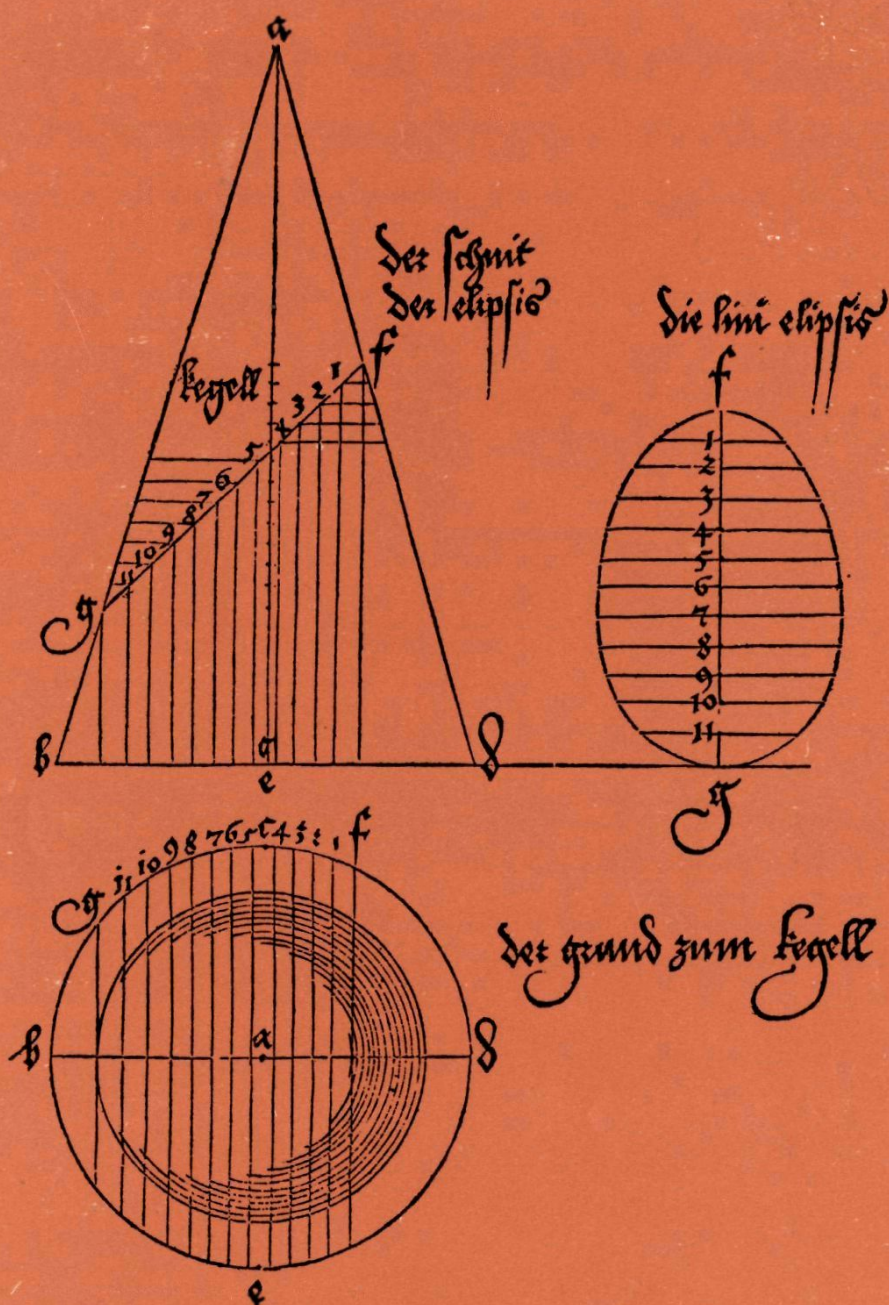


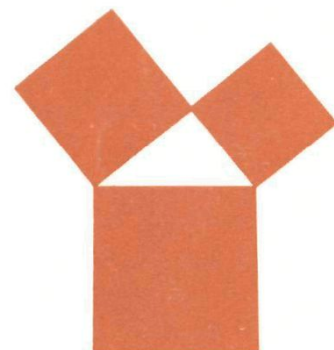


1

jaargang 20 / september 1980

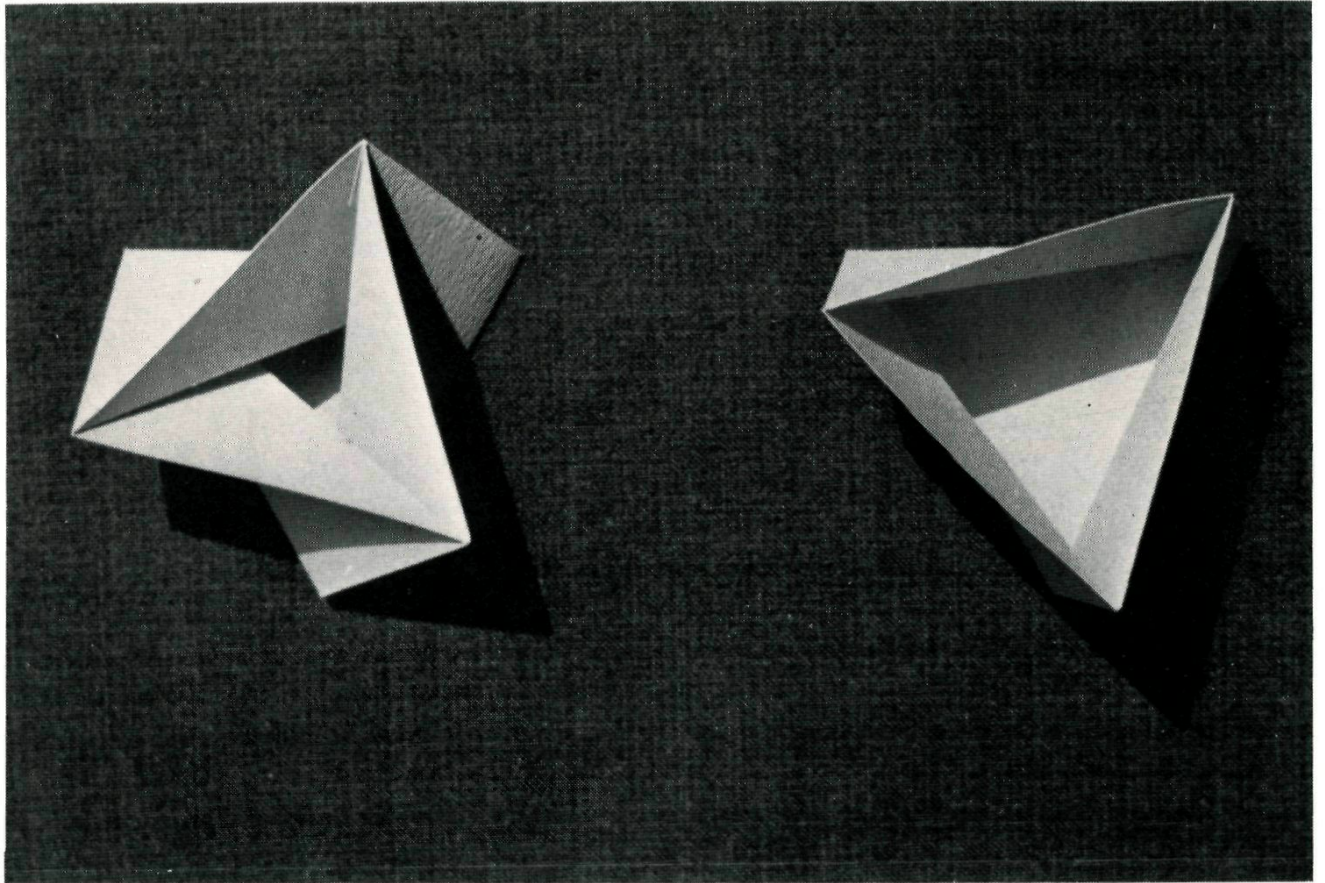
wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 x per schooljaar

Pythagoras



Twee verschillende doosjes, uit identieke bouwplaten. Kan dat zomaar altijd? Zie het artikel 'Met meer driehoeken bouwen'.

BIJ DE VOORPLAAT

De voorplaat, een tekening van Albrecht Dürer uit 1525, illustreert hoe een ellips ontstaat als snijfiguur van een kegel met een vlak. Je ziet de kegel in zijaanzicht. De lijn *fg* stelt het snijvlak voor. Eronder vind je het grondvlak getekend met daarin aangegeven de niveaulijnen van de afgesneden kegel op de 11 aangegeven niveaus. Het zijn cirkels waaruit het weggesneden linkerdeel is weggelaten. Het verticale lijntje tussen de cirkelbooguiteinden geeft de breedte aan van de kegelsnede op het betreffende niveau. Deze breedtelijntjes kunnen rechts boven loodrecht op de lijn *fg* in ware gedaante worden ingetekend. Door de uiteinden trekt Dürer dan met de hand de kegelsnede zelf.

De tekening is niet helemaal nauwkeurig en daardoor ontstaat de indruk dat de ellips van onderen breder is dan van boven. In het artikel 'Wat zijn kegelsneden?' wordt echter aangetoond dat dit niet zo is.

°° Wat zijn kegelsneden?

Trek vanuit een punt T buiten een bol B alle raaklijnen aan de bol. Deze lijnen vormen tezamen een *kegel* met top T . Ze heten de *beschrijvende lijnen* van de kegel. De verbindingslijn van T met het middelpunt van de bol heet de *as*. De beschrijvende lijnen denken we ons naar beide zijden (dus ook door de top T heen) onbeperkt verlengd. De kegel bestaat zo uit twee delen die elkaar in de top raken en symmetrisch liggen ten opzichte van de top (fig. 1). Rotaties om de as voeren de kegel in zichzelf over. Hij wordt ook op zichzelf afgebeeld bij elke puntvermenigvuldiging vanuit de top. Als bij zo'n puntvermenigvuldiging de bol B in een bol B' overgaat, brengen B en B' dezelfde kegel met top T voort. De kegel en een bol die hem voortbrengt raken elkaar in een cirkel, gelegen in een vlak loodrecht op de as. Vanwege de rotatiesymmetrie zijn alle verbindingslijnstukken van de top met een punt op deze raakcirkel even lang.

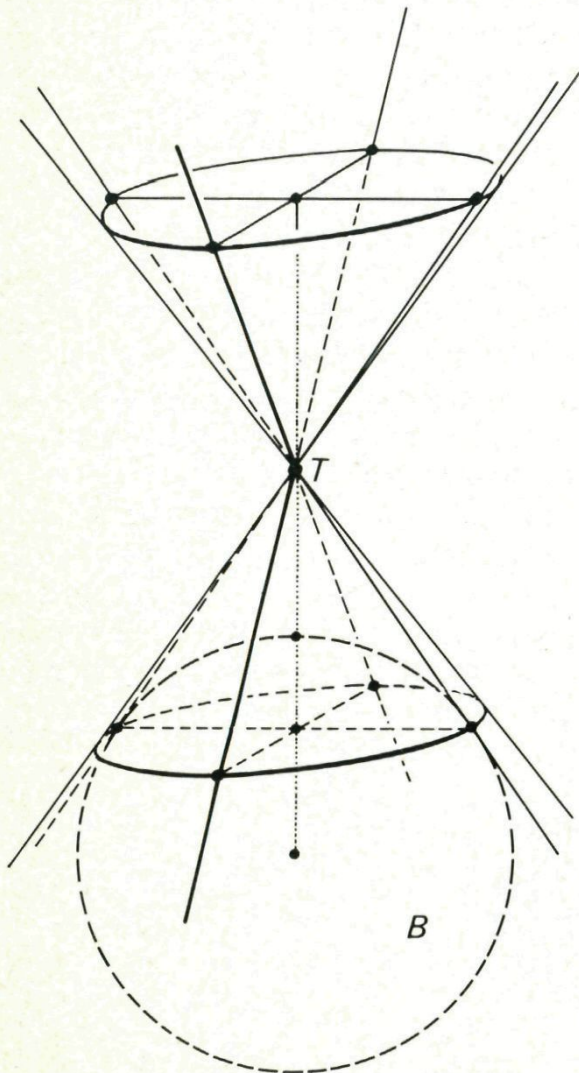


Fig. 1.

Kegelsneden

De figuren die ontstaan als je zo'n kegel

met een vlak snijdt, heten *kegelsneden*. Als het vlak door de top T van de kegel gaat, bestaat de snijfiguur uit een punt, of uit twee lijnen, of als grensgeval uit twee samenvallende lijnen. Interessanter is het om de kegel te snijden met een vlak dat *niet* door de top gaat. Je kunt zo'n kegelsnede te voorschijn brengen als je een puntvormige lichtbron in T aanbrengt en kijkt naar de schaduwfiguur die een bol op de vloer geeft. De rand van die figuur is dan een kegelsnede. Ligt het middelpunt van de bol recht onder T dan staat de as van de kegel loodrecht op de vloer, en de schaduwfiguur is een cirkel (fig. 2).

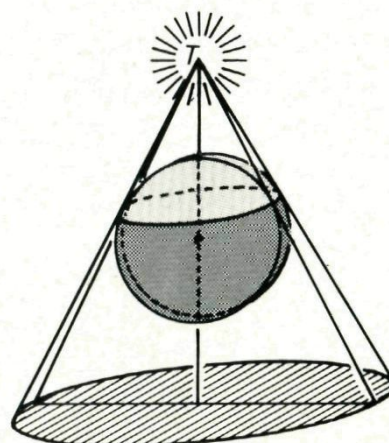


Fig. 2.

Ellips, Parabool en Hyperbool

Verplaatsen we de bol een beetje dan ontstaat een schaduwfiguur waarvan de rand

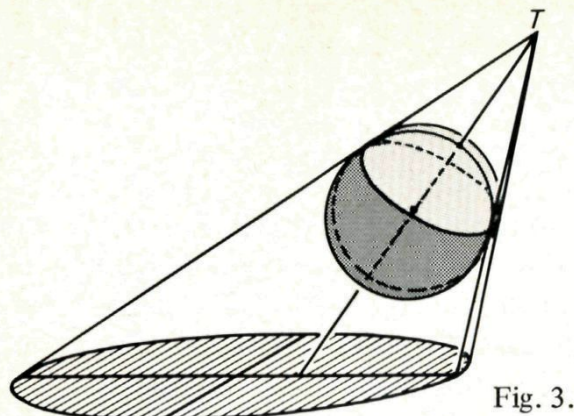


Fig. 3.

een *ellips* is (fig. 3). Je zou misschien kunnen denken dat het deel van de ellips dat het verst van de top van de kegel ligt 'breder' is dan het andere uiteinde, maar we zullen laten zien dat dit niet waar is: de twee uiteinden van de ellips zijn symmetrisch ten opzichte van elkaar. De ellips wordt langgerechter naarmate je de hoek tussen de as van de kegel en het vloeroppervlak kleiner maakt.

Een nieuw geval ontstaat zodra de bovenkant van de bol *raakt* aan het horizontale vlak door de top. De schaduwfiguur loopt dan naar één kant onbeperkt door en de rand vormt een *parabool* (fig. 4). De ene beschrijvende lijn van de kegel die horizontaal loopt, snijdt het vloeroppervlak niet. Naarmate de andere beschrijvende lijnen dichterbij deze lijn liggen, liggen de bijbehorende snijpunten op de parabool verder weg.

Als we de bol nog verder omhoog halen zodat hij het horizontale vlak door de top *snijdt*, zal ook het tweede stuk van de

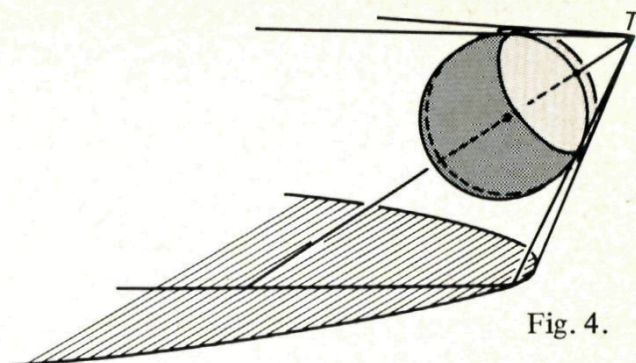


Fig. 4.

kegel, aan de andere kant van de top, het vloeroppervlak gaan snijden. Om een goed beeld te krijgen kun je dan het beste een *tweede* bol symmetrisch ten opzichte van de kegeltop aanbrengen. De schaduwfiguur van de twee bollen geven dan samen de volledige, uit twee stukken bestaande kegelsnede (fig. 5). Deze kegelsnede is een *hyperbool*. We hebben hiermee alle mogelijke snijfiguren van de kegel met een plat vlak ten tonele gevoerd.

Eigenschappen van Kegelsneden

De Belg *Pierre Dandelin* (1794–1847) heeft een bijzonder eenvoudige manier ontdekt om de belangrijkste meetkundige eigenschappen van ellips, parabool en hyperbool af te leiden. Volgens zijn methode zullen we laten zien:

1. Bij elke ellips en elke hyperbool behoren twee punten, de *brandpunten*, zo, dat voor elk punt van de ellips of hyperbool de som, resp. het verschil van de afstanden tot de brandpunten constant is.

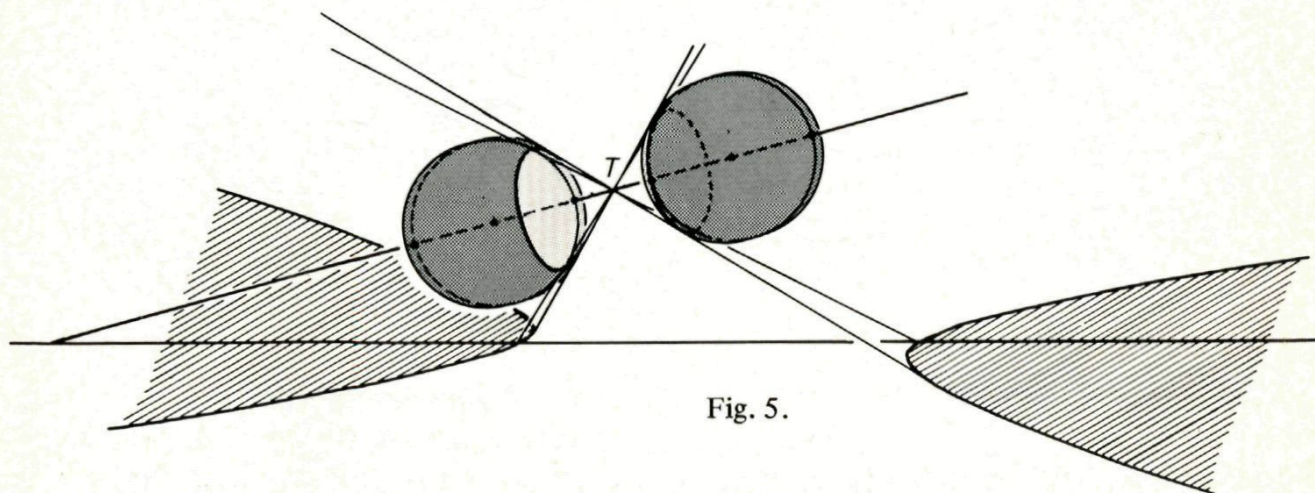
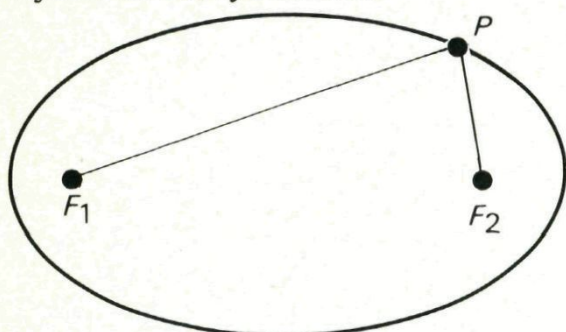


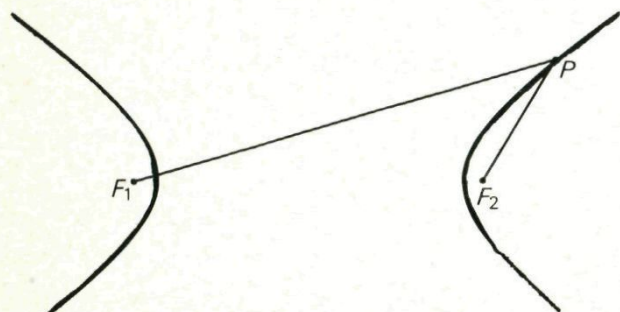
Fig. 5.

2. Bij elke parabool behoren een *brandpunt* en een *richtlijn* zo dat elk punt van de parabool gelijke afstanden tot brandpunt en richtlijn heeft.

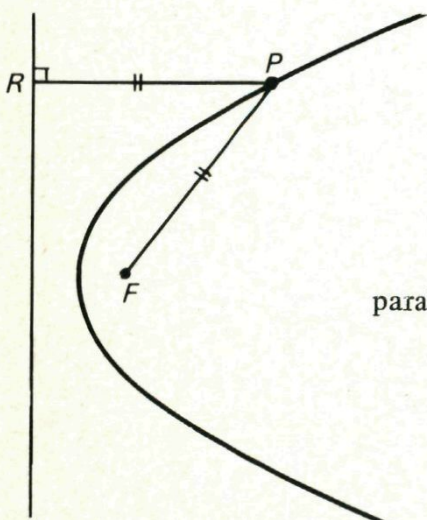
Deze eigenschappen, die in fig. 6 geïllustreerd worden, leggen de betreffende kegelsneden volledig vast. Ze kunnen ook als *definitie* van ellips, hyperbool en parabool genomen worden. Er blijkt onmiddellijk uit dat ellips en hyperbool symmetrisch zijn ten opzichte van de lijn door, en de middelloodlijn van de beide brandpunten. De parabool heeft alleen de lijn door het brandpunt loodrecht op de richtlijn als as van symmetrie.



ellips: $PF_1 + PF_2$ is constant



hyperbool: $|PF_1 - PF_2|$ is constant



parabool: $PR = PF$

Fig. 6.

Ellips en Hyperbool

De methode van Dandelin is, vooral bij de ellips en de hyperbool, zo eenvoudig, dat je eigenlijk alleen maar een goede tekening behoeft te bekijken om te constateren dat het klopt (fig. 7 voor de ellips en fig. 8 voor de hyperbool).

Bij fig. 7 is de bol die de kegel voortbrengt zo groot gemaakt (door puntvermenigvuldiging vanuit T) dat hij precies op het vloeroppervlak komt te liggen. Een tweede bol die dezelfde kegel voortbrengt is zo groot gemaakt, dat hij de vloer aan de *onderkant* raakt. De raakpunten van de bollen met de vloer noemen we F_1 en F_2 . Dit zullen de brandpunten van de ellips zijn!

Door een willekeurig punt P van de ellips trekken we een beschrijvende lijn p van de kegel. De snijpunten van p met de raakcirkels van de bollen aan de kegel noemen we A_1 en A_2 . Deze raakcirkels liggen in onderling evenwijdige vlakken loodrecht op de as. De lengte k van het lijnstuk A_1A_2 is dus onafhankelijk van de positie van P op de ellips. PF_1 en PA_1 zijn beide *raaklijnstukken* aan de eerste bol vanuit het punt P en dus even lang (rotatiesymmetrie om een as door P en het middelpunt van de bol). PF_2 en PA_2 zijn raaklijnstukken vanuit P aan de tweede bol, en dus ook even lang. Er geldt daarom $PF_1 + PF_2 = PA_1 + PA_2 = A_1A_2 = k$.

Het bewijs voor de *hyperbool* gaat op precies dezelfde wijze (fig. 8). We nemen nu twee bollen die beide *op* de vloer liggen en de kegel voortbrengen. Voor de rest spreekt fig. 8 voor zichzelf.

De Parabool

Ook bij de parabool nemen we als voortbrenger van de kegel de bol die op de vloer rust. Het raakpunt F van de bol met de vloer zal het *brandpunt* van de parabool zijn. De *richtlijn* r maken we door het vlak α van de raakcirkel van bol en kegel met het vloeroppervlak te snijden (fig. 9).

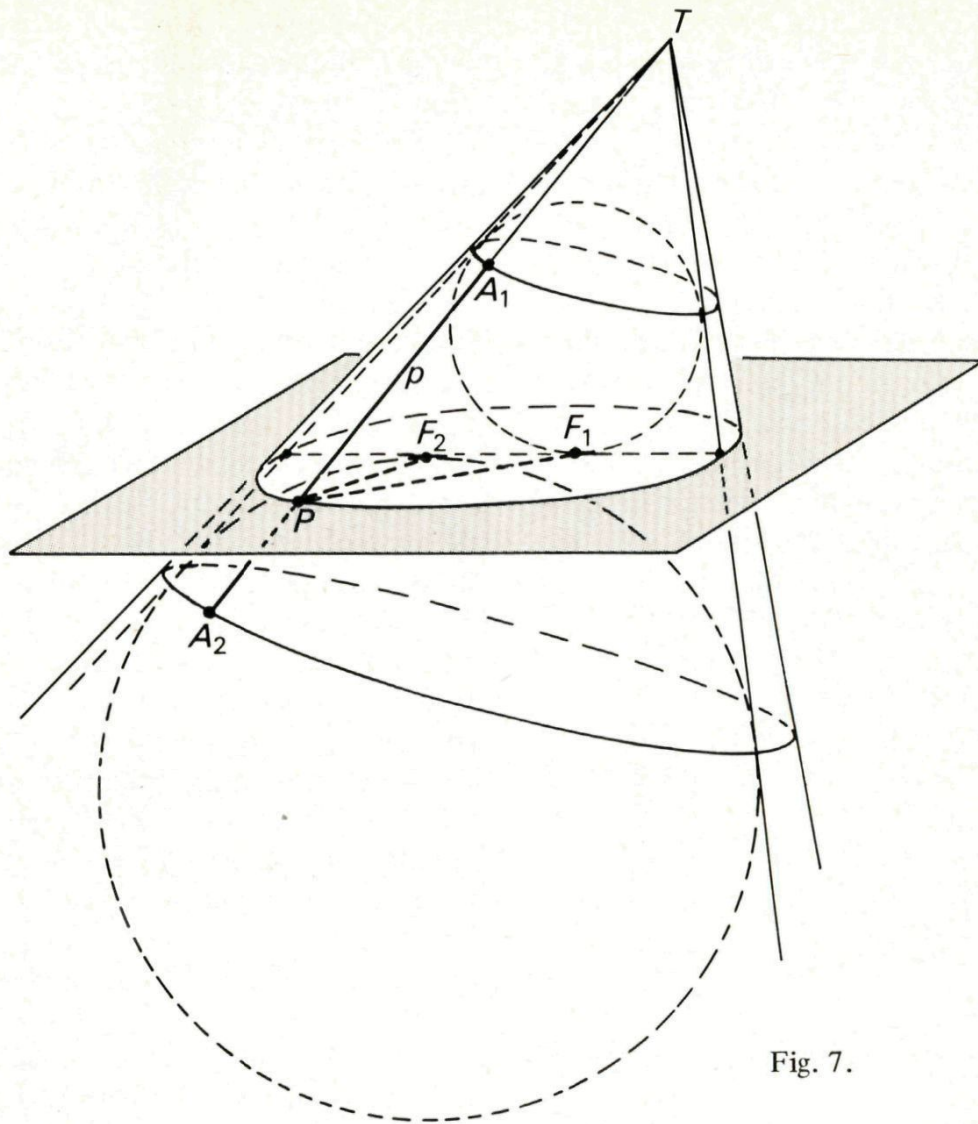


Fig. 7.

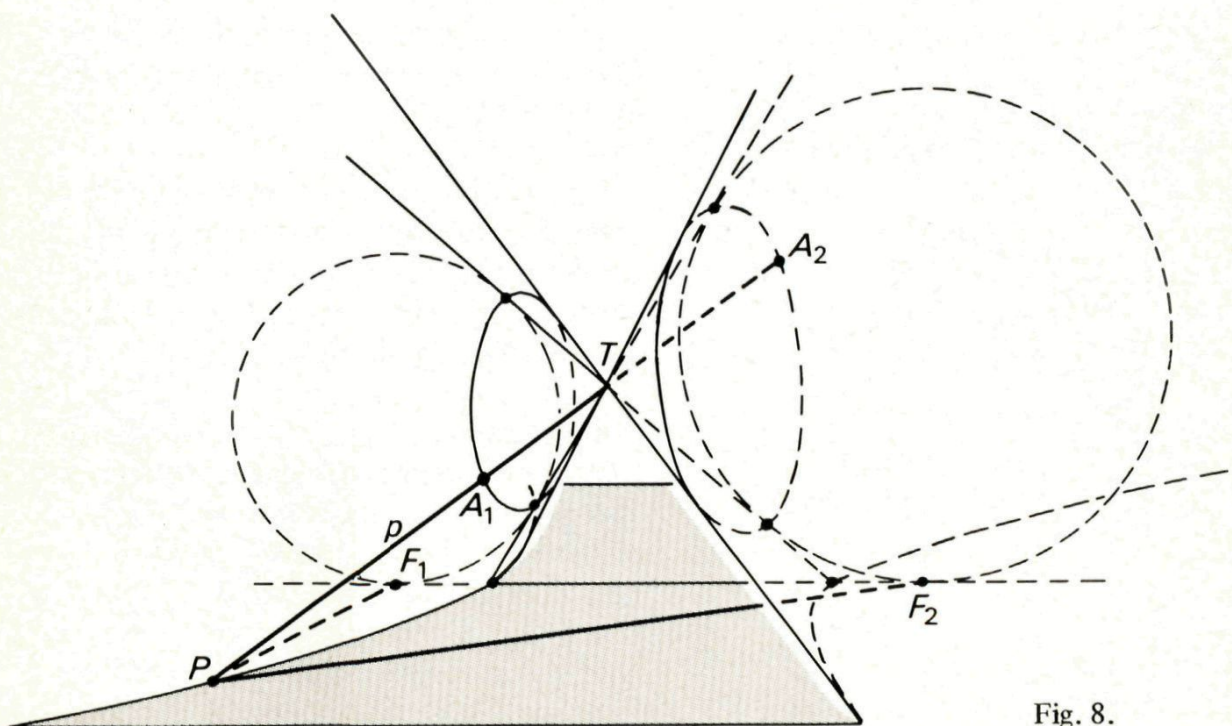


Fig. 8.

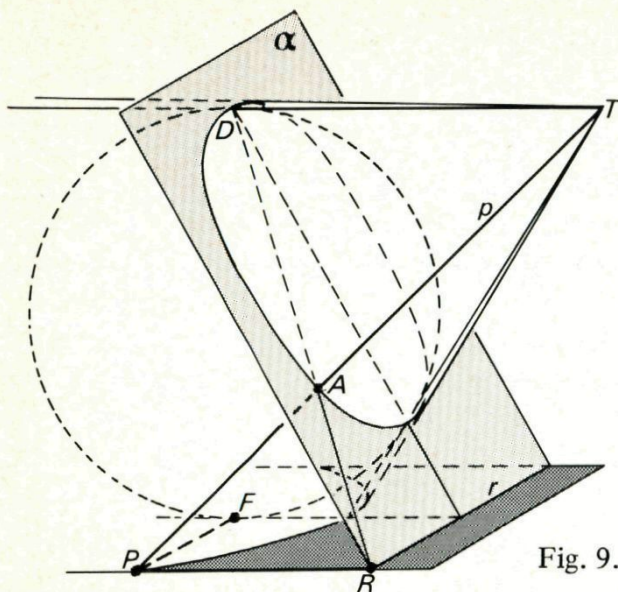


Fig. 9.

Het punt van de raakcirkel dat ligt in het horizontale vlak door de top van de kegel noemen we D . De kegel, de vloer en het vlak α liggen symmetrisch ten opzichte van het vlak door T , D en F . De snijlijn r staat dus loodrecht op de as van de para-

bool, die weer evenwijdig is aan de beschrijvende lijn TD van de kegel. Nu nemen we door een willekeurig punt P van de parabool de beschrijvende lijn p van de kegel. Deze snijdt de raakcirkel van kegel en bol in een punt A . Omdat PA en PF beide raaklijnstukken vanuit P zijn, geldt $PA = PF$.

Het vlak door p en D snijdt het vloeroppervlak in een lijn PR (met R op r). PR kan DT niet snijden want DT snijdt de vloer niet, dus PR en DT zijn evenwijdig. DT is evenwijdig aan de as van de parabool, dus PR is ook evenwijdig aan de as. Hieruit volgt dat PR loodrecht staat op de richtlijn r . Tenslotte is $PA = PR$ want $TD = TA$ (raaklijnstukken vanuit T aan de bol) en $TD \parallel PR$. In de vorige alinea hebben we laten zien dat $PA = PF$, dus de conclusie is $PF = PR$, hetgeen bewezen moest worden.

° De maan en de meetkunde

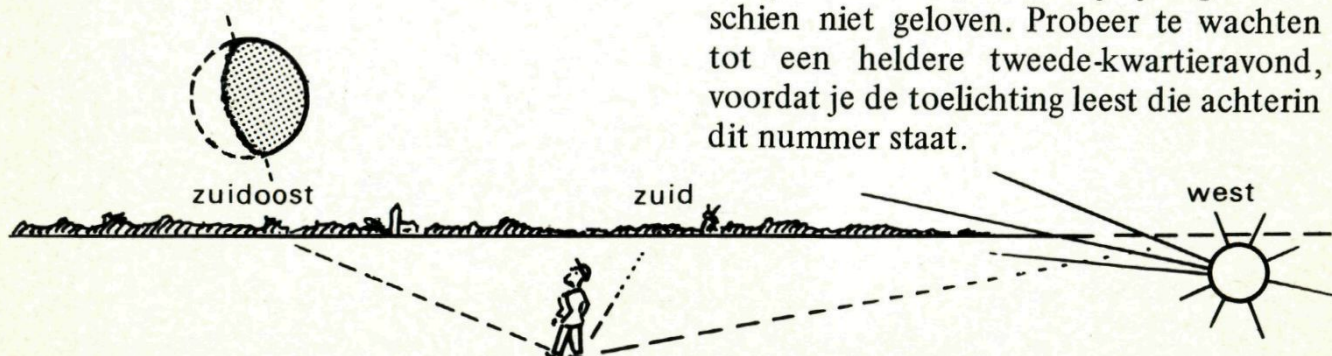
Ter verklaring van de schijngestalten van de maan wordt vaak het volgende gezegd:

De maan is bolvormig, geeft zelf geen licht, maar wordt steeds aan één zijde beschenen door de zon. De verlichte kant van de maan zal daarom steeds *naar de zon toe* gericht zijn. Maar . . .

. . . als je eens kijkt naar de maan — 's avonds tegen zonsondergang op een van de dagen tussen eerste kwartier en volle maan — zul je merken dat bovenstaande conclusie niet klopt met wat je waarneemt!

Je ziet de verlichte kant van de maan schuin *omhoog* gericht ten opzichte van de horizon. Terwijl de zon al tot bij of tot onder dit horizonvlak gezakt is, en de maan dus schuin van *onder* beschijnt.

Als je er eens op let zul je je ogen misschien niet geloven. Probeer te wachten tot een heldere tweede-kwartieravond, voordat je de toelichting leest die achterin dit nummer staat.





Pythagoras Olympiade

Nieuwe opgaven (oplossingen inzenden vóór 1 december 1980).

N.B.: er worden goed gemotiveerde en volledig uitgewerkte oplossingen verlangd; een antwoord alleen is niet voldoende!

PO 16. Bepaal alle drietallen reële getallen (x, y, z) die voldoen aan

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = 10.$$

PO 17. Gegeven is een punt P op een afstand $r < 1$ van het middelpunt van een cirkel met straal 1. Men kiest punten A, B, C en D op de cirkel zo, dat AC en BD elkaar in P loodrecht snijden.

Wat is bij een dergelijke keuze de maximale waarde van $d(A, C) + d(B, D)$?
(Met $d(P, Q)$ wordt de afstand tussen P en Q bedoeld).

PO 18. Gegeven zijn 12 effen gekleurde sokken in 6 verschillende kleuren, van elke kleur twee. Men vormt 6 paren zonder op de kleur te letten. Hoeveel verschillende zestallen paren kunnen er op deze wijze ontstaan? (Gelijk gekleurde sokken zijn niet van elkaar te onderscheiden).

Wedstrijdvoorwaarden en prijzen

- * Alle leerlingen van het voortgezet onderwijs kunnen aan de Pythagoras Olympiade deelnemen door een oplossing van een of meer van de opgaven in te sturen.
- * Papier waarop oplossingen staan mag slechts aan één zijde beschreven zijn. Voor verschillende opgaven moeten ook verschillende vellen genomen worden.
- * Slechts goed leesbare oplossingen worden bekeken. Alle tekstgedeelten moeten helder en duidelijk in goed lopende zinnen zijn geformuleerd.
- * Vermeld op elke vel: *naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas*.
- * Indien je een open, aan je zelf geadresseerde en als brief gefrankeerde enveloppe meezendt, ontvang je na afloop van de inzendtermijn onze oplossingen.
- * De oplossingen moeten binnen de vermelde inzendtermijn gestuurd worden naar: Pythagoras Olympiade, Brederode 29, 2261 HG LEIDSCHENDAM.
Zorg voor voldoende frankering!
- * Bij elke opgave worden onder de inzenders van een goede oplossing twee boekenbonnen van f 10,— verloot.
- * Alle opgaven van één jaargang (5 nummers) vormen te zamen een *ladderwedstrijd*. Elke goede oplossing geeft één punt. De drie inzenders die in één jaar de meeste punten verzamelen, krijgen een boekenbon van f 25,—. Bij gelijke puntenaantallen beslist het lot.
- * De beste 10 van de ladderwedstrijd die niet in een eindexamenklas zitten, krijgen *automatisch* een uitnodiging voor de tweede ronde van de *Nederlandse Wiskunde Olympiade*. Zij behoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

°Kubussommen

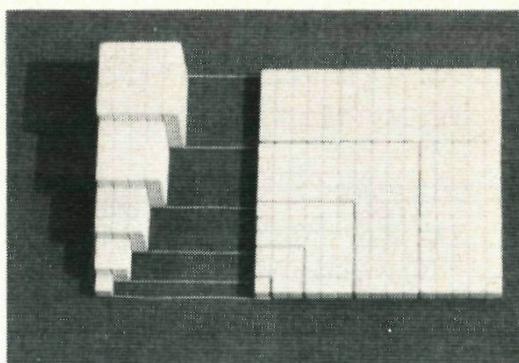
$$1^3 = 1^2 \quad (1)$$

$$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 \quad (2)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2 \quad (3)$$

etc. Algemeen voor $n \in \mathbb{N}$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \quad (4)$$



De bovenstaande afbeelding en de formules betekenen in woorden uitgedrukt: het totale aantal (eenheids-)blokjes in een serie kubussen met ribben $1 - 2 - 3 - 4 - \dots - n$ is gelijk aan het aantal blokjes in het vierkant waarvan de zijde overeen komt met de som van de genoemde ribben.

Reken na dat dit voor kleine n inderdaad klopt. Het bewijs van de juistheid voor *elke* n volgt verderop.

Nog meer goede series

Indien we ook *gelijke* kubussen toelaten, blijken er nog andere series te zijn met dezelfde eigenschap. Bijvoorbeeld:

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^2$$

of

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 = (1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 6 + 8)^2.$$

De Fransman Liouville heeft in de vorige eeuw een verrassend recept gevonden voor dit soort series:

Kies een positief getal N . Bepaal alle delers van N (dus inclusief N en 1) en zoek van elk van deze getallen het *aantal* eigen delers. Deze aantallen komen dan overeen met de ribben van een serie kubussen met de aangegeven eigenschap.

Neem als voorbeeld $N = 6$; delers van 6 zijn: 1, 2, 3 en 6. Van deze vier getallen is het aantal delers achtereenvolgens

1 (1 heeft als deler 1),

2 (2 heeft delers 1 en 2),

2 (3 heeft delers 1 en 3) en

4 (6 heeft delers 1, 2, 3 en 6).

En zoals we al zagen geldt voor de serie $1 - 2 - 2 - 4$ de kubus-vierkant-eigenschap. Uitgaande van $N = 24$ krijg je het andere

hierboven gegeven voorbeeld, ga na.

Dat het recept van Liouville altijd een serie ribben geeft waarvoor het klopt tonen we hier niet aan*. Wel zal je zelf wel kunnen vinden dat dit recept, toegepast op de n -de macht van een priemgetal, steeds de serie $1 - 2 - 3 - 4 - \dots - n$ oplevert. Alleen voor dit soort series (dus voor formule (4)) volgt hier een bewijs.

Een bewijs

Het zal bekend zijn dat de som van een aantal getallen gelijk is aan de gemiddelde grootte maal het aantal. Als we regelmatige series getallen hebben, zoals 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan is het gemiddelde ook gelijk aan (eerste + laatste) / 2. Dus hier: $(1 + 6) / 2 = \frac{7}{2}$. Het aantal termen is 6, dus de som zal zijn $\frac{7}{2} \times 6 = 21$. Reken maar na dat dit de goede uitkomst is.

Ga je niet tot 6 maar tot een zekere n , dan geldt op dezelfde manier:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \text{gemiddelde} \times \text{aantal} = \\ &= \frac{1}{2} (\text{eerste} + \text{laatste}) \times \text{aantal} = \\ &= \frac{1}{2} (1 + n) \times n = \\ &= \frac{1}{2} n (n + 1). \end{aligned} \quad (5)$$

* Dit bewijs is te vinden in: Ross Honsberger, *Ingenuity in Mathematics*.

En evenzo geldt ook

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) &= \\ &= \frac{1}{2} (1 + (n+1)) \times (n+1) = \\ &= \frac{1}{2} (n+1) (n+2) \end{aligned} \quad (6)$$

We tonen nu stuk voor stuk de juistheid aan van elk van de formules (1), (2), (3) etc. Stel eerst dat we met dit aantonen al gekomen zijn tot een zekere n . Uit de herleiding hieronder blijkt dat dan ook de volgende formule $(n+1)$ klopt:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \\ (\text{toepassen van de formule voor } n) &= \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 + (n+1)^3 &= \\ (\text{toepassen van (5)}) &= \\ = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3 &= \\ = \frac{1}{4} (n+1)^2 \cdot [n^2 + 4(n+1)] &= \\ = \frac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2 &= \\ = \left[\frac{1}{2} (n+1) (n+2) \right]^2 &= \\ (\text{omgekeerd toepassen van (6)}) &= \\ = [1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1)]^2. \end{aligned}$$

We kunnen nu verder als volgt redeneren. Je hebt zelf in het begin al gecontroleerd dat de formules (1), (2) en (3) waar zijn. Uit de derde volgt nu dus ook dat de vierde waar is, uit de vierde volgt de vijfde, enzovoort. Stap voor stap voortgaande is zo de juistheid van *elke* formule uit de reeks te bewijzen.

Een dergelijke stap-voor-stap-methode heet een bewijs door *volledige inductie*.

En een heel ander bewijs

Een kubus met *oneven* ribbe (bijv. 7) kan in lagen uitgelegd als in fig. 1.

En bij een *even* ribbe (bijv. 6) kan het als in fig. 2, waarbij het overlappende kwart juist past in het open hoekje.

De uitgelegde hoekfiguren van opvolgende kubussen blijken juist in elkaar te passen en vormen zo een vierkant.

Een reactie van een lezer

Een van onze lezers schreef dat hij op vakantie in Egypte bij het bekijken van

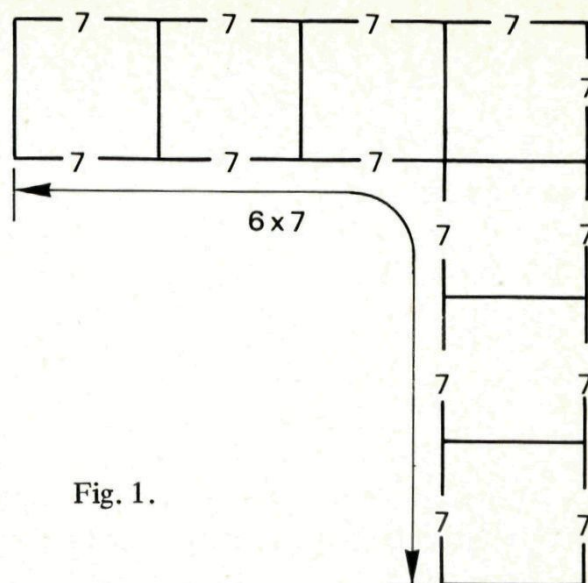


Fig. 1.

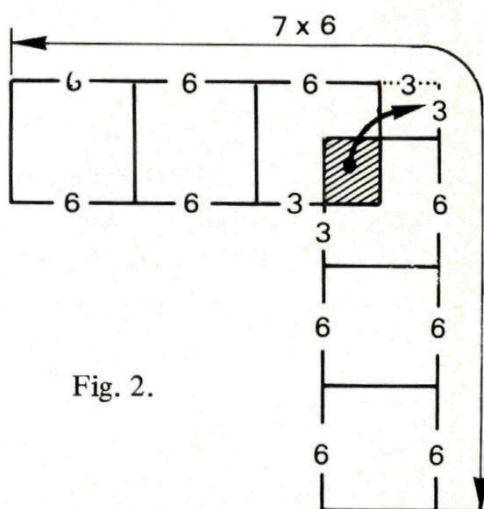


Fig. 2.

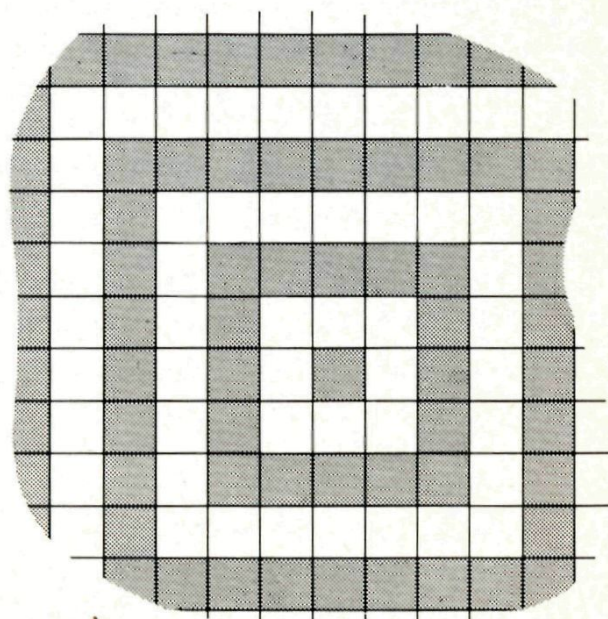


Fig. 3.

een oude betegelde badkamervloer in Luxor (zie fig. 3) moest denken aan de groeiende reeks vierkanten zoals hierboven (een foto ervan stond al in het maartnummer). Zou dit tegelpatroon ook tot zo iets regelmatig leiden? Tellen van de tegels in de lichte en donkere vierkante randen leidt echter tot een verrassende onregelmatigheid!

De aantallen zijn . . . , 40, 32, 24, 16, 8 en

dan . . . 1! Juist de tafel van 8, maar waarom nu die ene uitzondering?

Ga nog maar eens na of we ons echt niet vergissen. En, of je er een bevredigende verklaring voor weet.

Misschien is er wel niet méér van te zeggen dan dat niet *alles* in de wiskunde in elkaar zit zoals het ons in eerste instantie het eenvoudigst lijkt.

°°Met meer driehoeken bouwen

F. van der Blij

Het artikel 'Met driehoeken bouwen' in nummer 5 van de vorige jaargang ging over viervlakken. Nu willen we kijken naar een bijzondere eigenschap van sommige achthoeken.

We beginnen weer met een bouwplaat van gelijkzijdige driehoeken (fig. 1). Vouwen we zo dat AP en DS samenvallen, dan ontstaat een soort ring. Door nog twee driehoeken ABC en PQR , even groot en ook gelijkzijdig, toe te voegen ontstaat een doosje: een achthoek met acht gelijkzijdige driehoeken als zijvlakken. Het is mooi regelmatig, misschien heb je het wel eens gezien en ontdekt op hoeveel manieren dit achthoek met zichzelf congruent is?

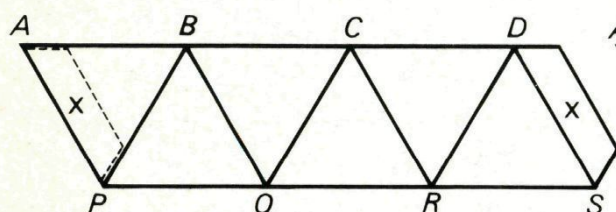


Fig. 1. Ring van gelijkzijdige driehoeken.

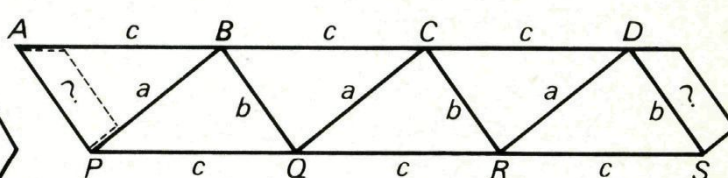


Fig. 2. Ring van congruente driehoeken.

Het ringachthoek

Als we uitgaan van een willekeurige driehoek (fig. 2) in de plaats van de gelijkzijdige, kan er dan nog een ring van gevouwen?

Ja, en als we de ring met een bodem en een deksel willen afsluiten, blijken er twee gelijkzijdige driehoeken nodig te zijn. Het wordt een achthoek met twee vlakken even groot gelijkzijdig, en ook de zes overige onderling congruent. De lijn door de middelpunten van beide gelijkzijdige driehoeken is een as van drietallige symmetrie.

Zou het ook lukken een achthoek te bouwen van *acht congruente* driehoeken met drie ongelijke zijden? Als je het probeert door losse driehoeken met plakband aan elkaar te zetten en je werkt met dun karton dat boven en onder verschillend gekleurd is, merk je misschien nog iets bijzonders!

We bekijken het doosje van fig. 2 nog eens wat beter. Aan de bodem, de gelijkzijdige driehoek met zijde c , zitten drie onderling congruente driehoeken met zijden a en b vast. Zie fig. 3. Het deksel

met drie driehoeken is precies hetzelfde; de twee stukken passen, mits in de juiste stand gevouwen, net aan elkaar.

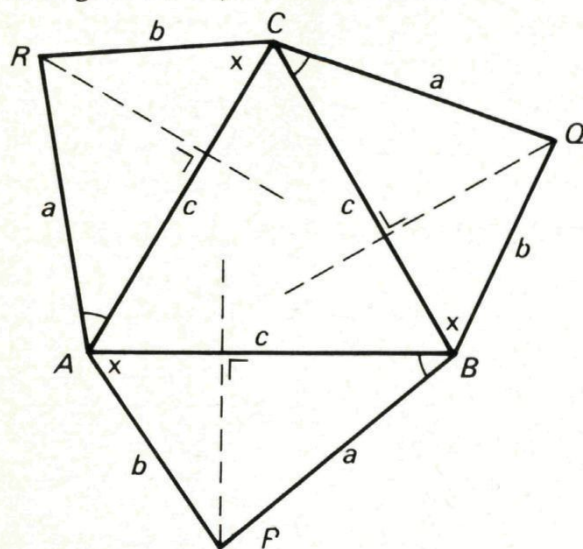


Fig. 3. Bouwplaat van het onderstuk van een ringachtvlak.

We draaien nu de drie zijwanden gelijktijdig omhoog. Rotatie om de symmetrie-as laat zien dat P , Q en R dan steeds een gelijkzijdige driehoek blijven vormen. Samenvallen zullen deze punten nooit, zolang $b \neq a$. Maar het kan wel een driehoek met zijde c worden, in dat geval past het bovenstuk er juist op.

Hoe schuin staan de zijvlakken?

Bij het draaien lopen P , Q en R recht boven de streeplijntjes in fig. 3. Laten we uit even hoog opgedraaide punten loodlijntjes op het grondvlak neer, dan vormen de voetpunten P' , Q' , R' een gelijkzijdige driehoek, congruent met de erboven liggende driehoek PQR . Op grond van de symmetrie valt het middelpunt van $P'Q'R'$ steeds samen met dat van ABC . Als we gedraaid hebben totdat $PQ = QR = RP = c$, dan is $\triangle P'Q'R'$ congruent met $\triangle ABC$ en de zes hoekpunten liggen op een cirkel, zie fig. 4.

We willen nu van ons doosje de hoogte h bepalen.

In de 'koordenzeshoek' $P'BQ'CR'A$ zijn alle hoeken even groot, en wel gelijk aan 120° , omdat elke zeshoek een hoekensom heeft van $6 \times 180^\circ - 360^\circ = 720^\circ$.

De cosinusregel in $\triangle AP'B$ (met $BP' = x$ en $AP' = y$) geeft dan:

$$c^2 = x^2 + y^2 + xy.$$

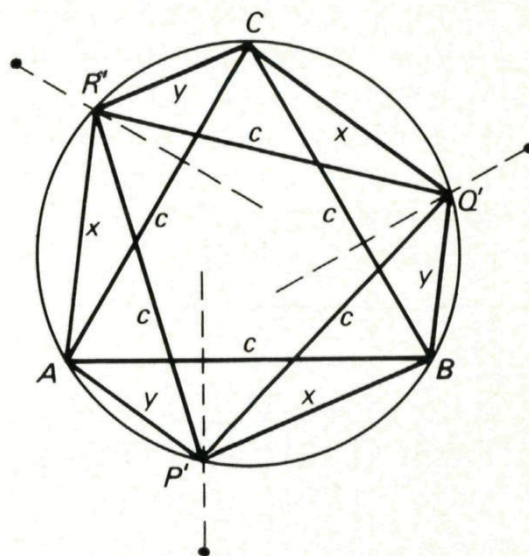


Fig. 4. Boven-aanzicht van een ringachtvlak.

Met Pythagoras in de opstaande driehoekjes $AP'P$ en $BP'P$ vinden we $x = \sqrt{a^2 - h^2}$ en $y = \sqrt{b^2 - h^2}$, zodat we x en y kunnen wegwerken. Na even moedig cijferen ontstaat:

$$3h^4 + (4c^2 - 3a^2 - 3b^2)h^2 + (c^2 - a^2 - b^2 - ab)(c^2 - a^2 - b^2 + ab) = 0,$$

een vierkantsvergelijking in h^2 .

Nemen we eerst eens eenvoudige getallen: $(a, b, c) = (3, 5, 4)$. De vergelijking wordt:

$$3h^4 - 38h^2 + 99 = 0, \text{ ofwel: } (h^2 - 9)(3h^2 - 11) = 0.$$

Voor de (niet negatieve) hoogte vinden we 3 en $\sqrt{\frac{11}{3}}$.

De uitkomst 3 kunnen we begrijpen: met $(3, 5, 4)$ hebben we de bekende rechthoekige 3-4-5-driehoek, en het achthoek is gewoon een driezijdig recht prisma. Grond- en bovenvlak zijn gelijkzijdig met zijde 4 en de drie wanden zijn rechthoeken van 3 bij 4. Maar waarom vinden we nog een tweede hoogte: $\sqrt{\frac{11}{3}} \approx 1,915 \dots$?

De zwabberstand

Is er nog een andere stand van de zijwanden mogelijk zó dat een zelfde bovenstuk erop past? Anders gezegd, kunnen de

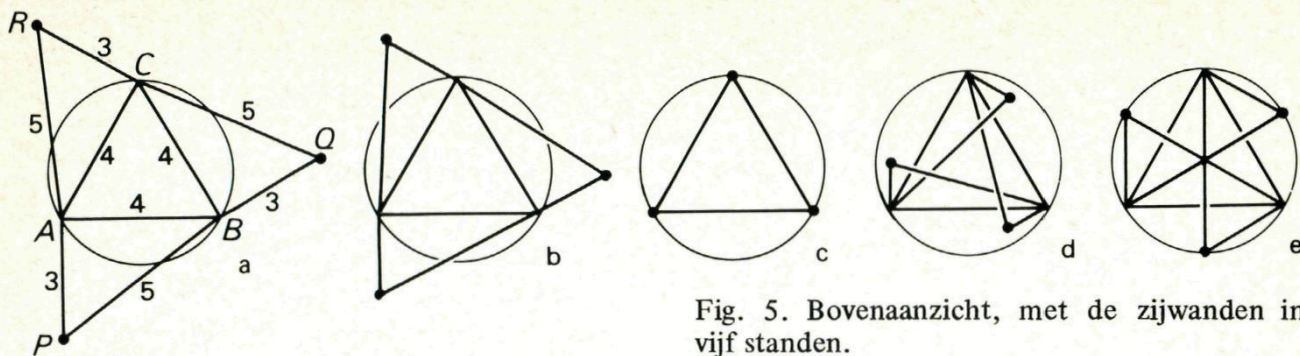


Fig. 5. Bovenaanzicht, met de zijwanden in vijf standen.

punten P , Q en R bij het opdraaien op twee manieren een driehoek vormen, congruent met het grondvlak? Fig. 5 geeft het bovenaanzicht in een aantal standen. Inderdaad blijkt driehoek PQR behalve in stand c ook in stand e even groot als ABC . De laatste situatie stelt juist een nogal misvormd grensgeval voor, waarbij de lange ribben elkaar in het centrum raken. Verder draaien is niet meer mogelijk. Als we het doosje afmaken met de bovenhelft, vallen ook de zijwanden gedeeltelijk samen. Het 'achtvlak' bestaat nu uit twee driezijdige piramides met de toppen tegen elkaar, en verbonden door drie dunne driehoekige schotjes. In fig. 6 zijn deze schotjes gearceerd.

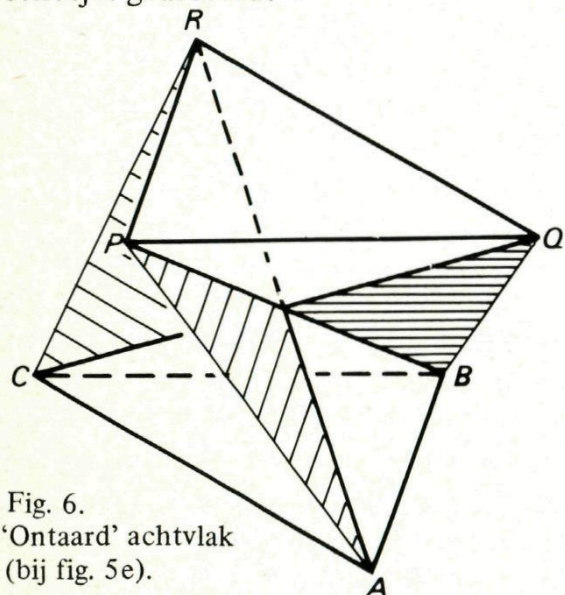


Fig. 6.
'Ontaard' achtvlak
(bij fig. 5e).

Zelf bouwen

Fig. 7 geeft een (verkleinde) bouwplaat met $(a, b, c) = (3, 6, 5)$, waaruit twee verschillende 'normale' achtvlakken kunnen ontstaan. Als het in elkaar zit, en je wringt het grond- en bovenvlak tegen elkaar in,

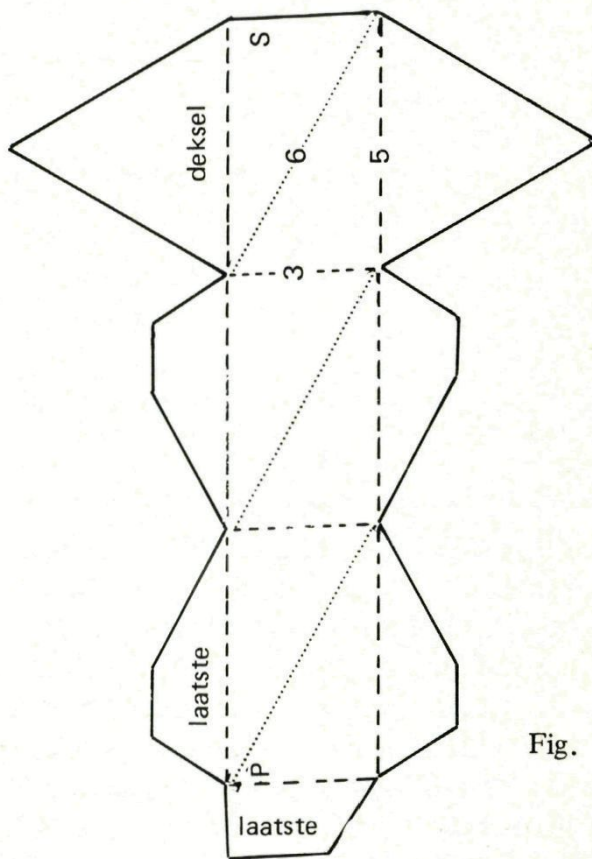


Fig. 7.

Fig. 7. Bouwplaat van een 'zwabberdoosje' (stippellijnen achter ritsen.)

dan zal het doosje ineens in z'n andere 'passende' stand overspringen!

Als je met zomaar een driehoek PAB begint, zal je vaak niet zo'n zwabberdoosje krijgen. Bij de keuze van P moet je op drie dingen letten. Zie fig. 8, met weer het gelijkzijdige grondvlak ABC en de omschreven cirkel (c).

1. Uitgaande van een driehoek P_1AB (en idem Q_1BC en R_1CA) zal P_1 bij het wentelen om AB nooit boven de cirkel komen. Er is geen enkel ringachtvlak van ons soort te maken. We kiezen P dus tussen k en l .

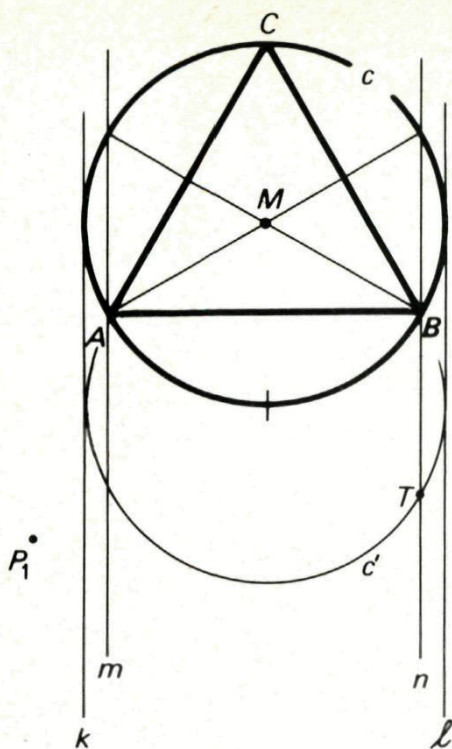


Fig. 8. Grenzen voor verschillende soorten achtvlakken.

2. Als P op twee plaatsen recht boven c moet kunnen komen, moet P ver genoeg van AB af liggen. Om precies te zijn: buiten de boog c' , het spiegelbeeld van c in AB .
3. Ten slotte willen we botsingen van de zijwanden in het centrum vermijden. Dit vereist dat de projectie van de opgedraaide driehoek PAB niet over het middelpunt M mag vallen, en we P dus niet tussen m en n kunnen nemen. Ga zelf na welk gebied nog voor P overblijft. Wat is er aan de hand als we P op de rand ervan kiezen? Met P in T vinden we nog een mooie constructie van een geheel opvouwbaar driehoekig (boterham?) trommeltje.

Voor wie echt gaat bouwen:

- Plak de laatste twee randjes (fig. 7) alleen vast als je de twee standen gevonden hebt, en de punten P en S tijdens het verdraaien erg dicht bij elkaar blijven.
- Je kunt wél de ring rondplakken als je het hele deksel weglaat.

— Precies werken is hier noodzakelijk; gebruik stevige lijm.

Met nog meer driehoeken

Je kunt ook beginnen met een ring van acht (of meer) i.p.v. zes congruente driehoeken. En een vier- (of meer)zijdig onder- en bovenvlak. Zoek eerst uit bij welke maten het doosje kan zwabberen.

Het kleinste deksel

Nog even terug naar fig. 3. De toppen P , Q en R van de zijwanden vormen een gelijkzijdige driehoek. Bij *gelijktijdig* omhoogdraaien blijft deze 'topdriehoek' gelijkzijdig. De zijden worden eerst korter, bereiken een minimum en nemen dan weer toe (bij onze zwabberdoosjes weer tot lengte c en meer). Waar ligt dit minimum?

Met een stevig model en een elastiekje door oogjes bij de drie toppen zou je deze stand zichtbaar kunnen maken, maar misschien is het handiger om te gaan rekenen. Kun je een uitdrukking vinden in a , b en c voor de minimale zijde? (Antwoord achterin.) We bedoelen niet het geval waarbij het minimum pas bereikt wordt als de toppen weer terug in het grondvlak zijn!

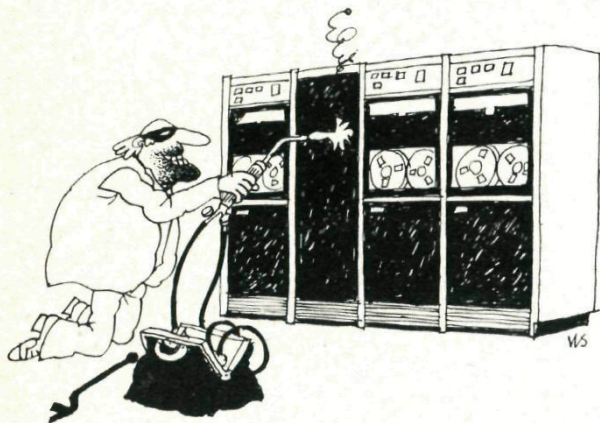
Nog gekker

Voor weetgierigen vertellen we nog dat deze zwabberachtvlakken al lang uitvoerig bestudeerd zijn. In het Zwitserse tijdschrift *Elemente der Mathematik*, Band 20 (1965) staat een uitvoerig historisch overzicht van W. Wunderlich. De laatste jaren zijn ze weer in de mode gekomen omdat een veelvlak geconstrueerd is dat niet twee van zulke mogelijke standen heeft zoals ons zwabberdoosje, maar oneindig veel! Het kan gewoon bewegen van de ene stand naar de andere, en niet met zo'n verwrongen sprongetje. Maar dat is een geheel ander verhaal.

°De databank gekraakt

Ter gelegenheid van het eerste eeuwfeest van de Vrije Universiteit is in het afgelopen jaar een prijsvraag georganiseerd met als titel: 'Hoe kraak ik een databank?' Op 1 april werd aan de winnende school, het *Christelijk Lyceum te Veenendaal*, een hobbycomputer als prijs uitgereikt.

In het volgende stukje wordt het in de prijsvraag gestelde probleem, een bepaalde moeilijkheid bij de beveiliging van databanken, aan de orde gesteld.



In een databank (een computergeheugen) zijn gegevens opgeslagen van een groot aantal (N) personen. We beperken ons hier tot ja/nee gegevens, betreffende eigenschappen die iemand óf wel heeft óf niet heeft. Laten we aannemen dat per persoon onder meer geregistreerd is of deze al dan niet voldoet aan de eigenschappen

vrouw zijn (v)
getrouwd zijn (g)
pijprokend zijn (p)
inwoner van Amsterdam zijn (a)
miljonair zijn (m)
Tweede-Kamerlid zijn (t).

Ter bescherming van de privacy is een databank veelal zó ingericht dat het *niet* mogelijk is om bij een bepaalde persoonsnaam direct de gegevens op te vragen. Je kunt uitsluitend *aantallen* opvragen.

Bij een gekozen criterium geeft de computer een *getal*, dat aangeeft hoeveel personen uit de hele groep aan het criterium voldoen.

De databank kan bijvoorbeeld mededelen hoeveel vrouwen er in de hele groep zitten; we schrijven dit aantal hier als $A(v)$. Ook kan volgens een samengesteld criterium gevraagd worden. Bijvoorbeeld: hoeveel mannen in de groep zijn géén getrouwde pijprokers? Geschreven als:

$A((\text{niet } v) \text{ en niet } (g \text{ en } p))$.

Eventueel kunnen we ook nog vragen naar $A(v \text{ of } g)$

waarmee bedoeld wordt het aantal personen dat vrouw is, of getrouwd, of beide (dus het aantal dat niet valt onder de categorie 'ongetrouwde mannen').

Meer sloten gewenst

Zonder verdere beveiligingen blijkt het in de hierboven gegeven situatie soms toch mogelijk om achter bepaalde privé-gegevens te komen. Stel namelijk dat de computer aangeeft dat er in het bestand (waarin minstens de gegevens van alle kamerleden zijn opgeslagen) maar één persoon voorkomt die voldoet aan het criterium

$(\text{niet } v) \text{ en } a \text{ en } m \text{ en } t \text{ en } (\text{niet } p)$.

En neem aan dat daarnaast nog bekend is dat er maar één niet-rokende Amsterdammer kamerlid is. Dan hebben we toch specifieke informatie over de bankrekening van deze man. Ga dit na.

In de fictieve databank uit de prijsvraag van de V.U. is als volgt geprobeerd dergelijke gaten te dichten.

De privacy-grens

Wanneer een volgens een bepaald criterium (e) omschreven deelgroep niet minstens een zekere grootte heeft, dan geeft de computer het juiste aantal niet vrij. Het minimum-aantal dat de computer wel meedeelt noemen we de *privacy-grens* (P). Voorbeeld: Stel de privacy-grens van de databank is 100 terwijl in het geheugen maar 8 ongetrouwde vrouwen geboekt staan, dan maakt de computer dit aantal 8 niet bekend.

De privacy-grens werkt naar twee kanten. Ook als bijna iedereen aan een zeker criterium voldoet, wordt het juiste aantal niet meegedeeld. Dit omdat we anders het geblokkeerde aantal $A(e)$ van de kleine deelgroep toch zouden kunnen terugrekenen uit het wél te verkrijgen aantal $A(\text{niet } e) = N - A(e)$. De computer geeft dus alleen aantallen in het interval $[P, N-P]$. Bij werkelijke aantallen buiten dit interval geeft hij het signaal: 'het aantal ligt in het privacy-domein'.

De opgave van de prijsvraag was nu om na te gaan of deze laatste beveiliging wel voldoende is. Of liever: om uit te vinden hoe je ook dit slot kunt forceren!

De kraker

We lichten het kraakproces toe aan de hand van de figuren 1, 2 en 3. Het vierkant 'bevat' steeds het totale aantal personen N .

We zijn nieuwsgierig naar het aantal personen dat voldoet aan een criterium c (al dan niet samengesteld). Hoe vinden we $A(c)$, ook als dit aantal in het privacydomein ligt? Zie fig. 1.

De truc is om eerst te zoeken naar een ander criterium (k , de kraker), zó dat $A(k)$ ligt tussen (of op) *verdubbelde* privacy-grenzen. Zie fig. 2. $A(\text{niet } k)$ ligt dan tussen dezelfde grenzen. In fig. 3 zijn de verdelingen over elkaar gelegd. Uit

$A(c \text{ en } k) + A((\text{niet } c) \text{ en } k) = A(k) \geq 2P$
volgt dat (minstens) één van de termen

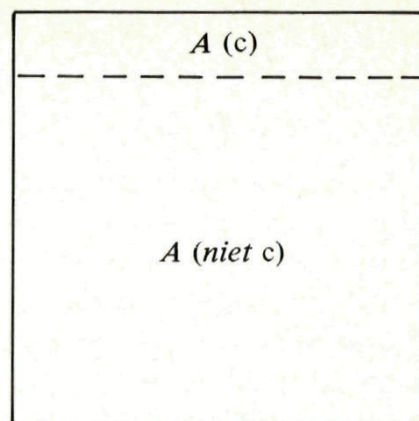


Fig. 1. Een (mogelijk erg ongelijke) verdeling volgens een criterium c .

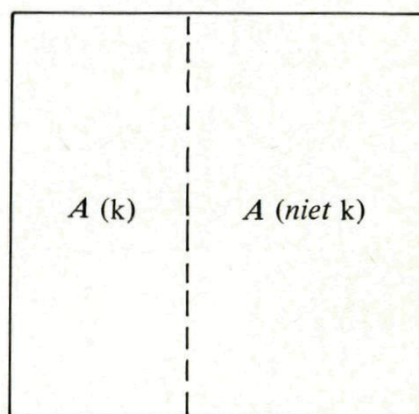


Fig. 2. Een tamelijk gelijke verdeling volgens een hulp-criterium k , met $2P \leq A(k) \leq N - 2P$.

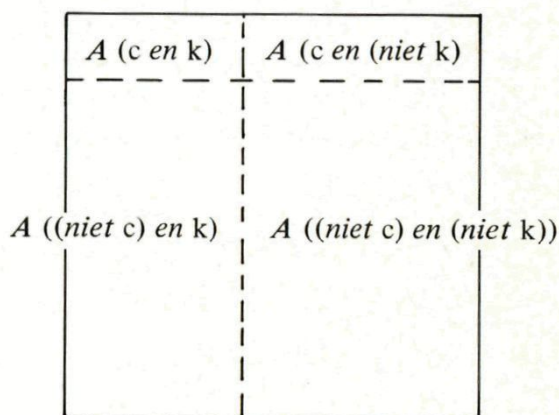


Fig. 3. Beide verdelingen gecombineerd.

links $\geq P$ is, en dus door de computer wordt gegeven. Omdat ook $A(k)$ wordt gegeven, is ook de andere term links bekend.

Dezelfde redenering geldt voor

$A(c \text{ en } (\text{niet } k)) + A((\text{niet } c) \text{ en } (\text{niet } k)) = A(\text{niet } k) \geq 2P$.

Zo is van elk van de vier deelgroepen in fig. 3 het aantal bekend. En wegens

$$A(c \text{ en } k) + A(c \text{ en } (\text{niet } k)) = A(c)$$

dus ook het gezochte aantal $A(c)$. Waarmee de barrière van de privacy-grenzen omzeild is.

Deze methode lukt alleen wanneer er een 'kraker' te vinden is. De privacygrens P mag dus zeker niet zo groot zijn dat $[2P, N-2P]$ leeg is. Dus $P \leq N/4$. Zie voor een opmerking over het aantal benodigde vragen aan de computer de noot achteraan dit artikel.

Het prijsvraag-probleem

Bij de genoemde prijsvraag goldt $P=4\,000$ en $N=16\,000$, dus juist de uiterste grens waarbij kraken op de aangegeven manier mogelijk is. Als hulp-criterium moest dus iets gezocht worden waaraan precies 8 000 personen voldoen.

Wie de gegevens van de prijsvraag kent kan nagaan dat dit het geval was voor het criterium: alfa-student of gamma-student. Met behulp hiervan waren op boven gegeven wijze de aantallen te bepalen bij de criteria (voorzitter en CvB en PvdA), (UR en CPN) en (UR). En hieruit de antwoorden op de gestelde vragen.

De inzending van de winnende school bevatte naast de bovenstaande algemene strategie nog een aantal andere oplossingen, waarbij gebruik werd gemaakt van

nadere gegevens uit de opgave. Geprobeerd werd onder meer om het aantal noodzakelijke vragen aan de computer te minimaliseren. Verder werden eventuele andere mogelijkheden om de bank wél kraakvrij te maken op bruikbaarheid onderzocht. Waarbij de conclusie was (overeenkomend met die van specialisten op dit gebied) dat een absoluut waterdichte beveiliging zeer moeilijk te vinden zal zijn.

Een zestal scholen kreeg van de jury nog een *eervolle vermelding* voor hun inzending:

Hogere Economische School Amsterdam,
Alexander Hegius S.G. Deventer,
Chr. Coll. Marnix v. St. Aldegonde Haarlem,

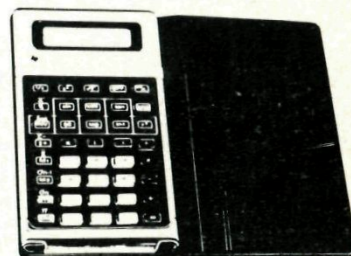
Eerste Chr. Lyceum Haarlem,
Scholengemeenschap Lelystad,
Zeldenrust College Terneuzen.

Noot: de hier gegeven strategie vereist (als er niets bekend is van $A(c)$) maximaal 4 vragen aan de computer. Via een omweg kan het echter ook in maximaal 3. Daarbij vragen we eerst naar

$A((c \text{ en } k) \text{ of } ((\text{niet } c) \text{ en } (\text{niet } k))))$.

Wanneer dit aantal gegeven wordt, vragen we verder naar $A(c \text{ en } k)$ en (zo nodig) naar $A((\text{niet } c) \text{ en } k)$. In het andere geval wordt $A(c)$ direct gegeven. Probeer dit uit te zoeken!

°Gebruik je knoppen



Bij deze oefening voor hoofd en hand is het de bedoeling dat je niet alleen je hersens gebruikt, maar ook je rekenapparaat. We zijn daarom niet flauw meer met een paar machten en wortels. Je laat je rekenrakker toch wel voldoende als een moderne slaaf voor je werken? Test jezelf door binnen het half uur de puzzel in te vullen.

Wat is de bedoeling?

De oplossingen van de twaalf hierna gegeven vergelijkingen moeten in het 6×6 vierkant worden ingevuld. Het eerste cijfer van de uitkomst komt steeds in het hokje met de bijbehorende letter, daarvandaan ga je naar *rechts* of naar *boven*. Cijfers waar geen plaats meer voor is laat je weg (niet afronden). Ook de komma mag je vergeten.

Nog als steun voor onderweg:

- bij de in te vullen cijfers komen 7, 8, 9 en 0 niet voor,
 - de totalen van elke rij, kolom en diagonaal zijn aan elkaar gelijk,
 - de beide diagonalen zijn het mooist.
- Ga je gang!

					F
				E	
			D		
		C			
	B				
A					

Naar rechts, vanaf

- A. $x = 49,914^3$
- B. $\frac{4}{3}\pi x^3 = 60,48482$
- C. $x = (55,715 + \sqrt[3]{(21 + \sqrt{2})})^2$
- D. $x = \frac{1}{0,469810^8}$
- E. $x^2 = 28,713^2 + 42,150^2$
- F. $x = \frac{0,8901 \times 375,9}{5,213}$

Naar boven, vanaf

- A. $x = e \times \pi \times 18930,47$
- B. $x = (\sqrt{50})^{\sqrt{50}} + 1536820$
- C. $x : 1234 = 9007,8 : x$
- D. $6x^2 = 1177494$
- E. $x = \pi (4,088347)^2$
- F. $x = \frac{8,3709^5 \times 0,09871^2}{0,84906^3}$

Programmeerwedstrijd



Het volgende ter aanvulling van de aankondiging in het vorige nummer van *Pythagoras* (jrg. 19, nr. 5) van een internationale programmeerwedstrijd voor jongeren:

- De leeftijdsgrens is met twee jaar verruimd: deelnemers moeten geboren zijn na 31 december 1961.
- De programmeertaal ecol(e) is toegevoegd aan de voor de inzendingen toegelaten talen.
- Het adres voor nadere informatie (ook inzendadres) is:
GCEI, t.a.v. de heer J.M.T. Geurts,
postbus 12108, 1100 AC Amsterdam.

°° Omkeergetallen

P. P. L. Regtien

De cijfers van een natuurlijk getal stellen van achter naar voren gelezen een ander getal voor, het *keergetal* van het eerste. Soms is een getal gelijk aan zijn keergetal, we spreken dan van een *palindroom*-getal. Bijv. 6527256.

Sommige kwadraten zijn palindromen, reken maar uit: 22^2 , 26^2 , 101^2 , 264^2 , etc.

Ook zijn er derdemacht-palindromen: 7^3 , 11^3 , 101^3 , 111^3 . Beneden 1000^3 vinden we geen andere. We weten niet of er derdemacht-palindromen zijn waarvan het grondtal *niet* een palindroom is.

Kwadraat-keerpairs

Het kan voorkomen dat een getal én zijn keergetal *beide* kwadraten zijn:

$12^2 = 144$	$441 = 21^2$
$13^2 = 169$	$961 = 31^2$
$102^2 = 10404$	$40401 = 201^2$
$103^2 = 10609$	$90601 = 301^2$
$112^2 = 12544$	$44521 = 211^2$
$122^2 = 14884$	$48841 = 221^2$

Opvallend is dat ook de grondtallen hier steeds een *keerpaar* vormen (elkaars keergetal zijn). Dit hoeft niet zo te zijn, wat bijv. te zien is aan

$$26^2 = 676 \quad 676 = 26^2.$$

Maar we weten niet of er keerpairs bestaan van twee *verschillende* kwadraten waarbij de grondtallen *geen* keerpaar vormen.

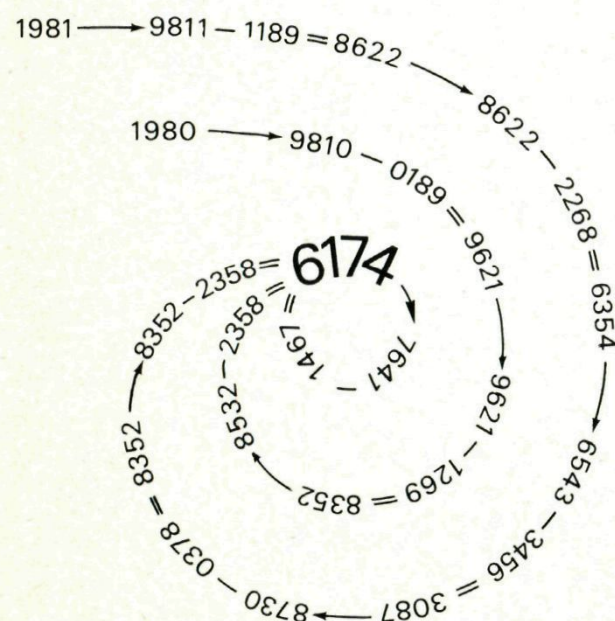
Ook weten we niet of er keerpairs bestaan van twee verschillende derdemachten.

De Kaprekar-constante

Al eerder (jrg. 17, nr. 5) is in *Pythagoras* geschreven over de volgende eigenaardigheid. Zet vier cijfers op volgorde van groot naar klein (niet alle vier gelijk). Schrijf het hierbij horende keergetal eronder. Trek af, en begin weer met de cijfers van deze uitkomst.

Dit proces blijkt steeds vrij spoedig uit te komen op 6174. Deze *Kaprekar-constante*¹ heeft de eigenschap dat de door ordening van de decimalen verkregen getallen 7641 en 1467, juist weer 6174 als verschil hebben.

We vragen ons hier nu af: Treedt er bij een *ander aantal* begincijfers ook zo'n constante op? En is er een manier om dit soort getallen te vinden die handiger is dan het na elkaar uitproberen van alle mogelijkheden?



1 D. R. Kaprekar, India. Deze kwestie wordt ook behandeld in: B. A. Kordemsky, *The Moscow Puzzles (359 Mathematical Recreations)*.

Drie decimalen

Voor een geordend cijferdrietal (a, b, c) met $a \geq b \geq c$ en $a > c$ kijken we naar de aftrekking

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad c \\ c \quad b \quad a \\ \hline \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

Wegens $c < a$ moet er voor de aftrekking van de eenheden één tiental 'geleend' worden. Maar dan lukt het bij de tientallen ook niet meer zonder lenen. Zodoende bestaat het antwoord (van links naar rechts) uit de cijfers

$$(a-1-c), (10+b-1-b), (10+c-a).$$

We zien hieraan dat na één aftrekking zeker het cijfer 9 voorkomt.

Stel dat er een Kaprekar-constante is, met cijfers a, b en c , dan is de aftrekking te schrijven als

$$\begin{array}{r} 9 \quad b \quad c \\ c \quad b \quad 9 \\ \hline (8-c) \quad 9 \quad (c+1) \end{array}$$

De uitkomst moet ook de cijfers b en c bevatten. De volgorde $(b, 9, c)$ voldoet niet, dus blijft $(c, 9, b)$ nog de enige mogelijkheid. Vergelijken van de honderdtallen geeft $c=4$, en hiermee uit vergelijking van de eenheden: $b=5$.

Controle: $954 - 459 = 495$ met dezelfde drie cijfers.

Uit de bovenstaande afleiding blijkt dat 495 de enige Kaprekar-constante is (bij 3 cijfers). We weten alleen nog niet of *elk* driecijferig startgetal ook inderdaad een keer op 495 uitkomt. Het zou namelijk ook best kunnen voorkomen dat je belandt in een cyclus bestaande uit meer dan één getal. Probeer zelf uit te zoeken dat dit hier niet voorkomt.

Vier decimalen

Met vier cijfers (a, b, c, d) met $a \geq b \geq c \geq d$ en $a > d$ proberen we hetzelfde als hierboven met drie:

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad c \quad d \\ d \quad c \quad b \quad a \\ \hline \dots \quad \dots \quad (10+c-1-b) \quad (10+d-a) \end{array}$$

Weer moet voor de eenheden, en daarom ook voor de tientallen, geleend worden. Bij de aftrekking van de honderdtallen zijn er twee mogelijkheden: $b=c$ of $b > c$. Als $b=c$ dan moet ook voor de honderdtallen geleend worden. Voor de cijfers van het verschil kunnen we dan schrijven:

$$(a-1-d), 9, 9, (10+d-a).$$

Deze vier cijfers moeten in het geval van een Kaprekar-constante, na ordening overeenkomen met het viertal a, b, c, d . Dan blijkt te gelden $a=b=9$ en wegens $b=c$ ook $c=9$, waarmee de aftrekking is:

$$\begin{array}{r} 9 \quad 9 \quad 9 \quad d \\ d \quad 9 \quad 9 \quad 9 \\ \hline (8-d) \quad 9 \quad 9 \quad (d+1) \end{array}$$

Het cijfer-viertal van de uitkomst blijkt voor geen enkele keuze van d na ordening overeen te komen met het viertal $9, 9, 9, d$. Dus de gezochte constante zal moeten komen uit de tweede mogelijkheid.

Als $b > c$ wordt er voor de honderdtallen niet geleend, en zijn de cijfers van het verschil te schrijven als

$$(a-d)(b-1-c)(10+c-1-b)(10+d-a).$$

De som van beide binnenste cijfers blijkt onafhankelijk van b en c gelijk aan 8 (bij 5 mogelijke combinaties) en de som van de buitenste gelijk aan 10 (ook 5 combinaties). Dit geeft $5 \times 5 = 25$ verschillende geordende viertallen (a, b, c, d) .

Hiervan gaan we stuk voor stuk na of ze voldoen aan elk van de relaties

$$\begin{aligned}b &> c \\ a - d &\in \{a, b, c, d\} \\ 10 - (a - d) &\in \{a, b, c, d\} \\ b - c - 1 &\in \{a, b, c, d\} \\ 9 - (b - c) &\in \{a, b, c, d\}\end{aligned}$$

Alleen het viertal (7, 6, 4, 1) blijkt te voldoen. Controle: $7641 - 1467 = 6174$.

Je kunt ook hier weer nagaan dat *elk* getal van vier cijfers op deze constante 6174 uitkomt.

Verder onderzoek

Voor getallen van 2 cijfers ligt de zaak erg simpel, ga dit zelf maar na.

Bij 5 cijfers gaat het onderzoek vrijwel

net als bij 4 cijfers. Voor het resultaat na één aftrekking zijn er ook hier maar 30 ($5 + 25$) mogelijkheden. Als je hiermee volgens het recept verder rekt zul je zien dat het proces nergens op één getal eindigt (zoals bij 3 en 4 cijfers), maar in drie verschillende lussen. Reken maar verder vanaf bijv. 99954, 98622 en 98532.

Bij 6 cijfers wordt het zoekwerk erg omvangrijk. Er zijn twee Kaprekarconstanten (549 945 en 631 764), en één lus (bijv. vanaf 886 320).

De echte fanaten kunnen nu nog verder gaan zoeken hoe het zit in andere talstelsels. En dan zonder hulp van hun reken-doesje!



Pythagoras Olympiade

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven uit de vorige jaargang

De in de vorige jaargang gestarte *Pythagoras Olympiade* is een behoorlijk succes geworden, en we gaan er dit jaar dan ook enthousiast mee door. Op blz. 6 vind je de wedstrijdvoorwaarden en de eerste opgaven voor de nieuwe cyclus. We hadden in het eerste jaar wel te kampen met een paar kinderziekten. Zo was de inzendtermijn voor de nrs. 2 t/m 5 waarschijnlijk wat aan de korte kant, enerzijds omdat *Pythagoras* soms later verscheen dan gepland was, en anderzijds omdat er vaak nogal wat tijd verstrijkt tussen het moment dat *Pythagoras* de school binnenkomt en het tijdstip dat het blad in de klas wordt uitgedeeld. Dit kan er allemaal toe hebben bijgedragen dat de zeer grote aantallen inzendingen in het begin (180, 133, 147 voor resp. opgave 1, 2 en 3) in de loop van het jaar daalden tot het, gezien de moeilijkheidsgraad van de laatste opgaven, toch nog respectabele aantal van omstreeks 30 voor de laatste vraagstukken.

Onze deelnemers hadden soms ook met problemen of misverstanden te maken. Er waren er die alleen maar antwoorden instuurden zonder enige toelichting. Bij vraagstuk 1 hebben we dit nog door de vingers gezien, maar bij de andere opgaven konden we zo iets niet meer goed rekenen. Sommigen waren teleurgesteld als ze bericht kregen dat hun oplossing niet goed was, en begrepen niet wat ze hadden fout gedaan. We zullen daar dit jaar op inspelen door iedereen de gelegenheid te geven na de sluitingsdatum een correcte oplossing van de vraagstukken te ontvangen (zie de nieuwe wedstrijdvoorwaarden). We blijven echter ook in de toekomst zo mogelijk oplossingen van deelnemers in *Pythagoras* publiceren. De eerste serie oplossingen vind je hieronder.

- PO 1. Een dambord heeft 10×10 velden. Een rechthoekig deel van het bord dat bestaat uit een geheel aantal velden heet een deelbord.
- Hoeveel deelborden heeft een dambord?
 - Hoeveel vierkante deelborden heeft een dambord?

Oplossing van Evert-Jan Pol, 17 jr, 6 vwo, Chr. Lyc. Veenendaal.

- Een deelbord heeft een bovenkant en een onderkant. Deze 2 zijden kunnen op de 11 horizontale lijnen van het dambord liggen. Het aantal mogelijke paren voor onder- en bovenkant is dus $\binom{11}{2}$. Evenzo voor de verticale zijden: $\binom{11}{2}$ mogelijkheden.
In totaal zijn er dus $\binom{11}{2}^2 = 55^2 = 3025$ mogelijkheden.
- Het aantal manieren om een opeenvolgende rij van m velden uit een rij van 10 velden te halen is $11-m$. Zoveel mogelijkheden heb je dus om het vierkant wat betreft de horizontale lijnen te plaatsen. Evenzo voor de verticale lijnen: $11-m$ mogelijkheden.
In totaal voor een vierkant van $m \times m$ dus: $(11-m)^2$ mogelijkheden.
Het totaal aantal mogelijkheden voor de vierkanten is dus

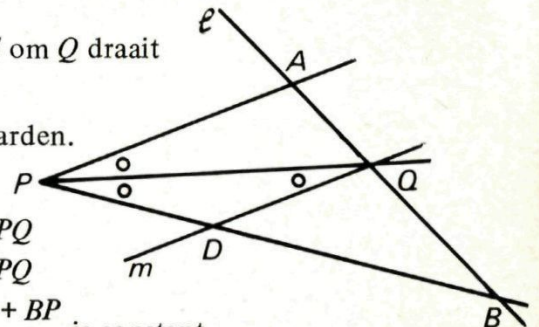
$$\sum_{m=1}^{10} (11-m)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = 385.$$

Soortgelijke oplossingen kwamen van Dirk Keppens, 17 jr, 6 vwo, H. Maagdcollège Dendermonde, en Rob Veenhof, 17 jr, 6 vwo, Europese school Brussel. Er waren 180 inzendingen, waarvan 156 correct.

Prijswinnaars: Tinie van Dijk, 15 jr, 4 mavo, Tilanus-Molenbeke Mavo Arnhem, en Ans Polman, 17 jr, 5 havo, S.G. Oost-Betuwe Bemmelen. Een eervolle vermelding verdiende Johan Krijger, 17 jr, 6 vwo, Chr. Gymn. Leeuwarden voor zijn originele aanpak van onderdeel a.

- PO 2. Op de bissectrice van een hoek P bevindt zich een punt Q . Door Q trekt men een lijn l , die de beide benen van de hoek snijdt in de punten A en B .

Bewijs, dat de som $s = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}$ niet verandert als men l om Q draait



Oplossing van Yde Venema, 16 jr, 6 vwo, Sted. Gymn. Leeuwarden.

$$\text{Opp } \triangle APB = \text{Opp } \triangle APQ + \text{Opp } \triangle BPQ$$

$$\frac{1}{2} AP \cdot BP \sin \angle APB = \frac{1}{2} AP \cdot PQ \sin \angle APQ + \frac{1}{2} BP \cdot PQ \sin \angle BPQ$$

$$\angle APQ = \angle BPQ \Rightarrow AP \cdot BP \sin \angle APB = (AP + BP) \cdot PQ \cdot \sin \angle APQ$$

$$\frac{AP + BP}{AP \cdot BP} = \frac{\sin \angle APB}{PQ \sin \angle APQ} \left(= \frac{2 \cos \angle APQ}{PQ} \right) \Rightarrow s = \frac{1}{BP} + \frac{1}{AP} = \frac{AP + BP}{AP \cdot BP} \text{ is constant.}$$

Oplossing van Ties Kroezen en John van der Mey, beide 16 jr, 4 vwo, Sancta Maria Haarlem.

Trek lijn $m \parallel$ lijnstuk PA (zie figuur). $PD = DQ = k$ (constant)

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} = \frac{1}{PB} \left(1 + \frac{PB}{PA} \right) = \frac{1}{PB} \left(1 + \frac{DB}{DQ} \right) = \frac{1}{PB} \left(1 + \frac{DB}{k} \right) = \frac{1}{PB} \left(\frac{k + DB}{k} \right) = \frac{1}{PB} \cdot \frac{PB}{k} = \frac{1}{k}$$

Er waren 133 inzendingen, waarvan 106 correct.

Prijswinnaars: Ab Chardon, 17 jr, 4 vwo, Oosterlicht College Utrecht, en Martin Eppink, 18 jr, 5 havo, Lyc. de Grundel Hengelo. Een eervolle vermelding verdiende René Wester, 16 jr, 5 vwo, Murmellius Gymnasium Alkmaar voor zijn korte vectormeetkundige oplossing.

- PO 3. a. Bewijs dat voor elk positief getal $r \neq \sqrt{2}$ de uitdrukking $\frac{3r+8}{4r+3}$ een betere benadering is van $\sqrt{2}$ dan r zelf.
- Bepaal positieve gehele getallen a, b, c en d zo dat voor elk positief getal $r \neq \sqrt{3}$ de uitdrukking $\frac{ar+b}{cr+d}$ een betere benadering is van $\sqrt{3}$ dan r zelf.

Oplossing onderdeel a van *Ronald Overwater*, 17 jr, 6 vwo, Alkwin College Uithoorn.

$$\text{Als } r > 0 \text{ en } r \neq \sqrt{2} \text{ geldt } \left| \frac{3r+8}{4r+3} - \sqrt{2} \right| < |r - \sqrt{2}| \iff$$

$$|3r+8 - \sqrt{2}(4r+3)| < |(r - \sqrt{2})(4r+3)| \iff$$

$$|(3 - 4\sqrt{2})(r - \sqrt{2})| < |(r - \sqrt{2})(4r+3)| \iff |3 - 4\sqrt{2}| < |4r+3|$$

$$\iff -3 + 4\sqrt{2} < 4r+3 \text{ (want } 3 - 4\sqrt{2} < 0 \text{ en } 4r+3 > 0)$$

$$\iff r > \sqrt{2} - 3/2.$$

Aangezien $r > 0$ en $\sqrt{2} - 3/2 < 0$ is $\frac{3r+8}{4r+3}$ dus een betere benadering van $\sqrt{2}$ dan r zelf.

Soortgelijke oplossingen kwamen van *Evert-Jan Pol*, 17 jr, 6 vwo, Chr. Lyc. Veenendaal, en *Frits Vaandrager*, 17 jr, 6 vwo, Chr. S.G. Zandvliet Den Haag.

Oplossing onderdeel b van *Eric Verhoeff*, 18 jr, 6 vwo, R.S.G. Noord-Kennemerland Alkmaar; hij leidde de algemene voorwaarden af voor $\sqrt{N}$ en loste daarmee a en b in één keer op (we hebben zijn verhaal op een paar punten bekort).

Opdat $\frac{ar+b}{cr+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$) voor alle $r > 0, r \neq \sqrt{N}$, N geen kwadraat, steeds een betere benadering

is van $\sqrt{N}$ dan r zelf, moet zeker gelden

$$\lim_{r \rightarrow \sqrt{N}} \frac{ar+b}{cr+d} = \frac{a\sqrt{N}+b}{c\sqrt{N}+d} = \sqrt{N} \iff a\sqrt{N}+b = cN+d\sqrt{N} \iff$$

$$\iff (a-d)\sqrt{N} = cN-b \iff \boxed{a=d \wedge b=cN} \text{ (want } N \text{ is geen kwadraat dus } \sqrt{N} \text{ is irrationaal).}$$

$$\text{Stel nu } x = r - \sqrt{N} \text{ en } q = \frac{ar+b}{cr+d} - \sqrt{N} = \frac{a(\sqrt{N}+x) + Nc}{c(\sqrt{N}+x) + a} - \sqrt{N} = \frac{x(a - c\sqrt{N})}{c(\sqrt{N}+x) + a}.$$

$$\text{Uit } x \neq 0, r = x + \sqrt{N} > 0 \text{ moet volgen } |q| < |x|, \text{ dus } \left| \frac{a - c\sqrt{N}}{c(\sqrt{N}+x) + a} \right| < 1.$$

De noemer is positief omdat $x + \sqrt{N} > 0$ en $a, c \in \mathbb{Z}^+$. Uit $x \neq 0, x + \sqrt{N} > 0$ moet dus volgen $|a - c\sqrt{N}| < c(x + \sqrt{N}) + a$ d.w.z. $x + \sqrt{N} > |a/c - \sqrt{N}| - a/c$. Als het rechterlid negatief is, is hieraan voldaan, en een voldoende voorwaarde is dus

$|a/c - \sqrt{N}| < a/c$, met andere woorden $\boxed{a/c > \frac{1}{2}\sqrt{N}}$. Elke keuze die aan de twee omliggende voorwaarden voldoet, geeft dus een oplossing van de opgave. Voor $N = 2$ kunnen we blijkbaar nemen $a = d = 3, b = 2c = 8$ want $a/c = 3/4 > \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en voor $N = 3$ voldoet bijv. $a = d = 2, b = 3c = 3$ want $a/c = 2 > \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Tot zover Eric's oplossing. De formules uit de opgave geven methodes om steeds betere benaderingen te vinden van $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ en i.h.a. $\sqrt{N}$. Het is interessant uit te zoeken hoe de *convergentiesnelheid* van zo'n methode afhangt van de constanten a, b, c en d . Dit vraagstuk, waarvoor het idee afkomstig is van prof. Murray S. Klamkin (een van de coaches van de Amerikaanse ploeg bij de Internationale Wiskunde Olympiade) heeft veel hoofdbrekens gekost. Er waren 147 inzendingen, waarvan slechts 48 compleet correct; 25 oplossers hadden alleen onderdeel a goed.

Prijswinnaars: *Eisso Atzema*, 15 jr, 4 vwo, Sted. Gym. Nijmegen, en *Martin Kooij*, 17 jr, 6 vwo, R.S.G. Brielle. Eervolle vermeldingen verdienden *Tom ter Elst*, 17 jr, 6 vwo, Dominicuscollege Nijmegen, *Kees Visser*, 16 jr, 5 vwo, R.S.G. Heerenveen, en *Gert Groenewoud*, 16 jr, 5 vwo, G.S.R. Rotterdam voor hun goed geformuleerde, korte oplossingen.

PO 4. Gegeven is een positief getal a . Bewijs, dat er zich onder de getallen $a, 2a, 3a, \dots, 999a$ altijd minstens één bevindt die hoogstens 0,001 verschilt van een geheel getal.

Oplossing van Karel Jan Schoutens, 17 jr, 6 vwo, Mollerlyceum Bergen op Zoom.

We bekijken de eerste 3 decimalen van de getallen uit de rij. Er zijn twee mogelijkheden:

1. De eerste drie decimalen zijn voor alle getallen uit de rij verschillend. Omdat er naast 000 en 999 slechts 998 combinaties van drie cijfers zijn zal tenminste één van de 999 getallen als eerste drie decimalen 000 of 999 hebben. Dat getal verschilt ten hoogste 0,001 van een geheel getal.
2. Er zijn twee getallen uit de rij waarvan de eerste drie decimalen gelijk zijn. Dan verschilt 't verschil van deze twee getallen, dat zelf ook 'n getal uit de rij is, minder dan 0,001 van een geheel getal.

Dit vraagstuk werd zeer moeilijk gevonden. Er waren slechts 23 inzendingen, waarvan 12 correct. Deze kwamen van *Jan Koen Annot*, 17 jr, 6 vwo, Chr. Lyc. Veenendaal, *Jan Meier*, 17 jr, 5 vwo, R.S.G. Coevorden, *Ronald Overwater*, 17 jr, 6 vwo, Alkwin College Uithoorn, *Evert-Jan Pol*, 17 jr, 6 vwo, Chr. Lyc. Veenendaal, *Gerard Tel*, 17 jr, 6 vwo, Oosterlicht College Utrecht, *Rob Veenhof*, 17 jr, 6 vwo, Europese school Brussel, *Yde Venema*, 16 jr, 6 vwo, Sted. Gym. Leeuwarden, *Eric Verhoeff*, 18 jr, 6 vwo, R.S.G. Noord-Kennemerland Alkmaar, *Erick de Vries*, 17 jr, 5 vwo, R.S.G. Meppel, *Marcel de Jeu*, *Bart van der Leemput* en *Karel Jan Schoutens*.

Prijswinnaars: Marcel de Jeu, 16 jr, 6 vwo, O.S.G. Albert Einstein Hoogvliet, en *Bart van der Leemput*, 16 jr, 5 vwo, St.-Janslyceum 's-Hertogenbosch.

PO 5. Gegeven zijn de gehele getallen a en b . Het getal b is oneven. Bewijs dat voor alle rationale getallen r geldt:

$$r^3 + 6ar^2 + 12a^2r + 2b \neq 0$$

Oplossing van Eisso Atzema, 15 jr, 4 vwo, Sted. Gym. Nijmegen, en *Kees Visser*, 16 jr, 5 vwo, R.S.G. Heerenveen (door ons iets bekort).

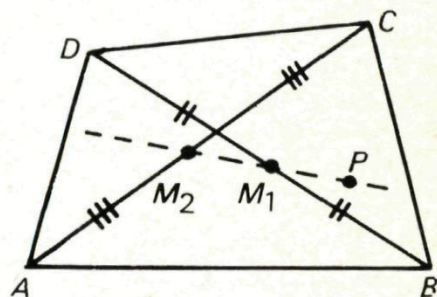
$$r^3 + 3 \cdot 2a \cdot r^2 + 3 \cdot 4a^2 \cdot r + 2b = 0 \iff (r + 2a)^3 + 2b - 8a^3 = 0$$

$\iff r + 2a = \sqrt[3]{8a^3 - 2b} \Rightarrow 4a^3 - b$ moet een viervoud zijn wil de wortel rationaal zijn. Echter: b is oneven, $4a^3$ is even $\Rightarrow 4a^3 - b$ is oneven, dus nooit een viervoud.

Er waren 54 inzendingen, waarvan 40 correct.

Prijswinnaars: Stefan Carr, 4 vwo, Praedinius Gymnasium Groningen, en *Jan Willem van der Helm*, 16 jr, 5 vwo, College Noetsele Nijverdal.

PO 6. Gegeven is een vierhoek $ABCD$ zonder inspringende hoeken. $ABCD$ is geen parallellogram. Binnen $ABCD$ ligt een punt P op de verbindingslijn van de middens van de diagonalen. Bewijs: opp. ABP + opp. CDP = opp. BCP + opp. DAP .



Oplossing van William Stassen, 16 jr, 5 vwo, Thomas à Kempis S.G. Zwolle (door ons bewerkt).

M_1 is het midden van BD , M_2 dat van AC . Stel eerst dat P samenvalt met M_1 . De driehoeken BM_1C en DM_1C hebben dezelfde zijde M_1C , en hoogtelijnen vanuit B resp. D van gelijke lengte, dus hun oppervlaktes zijn gelijk. Evenzo geldt $BM_1A = DM_1A$. Gecombineerd geeft dit $BM_1A + DM_1C = BM_1C + DM_1A$.

Stel nu dat P een willekeurig punt is van M_1M_2 . Er geldt dan $BM_1A + DM_1C = BPA + DPC \pm (APM_1 - CPM_1) \pm (DPM_1 - BPM_1)$ waarbij de tekens vóór de haakjes afhangen van de vorm van vierhoek $ABCD$ en van de positie van P op M_1M_2 . De uitdrukkingen tussen haakjes zijn echter nul, want er geldt bijvoorbeeld dat de driehoeken APM_1 en CPM_1 dezelfde zijde PM_1 , en gelijke hoogtelijnen op die zijde hebben, dus dat hun oppervlaktes gelijk zijn. Omdat daarom $BM_1A + DM_1C = BPA + DPC$ en evenzo $BM_1C + DM_1A = BPC + DPA$, terwijl al was aangetoond dat $BM_1A + DM_1C = BM_1C + DM_1A$, geldt ook $BPA + DPC = BPC + DPA$.

Commentaar: veel meetkundige oplossingen (ook die van William) gingen uit van een situatie die door één plaatje was aangegeven, en werkten dan met optellen en aftrekken van oppervlaktes van driehoeken, zonder zich te bekommeren om de vraag of het in andere situaties dan de getekende ook precies zo gaat. In het gunstigste geval waren er opmerkingen in de trant van 'als de punten anders liggen, gelden analoge argumenten'. Inderdaad is dit waar, maar mooi en helemaal overtuigend is zoiets natuurlijk niet (we hebben dergelijke bewijzen echter wel goed gerekend). In onze bewerking van Williams bewijs hebben we deze schoonheidfoutjes weggewerkt. Er waren 36 inzendingen, waarvan 28 correct.

Prijswinnaars: Ronald Kuil, 17 jr, 5 havo, Melanchton Rotterdam, en *Frank Waaldijk*, 14 jr, 4 vwo, Elzendaalcollege Boxmeer. Eervolle vermeldingen verdienen *Jan Koen Annot*, 17 jr, 6 vwo, Chr. Lyc. Veenendaal, *Walter Goyen*, 6 vwo, S.G. St. Michiel Geleen, *Meine van der Meulen*, 15 jr, 4 vwo, Prot. Lyc. Eindhoven, en *Gerard Tel*, 17 jr, 6 vwo, Oosterlicht College Utrecht.

PO 7. Bepaal alle natuurlijke getallen N met de volgende eigenschap: zowel in het tientallig als in het zeventallig stelsel schrijft men N met vier cijfers. Bovendien gebruikt men in het ene stelsel dezelfde cijfers als in het andere stelsel, maar in de omgekeerde volgorde.

Oplossing van Johan Elzer, 16 jr, 4 vwo, Prot. Lyc. Eindhoven.

Uit de opgave volgt: $abcd$ in het tientallig stelsel is $dcba$ in het zeventallig stelsel, waarin $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ofwel $1000a + 100b + 10c + d = 343d + 49c + 7b + a$, of $333a + 31b - 13c - 114d = 0$. 6666, het grootste getal met 4 cijfers in het zeventallig stelsel, is gelijk aan 2400 in het tientallig stelsel, dus $a = 1$ of $a = 2$. Stel $a = 2$, dan moet $d = 5$ of $d = 6$ zijn wegens $-78 \leq 31b - 13c \leq 186$. Stel $d = 5$, dan is $666 - 570 + 31b - 13c = 0$ en dit heeft geen oplossingen met $b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Stel $d = 6$, dan is $666 - 684 + 31b - 13c = 0$ en hieruit volgt $b = c = 1$. Dit geeft dus als oplossing 2116 en 6112. Stel $a = 1$, dan is $d = 3$ of $d = 4$ wegens dezelfde ongelijkheid als boven. Invullen geeft weer vergelijkingen die geen toegelaten oplossingen bezitten. Er is dus maar één getal N , namelijk 2116 in het tientallig stelsel, dat aan de gestelde voorwaarden voldoet.

Er waren 53 inzendingen, waarvan 41 correct.

Prijswinnaars: Martien Hols, 18 jr, 5 vwo, Edith Steincollege Den Haag, en *Hans van Woudenberg*, 17 jr, 6 vwo, Mill Hillcollege Goirle.

PO 8. Bewijs dat elk positief geheel getal een geheel veelvoud heeft dat, geschreven in het tientallig stelsel, elk van de tien cijfers minstens één maal bevat.

Oplossing van Jan Koen Annot, 17 jr, 6 vwo, Chr. Lyc. Veenendaal.

Neem een willekeurig positief geheel getal N . Het aantal cijfers van N noemen we n . Noem $X = 1023456789 \cdot 10^n$. Bepaal de rest R bij deling van X door N ($0 \leq R < N$). Voor het getal $Y = X + N - R$ geldt nu dat Y een N -voud is en dat $X < Y \leq X + N$, dus Y begint met 1023456789, dus Y bevat elk van de tien cijfers minstens éénmaal.

Er waren 28 inzendingen, waarvan 22 correct.

Prijswinnaars: Bart van der Leemput, 16 jr, 5 vwo, St. Janslyceum 's-Hertogenbosch, en *Eric Postma*, 16 jr, 4 vwo, Baudartiuscollege Zutphen.

PO 9. Voltooi de volgende staartdeling en bewijs ook dat dit slechts op één manier mogelijk is.

```

      . . . / . . . . . 9 . \ . . . . .
      . .
      —
      . . .
      . .
      —
      . . 9
      . .
      —
      . .
      . .
      —
      0

```


Oplossing van *Meine van der Meulen*, 15 jr, 4 vwo, Prot. Lyc. Eindhoven; we hebben zijn notatie, die aanleiding tot verwarring zou kunnen geven, enigszins veranderd.

In het vervolg stellen kleine letters cijfers, en grote letters getallen van 2 of 3 cijfers voor.

$xy / \overline{A} \quad . \quad . \quad 9 \quad . \quad \backslash a b c d e$	b	xy
$B \rightarrow \quad . \quad .$	8	12
$C \rightarrow \quad . \quad . \quad .$	7	13, 14
$D \rightarrow \quad . \quad . \quad .$	6	16
$E \rightarrow \quad . \quad . \quad 9$	5	19
$F \rightarrow \quad . \quad . \quad .$	4	23, 24
$G \rightarrow \quad . \quad .$	3	31, 32, 33
$H \rightarrow \quad . \quad .$	2	48, 49
0		

Uit $C - D \leq 9$, $C \geq 100$, $D < 100$ volgt $100 \leq C \leq 108$ en $91 \leq D = b \cdot xy \leq 99$. Uit $F \geq 100$ en $D < 100$ volgt $b < 9$. Uit $100 \leq C \leq 108$ volgt $A - B = 10$; $A < 100$, dus $B = a \cdot xy < 90$. Omdat $b \cdot xy \geq 91$ moet $a < b$ zijn en omdat $a > 0$ is geldt $b > 1$. Met deze gegevens kan een lijst van alle mogelijke combinaties (b, xy) worden opgesteld. Omdat bij E twee cijfers worden aangehaald, is x groter dan of gelijk aan het eerste cijfer van E , en dat is $C - D$. Er geldt dus $x \geq C - D \geq 100 - b \cdot xy$. Aan deze ongelijkheid voldoen alleen de onderstreepte combinaties uit de tabel. Als $xy = 33$ is $G = H \in \{33, 66, 99\}$. Omdat E eindigt op 9, moet F eindigen op 0, 3 of 6, maar de veelvouden van 33 onder de 330 van drie cijfers doen dit niet. Als $xy = 48$ begint $G = H$ met 4 of 9, dus F moet eindigen op 0 of 5. Dit kan alleen als $d = 5$ en dan is $F = 240$, $E = 249$, $C - D = 2$ dus $100 > D = b \cdot 48 \geq 98$, en dit kan niet. De enige overblijvende mogelijkheid $xy = 49$ voldoet wel. Deeltal en quotiënt zijn dan resp. 590499 en 12051.

Er waren 58 inzendingen, waarvan 55 correct.

Prijswinnaars: Ron van Duin, 16 jr, 5 vwo, S.G. Prins Alexanderpolder Rotterdam, en H. Raben, 18 jr, 6 vwo, Pius X College Wierden.

° Grote priemgetallen

Naar aanleiding van het stukje over priemgetallen in nr. 4 van de vorige jaargang ontvingen we van de heer Ota Setzer uit Tsjechoslowakije (ook daar wordt *Pythagoras* gelezen!) een brief over het grootste priemgetal dat met *verschillende* cijfers wordt geschreven. De Tsjechische student P. Struzka had bepaald dat dit 987 654 103 moest zijn, en onze brievenfreeser vroeg zich af of dit getal echt een priemgetal is. Ronald Brand van het Mathematisch Instituut te Leiden controleerde het even met de computer, en inderdaad, het klopt! Dit priemgetal heeft *negen* cijfers. Bestaat er dan geen enkel priemgetal dat *alle tien* de cijfers precies eenmaal bevat?

Nee, want de som van deze tien cijfers (= 45) is een negenvoud. En dus is elk getal dat met deze cijfers geschreven wordt zelf ook een negenvoud.

Voor de enige serieuze kandidaten die nog wat groter zijn dan 987 654 103 geldt:

987 654 301 is deelbaar door 2029,
987 654 203 is deelbaar door 31 en
987 654 201 is deelbaar door 23.

Nog iets over grote priemgetallen

Een andere reactie op het stuk had betrekking op Euclides' bewijs van het feit

dat de rij van alle priemgetallen

2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

niet ophoudt: er bestaat geen grootste priemgetal. Euclides nam het produkt $P(n) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ van de eerste n priemgetallen en telde er 1 bij op. Het getal $P(n) + 1$ geeft dan bij deling door elk van de getallen p_i rest 1. Het is dus niet door p_1 t/m p_n deelbaar. Daarom is het óf zelf een priemgetal, óf deelbaar door een priemgetal dat *groter* is dan p_n . De rij van alle priemgetallen kan dus niet ergens ophouden: er is geen grootste priemgetal.

Onze tweede briefschrijver meende dat $P(n) + 1$ zelf altijd een priemgetal is, zodat je op deze manier vrij gemakkelijk zeer grote priemgetallen kunt maken. Maar dat is helemaal niet waar. Neem

bijv. $P(6) + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$. De moeilijkheid bij priemgetallen blijft dat er geen algemene formule bekend is die ons in staat stelt op eenvoudige wijze willekeurig grote priemgetallen te vinden. Alle methodes eisen gigantisch veel rekenwerk, en mede daarom verschijnt er soms een berichtje in de krant als er weer een groter priemgetal is gevonden. Overigens, wiskundig gezien is het feit dat $2^{44497} - 1$ (de huidige recordhouder met 13395 cijfers) een priemgetal is, nauwelijks interessant. De belangstelling van de wiskundige wereld wordt pas gewekt als er algemene eigenschappen van priemgetallen of van priemgetallen van een speciale vorm worden ontdekt. De precieze waarde van individuele priemgetallen is niet veel meer dan een curiositeit.

Antwoorden en oplossingen

bij: Met meer driehoeken bouwen

De topdriehoek is minimaal als de projectie P' van P zo dicht mogelijk bij het midden M van $\triangle ABC$ ligt. $PP' \perp AB$, dus $MP' \parallel AB$. Dan: minimale zijde $= \sqrt{3} MP' = \frac{1}{2} \sqrt{3} |a^2 - b^2| / c$.

bij: Gebruik je knoppen	1	5	4	3	2	6
	6	2	3	4	5	1
	6	5	3	4	2	1
	1	5	3	4	2	6
	6	2	4	3	5	1
	1	2	4	3	5	6

bij: De maan en de meetkunde

De bekende verklaring voor de schijngestalten van de maan blijkt gelukkig toch wel in overeenstemming met de waargenomen maanstand in het tweede kwartier.

Misschien raak je daar het gemakkelijkst van overtuigd wanneer je een globe in handen hebt. En dan ziet (touwtje spannen) dat een vliegtuig voor de kortste route naar Mexico-stad (veel *zuidelijker* dan A'dam) toch in enigszins *noord*-westelijke richting van Schiphol moet vertrekken!

Om dezelfde reden zal de grote cirkel die de projectie vormt op de schijnbare hemelbol van de kortste lichtweg zon-maan, vanaf de maan gerekend soms eerst 'stijgen'.

Nog anders gesteld: De rechte lichtstraal vanaf de zon (bij de horizon in het westen) naar de maan (een stuk boven de horizon in het zuid-oosten) loopt in werkelijkheid vrijwel evenwijdig met het horizonvlak. Het punt waar deze lichtstraal het dichtst langs de waarnemer komt, ligt dan boven het zuiden. Maar dit punt wordt, wegens het meest nabij zijn, door de waarnemer een stuk hoger boven de horizon gezien dan de maan zelf. Waardoor bij hem de illusie kan ontstaan dat het zonlicht de maan van schuin omhoog bereikt.

Het hier genoemde gezichtsbedrog wordt ook uitvoerig beschreven door Dr. Minnaert, in het boek: *De natuurkunde van het vrije veld*, deel 1. (Misschien te vinden in je schoolbibliotheek, of in de kast van een natuurkundeleraar).

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

- ∫ Dr. J. van de Craats, R.U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden
- ★ Bruno Ernst, Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht
- < W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn
- ↙ Ir. H.M. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginneken.

Secretariaat

- △ Drs. H.N. Pot, Tournoyveld 67, 3443 ER Woerden.
- Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

W. Ganzevoort, M.C. van Hoorn, W. Pijls, G.A. Vonk, D.K. Wielinga.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,90 per jaargang. Voor anderen f 12,95.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

Inhoud

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------|
| ∫ Wat zijn kegelsneden? 1 | ↙ Gebruik je knoppen 15, 25 |
| △ De maan en de meetkunde 5,25 | Programmeerwedstrijd 16 |
| Pythagoras Olympiade PO 16-18 6 | Omkeergegetallen 17 |
| △ Kubussommen 7 | Oplossingen PO 1-9 19 |
| Met meer driehoeken bouwen 9, 25 | Grote priemgetallen 24 |
| △ De databank gekraakt 13 | |

