

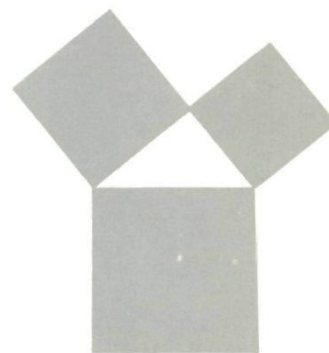


2

jaargang 20 / november 1980

wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



In een wedstrijd moet je zo gunstig mogelijk zien te laveren: scherp aan de wind en niet zo snel, of wat ruimer en sneller? Zie voor je optimale koers: 'Een cirkelgrafiek bij een zeilwedstrijd'.

BIJ DE VOORPLAAT

Een illustratie uit een leerboek over perspectieftekenen uit 1604, van de Nederlander *Vredeman de Vries*. Je ziet aan een paar hulplijntjes hoe alle recht naar achter lopende horizontale lijnen worden afgebeeld als lijnen die samenkomen in een verdwijnpunt op de horizon. Meer over perspectieftekenen en over Vredeman de Vries in het artikel 'Leerzame fouten'.

° Optellen = vermenigvuldigen

$$2 + 2 = 2 \times 2$$

$$\sqrt{2} + (2 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} \times (2 + \sqrt{2})$$

$$3 + \frac{3}{2} = 3 \times \frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{5}{2} \times \frac{5}{3}$$

Sommige getallenparen geven bij optelling dezelfde uitkomst als bij vermenigvuldiging. Dat $2 + 2$ gelijk is aan 2×2 zal ieder wel eens zijn opgevallen. Zijn er nog meer van zulke paren getallen? Kan het met andere *gehele* getallen? Met *gelijke* getallen? Zijn er met *ongelijke* getallen nog andere mogelijkheden dan die hierboven gegeven zijn?

Probeer voor je verder leest eens of je zelf antwoorden op deze vragen kunt vinden.

De algemene oplossing

We zoeken naar getallen a en b die voldoen aan de relatie

$$a + b = a \times b, \text{ ofwel } b = \frac{a}{a-1}.$$

Aan deze laatste vorm is te zien hoe bij *elk* getal a een passende partner b te vinden is. De gezochte paren zijn dus bepaald niet zo zeldzaam.

Nemen we het eerste getal (a) *geheel*, dan vinden we $\dots, (-3, \frac{3}{4}), (-2, \frac{2}{3}), (-1, \frac{1}{2}), (0, 0), (1, \text{mis}), (2, 2), (3, \frac{3}{2}), (4, \frac{4}{3}), \dots$

Het gaat één keer mis: voor $a = 1$ wordt de noemer nul in $a/(a-1)$, er is dan geen partner b . De vergelijking $1 + b = 1 \times b$ heeft géén oplossing.

Ook is te zien dat behalve $(0, 0)$ en $(2, 2)$ er geen andere paren zijn met *beide* getallen *geheel*.

Twee gelijke getallen

Zou het met twee gelijke, *niet-gehele* getallen nog wél kunnen? Voor welke getallen $a \in \mathbb{R}$ geldt $a + a = a \times a$?

De relatie is gelijkwaardig met $2a - a^2 = 0$ ofwel $a(2 - a) = 0$, en hieraan wordt uitsluitend voldaan door de gehele getallen 0 en 2. $(0, 0)$ en $(2, 2)$ zijn dus ook de enige paren met *gelijke* getallen.

Twee breuken

Als a een breuk is, dan kan dit getal altijd worden geschreven als $\frac{n+m}{n}$ met $n \in \mathbb{N}$ en $m \in \mathbb{Z}$. Voor de bijbehorende partner b geldt dan

$$b = \frac{a}{a-1} = \frac{(n+m)/n}{(n+m)/n - 1} = \frac{n+m}{m}.$$

Controleer zelf maar dat voor alle m en n geldt

$$\frac{n+m}{n} + \frac{n+m}{m} = \frac{n+m}{n} \times \frac{n+m}{m}.$$

En je kunt ook nagaan dat als $\frac{n+m}{n}$ niet vereenvoudigbaar is, hetzelfde ook geldt voor $\frac{n+m}{m}$.

We vinden zo nog oneindig veel meer paren; steeds met gelijke tellers, gelijk aan de som van de beide noemers. Bijvoorbeeld $(\frac{7}{2}, \frac{7}{5}), (\frac{7}{3}, \frac{7}{4}), (\frac{7}{9}, \frac{7}{-2})$, enzovoort.

Een ander soort gehelen

Omdat elk getal ($\neq 1$) een partner heeft, geldt dit ook voor ieder *irrationaal* getal. Bijvoorbeeld bij $a = 5 + \sqrt{3}$ hoort $b =$

$$\frac{(5 + \sqrt{3})}{(5 + \sqrt{3}) - 1} = \frac{(5 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})}{(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})} = \frac{17}{13} - \frac{1}{13}\sqrt{3}.$$

Controleer maar weer dat

$$(5 + \sqrt{3}) + \left(\frac{17}{13} - \frac{1}{13}\sqrt{3}\right) = \frac{82}{13} + \frac{12}{13}\sqrt{3}$$

en ook

$$(5 + \sqrt{3}) \times \left(\frac{17}{13} - \frac{1}{13}\sqrt{3}\right) = \frac{82}{13} + \frac{12}{13}\sqrt{3}.$$

Ook hier zoeken we naar 'mooie' gevallen. Zijn er paren te vinden waarin beide getallen de volgende vorm hebben:

$$(\text{geheel}) + (\text{geheel})\sqrt{(\text{pos. geheel})}$$

Dus zoals $5 + \sqrt{3}$, $-2 - 7\sqrt{6}$, $100 - \sqrt{101}$, $7\sqrt{7}$, enzovoort.

Na wat gepuzzel blijkt dat we dan voor een van de getallen moeten nemen

$$m \pm \sqrt{(m-1)^2 \pm 1}$$

met m geheel en een willekeurige tekenkeuze.

Probeer het maar!

Erelijst ladderwedstrijd 1979/1980

- 15 punten: Marcel de Jeu, 6-vwo, O.S.G. Albert Einstein, Hoogvliet
Bart van der Leemput, 5-vwo, St.-Janslyceum, 's-Hertogenbosch
Rob Veenhof, 6-vwo, Europese School, Brussel
Eric Verhoeff, 6-vwo, R.S.G. Noord Kennemerland, Alkmaar
- $14\frac{1}{2}$ punt: Evert Jan Pol, 6-vwo, Chr. Lyc. Veenendaal
- $13\frac{1}{2}$ punt: Jan Meier, 5-vwo, R.S.G. Coevorden
Kareljan Schoutens, 6-vwo, Mollerlyceum, Bergen op Zoom
- 13 punten: Eisso Atzema, 4-vwo, Sted. Gymn. Nijmegen
Kees Visser, 5-vwo, R.S.G. Heerenveen
- $12\frac{1}{2}$ punt: Rutger Noot, 3-vwo, Gymn. Haganum, Den Haag
Eric Postma, 4-vwo, Baudartiuscollege, Zutphen
- 12 punten: Danny van Hooff, 5de klas, Xaveriuscollege, Borgerhout, België
- $11\frac{1}{2}$ punt: Jan Koen Annot, 6-vwo, Chr. Lyc. Veenendaal
Reynier Peletier, 6-vwo, Europese School, Brussel
Erick de Vries, 5-vwo, R.S.G. Meppel
- 11 punten: Ralph Peeters, 4-vwo, Elzendaalcollege, Boxmeer
Frank Waaldijk, 4-vwo, Elzendaalcollege, Boxmeer
- $10\frac{1}{2}$ punt: Meine van der Meulen, 4-vwo, Prot. Lyc. Eindhoven
Jeroen Mulder, 4-vwo, R.S.G. Roermond
William Stassen, 5-vwo, Thomas à Kempis S.G., Zwolle
Lucas Witkam, 5-vwo, Gymn. Rolduc, Kerkrade

Dit zijn degenen die bij de ladderwedstrijd van de Pythagoras Olympiade 1979/1980 meer dan 10 punten hebben behaald. De vier deelnemers met 15 punten hebben elk een boekebon van f 25,- ontvangen. Alle niet-zesdeklassers van de lijst mochten aan de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade op 28 augustus 1980 deelnemen.

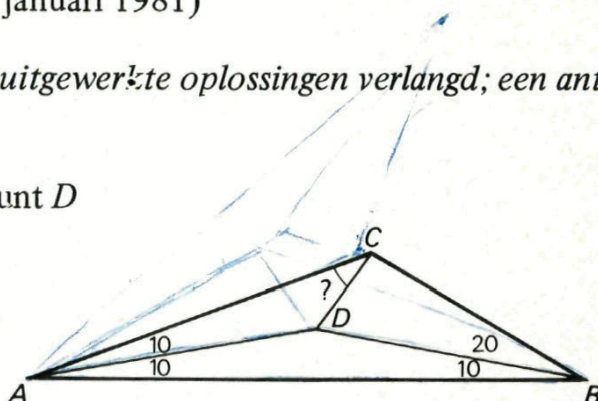


Pythagoras Olympiade

Nieuwe opgaven (oplossingen inzenden vóór 15 januari 1981)

N.B.: er worden goed gemotiveerde en volledig uitgewerkte oplossingen verlangd; een antwoord alleen is niet voldoende!

- PO 19. Gegeven is een driehoek ABC en een punt D erin zo, dat $\angle CAD = \angle DAB = \angle ABD = 10^\circ$ en $\angle DBC = 20^\circ$. Bereken $\angle ACD$.



- PO 20. Onder $s(n)$ verstaat men de som van de cijfers van het natuurlijke getal n . Wat is de kleinste waarde van het quotiënt $n : s(n)$ wanneer men n laat variëren over alle natuurlijke getallen van vier cijfers?

$$\frac{1099}{19}$$

- PO 21. Gegeven zijn vier bollen met straal 1. Elk van de vier raakt de drie andere. Bij elk drietal neemt men het gemeenschappelijke raakvlak dat de vierde niet snijdt. Deze vier raakvlakken vormen een regelmatig viervlak dat de vier gegeven bollen omsluit. Bereken de inhoud van dit viervlak.

$$\frac{76}{3}\sqrt{2} + 24\sqrt{3}$$

Wedstrijdvoorwaarden en prijzen

- * Alle leerlingen van het voortgezet onderwijs kunnen aan de Pythagoras Olympiade deelnemen door een oplossing van een of meer van de opgaven in te sturen.
- * Papier waarop oplossingen staan mag slechts aan één zijde beschreven zijn. Voor verschillende opgaven moeten ook verschillende vellen genomen worden.
- * Slechts goed leesbare oplossingen worden bekeken. Alle tekstgedeelten moeten helder en duidelijk in goed lopende zinnen zijn geformuleerd.
- * Vermeld op elke vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas.
- * Indien je een open, aan je zelf geadresseerde en als brief gefrankeerde enveloppe meezendt, ontvang je na afloop van de inzendtermijn onze oplossingen.
- * De oplossingen moeten binnen de vermelde inzendtermijn gestuurd worden naar: Pythagoras Olympiade, Brederode 29, 2261 HG Leidschendam. Zorg voor voldoende frankering!
- * Bij elke opgave worden onder de inzenders van een goede oplossing twee boekebonnen van f 10,— verloot.
- * Alle opgaven van één jaargang (5 nummers) vormen te zamen een *ladderwedstrijd*. Elke goede oplossing geeft één punt. De drie inzenders die in één jaar de meeste punten verzamelen, krijgen een boekebon van f 25,—. Bij gelijke puntenaantallen beslist het lot.
- * De beste 10 van de ladderwedstrijd die niet in een eindexamenklas zitten, krijgen *automatisch* een uitnodiging voor de tweede ronde van de *Nederlandse Wiskunde Olympiade*. Zij behoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

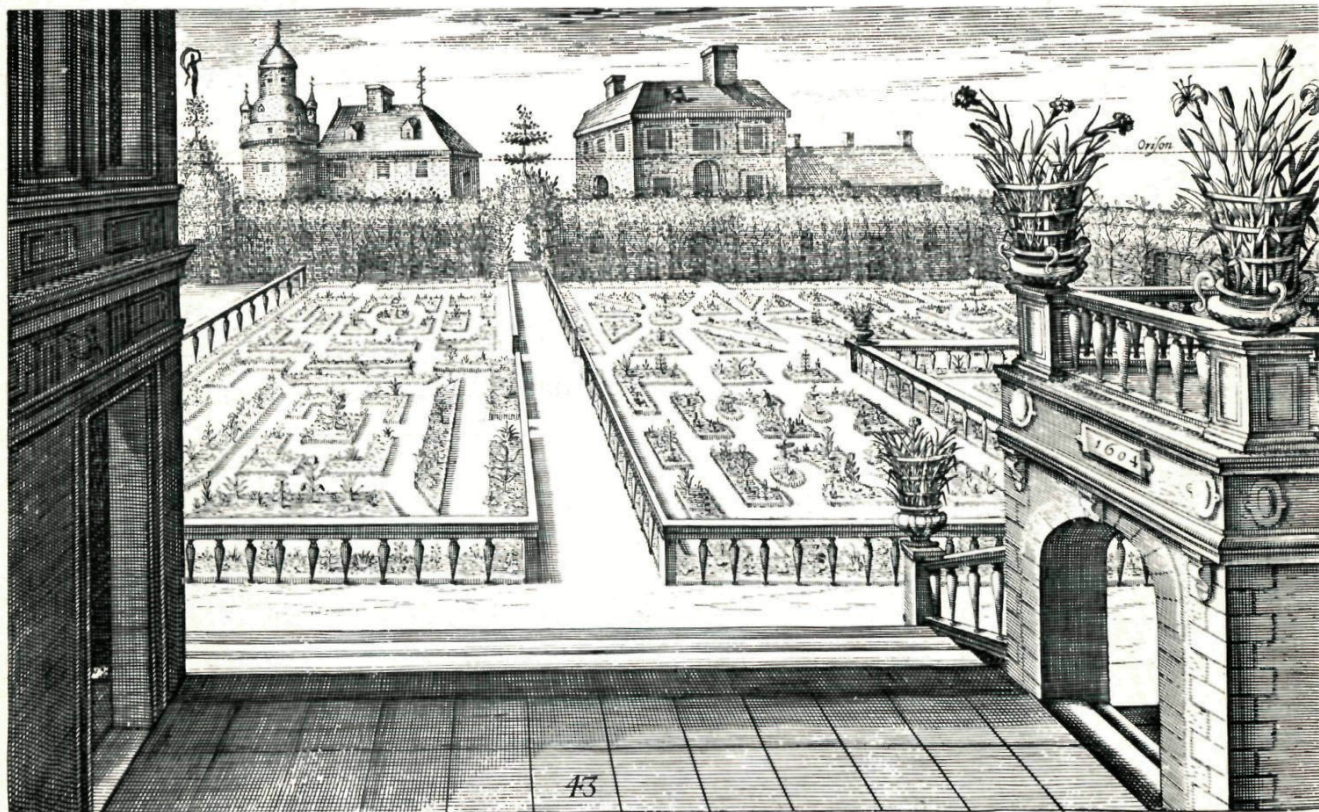
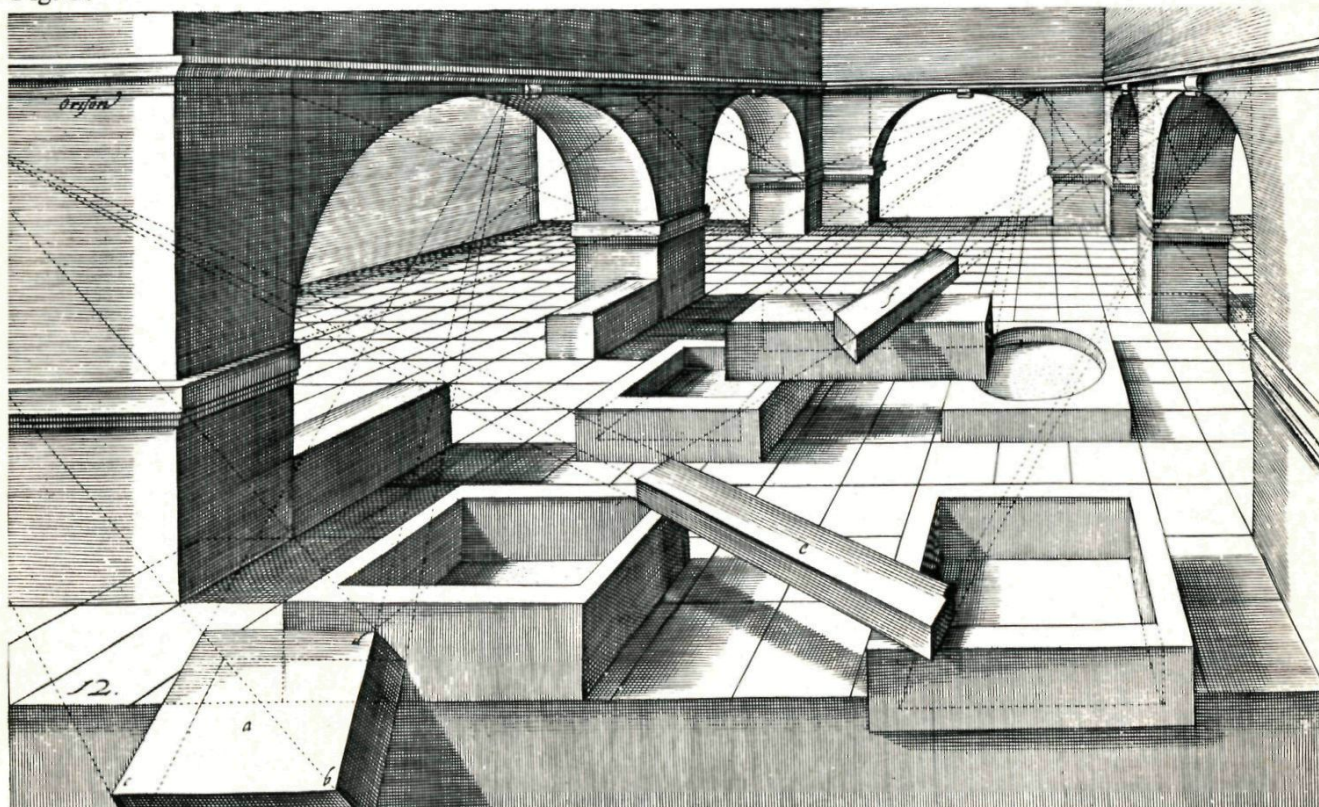


Fig. 1.

Fig. 2.



De fraaie prent van het tuinlandschap in fig. 1 is afkomstig uit een leerboek over perspectief tekenen van de Nederlandse tekenaar, architect en schilder Johan Vredeman de Vries. Hij werd in 1527 geboren in Leeuwarden, ging in 1549 naar Mechelen en Antwerpen, waar hij meewerkte aan het ontwerpen van triomfbogen voor de feestelijke intocht van keizer Karel V, en verliet Vlaanderen in 1570 als gevolg van maatregelen van de hertog van Alva tegen de protestanten. Hij werkte daarna in Hamburg, Dantzig en Praag, waar hij voor keizer Rudolf II een kunstgalerij ontwierp. Ten slotte keerde hij terug naar Holland waar hij omstreeks 1605 stierf. Zijn boek *Perspective*, waaruit we enige prenten zullen bespreken, verscheen in 1604 te Leiden en is opgedragen aan Prins Maurits.

De ontdekking van de *perspectief* stamt uit de Renaissance. Of liever gezegd, de herontdekking ervan, want bij opgravingen zijn al perspectieve afbeeldingen uit de Romeinse tijd gevonden. In de middeleeuwen was de kunst echter volledig verloren gegaan. Tot de pioniers van de nieuwe teken- en schildermethode moeten gerekend de Italiaanse architect Filippo Brunelleschi (1377–1446), zijn landgenoten Leon Battista Alberti (1404–1472), Piero della Francesca (1416(?)–1492) en Leonardo da Vinci (1452–1519) en de Duitser Albrecht Dürer (1471–1528).

In onze tijd, waarin we dank zij de fotografie dagelijks perspectiefafbeeldingen te zien krijgen (een foto is in principe ook een perspectiefafbeelding), kunnen we ons moeilijk voorstellen wat voor een geweldige indruk de ontdekking van deze kunst van het maken van 'natuurgetrouwe' afbeeldingen destijds in Europa maakte. Leerboeken als dat van Vredeman de Vries waren zeer in trek. Uit het voorwoord op de titelpagina citeren we (vrij vertaald uit het Latijn):

'... een zeer nuttige en noodzakelijke kunst voor alle schilders, houtsnijders, beeldhouwers, metaalbewerkers, bouwmeesters, metselaars, schrijnwerkers, timmerlieden en allen die zich in deze kunst willen bekwamen met veel genoegen en weinig inspanning.'

Voor ons is het ook vreemd te ontdekken dat de kunst van het perspectief tekenen zich langzaam, stap voor stap heeft ontwikkeld en dat mensen van naam als Vredeman de Vries met de finesses ervan zijn blijven worstelen. Er werden in die tijd bij het maken van perspectiefafbeeldingen talrijke kunstgrepen gehanteerd waarvan er sommige wel gerechtvaardigd waren, maar andere totaal verkeerd. Ook Vredeman de Vries heeft prenten getekend die duidelijk grote fouten vertonen. We hebben er een van afgedrukt (fig. 2). Probeer zelf maar eens een paar fouten op te sporen! We zullen deze prent nog nader onder de loep nemen, maar eerst iets over perspectief tekenen in het algemeen.

Perspectieftekenen

Wat gebeurt er als we met één oog door een raam kijken? De lichtstralen komen als rechte lijnen van de voorwerpen die we zien naar ons oog toe en vormen na passeren van pupil en ooglens een beeld op ons netvlies. Het gaat er bij het perspectieftekenen in principe om een afbeelding te maken van hetgeen het oog door het raam ziet op zo'n manier dat die prent, in het raam geplaatst, dezelfde indruk geeft als de werkelijkheid die erachter schuilgaat. Hierbij moet de posi-





Fig. 3. Een methode om perspectieftekeningen te maken (Albrecht Dürer).

tie van het oog ongewijzigd blijven, want verplaatsen geeft een verschuiving van de beelden ten opzichte van het raam. Eigenlijk geeft een goede perspectiefafbeelding slechts van één welbepaald punt bekeken een natuurgetrouw beeld. Onze hersenen zijn er echter aan gewend ook bij andere posities van het oog nog 'natuurgetrouwe' indrukken door te geven. We hebben dan ook geen enkele moeite zo'n prent als natuurgetrouw te herkennen, ook al houden we hem niet precies in de juiste positie voor ons.

Als we de pupil van ons oog als een *punt* beschouwen, vormen de lichtstralen die ernaar toelopen een soort *kegel* met dit punt, het *oogpunt* als top. De snijfiguur van deze 'lichtkegel' en het raamvlak geeft de gewenste perspectieve afbeelding. Albrecht Dürer heeft in een aantal prenten enige hulpmiddelen laten zien om zo'n tekening te maken. We hebben er één van gereproduceerd (fig. 3). Je ziet dat hij de vaste positie van het oogpunt met een zuiltje heeft gemarkeerd, en dat het raam en het tekenvlak beide door een rooster in kleine vierkantjes zijn verdeeld om het overbrengen van het beeld op het papier te vergemakkelijken.

Als je, zoals Dürer, met mechanische hulpmiddelen werkt om een bepaalde voorstelling op papier te brengen, kun je eigenlijk geen fouten maken. Alles komt precies zoals het hoort op je tekenvel

terecht. Het is natuurlijk iets heel anders om de regelen der kunst zo te beheersen dat je ook zonder die hulpmiddelen dingen na kunt tekenen. Nog moeilijker is het voorwerpen of gebouwen die je ontwerpt en waarvan je de juiste afmetingen kent, op de goede manier 'uit het hoofd' te tekenen. Denk je maar eens in dat je een kubus van gegeven afmetingen moet tekenen als de onderlinge positie van de kubus, het oogpunt en het 'raamvlak' zijn voorgeschreven. Hiermee hangt nauw samen het omgekeerde probleem om uit een perspectieve afbeelding, bijv. een luchtfoto, bepaalde afstanden en hoeken zoals ze in werkelijkheid zijn te bepalen. Het heeft tot 1759 geduurd totdat de wiskundige Johann Heinrich Lambert (1728–1777) in zijn boek *Freye Perspective* al deze problemen volledig oploste.

Verdwijnpunten

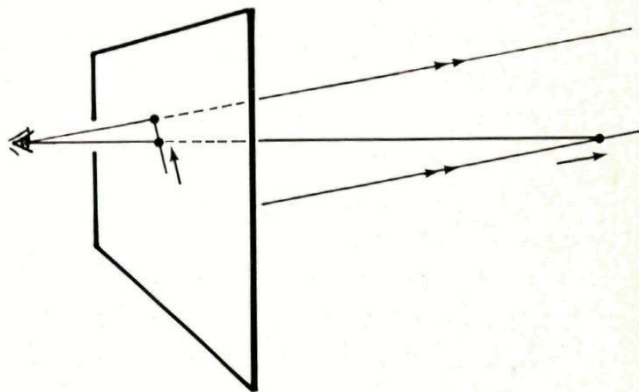


Fig. 4. Verdwijsstraal en verdwijnpunt.

Een van de opvallendste kenmerken van een perspectiefafbeelding is dat alle lijnen die in werkelijkheid in een zelfde vaste richting lopen, bijna altijd worden afgebeeld als lijnen die naar één punt, het *verdwijnpunt* van die richting gaan. In fig. 4 zie je een illustratie en tegelijkertijd een verklaring hiervan. Als een punt langs een lijn steeds verder weg loopt, zal de verbindingsstraal met het oogpunt steeds dichter naderen tot de *verdwijsstraal*, de straal door het oogpunt die in dezelfde richting als de lijn loopt (ermee evenwijdig is). Het punt waar deze verdwijsstraal het tafereel (het 'raamvlak') doorboort, is het verdwijnpunt.

Figuur 5 is een andere prent van Vredeman de Vries. Hierop zie je duidelijk hoe alle lijnen die recht naar achteren lopen, zowel de lijnen op de grond als bijv. de lijnen langs de bovenkant van de bogen, allemaal in één verdwijnpunt samenkomen. Als je de prent op de juiste hoogte voor je houdt en met één oog kijkt, is dit precies het punt dat je recht voor je ziet.

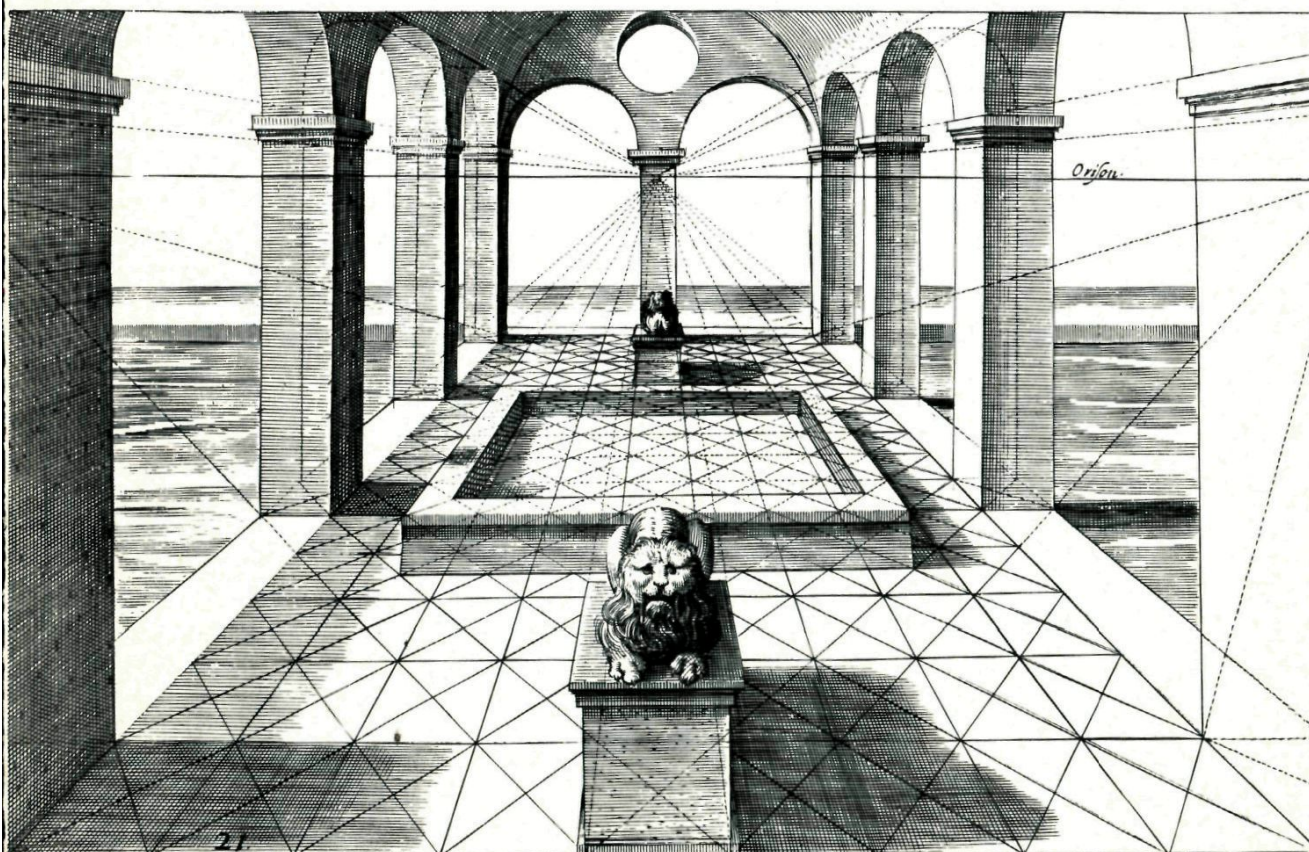
Er zijn nog twee belangrijke richtingen in beeld gebracht. Als we aannemen dat de tegels op de vloer *vierkanten* zijn, lopen de diagonalen in twee richtingen, die elk een hoek van 45° maken met de richting recht naar achteren. De twee verdwijnpunten hierbij vallen net buiten de tekening.

Omdat alle drie de richtingen die we nu bekeken hebben *horizontale* richtingen zijn, liggen de drie verdwijsstralen, de stralen vanuit het oogpunt in die drie richtingen, ook in één vlak: het horizontale vlak door het oogpunt. De lijn waarin dit vlak het tafereel snijdt, is de *horizon*, en op die horizon liggen alle verdwijnpunten van horizontale richtingen.

De positie van het oogpunt

De positie van het oogpunt bij fig. 5 kun je uit de drie verdwijnpunten afleiden. Kijk maar eens naar fig. 6 die een *boven-aanzicht* geeft van oogpunt, tafereel en de drie verdwijsstralen. Wegens de hoeken van 45° is de afstand van oogpunt tot

Fig. 5.



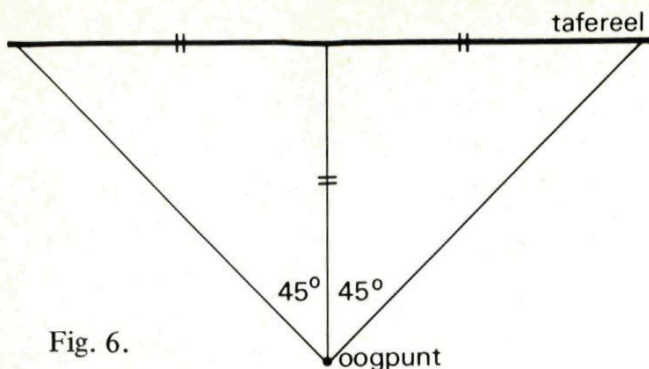


Fig. 6.

tafereel precies gelijk aan de afstand tussen het middelste verdwijnpunt en een van de twee andere. In *Pythagoras* hebben we de prent sterk moeten verkleinen, maar de afmetingen van het origineel waren zodanig dat die afstand ongeveer overeen kwam met de normale afstand waarop je een boek bekijkt: ruim 20 cm. Een ervaren schilder of tekenaar zal zijn oogafstand ook altijd zo kiezen dat die overeenkomt met de afstand waarop zijn prent of schilderij meestal bekeken zal worden.

Niet-horizontale richtingen

We hebben gezien dat alle richtingen die horizontaal zijn, verdwijnpunten geven op de horizon. Een richting die *niet* horizontaal is, maar bijv. schuin naar boven, zal natuurlijk een verdwijnstraal hebben die het tafereel niet *op* de horizon doorboort, maar *erboven*. Niet alle verdwijnpunten liggen dus op de horizon. Zo ontdekken

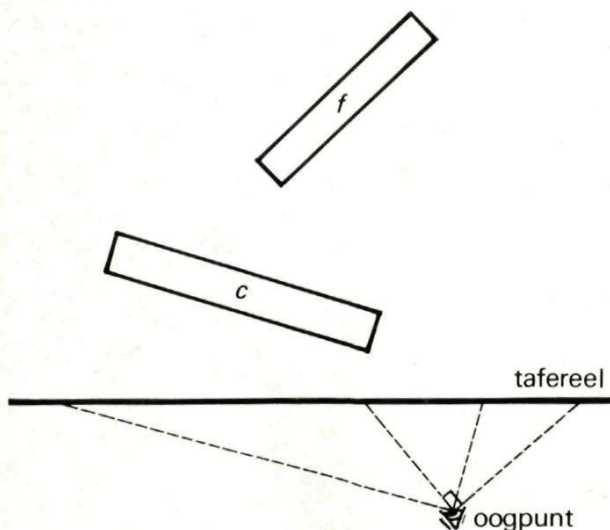


Fig. 7. Bovenaanzicht bij de situatie van fig. 2.

we de belangrijkste fout in fig. 2. Vredeman de Vries denkt dat *alle* (niet verticale) richtingen hun verdwijnpunt op de horizon hebben! Op de voorgrond links zie je iets dat waarschijnlijk een schuin naar boven gekanteld rechthoekig blok moet voorstellen. De verdwijnpunten van twee van de drie richtingen van de ribben tekenet hij echter op de horizon! Het is een aardige opgave om uit te zoeken op welke lijn die verdwijnpunten wél zouden moeten liggen.

De schuine balken

Een tweede leerzame fout kun je vinden in de wijze waarop de twee schuin liggende balken zijn getekend. Als we weer aannemen dat het *rechthoekige* balken zijn, is de onderlinge positie van de vier bijbehorende horizontale verdwijnpunten niet goed getekend. De achterste balk heeft een 'linker verdwijnpunt' dat rechts van dat van de voorste ligt. Dan moet echter het 'rechter verdwijnpunt' ervan natuurlijk ook *rechts* van dat van de voorste liggen! Figuur 7 geeft een schematisch bovenaanzicht ter toelichting. Zoals het in fig. 2 echter is getekend, kunnen de balken niet allebei rechthoekig zijn. Als de dichtstbijzijnde hoek van de voorste balk recht is, is die van de achterste *scherp*, en als die van de achterste recht is, is die van de voorste *stomp*.

Hiermee zijn de belangrijkste fouten van fig. 2 aangegeven. Er is nog wel meer aan te merken, bijv. op de inconsequente wijze waarop de schaduwen zijn getekend, maar dit is niet zo erg storend. Je kunt je er over verbazen dat een bekwaam tekenaar en bouwmeester toch nog zulke fouten maakt, maar misschien nog verbazingwekkender is het dat in de inleiding bij een recente heruitgave van de prenten van Vredeman de Vries bij de Amerikaanse Dover Press, verzorgd door een kunsthistoricus, van die fouten helemaal geen melding wordt gemaakt, hoewel ze toch in meerdere afbeeldingen voorkomen.

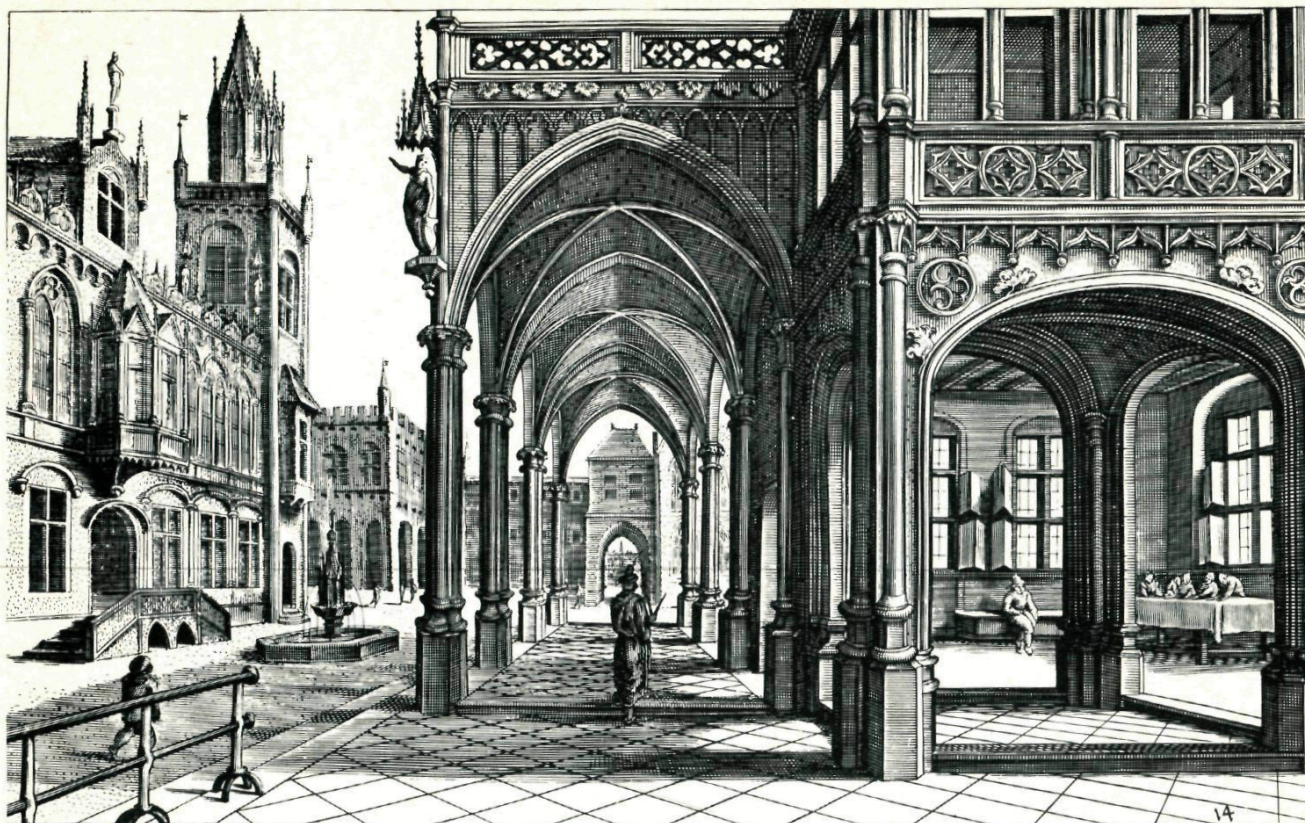
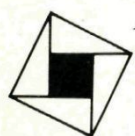


Fig. 8.

Zelfs kunstkenners blijken ze niet op te vallen!

Hoewel Vredeman de Vries het perspectieftekenen dus lang niet tot in de details beheerste, kon hij toch prachtige prenten vervaardigen. Als staaltje van zijn

vakmanschap laten we ten slotte een prent uit het tweede deel van zijn *Perspective* zien. En dit 'Binnenhof-achtige' tafereel vormt dan een mooie afsluiting van dit artikel.



Denkertjes

1. Neem in fig. 1 aan dat van de trapleuning die je rechtsvoor schuin naar beneden ziet lopen, de boven- en onderkant evenwijdig zijn. Wat is er dan aan die leuning verkeerd getekend?
2. Neem in fig. 2 aan dat de 'linker verdwijnpunten' van de schuine balken op de juiste plaats zijn getekend. Waar moeten dan, aangenomen dat de getekende vloertegels vierkanten zijn, de 'rechter verdwijnpunten' liggen?

°Hoeveel delers heeft 100 000?

P. E. J. M. Gondrie

Deze vraag leverde in een brugklas antwoorden op variërend van 1 000 tot 50 000. Het juiste aantal — 36 — lijkt velen op het eerste gezicht verrassend laag. We gaan daarom deze kwestie hier nader onderzoeken.

Getal- len	Deelers	Getal- len	Deelers	Getal- len	Deelers	Getal- len	Deelers	Getal- len	Deelers
7313	71.103	7501	13.577	7691		7877		8063	11.733
19	13.563	7		93	7.7.157	79		69	
21		11	7.29.37	97	43.179	83		71	7.11.53
27	17.431	13	11.683	99		89	7.7.7.23	77	41.197
31		17				91	13.607	81	
33		19	73.103	7703		97	53.149	83	59.137
37	11.23.29	23		9	13.593			87	
39	41.179	29		11	11.701	7901		89	
43	7.1049	31	17.443	17		3	7.11.29	93	
49		37		21	7.11.03	7		99	7.13.89
51		41		23		9	11.719		
57	7.1051	43	19.397	27		13	41.193	8101	
61	17.433	47		29	59.131	19		7	11.11.67
63	37.199	49		33	11.19.27	21	89.89	11	
67	53.139	53	7.13.83	39	71.109	27		13	7.19.61
69		59		41		31	7.11.103	17	
73	73.101	61		47	61.127	33		19	23.353
79	47.157	67	7.23.47	51	23.337	37		23	
81	11.11.61	71	67.113	53		39	17.467	29	11.739
87	83.89	73		57		43	13.13.47	31	47.173
91	19.389	77		59		49		37	79.103
93		79	11.13.53	63	7.11.09	51		41	7.11.63
97	13.569	83		69	17.457	57	73.109	43	17.479
99	7.7.151	89		71	19.409	61	19.419	47	
		91		77	7.11.101	63		49	29.281
		97	71.107	81	31.251	67	31.257	53	31.263
7403	11.673			83	43.181	69	13.613	59	41.199
9	31.239			87	13.599	73	7.17.67	61	
11		7601	11.691	89		79	79.101	67	
17		3		93		81	23.347	71	
21	41.181	7		99	11.709	87	7.7.163	73	11.743
23	13.571	9	7.1087			91	61.131	77	13.17.37
27	7.1061	13	23.331	7801	29.269	93		79	
29	17.19.23	19	19.401	7	37.211	97	11.727	83	7.7.167
33		21		11	73.107	99	19.421	89	19.431
39	43.173	27	29.263	13	13.601			91	
41	7.1063	31	13.587	17		8003	53.151	97	7.11.71
47	11.677	33	17.499	19	7.11.17	9			
51		37	7.1091	23		11		8201	59.139
53	29.257	39		29		17		3	13.631
57		43		31	41.191	21	13.617	7	29.283
59		49		37	17.461	23	71.113	9	
63	17.439	51	7.1093	41		27	23.349	13	43.191
69	7.11.97	57	13.19.31	43	11.23.31	29	7.31.37	19	
71	31.241	61	47.163	47	7.19.59	33	29.277	21	
77		63	79.97	49	47.167	39		27	19.433
81		67	11.17.41	53		41	11.17.43	31	
83	7.1069	69		59	29.271	47	13.619	33	
87		73		61	7.11.23	51	83.97	37	
89		79	7.1097	67		53		39	7.11.107
93	59.127	81		71	17.463	57	7.11.51	43	
99		87		73		59		49	73.113

Bladzijde uit een oude factorentafel. Veelvouden van 2, 3 en 5 zijn niet opgenomen.

In ieder geval geldt lang niet altijd: hoe groter het getal, hoe meer delers. Er zijn heel grote *priemgetallen*, getallen die alleen door zichzelf en door 1 deelbaar zijn. Het getal 7 963 is bijvoorbeeld zo'n priemgetal, met alleen de (vanzelfsprekende) delers 1 en 7 963. Toch moet je om veel delers te krijgen wel onder de grote getallen gaan zoeken.

Als voorbeeld schrijven we alle delers van 100 op. Het zijn er negen: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 en 100. Hoe vind je ze? Gewoon door proberen of, en dat werkt veel vlugger, door 100 eerst in priemfactoren te ontbinden.

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Elke deler van 100 (behalve 1) krijg je als combinatie van deze priemfactoren:

1, 2, $2 \cdot 2$, 5, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 2 \cdot 5$, $5 \cdot 5$, $2 \cdot 5 \cdot 5$ en $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$. Zo'n deler van 100 bestaat dus uit het produkt van 0, 1 of 2 tweeën en 0, 1 of 2 vijven. Het aantal mogelijkheden is daarom $3 \cdot 3 = 9$ en dat is het aantal delers van 100.

Nu is het niet meer zo moeilijk om het aantal delers van 100 000 ($2^5 \cdot 5^5$) te vinden. Je kunt 0, 1, 2, 3, 4 of 5 tweeën combineren met 0, 1, 2, 3, 4 of 5 vijven. Dit geeft $6 \cdot 6 = 36$ mogelijkheden.

De algemene regel

Ieder natuurlijk getal n kun je schrijven als produkt van verschillende priemgetallen, zeg $p_1, p_2, \dots, p_k$, die elk respectievelijk $r_1, r_2, \dots, r_k$ maal in het produkt voorkomen, dus

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}.$$

Het aantal delers $d(n)$ van n is dan

$$d(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \cdot \dots \cdot (r_k + 1)$$

Bijvoorbeeld $d(1\,288) = d(2^3 \cdot 7^1 \cdot 23^1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Zullen we nog wat met deze formule spelen? Zoek een getal van niet meer dan tien cijfers, met zoveel mogelijk delers. Je kunt nagaan dat het getal

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$$

tien cijfers heeft. Voor dit getal is $d(n) = 2^{10} = 1\,024$. Er zullen echter nog wel andere getallen zijn met tien (of minder) cijfers met méér delers. Kun jij er zo een vinden? En kun je misschien het getal $n < 10^{10}$ vinden waarvoor $d(n)$ zo groot mogelijk is?

°° Over middens en loodlijnen

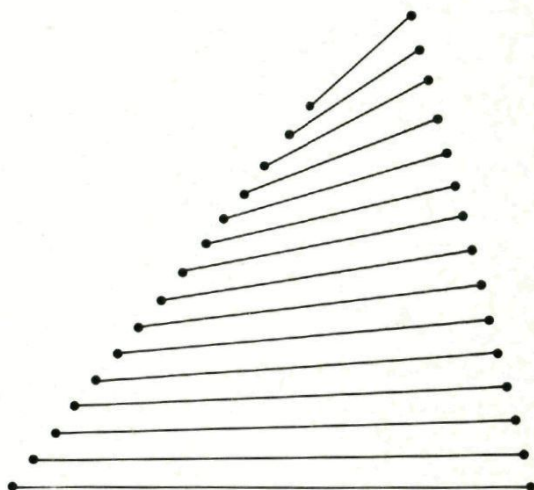
Danny Weyns

De eindpunten van de getekende lijnstukken liggen op gelijke onderlinge afstanden langs twee rechte lijnen.

1. Liggen de *middens* van deze lijnstukken ook op één rechte lijn?
2. Gaan de *middelloodlijnen* van deze lijnstukken door één punt?

Bij wat proberen in de tekening *lijkt* het er wél op. Kun je ook *begrijpen* hoe dat komt?

Een mogelijk antwoord vind je achterin.



°° Parabolen, ellipsen en hyperbolen vouwen

Als je een rechte lijn op papier wilt krijgen, is het eenvoudigste wat je kunt doen het papier dubbel vouwen en een scherpe vouw maken. Hierbij komt ook een eenvoudige *afbeelding* van het vlak te voorschijn: de *spiegeling* is een *lijn*. Punten of figuren die bij het vouwen op elkaar vallen, zijn elkaars *spiegelbeeld* in de vouw. Met scherpe vouwen kun je ook driehoeken, vierkanten, rechthoeken en allerlei andere figuren in je papier maken. Het is zelfs mogelijk bepaalde *kromlijnige* figuren door vouwen te voorschijn te brengen. We zullen je laten zien hoe je *parabolen*, *ellipsen* en *hyperbolen* kunt vouwen.

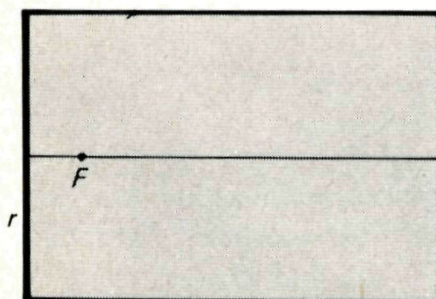


Fig. 1.

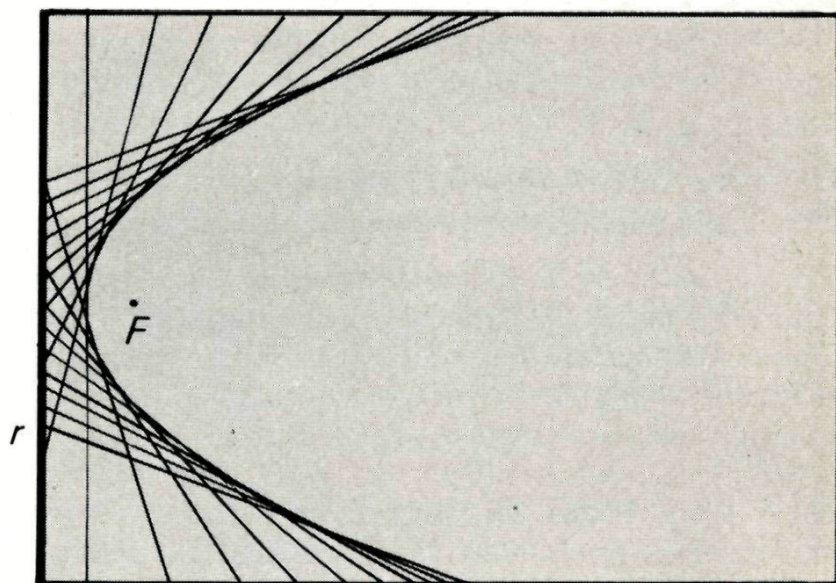
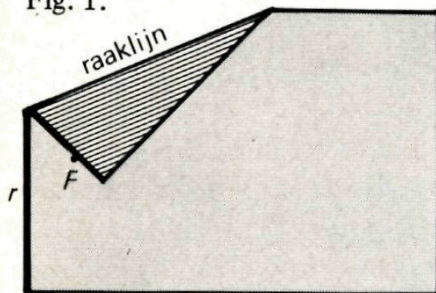


Fig. 2. 19 vouwen met F op een punt van r .

De parabool

Wanneer je een steen gooit, een kogel slingert, een speer werpt of een kanon afschiet, is de baan die het projectiel beschrijft een (deel van een) parabool, als tenminste de luchtweerstand en mogelijke andere kleine storingen verwaarloosbaar zijn. Parabolen zijn vlakke krommen die ook in de wiskundeles herhaaldelijk opduiken. Je kunt er als volgt een maken. Vouw een (rechthoekig) blad papier netjes dubbel met een scherpe vouw. Vouw het weer open en zet een stip F op de vouw, niet te ver van één van de twee zijkanten. Die zijkant noemen we r . Vouw nu het papier zo, dat de zijkant r precies op het punt F komt te liggen en zorg weer voor een scherpe vouw (fig. 1).

Je kunt zo'n vouw op veel manieren maken door het stuk dat je omvouwt meer of minder scheef te houden. Door dit een aantal keren te doen, krijg je een hele collectie vouwen die een kromme lijn lijken te 'omhullen' (fig. 2). Deze kromme lijn is een parabool. Hij gaat precies midden tussen het punt F en de zijkant r van het papier door (waarom?). F heet het *brandpunt* van de parabool en de lijn r heet de *richtlijn*. De allereerste vouw die je in het papier maakte, is de *as* van de parabool en het snijpunt van de parabool en de *as* heet de *top*.

Als je liever tekent dan vouwt, kan het ook met de tekendriehoek. Trek eerst een lijn l halverwege r en F loodrecht op de

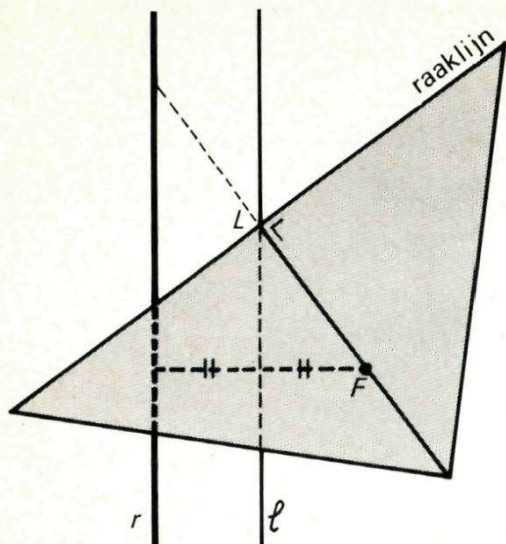


Fig. 3. Paraboolraaklijnen met een tekendriehoek.

as. Teken vervolgens door punten L op l telkens de loodlijn op FL (fig. 3). De vouwen zijn nu getrokken lijnen geworden.

We hebben het wel steeds over een parabool, maar in werkelijkheid staan er natuurlijk alleen maar een groot aantal vouwen of getrokken rechte lijnen op papier. Het 'ongerepte' stuk waar het brandpunt F in ligt, wordt niet begrensd door een *kromme* maar door een *geknikte* lijn die, naarmate we meer vouwen maken of lijnen trekken, steeds meer knikpunten krijgt. Hij gaat dan echter wel steeds beter lijken op een vloeiend verlopende kromme lijn. Alle vouwen zijn *raaklijnen* aan die kromme. Wat is er te zeggen van de plaats van de *raakpunten* op de vouwlijnen?

Het snijpunt S van twee vouwen p en q die vlak bij elkaar liggen, valt iets buiten de parabool (fig. 4). Als we p vasthouden en q steeds dichterbij p laten naderen, gaat S naar het raakpunt op p met de parabool. We zullen onderzoeken waar het punt S in de limietstand precies op p ligt.

De punten van de richtlijn r die bij het vouwen van p en q op het brandpunt F terechtkomen, noemen we A en B (fig. 5). Omdat S op p ligt, is $AS = FS$ en

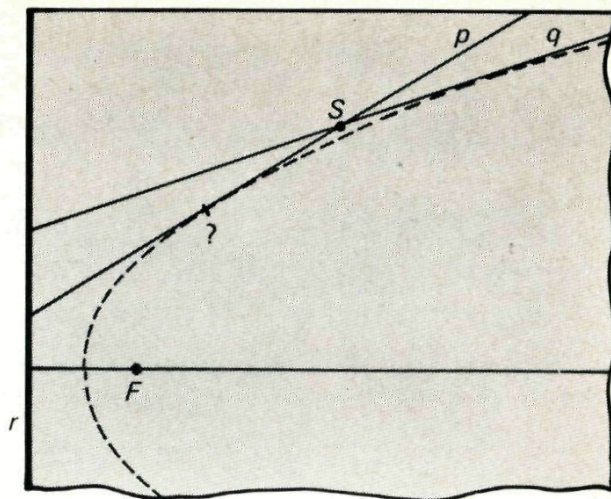


Fig. 4.

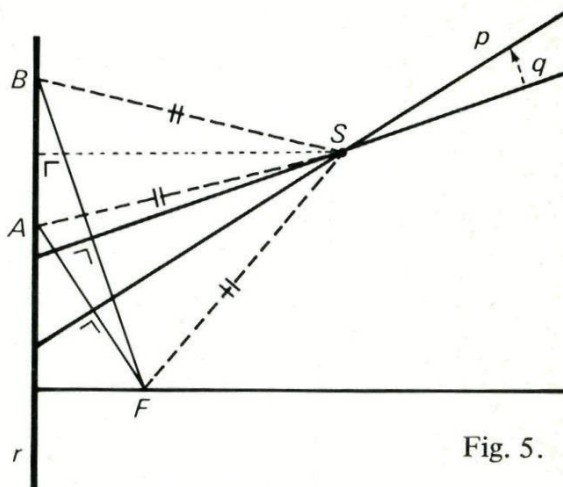


Fig. 5.

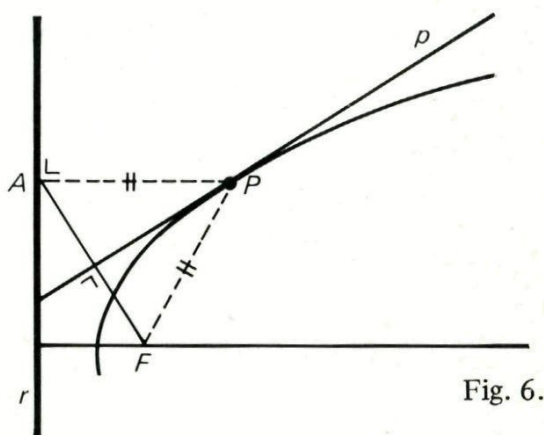


Fig. 6.

omdat S op q ligt, is $BS = FS$. Er geldt dus $BS = AS$. Als q tot p nadert gaat de lijn BF naar de lijn AF toe en de gelijkbenige driehoek BSA schuift samen tot een *lijnstuk* door A loodrecht op r (want de benen naderen steeds dichterbij de *hoogtelijn* uit S). Je vindt dus op de vouw p het raakpunt P met de parabool door p

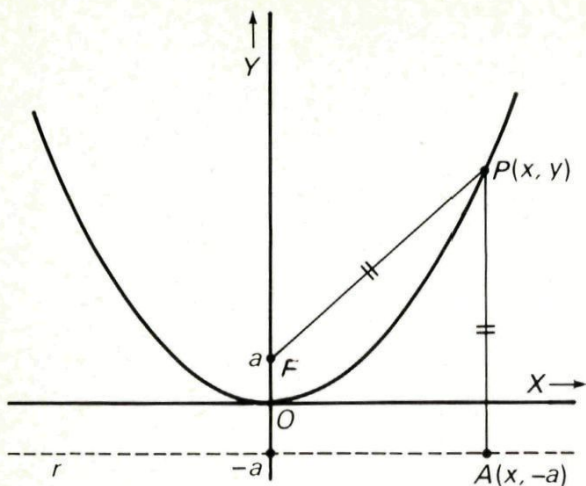


Fig. 7.

te snijden met de loodlijn op r door A (fig. 6).

Misschien zie je zo gauw niet waarom onze vouwfiguur overeenkomt met de parabool zoals je die mogelijk op school hebt leren kennen (als grafiek bij een zekere *vergelijking*). We proberen daarom nu van onze figuur de vergelijking te vinden. Kies een coördinatenstelsel met de top als oorsprong en de as als Y-as. Zie fig. 7. F heeft dan coördinaten $(0, a)$ voor zekere a , en de richtlijn r is de lijn $y = -a$. Als het punt P op de parabool de coördinaten (x, y) heeft, is A het punt $(x, -a)$. We weten dat $AP = FP$ want bij het vouwen om p komt A op F terecht, dus dit geeft de vergelijking

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - x)^2 + (y - (-a))^2} &= \\ &= \sqrt{x^2 + (y - a)^2}.\end{aligned}$$

Uitwerken geeft

$$4ay = x^2$$

en dit herkennen we inderdaad als de vergelijking van een parabool. Hij is spitser naarmate a kleiner is, of anders gezegd, naarmate F dichterbij de richtlijn r ligt.

Parabolische spiegels

Uit fig. 6 kunnen we nog iets leren. Bij dubbel vouwen om p valt AP op FP . De vouw p is dus de *bissectrice* van hoek

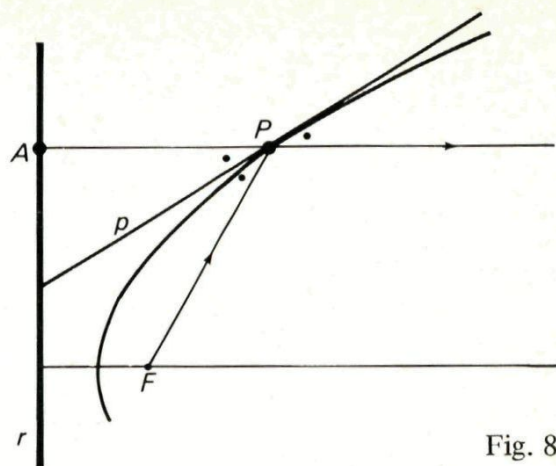


Fig. 8.

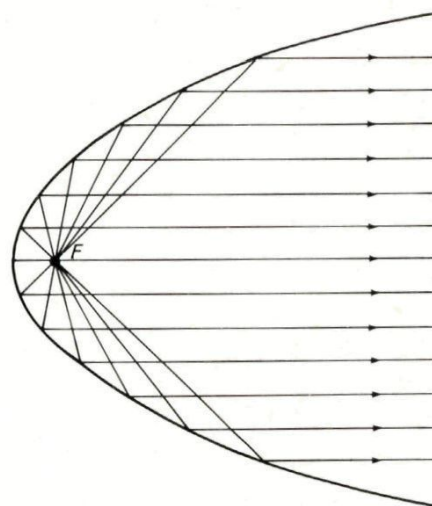


Fig. 9.

APF (fig. 8). De verlengde lijn AP maakt natuurlijk ook weer diezelfde hoek met p . Als de parabool licht kan weerkaatsen en een lichtstraal loopt van F naar P , dan zal hij volgens de wet 'hoek van inval = hoek van terugkaatsing' weerkaatsen worden *evenwijdig aan de as*. Een puntvormige lichtbron, geplaatst in het brandpunt van een *parabolische spiegel* (die je krijgt door een parabool rond zijn as te wentelen) zal dus na weerkaatsing een bundel *evenwijdige stralen* geven (fig. 9). Dit heeft talrijke toepassingen, bijvoorbeeld in zoeklichten en straalzenders. Omgekeerd zal elke straal van een bundel evenwijdige stralen die langs de asrichting een parabolische spiegel binnenvalt, na weerkaatsing door F gaan. Dit wordt o.a. toegepast in sommige antennes en in spiegeltelescopen. De ontvanger is dan in het brandpunt gemonteerd. Met een parabolische spiegel kun je ook een 'zonnebarbecue' maken!

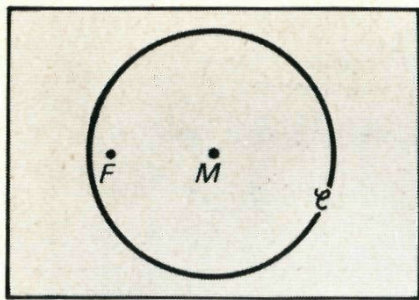


Fig. 10.

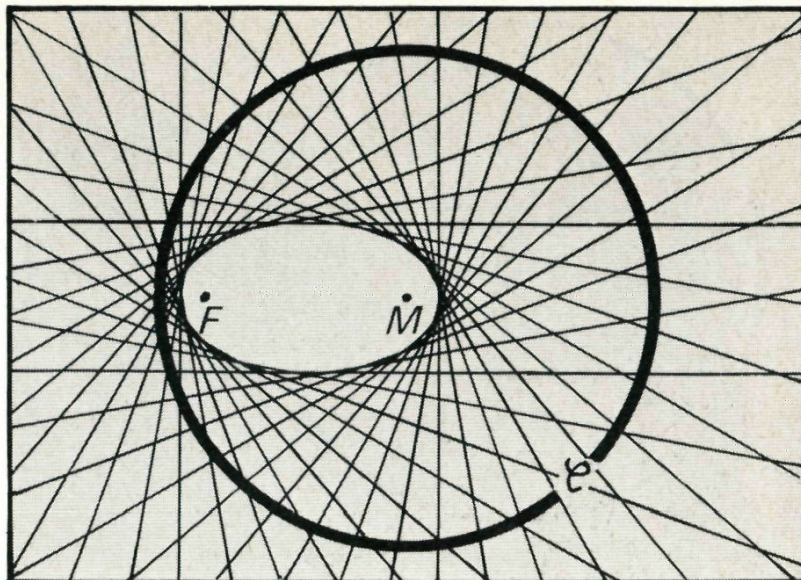
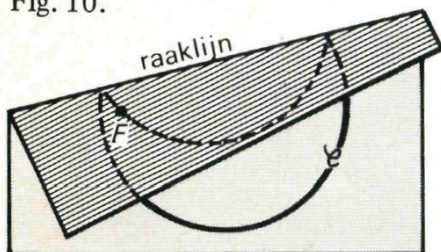


Fig. 11. 36 vouwen met F (binnen C) op een punt van C .

De ellips

Teken een cirkel C met middelpunt M en straal R . Kies binnen de cirkel een punt F niet te ver van de rand. Vouw het papier zo dubbel dat het omgevouwen stuk van de cirkel door F gaat (fig. 10). Je kunt het beste dun doorschijnend papier gebruiken. Maak een heleboel van zulke vouwen. Al deze vouwen omhullen een *ellips* (fig. 11).

In plaats van vouwen kun je ook weer met je tekendriehoek *tekenen*, zie fig. 12. Teken eerst cirkel C' als produktbeeld van C bij vermenigvuldiging met factor $\frac{1}{2}$ vanuit F . Raaklijnen vinden we nu door in willekeurige punten L van C' de loodlijn op FL te tekenen. Vergelijk deze constructie ook met die in fig. 3.

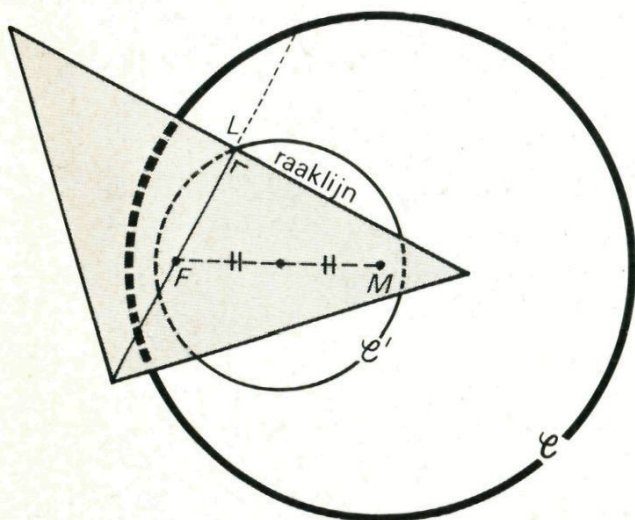


Fig. 12. Ellipsraaklijnen met een tekendriehoek.

We onderzoeken waar ergens op de vouw p het raakpunt met de ellips ligt. Neem nog een vouw q dicht bij p . Het snijpunt van p en q noemen we S . Wat gebeurt er met S als q tot p nadert? In fig. 13 is, net als in fig. 5, driehoek ASB *gelijkbenig* want $AS = FS = BS$.

Als q tot p nadert, schuift ASB samen tot een *lijnstuk*. De beide benen naderen tot de hoogtelijn vanuit S , dus in de limietstand wordt dit een lijn loodrecht op de *raaklijn* in A aan de cirkel C . Bij een cirkel staan raaklijn en straal loodrecht op elkaar, dus we vinden de gezochte limietpositie P van S als snijpunt van p en de straal AM van C (fig. 14).

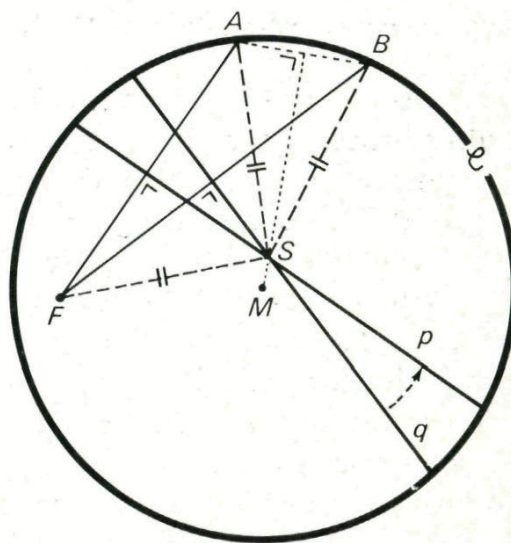


Fig. 13.

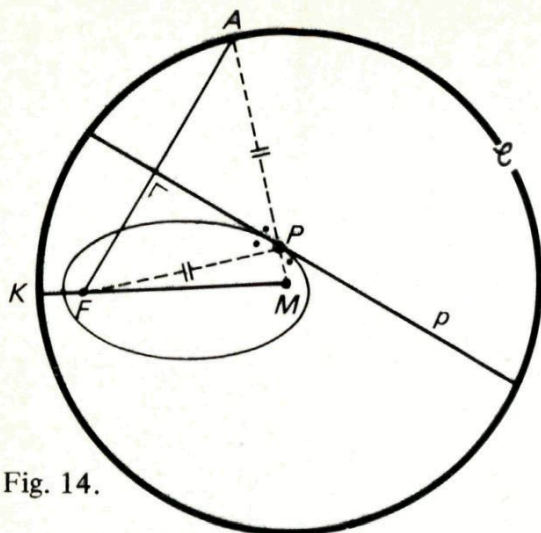


Fig. 14.

A is het spiegelbeeld van F in p , dus $AP = FP$ en $FP + MP = R$, de straal van de cirkel C . Dit geldt voor alle punten P van de ellips, en hiermee ligt de ellips volledig vast. Je kunt een touwtje van lengte R met de uiteinden in F en M bevestigen, en de gehele ellips tekenen met een potloodpunt waarmee je de lus strak gespannen houdt. De punten F en M zijn hierbij volkomen gelijkwaardig. De lijn FM en de middelloodlijn van FM moeten dus *symmetrieassen* van de ellips zijn. F en M heten de *brandpunten* van de ellips. Omdat p een bissectrice is van hoek APF , wordt een lichtstraal die vanuit F naar P gaat door de ellips weerkaatst tot een lichtstraal die door M gaat. Alle stralen vanuit één van de brandpunten gaan dus na weerkaatsing door het andere brandpunt.

Je kunt een eenvoudige *vergelijking* van de ellips krijgen door de symmetrieassen als coördinaatassen te nemen. De snijpunten van de ellips met de grote as zijn $(a, 0)$ en $(-a, 0)$ en de brandpunten $(c, 0)$ en $(-c, 0)$ voor zekere $0 < c < a$ (fig. 15). Voor een willekeurig punt P op de ellips met coördinaten (x, y) is de som van de afstanden tot de brandpunten constant. Door P op de X -as te nemen zie je dat deze constante gelijk is aan $2a$ (en dit is ook gelijk aan de straal R van de cirkel waarmee we zijn begonnen). Je krijgt dus

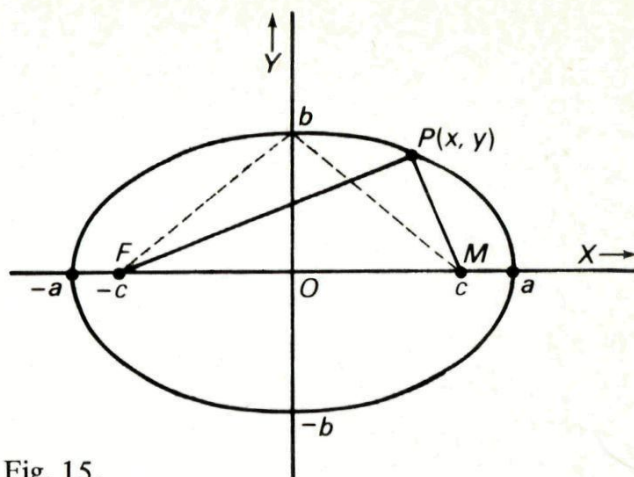


Fig. 15.

de vergelijking

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

die je kunt omwerken tot

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

of

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

De meetkundige betekenis van $a^2 - c^2$ zie je door P op de Y -as te nemen. De afstand tot elk van de brandpunten is dan a (want de som is $2a$) en volgens de stelling van Pythagoras is de afstand van P tot de oorsprong dus $\sqrt{a^2 - c^2}$. Noemen we dit getal b dan is de vergelijking van een ellips met assen $2a$ en $2b$ dus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De hyperbool

Je kunt ook een punt F buiten de cirkel C kiezen (om een mooie figuur te krijgen weer niet te ver van de rand vandaan). Als je nu steeds C over F heen vouwt, krijg je een *hyperbool* (fig. 16 en 17). De hyperbool bestaat uit twee gescheiden takken. De overgang van de raaklijnen (vouwen) van de ene tak naar die van de andere tak geschiedt via de *asymptoten* (de dikke lijnen in fig. 17). Dit zijn vouwen die

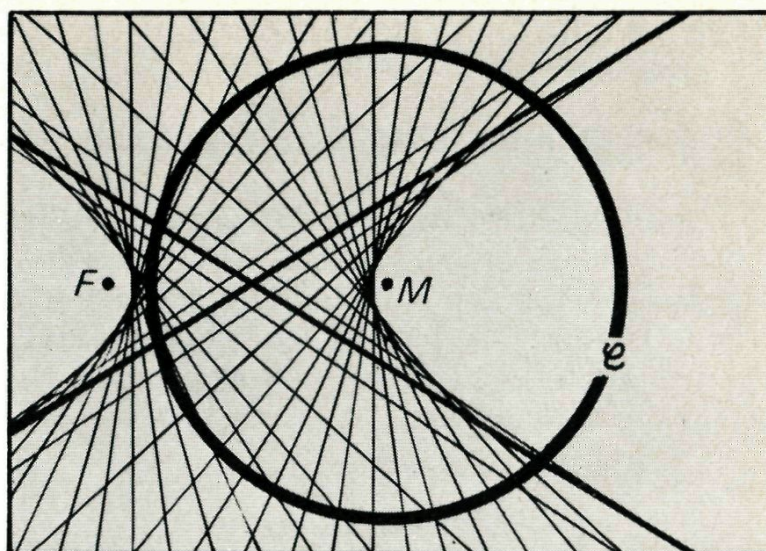
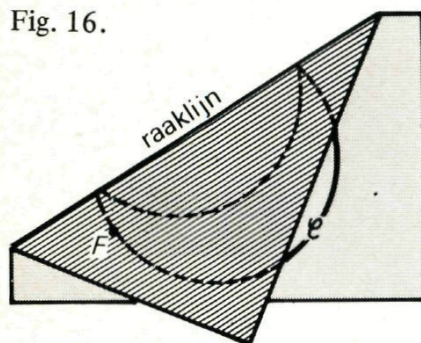
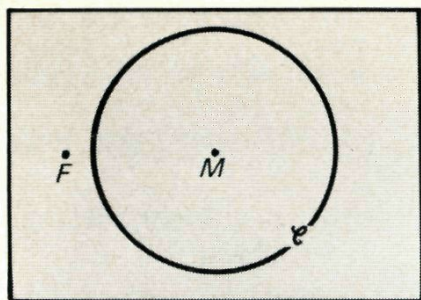


Fig. 17. 32 vouwen met F (buiten C) op een punt van C .

horen bij de punten op de cirkel C waarvoor de verbindingslijnen met F raaklijnen aan C zijn.

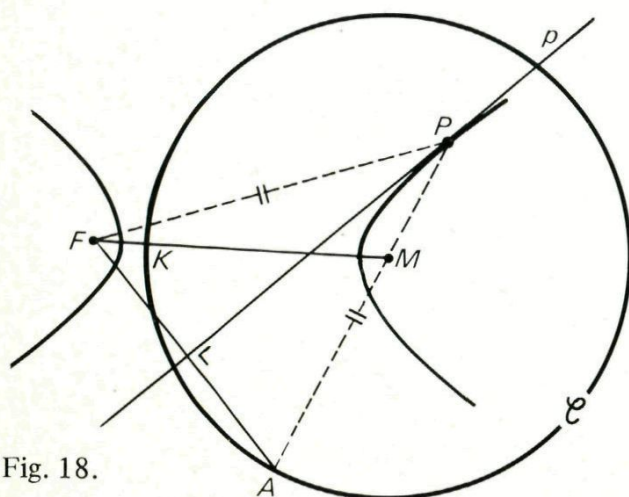
Net als bij de ellips vind je het raakpunt P van de hyperbool met de vouw p als snijpunt van p en de (eventueel verlengde) straal MA , zie fig. 18.

Voor elk punt P van de hyperbool is het verschil $PF - PM$ constant, en in absolute waarde gelijk aan de straal van de cirkel C . Het is *positief* bij de ene tak, en *negatief* bij de andere tak. Deze eigenschap van het constante verschil van de afstanden tot de *brandpunten* F en M legt de hyperbool ook volledig vast. Het is hiermee ook duidelijk dat er weer twee sym-

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nogmaals de parabool

Een parabool kun je enerzijds opvatten als grensgeval van een ellips en anderzijds ook als grensgeval van een hyperbool. Noem bij de ellips of de hyperbool het snijpunt van C met de as FM dat het dichtst bij F ligt K (fig. 14 en fig. 18). Als je nu F en K vasthoudt en de straal van C steeds groter maakt, komt het tweede brandpunt M steeds verder weg te liggen. De cirkel gaat steeds meer zijn eigen *raaklijn* k in K benaderen, en de ellips of hyperbool nadert tot de *parabool* met brandpunt F en richtlijn k .



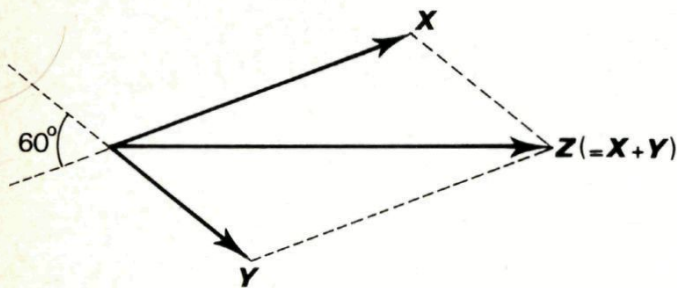
Een van de inspiratiebronnen bij dit stukje was het voor hogereklassers erg interessante boekje van Dan Pedoe: *Geometry and the Liberal Arts* (uitgave van Penguin Books in de Peregrine serie, 1976, ISBN 0140551190). Het gaat over de wisselwerking tussen meetkunde, schilderkunst en architectuur.

° Mooie uitkomsten maken

J. Giltay

Een leraar wilde eens de volgende vraag stellen: 'Bereken bij twee gegeven krachten X en Y onder een hoek van 60° de grootte van de resultante kracht Z .'

Om zijn leerlingen een plezier te doen, probeerde deze leraar steeds zijn opgaven 'mooi te laten uitkomen'. Dus zocht hij hier positieve gehele getallen x en y voor de grootte van de krachten X en Y zó, dat ook de grootte van de resultante op een *geheel* getal z zou uitkomen. Hoe deed hij dit?



In het krachtenparallellogram geeft de cosinusregel (toegepast op een van de beide driehoeken):

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ \\ \text{en met } \cos 120^\circ &= -\frac{1}{2} \\ z^2 &= x^2 + xy + y^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Hoe vinden we *gehele* drietallen (x, y, z) die hieraan voldoen?

Gewoon proberen (doe het zelf maar) lukt niet best. Want als je voor twee van de drie variabelen (welke doet er niet toe) een geheel getal invult, dan is de derde te vinden als oplossing van een *tweedegraads*-vergelijking met gehele coëfficiënten. Dus bijna altijd iets met een wortel erin, een irrationaal getal.

Bijvoorbeeld: kies $x = 2$ en $y = 3$, dan volgt $z = \pm \sqrt{19}$.

Of met $x = 2$ en $z = 3$ krijgen we $y^2 + 2y - 5 = 0$, waaruit: $y = -1 \pm \sqrt{6}$.

De truc

Door een handige substitutie kunnen we één van de kwadratische termen uit (1) laten verdwijnen. Stel $u = y + z$ en elimineer hiermee z uit (1):

$$\begin{aligned} (u - y)^2 &= x^2 + xy + y^2 \iff (\text{reken na}) \\ u^2 - x^2 &= (2u + x)y \end{aligned} \quad (2)$$

Bij gehele u en x is dit een *eerstegraads*-vergelijking in y (met gehele coëfficiënten). De oplossing voor y is dus rationaal, en wegens $z = u - y$ is dan ook z rationaal.

Een oplossing met twee gehele getallen en één irrationaal getal vonden we hierboven onbruikbaar. Nu hebben we een oplossing met één geheel getal (x) en twee breuken (y en z). Waarom hebben we hier wél wat aan?

Een homogene relatie

Het antwoord is dat we hier te doen hebben met een zogenaamde *homogene* relatie. Dat wil zeggen, als (x, y, z) aan de relatie voldoet, dan voldoet ook elk 'veelvoud' (cx, cy, cz) aan de relatie.

Het drietal $(x, y, z) = (3, 5, 7)$ bijvoorbeeld voldoet aan (1). En bij elke willekeurige c voldoet ook $(3c, 5c, 7c)$. Bij invullen blijken de factoren c weg te vallen omdat elke term in de relatie een produkt is van een gelijk aantal (hier twee) variabelen.

Hebben we nu een oplossing waarin gebroken getallen voorkomen, dan vinden we door vermenigvuldigen met een factor die de noemers laat wegvallen, een *oplossing in gehele getallen*.

Voorbeeld: kies $u = 3$ en $x = 2$, dan volgt uit (2)

$$y = \frac{3^2 - 2^2}{2 + 2 \cdot 3} = \frac{5}{8}, \text{ en hiermee}$$

$$z = u - y = \frac{19}{8}.$$

Het drietal $(2, \frac{5}{8}, \frac{19}{8})$ voldoet aan (1), en dus wegens het homogeen zijn van (1) ook de gehele drietallen $(16, 5, 19)$, $(32, 10, 38)$, enzovoort.

We zoeken alleen de *positieve* oplossingen van (1). Je kunt nagaan dat we hiertoe in (2) voor u en x getallen moeten kiezen die voldoen aan:

$$u > x > 0.$$

Ook kunnen we paren (u, x) overslaan waarin een gemeenschappelijke factor voorkomt (want in zo'n geval vinden we oplossingen die een geheel veelvoud zijn van een eerder gevonden oplossing).

We vinden zo de volgende resultaten:

rationaal				geheel		
u	x	y	z	x	y	z
2	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$	5	3	7
3	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{13}{7}$	7	8	13
3	2	$\frac{5}{8}$	$\frac{19}{8}$	16	5	19
4	1	$\frac{15}{9}$	$\frac{21}{9}$	3	5	7
4	2	(g.g.d. > 1)				
4	3	$\frac{7}{11}$	$\frac{37}{11}$	33	7	37
5	1	$\frac{24}{11}$	$\frac{31}{11}$	11	24	31
5	2	$\frac{11}{21}$	$\frac{39}{21}$	8	7	13
5	3	$\frac{12}{16}$	$\frac{49}{16}$	39	16	49
5	4	$\frac{13}{9}$	$\frac{61}{9}$	56	9	61

Nog zuiniger

De oplossingen $(5, 3, 7)$ en $(3, 5, 7)$ zijn niet echt verschillend vanwege de symmetrie in x en y in de opgave. Hoe moeten we u en x kiezen om alleen oplossingen te krijgen met, zeg, $x < y$? We herleiden:

$$y - x = \frac{u^2 - x^2}{2u + x} - x = \frac{(u - x)^2 - 3x^2}{2u + x} = \frac{[u + (\sqrt{3} - 1)x][u - (\sqrt{3} + 1)x]}{2u + x}.$$

Voor positieve u en x zijn de noemer en de eerste factor in de teller zeker positief. Dus $x < y$ komt overeen met

$$u - (\sqrt{3} + 1)x > 0, \text{ ofwel}$$

$$x < u / (\sqrt{3} + 1) = 0,366 \dots u.$$

Met deze bezuiniging vinden we ten slotte:

Positieve gehele oplossingen van									
$z^2 = x^2 + xy + y^2$									
u	x	x	y	z	u	x	x	y	z
3	1	7	8	13	9	2	40	77	103
4	1	3	5	7	10	1	7	33	37
5	1	11	24	31	10	3	69	91	139
6	1	13	35	43	11	1	23	120	133
7	1	5	16	19	11	2	16	39	49
7	2	32	45	67	11	3	75	112	163
8	1	17	63	73	11	4	104	105	181
9	1	19	80	91	etcetera				

Een generalisatie

Ook bij andere hoeken dan de hier gebruikte 60° zijn op deze manier geheeltallige krachten te vinden. En wel voor elke hoek α waarvoor $\cos \alpha$ rationaal is. Probeer het maar.

Bij $\alpha = 90^\circ$ vind je *rechthoekige* driehoeken met *geheeltallige zijden*, de zogenaamde Pythagoreïsche driehoeken.

°Een poolgrafiek bij een zeilwedstrijd

Vroeger leerden we in de eerste meetkundeles: 'De kortste verbinding tussen twee punten is de rechte lijn.' Maar zoals alles blijkt ook dit maar betrekkelijk te zijn, want vaak gaat het niet om de kortste verbinding in *afstand*, maar om de kortste in *tijd*. Als een zeiler recht tegen de wind in moet, zal hij met een zigzagkoers toch het snelste opschieten.

We willen hier uitzoeken hoe een zeiler bij dit zogenaamde laveren nu *precies* zijn koers(en) moet kiezen om de wedstrijd te winnen. We nemen aan dat windrichting en -sterkte constant blijven, en dat precies *bekend is* hoe snel het schip bij deze windsterkte kan varen in alle verschillende richtingen ten opzichte van de wind.

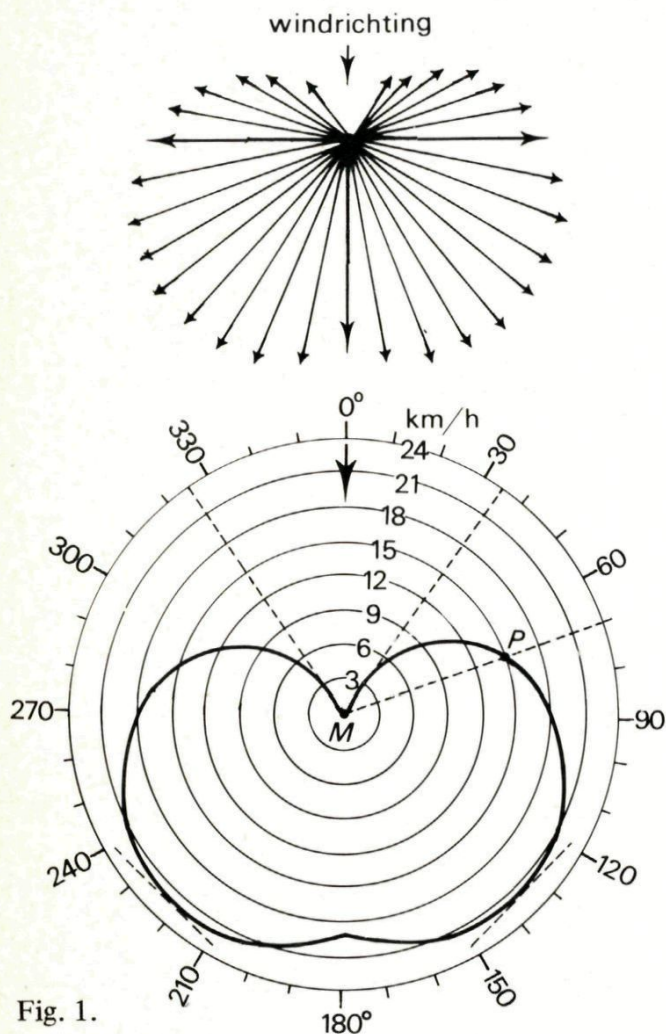


Fig. 1.

De vlindergrafiek

Eerst brengen we de zojuist genoemde koers-snelheid functie in tekening. Omdat één der variabelen een hoek is gebruiken we niet het gewone assenkruis, maar zetten op papier deze variabele ook echt als hoek uit. En omdat de variabelen dan overeenkomen met de *poolcoördinaten* van de

punten in het vlak van tekening, spreken we van een *poolgrafiek*.

Vaak ontstaat een soort vlindermodel als in fig. 1. Eerst zijn de snelheidspijlen afzonderlijk getekend, daaronder is alleen de verzameling van de eindpunten aangegeven. Het punt *P* van de grafiek geeft aan dat de boot op een koers van 70° ten opzichte van de windrichting (eigenlijk de tegenwindrichting) een snelheid kan maken van ongeveer 16 km/h. We zeggen dat de snelheid radieel (straalsgewijs) is uitgezet tegen de koershoek.

Tussen 325° en 35° blijkt dit schip helemaal niet vooruit te kunnen komen, terwijl de grootste snelheid bereikt wordt op een koers van rond 135° of 225° .

Ook kun je wel inzien dat een doel in de 180° -richting wat sneller *indirect* te bereiken is door achtereenvolgens koersen in de buurt van 160° en 200° aan te houden, dan door te varen op de *directe* koers van 180° . De verklaring hiervan ligt in het feit dat bij het varen op de koersen 160° en 200° , de verplaatsing in de *doelrichting* groter is dan bij het even lang varen op de 180° -koers. Anders gezegd: omdat de projectie van de 160° -pijl op de 180° -richting groter is dan de 180° -pijl zelf. En wanneer de beide indirecte koersen elk even lang bevaren worden, is vanwege de symmetrie de zijwaartse afwijking van de doelrichting uiteindelijk juist nul.

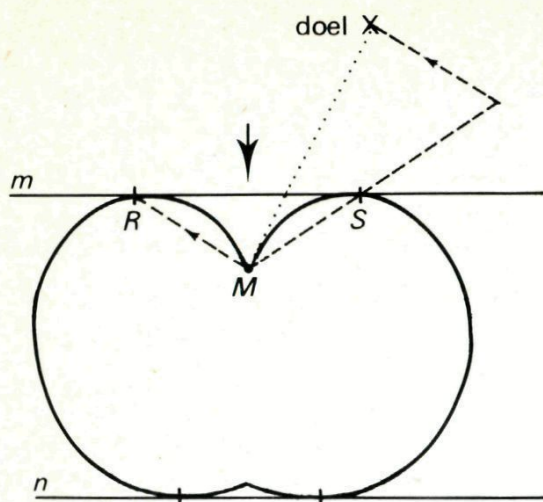


Fig. 2.

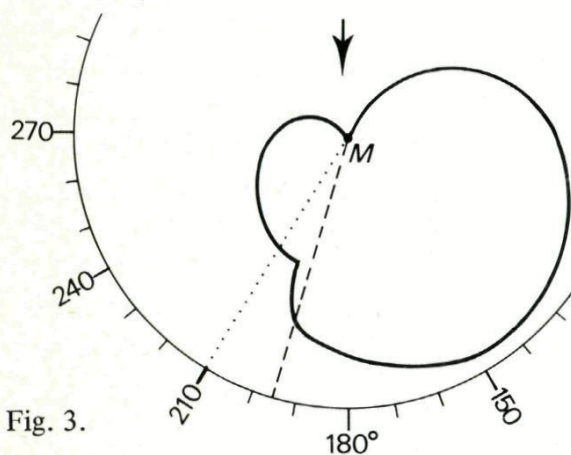


Fig. 3.

Maar hoe zit het bij een *niet*-symmetrische situatie? Zie bijvoorbeeld de poolgrafieken in fig. 2 en 3, met een doelrichting zoals gestippeld is aangegeven. Hoe is uit de grafiek de beste koers(combinatie) te vinden?

Voor wie er niet uit komt volgt hier eerst het recept, waarna we aantonen dat dit recept inderdaad de snelste route geeft.

De dubbelraaklijn-strategie

We beschouwen lijnen die op *twee* plaatsen raken aan de poolgrafiek. In fig. 2 zijn dat de lijnen m en n .

We kijken naar de dubbelraaklijn m (rakend in R en in S) en beweren: *Voor alle doelrichtingen tussen MR en MS is de directe koers ongunstig. Het snelst is om na elkaar de koersen MR en MS te varen, en wel zólang MS totdat het doel juist in de richting MR ligt. Zie fig. 2.*

Nog een wat ingewikkelder voorbeeld. Door een kapotte stag kan over bakboord alleen met een klein zeil gevaren worden (anders breekt de mast). Fig. 3 geeft de voor dit geval niet symmetrische poolgrafiek. Kan een doelrichting van 210° hier het beste direct bevaren worden, of is het beter om te beginnen met de veel snellere koers van ongeveer 195° ?

Het tekenen van de dubbelraaklijn in fig. 3 laat zien dat de doelrichting 210° tussen de raakpunten ligt. Het gunstigst is hier dus een combinatie van de raakpunt-koersen van ongeveer 195° en 230° .

Verklaring

Figuur 4 geeft een gedeelte weer van fig. 3. Lijn m' , door het doel D , is evenwijdig aan de dubbelraaklijn m . We vragen ons eerst af wat de snelste koers is om vanuit M ergens op lijn m' uit te komen.

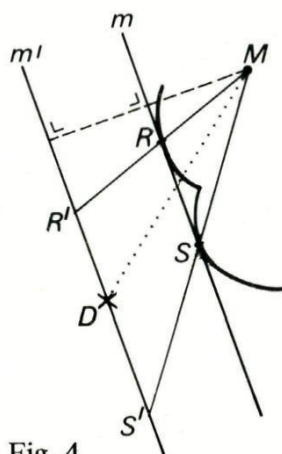


Fig. 4.

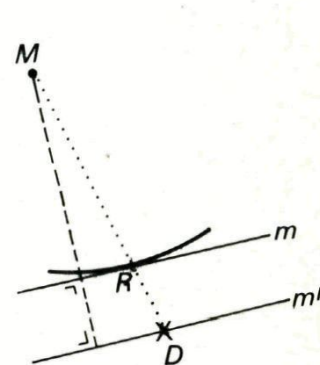


Fig. 5.

Dit zal een koers zijn waarvan de component loodrecht op m' maximaal is. De figuur laat zien dat dit juist het geval is voor de koersen MR en MS . Met een combinatie van deze indirecte koersen is elk punt op m' tussen R' en S' (en dus ook het doel D) in dezelfde kortste tijd bereikbaar.

In het geval van fig. 5, waarbij de raaklijn m nergens meer de vlinder raakt of snijdt, is op dezelfde manier in te zien dat nu het doel D het snelst bereikt wordt bij de *directe* koers MR .

°°° Op stromend water

Nog interessanter wordt het wanneer we behalve met een windvector w (gerekend ten opzichte van de vaste wal) ook rekening moeten houden met een constante stroomvector s . Hoe zijn nu de optimale koersen te vinden?

Je moet je dan realiseren dat de eerder gegeven poolgrafiek de vaarsnelheden aangeeft *ten opzichte van het water* bij een gegeven windvector *ten opzichte van het water*.

Een landwind w maakt samen met een stroom s dat de boot een waterwind $w' =$

$w - s$ voelt. (Als stroom en wind even hard in dezelfde richting zouden gaan, drijft de boot in een windstilte!) De poolgrafiek bij deze waterwind W' zal meestal wat gedraaid zijn en wat vergroot of verkleind vergeleken met de grafiek bij wind W . En om snelheden ten opzichte van de vaste grond te kunnen aflezen moet de poolgrafiek nog in haar geheel verschoven over vector S .

Probeer zelf te vinden hoe uit de zo ontstane figuur de beste vaarkoersen zijn af te leiden.



Pythagoras Olympiade

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 10–15.

PO 10. Los op: $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

Oplossing van Wouter Balkenende, 16 jr., 4-vwo, Openb. Dalton S.G. Voorburg Leidschendam (enigszins bekort).

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow x - \sqrt{x - \frac{1}{x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow x^2 - 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} + x - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow x - \frac{1}{x} + 1 = \\ &= 2\sqrt{x - \frac{1}{x}}. \text{ Stel } y = x - \frac{1}{x}: y + 1 = 2\sqrt{y} \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 4y \Rightarrow y = 1. \text{ Er moet dus gelden } x - \frac{1}{x} = 1 \\ &\text{dus } x^2 - x - 1 = 0. \text{ Van de twee oplossingen van deze vergelijking voldoet alleen } x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ aan de} \\ &\text{oorspronkelijke vergelijking. Dit geeft dus de enige oplossing.} \end{aligned}$$

Er waren 46 inzendingen, waarvan 42 correct.

Prijswinnaars: Eisso Atzema, 15 jr., 4-vwo, Sted. Gymn. Nijmegen en Rob Veenhof, 17 jr., 6-vwo, Europese School Brussel.

PO 11. Gegeven is een driehoek ABC met op BC de punten P_1 en P_2 , op CA de punten Q_1 en Q_2 en op AB de punten R_1 en R_2 zo, dat $BP_1 = P_2C$, $CQ_1 = Q_2A$ en $AR_1 = R_2B$. Bewijs dat de driehoeken $P_1Q_1R_1$ en $P_2Q_2R_2$ dezelfde oppervlakte hebben.

Oplossing van Martien Hols, 18 jr. en Hans Kennis, 17 jr., beiden 5-vwo, Edith Stein College Den Haag (enigszins bekort).

Er wordt uitgegaan van de stelling dat de oppervlakten van twee driehoeken die een hoek gemeen hebben, zich verhouden als de produkten van de zijden bij die hoek (dit volgt onmiddellijk uit de formule $O = \frac{1}{2}ab \sin C$).

Er blijkt dan

$$\text{opp. 1} = \frac{y(b-x)}{bc} \text{ opp. } ABC$$

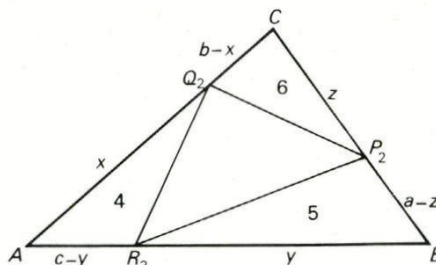
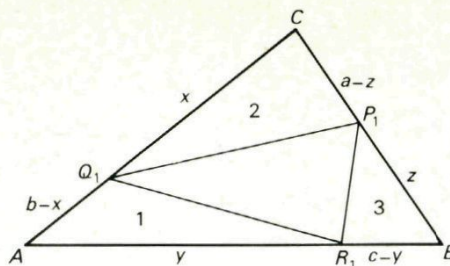
$$\text{opp. 2} = \frac{x(a-z)}{ab} \text{ opp. } ABC$$

$$\text{opp. 3} = \frac{z(c-y)}{ac} \text{ opp. } ABC$$

$$\text{opp. 4} = \frac{x(c-y)}{bc} \text{ opp. } ABC$$

$$\text{opp. 5} = \frac{y(a-z)}{ac} \text{ opp. } ABC$$

$$\text{opp. 6} = \frac{z(b-x)}{ab} \text{ opp. } ABC.$$



Bewezen moet worden dat $\text{opp. } P_1Q_1R_1 = \text{opp. } P_2Q_2R_2$, met andere woorden dat $\text{opp. 1} + \text{opp. 2} + \text{opp. 3} = \text{opp. 4} + \text{opp. 5} + \text{opp. 6}$. Martien en Hans verifiëren dit door uitschrijven, en onze lezers zullen daar ook geen moeite mee hebben.

Er waren 28 inzendingen, waarvan 25 correct.

Prijswinnaars: Ralph Peeters, 15 jr. en Frank Waaldijk, 14 jr., beiden 4-vwo, Elzendaalcollege Boxmeer.

PO 12. Gegeven is een positief geheel getal k . Bewijs dat er in de rij $1, 2, 3, \dots, 10^k$ net zoveel cijfers voorkomen als er nullen zijn in de rij $1, 2, 3, \dots, 10^{k+1}$ (alle getallen in de twee rijen moet je volledig uitgeschreven denken in het tientallig stelsel).

Oplossing van Eisso Atzema, 16 jr., 4-vwo, Sted. Gymn. Nijmegen (enigszins bewerkt).

Bij een getal van n cijfers zijn er voor het eerste cijfer 9 mogelijkheden en voor alle andere cijfers 10. Er zijn dus $9 \cdot 10^{n-1}$ getallen van n cijfers en samen tellen ze dus $n \cdot 9 \cdot 10^{n-1}$ cijfers. De eerste rij telt daarom

$$k \cdot 9 \cdot 10^{k-1} + (k-1) \cdot 9 \cdot 10^{k-2} + \dots + 9 + (k+1)$$

cijfers. Het cijfer nul kan bij een getal van n cijfers op alle plaatsen behalve de eerste voorkomen. Nemen we het eerste cijfer vast, zeg a , dan is het aantal nullen in de rij van alle getallen van n cijfers die beginnen met a , precies $\frac{1}{10}$ van het totale aantal cijfers dat steeds achter de a geplaatst wordt, dus $\frac{1}{10} \cdot (n-1) \cdot 10^{n-1} = (n-1) \cdot 10^{n-2}$. Voor a zijn er 9 mogelijkheden, dus in de tweede rij is het aantal nullen gelijk aan

$$9 \cdot k \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot (k-1) \cdot 10^{k-2} + \dots + 9 + (k+1).$$

Hiermee is het gevraagde bewezen.

Er waren 34 inzendingen, waarvan 21 correct.

Prijswinnaars: Pieter Magusin, 16 jr., 5-vwo, Sted. Gymn. Nijmegen en Reynier Peletier, 17 jr., 6-vwo, Europese School Brussel. Eervolle vermeldingen verdienden Evert-Jan Pol, 18 jr., 6-vwo, Chr. Lyc. Veenendaal, en Reynier Peletier.

PO 13. Bepaal alle drietallen (a, b, c) positieve gehele getallen die voldoen aan de vergelijking $a^2 + b^2 = 2^c$.

Oplossing van Rutger Noot, 14 jr., 3-vwo, Gymn. Haganum Den Haag (enigszins bekort).

$a^2 + b^2 = 2^c \Rightarrow (a+b)^2 = 2(2^{c-1} + ab)$. Dit is een even kwadraat, dus een viervoud, dus of ab is

even, of $ab = 2^c - 1 = 1$. In het laatste geval is $a = b = c = 1$; in het eerste geval is a of b (of beide) even. Als één van beide even is, volgt uit $a^2 + b^2 = 2^c$ dat de ander ook even is, terwijl dan het rechterlid minstens 8 is, dus $c \geq 3$. Stelt dan $a = 2a'$, $b = 2b'$, $c = c' + 2$, dan volgt uit de oorspronkelijke vergelijking dat $(a')^2 + (b')^2 = 2^{c'}$. Dezelfde redenering kan nu net zolang worden voortgezet totdat alle factoren 2 uit a en b zijn weggedeeld. Als dat na n keer is gebeurd, moet $a = b = c = 1$ zijn, zodat voor de oorspronkelijke waarden van a , b en c geldt $a = b = 2^n$, $c = 2n + 1$. Alle oplossingen (a, b, c) worden dus gegeven door $(2^n, 2^n, 2n + 1)$ met $n = 1, 2, 3, \dots$

Er waren 32 inzendingen, waarvan 21 correct.

Prijswinnaars: Jeroen Mulder, 15 jr., 4-vwo, R.S.G. Roermond en Ralf Peeters, 15 jr., 4-vwo, Elzen-daalcollege Boxmeer.

PO 14. Gegeven zijn 10 punten in de ruimte. Geen viertal ervan ligt in één vlak. Elk puntenpaar wordt door een lijnstuk verbonden. Bewijs dat men 25 van deze lijnstukken rood kan kleuren zonder dat er een rode driehoek ontstaat, maar dat er altijd minstens één rode driehoek is ontstaan als men meer dan 25 lijnstukken rood heeft gekleurd.

Oplossing: (i) Veel inzenders toonden als volgt aan dat men 25 lijnstukken rood kan kleuren zonder dat er een rode driehoek ontstaat: verdeel de 10 punten in twee groepen van vijf, en kleur elk lijnstuk rood dat een punt uit de ene groep verbindt met een punt uit de andere groep.

(ii) Jan Koen Annot, 17 jr., 6-vwo, Chr. Lyc. Veenendaal, bewees het tweede deel van de opgave door te laten zien dat elke kleuring zonder rode driehoeken niet meer dan 25 gekleurde lijnstukken telt. We geven hier zijn bewijs in een iets gewijzigde notatie.

Laat een kleuring zonder rode driehoeken gegeven zijn. Noem het maximale aantal gekleurde lijnstukken dat uit een punt vertrekt n . Laat A een punt zijn van waaruit n gekleurde lijnstukken vertrekken, en stel dat die lijnstukken eindigen in B_1 t.e.m. B_n . De punten B_i kunnen dan onderling niet meer door rode lijnstukken verbonden zijn. Ze mogen dus alleen rode verbindingen hebben met de $9 - n$ overblijvende punten, die we C_1 t.e.m. C_{9-n} noemen. Dit zijn dus hoogstens $n(9 - n)$ rode verbindingen. Vanuit C_j vertrekken hoogstens n rode lijnstukken, want dit is het maximale aantal dat uit een punt vertrekt. Tellen we nu alle rode lijnstukken die uit alle punten vertrekken, dan komen we tot hoogstens n (voor punt A), plus $n + n(9 - n)$ (voor de punten B_i), plus $(9 - n)n$ (voor de punten C_j).

Elk lijnstuk is nu echter dubbel gesteld (voor elk van de uiteinden één maal), dus het aantal rode lijnstukken is hoogstens $\frac{1}{2} [n + n + n(9 - n) + (9 - n)n] = n(10 - n) = 25 - (n - 25)^2 \leq 25$.

Er waren 26 inzendingen, waarvan 11 correct.

Prijswinnaars: Kareljan Schoutens, 17 jr., 6-vwo, Mollerlyceum Bergen op Zoom en Rutger Noot. Een eervolle vermelding verdienen Marcel de Jeu, 17 jr., 6-vwo, O.S.G. Albert Einstein Hoogvliet, en Eric Verhoeff, 18 jr., 6-vwo, R.S.G. Noord-Kennemerland Alkmaar. Eric bewees dat het maximale aantal bij N punten $(N/2)^2$ bedraagt, een resultaat dat ook met de bovenstaande methode kan worden aangetoond.

PO 15. Bewijs dat er bij elk natuurlijk getal $n \geq 25$ een positief geheel getal $k < \sqrt{n}$ bestaat zo, dat n geen geheel veelvoud is van k .

Oplossing: de volgende vier inzenders gaven in wezen hetzelfde bewijs: Evert Jan Pol, 18 jr., 6-vwo, Chr. Lyc. Veenendaal, Eric Postma, 16 jr., 4-vwo, Baudartiuscollege Zutphen, Jan Koen Annot en Eric Verhoeff. Hier is een korte versie van hun bewijs:

Voor $n = 25$ kan men $k = 2$ of $k = 4$ nemen. Stel nu $n > 25$. Dan geldt voor zeker natuurlijk getal $m \geq 5$: $m^2 < n \leq (m + 1)^2$. Stel dat het gestelde in de opgave onjuist is, zodat n een veelvoud is van elk van de getallen 1 t.e.m. m . De enige veelvouden van m tussen m^2 en $(m + 1)^2$ zijn $m^2 + m$ en $m^2 + 2m$, want $m^2 + 3m > (m + 1)^2$. Hieruit volgt $n = m^2 + m$ of $n = m^2 + 2m$. Maar $m^2 + m = (m - 1)(m + 2) + 2$ en $m^2 + 2m = (m - 1)(m + 3) + 3$. Omdat $m - 1 > 3$ kan n dus geen veelvoud zijn van $m - 1$, tegenspraak.

Er waren 25 inzendingen, waarvan 10 correct.

Prijswinnaars: Jan Koen Annot en Eric Verhoeff.

Antwoorden en oplossingen

bij: Leerzame fouten

1. Alle richtingen in verticale vlakken loodrecht op het tafereel (zoals de zijmuur links van het bordes) hebben hun verdwijnpunt volgens de perspectief op dezelfde verticale lijn. Gezien de horizontale lijnen op de zijmuur ligt die lijn iets ter *linkerzijde* van het middenpad. De boven- en onderkant van de trapleuning snijden elkaar hier echter ver *rechts* van deze lijn.
2. Maak net zoets als fig. 7. Teken de horizon over van fig. 2 met daarop de verdwijnpunten van de richting loodrecht naar achteren, en van de twee richtingen onder 45° (deze verdwijnpunten construeer je met de tegels van de vloer). Het oogpunt bepaal je net als in fig. 6. De linker verdwijnpunten van de schuine balken neem je van fig. 2 over. Figuur 7 laat zien hoe je dan de rechter verdwijnpunten kunt vinden.

bij: Hoeveel delers heeft 100 000 ?

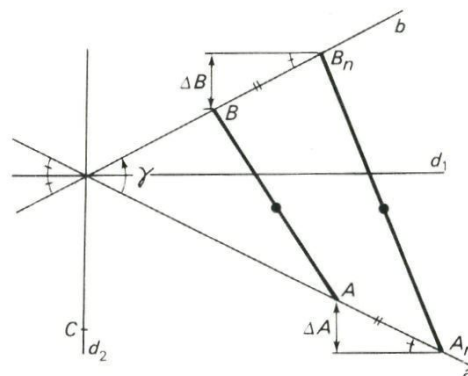
$$d(8\ 380\ 532\ 160) = d(2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19) = 7 \cdot 5 \cdot 2^6 = 2\ 240.$$

bij: Over middens en loodlijnen

1. De figuur hiernaast is zo getekend dat de bissectrice d_1 van de beide eindpuntenrechten a en b horizontaal loopt. AB en $A_n B_n$ zijn twee van de gegeven lijnstukken.

De *daling* ΔA van het ene eindpunt is gelijk aan de *stijging* ΔB van het andere. Het midden van het lijnstuk blijft daardoor op *gelijke hoogte*, dus op een rechte lijn $\parallel d_1$.

2. Bij *rotatie* om een centrum ergens op de andere bissectrice d_2 , over een hoek gelijk aan γ , geldt steeds dat lijn b het beeld is van lijn a . Kies dit centrum C nu zo dat $A \rightarrow B$ (dus C op de middelloodlijn van AB). Dan zal voor de punten A_n op a en B_n op b met $AA_n = BB_n$ ook gelden $A_n \rightarrow B_n$. Dus C ligt op de middelloodlijn van elke $A_n B_n$.



Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijs Commissie van het Wiskundig Genootschap.

Redactie

- ∫ Dr. J. van de Craats, R.U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden
★ Bruno Ernst, Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht.
< W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn
⚡ Ir. H.M. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginneken.

Secretariaat

- △ Drs. H.N. Pot, Tournoyveld 67, 3443 ER Woerden.
Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

W. Ganzevoort, M.C. van Hoorn, W. Pijls, G.A. Vonk, D.K. Wielenga.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,90 per jaargang. Voor anderen f 12,95.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

Inhoud

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| ⚡ Optellen = vermenigvuldigen 25 | ∫ Parabolen, ellipsen en hyperbolen |
| Erelijst ladderwedstrijd 1979/80 26 | vouwen 36 |
| Pythagoras Olympiade PO 19-21 27 | Mooie uitkomsten maken 42 |
| ∫ Leerzame fouten 28, 49 | △ Een poolgrafiek bij een zeilwed- |
| Hoeveel delers heeft 100 000? 33, 49 | strijd 44 |
| Over middens en loodlijnen 35, 49 | Oplossingen PO 10-15 46 |

