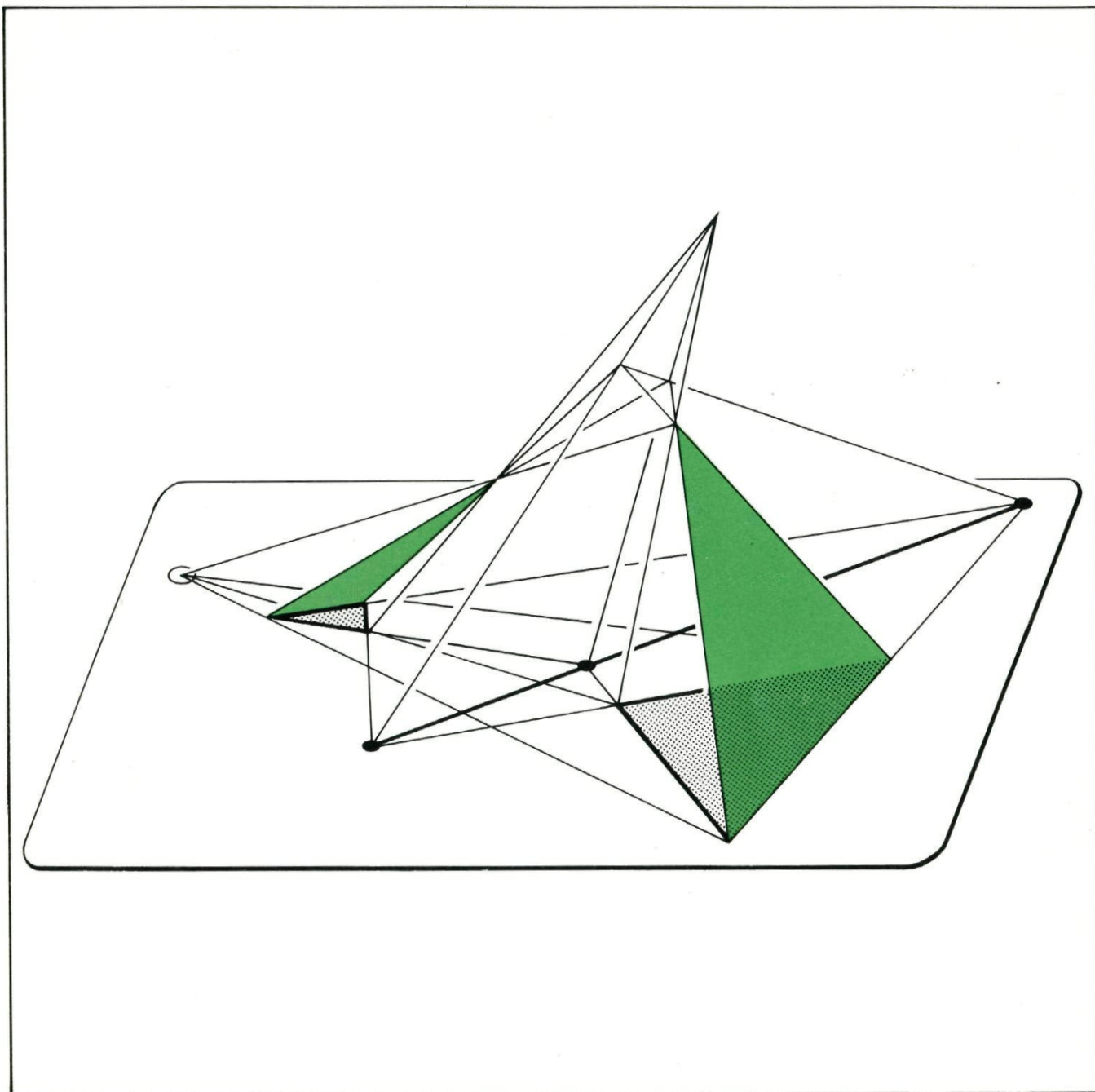


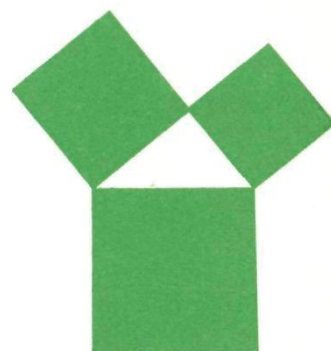


4

jaargang 20 / februari 1981

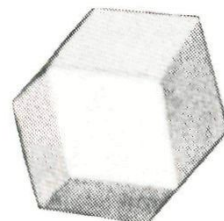
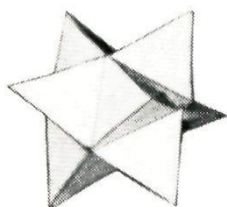
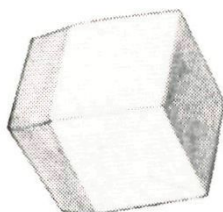
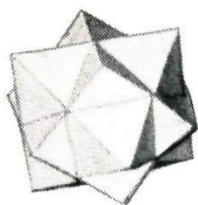
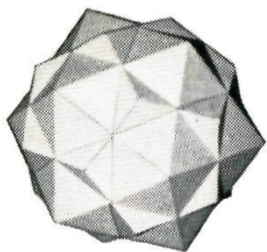
wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Van een van onze lezers, Oskar van Deventer uit Naarden, ontvingen we foto's van enkele tastbare resultaten van zijn onderzoek op het gebied van de meer of minder regelmatige veelvlakken. Hij bedacht het volgende systeem om uit een gegeven veelvlak (al dan niet regelmatig) en andere veelvlak af te leiden. Breng door iedere ribbe van het oorspronkelijke veelvlak een vlak aan dat gelijke hoeken maakt met de beide aan de ribbe grenzende zijvlakken. Door al deze 'raakvlakken' samen wordt nu een nieuw veelvlak begrensd.

Op de foto's zijn van links naar rechts resultaten te zien van het tweemaal na elkaar toepassen van deze procedure (makkelijker gezegd dan gedaan!) op de drie lichamen links. Dit zijn van boven naar beneden: de 'vereniging' van een regelmatig 12-vlak en een regelmatig 20-vlak, evenzo van een kubus en een regelmatig achthoek, en van twee identieke regelmatige viervlakken. Tweemaal ontstaat hierbij het ruiten-twaalfvlak en ook ontstaan lichamen met vliegervormige zijvlakken. Wie heeft er zóveel ruimtelijk inzicht dat hij zich kan voorstellen hoe de series verder gaan?

BIJ DE VOORPLAAT

De figuur illustreert een bewijs van de stelling van *Desargues*. Deze stelling zegt dat indien bij twee driehoeken de *verbindingslijnen* van overeenkomstige *hoekpunten* door één punt gaan (het *perspectiviteitscentrum*), de *snijpunten* van de eventueel verlengde overeenkomstige *zijden* op één lijn liggen (de *perspectiviteitsas*).

De voorplaat toont een horizontaal vlak met twee van zulke perspectief gelegen driehoeken (gestipeld). Het perspectiviteitscentrum ligt links en is omcirkeld, de perspectiviteitsas loopt tussen de driehoeken door. Maar ook de schuin omhoog komende grijze driehoeken zijn perspectief vanuit hetzelfde centrum. Hun perspectiviteitsas loopt schuin naar beneden door het punt rechts achter.

Meer hierover in het artikel 'Driehoeken in perspectief'.

° Repeterende breuken en delertesten

Als we een gewone breuk met de methode van de staartdeling in decimale vorm willen schrijven, blijkt de deling haast nooit 'precies op te gaan'. Omdat er bij het uitvoeren van de staartdeling slechts eindig veel verschillende resten kunnen optreden (want ze zijn allemaal kleiner dan de deler) zal een keer een rest bereikt worden die al eerder is voorgekomen. Het cijferpatroon in de staart, en dus óók in de uitkomst, herhaalt zich dan. Ons beperkend tot *stambreuken* (met teller 1) vinden we:

$$\frac{1}{1} = 1,0000 \dots = 1,0$$

$$\frac{1}{5} = 0,20000 \dots = 0,20$$

$$\frac{1}{2} = 0,50000 \dots = 0,50$$

$$\frac{1}{6} = 0,16666 \dots = 0,1\bar{6}$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333 \dots = 0,\bar{3}$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857 \ 142857 \dots = 0,14285\bar{7}$$

$$\frac{1}{4} = 0,250000 \dots = 0,250$$

$$\frac{1}{8} = 0,1250000 \dots = 0,1250$$

Als de nul repeteert laten we dit normaal weg, in alle andere gevallen spreken we van *repeterende breuken*. In afgekorte notatie verder:

$$\frac{1}{9} = 0,1$$

$$\frac{1}{15} = 0,0\bar{6}$$

$$\frac{1}{21} = 0,04761\bar{9}$$

$$\frac{1}{10} = 0,1$$

$$\frac{1}{16} = 0,0625$$

$$\frac{1}{22} = 0,04\bar{5}$$

$$\frac{1}{11} = 0,0\bar{9}$$

$$\frac{1}{17} = 0,058823529411764\bar{7}$$

$$\frac{1}{23} = 0,04347826086\bar{95652173913}$$

$$\frac{1}{12} = 0,08\bar{3}$$

$$\frac{1}{18} = 0,0\bar{5}$$

$$\frac{1}{24} = 0,41\bar{6}$$

$$\frac{1}{13} = 0,07692\bar{3}$$

$$\frac{1}{19} = 0,05263157894736842\bar{1}$$

$$\frac{1}{25} = 0,04$$

$$\frac{1}{14} = 0,071428\bar{5}$$

$$\frac{1}{20} = 0,05$$

$$\frac{1}{26} = 0,038461\bar{5}$$

Je zult wel eens uitgezocht hebben welke breuken er *exact* in decimale vorm te schrijven zijn. Als je je realiseert dat een decimaal geschreven breuk ook altijd in breukstreepnotatie is te schrijven, met een noemer $10 = 2 \cdot 5$ of $100 = 2^2 \cdot 5^2$ of $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ etc. zie je dit snel. Moeilijker wordt het als we wat orde willen ontdekken in het grillige verloop van de *periode-lengten*: het aantal plaatsen in de zich herhalende cijfergroep. We gaan hier deze zaak nader bekijken. Ook zullen we laten zien hoe deze periodelengten te maken hebben met het testen op deelbaarheid van grote getallen. De testen voor 3 en voor 9 zullen wel bekend zijn, maar is er ook zoiets voor 7, 11, 13 etc.? Een onderzoek hiernaar door een van onze lezers, *Pieter Geelen* uit Hilversum, vormde de aanleiding tot dit artikel.

$a =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$d = 2$	—	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
3	2	—	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
4	—	2	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
5	4	4	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
6	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
7	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
8	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
9	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
10	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
11	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
12	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
13	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
14	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
15	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
16	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
17	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..

Tabel 1. Op plaats (a, d) in te vullen: de kleinste positieve n met $a^n = d$ -voud + 1.

Delen met rest 1

We beginnen met een vraag die op het eerste gezicht weinig met het voorgaande te maken lijkt te hebben: Wat is het kleinste getal uit de rij $10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots$ dat bij deling door 7 een rest 1 geeft? Probeer maar met je rekendoosje: $9 : 7, 99 : 7, 999 : 7$ etc.

In dit geval is de capaciteit van een rekendoosje net genoeg om het antwoord te kunnen vinden. Maar hoe ligt dit bij andere getallen? Wat is er bij gegeven a en d te zeggen van de kleinste exponent waarvoor een getal uit de rij $a, a^2, a^3, a^4, \dots$ bij deling door d een rest 1 geeft? (De beschouwde *rest* zal hier steeds onveranderd 1 blijven.) We zullen zien dat we nooit méér dan de eerste $(d-1)$ termen hoeven uit te proberen: als de rest 1 dan nog niet is voorgekomen, komt die rest ook niet voor bij enige volgende term. Maar veel moeilijker is het om wat te voorspellen over de precieze grootte van zo'n kleinste exponent zonder alle delingen met de voorgaande machten te moeten uitvoeren. Voor we met meer bijzonderheden ko-

men, geven we de grotendeels oningevulde tabel 1 om de lezer de gelegenheid te geven om, met behulp van het grafiet (van z'n potlood) of het silicium (van de chip in z'n doosje), wat inzicht in de situatie te verkrijgen. Het is niet moeilijk om bij het invullen verschillende regelmatigigheden te ontdekken, waarvan sommige eenvoudig te verklaren zijn. Wie liever spiekt kan de ingevulde tabel ook achterin vinden.

Opmerkingen bij tabel 1

Als a en d een gemeenschappelijke deler groter dan 1 — zeg g — hebben, dan is g wél deler van a^n voor elke n , maar daarom niet van enig d -voud + 1. Bijvoorbeeld: 10^n is nooit gelijk aan een 6-voud + 1 omdat 10^n even is en elk 6-voud + 1 oneven. De tabel kan dus alleen ingevuld voor paren (a, d) die een ggk van 1 hebben (we zeggen ook wel: die *relatief priem* zijn).

We zoeken naar een *positieve* exponent van a (want met exponent 0 geldt bij elk paar (a, d) : $a^0 = 0 \cdot d + 1$). Verder blijkt

dat als $n = n_0$ de kleinste exponent is waarvoor de relatie $a^n = d\text{-voud} + 1$ geldt, deze relatie verder uitsluitend geldt voor alle exponenten die een veelvoud zijn van n_0 . Bewijs: stel dat de relatie ook geldt voor n_1 met $kn_0 < n_1 \leq (k+1)n_0$, $k \in \mathbb{Z}^+$ ofwel $0 < n_1 - kn_0 \leq n_0$.

Er geldt:

$$a^{kn_0} (a^{n_1 - kn_0} - 1) = a^{n_1} - (a^{n_0})^k = \\ = (d\text{-voud} + 1) - (d\text{-voud} + 1)^k = d\text{-voud}.$$

Omdat $\text{ggd}(a^{kn_0}, d) = 1$ is $(a^{n_1 - kn_0} - 1)$ deelbaar door d , ofwel

$$a^{n_1 - kn_0} = d\text{-voud} + 1.$$

Hierin moet de exponent minstens gelijk zijn aan n_0 maar mag niet groter zijn dan n_0 , dus gelijk aan n_0 . Zodat n_1 een geheel veelvoud is van n_0 .

Zoals eerder gezegd moet de tabel uitsluitend worden ingevuld met getallen *kleiner* dan de deler d vooraan de regel. Bij het aantonen hiervan (uiteraard alleen als a en d onderling priem zijn) onderscheiden we twee gevallen.

(i) Onder de resten bij deling van $a^1, a^2, a^3, \dots, a^{d-1}$ door d komen twee *gelijke* resten voor, zeg van a^p en a^q ($1 \leq p < q \leq d-1$). Dan is $a^q - a^p = a^p(a^{q-p} - 1)$ deelbaar door d . Omdat a en d geen factor gemeen hebben is dus $(a^{q-p} - 1)$ deelbaar door d , voor een positieve exponent $(q-p) \leq d-1$.

(ii) De $d-1$ resten zijn allemaal *verschillend*. Omdat alle resten kleiner zijn dan d , en de rest 0 niet voorkomt, móét de rest 1 een keer voorkomen.

In de horizontale rijen van de tabel zit een regelmaat: na d plaatsen komen dezelfde exponenten opnieuw voor. Dit is te verklaren uit:

$$(a + d)^n = a^n + d\text{-voud.} \quad \text{Ga na.}$$

In diagonale richting komt een rij enen voor, bij de paren (a, d) met $d = a-1$. Want dan geldt:

$$a^1 = 1 \cdot (a-1) + 1 = d\text{-voud} + 1.$$

Ook komt diagonaal een rij tweeën voor, bij de paren met $d = a + 1$. Hier geldt:

$$a^2 = (a-1) \cdot (a+1) + 1 = d\text{-voud} + 1.$$

De gezochte macht kan te hoog zijn voor de capaciteit van het gebruikte reken-doosje. Wanneer de gezochte exponent *even* is (en dat blijkt bijna steeds zo te zijn) is een voldoende voorwaarde dat de macht met de *halve* exponent gelijk is aan een d -voud *min* 1. Dit omdat uit

$$a^n = d\text{-voud} - 1 \text{ volgt}$$

$$a^{2n} = (d\text{-voud} - 1)^2 = d\text{-voud} + 1.$$

Voor delers d die *priemgetal* zijn, heeft de Fransman *Fermat* in 1640 de volgende uitspraak gedaan (vaak genoemd de 'kleine' stelling van Fermat):



Pierre de Fermat
1601–1665, Toulouse

Zij p een priemgetal, relatief priem ten opzichte van a , dan geldt

$$a^{p-1} = p\text{-voud} + 1.$$

Dat hierdoor niet altijd de *kleinste* exponent wordt gegeven, is bijvoorbeeld te zien aan $4^2 = 5\text{-voud} + 1$, met een exponent 2 in plaats van $p-1 = 5-1 = 4$.

Voor getallen d die géén priemgetal zijn geldt de voorgaande regel niet. Bijvoorbeeld: $3^{4-1} \neq 4\text{-voud} + 1$.

Euler vond rond 1760 een scherpere uitspraak, ook voor niet-priem delers d :

Zij $\varphi(d)$ het *aantal* getallen uit $\{1, 2, 3, 4, \dots, d\}$ dat relatief priem is ten opzichte van d , dan geldt

$$a^{\varphi(d)} = d\text{-voud} + 1.$$

Voorbeeld: bij $d = 6$ hoort een exponent 2 want alleen ggd $(1, 6)$ en ggd $(5, 6)$ zijn gelijk aan 1. Evenzo: bij $d = 14$ hoort de exponent 6, want alleen de zes getallen 1, 3, 5, 9, 11, 13 zijn relatief priem ten opzichte van 14. Het volgende staatje geeft een aantal waarden van deze zogenaamde φ -functie van Euler:

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\varphi(d)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6

Ook deze regel van Euler geeft vaak niet de kleinste exponent. Ga in tabel 1 na dat wel steeds geldt:

De 'kleinste exponent' is een deler van de 'Euler-exponent' $\varphi(d)$.

Repeterende breuken

We noemen een tweetal eigenschappen die je zelf gemakkelijk aan een aantal voorbeelden kunt controleren.



Leonard Euler

1707–1783, Bazel, St. Petersburg, Berlijn

Ten eerste: de periodelengte in de decimale schrijfwijze van een breuk wordt bepaald door de *noemer*; alleen bij een teller waarvoor de breuk te vereenvoudigen is, kan de periodelengte korter zijn. Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 1/21 &= 0,04761\overline{9}, \\ 2/21 &= 0,09523\overline{8}, \\ 3/21 &= 0,14285\overline{7} \\ \text{maar } 7/21 &= 0,3. \end{aligned}$$

Ten tweede: factoren '2' en '5' kunnen altijd uit de noemer van een breuk worden weggelaten of eraan toegevoegd, zonder dat de periodelengte verandert. Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 7/110 &= 7/(2 \cdot 5 \cdot 11) = 0,06\overline{3}, \\ 7/(5 \cdot 11) &= 0,12\overline{7}, \\ 7/(2 \cdot 11) &= 0,31\overline{8}, \\ 7/11 &= 0,6\overline{3}, \\ 7/(2^4 \cdot 5 \cdot 11) &= 0,0079\overline{54}. \end{aligned}$$

Beide eigenschappen berusten op het feit dat er bij het optellen van breuken met dezelfde periodelengte nooit een som kan ontstaan met een langere periode. We kijken nu verder alleen naar stambreuken zonder factoren 2 of 5 in de noemer.

Als voorbeeld nemen we de staartdeling van $1 : 7$. Deze begint bij een 'rest' van 1, en na zes keer '0 aanhalen' is de rest voor het eerst wéér 1. Letten we niet op de komma, dan komt dit overeen met het feit dat 1 000 000 wél maar 10, 100, 1000, 10 000 níet een rest 1 geeft bij deling door 7. Dus de periodelengte van zes in $\frac{1}{7}$ komt overeen met de zesdemacht van 10 die voor het eerst een rest 1 geeft bij deling door 7. Precies zo is in alle andere gevallen te zien:

De *periodelengte* van een repeterende breuk is gelijk aan de *exponent* van de laagste 10-macht die een rest 1 geeft bij deling door de noemer (van diezelfde breuk in breukstreepnotatie, na eventueel schrappen van factoren 2 en 5).

Controleer deze uitspraak door in tabel 1 de kolom met $a = 10$ te vergelijken met de perioden in de uitkomsten (met het rekendoosje) van $7 : 3$, van $3 : 7$ en van $8 : 9$.

De uitkomsten in de andere kolommen van tabel 1 geven de periodelengten aan van 'decimale' breuken in andere talstelsels (dus eigenlijk juist niet *decimaal*). Het al of niet gaan repeteren van een 'uitgedeeld' rationaal getal hangt helemaal af van het gebruikte talstelsel. Ga maar na welke breuken repeteren in het tweetallig stelsel, of in het twaalfallig stelsel.

Delertesten

Eerst een gedetailleerde verklaring voor de (vrij bekende) test op deelbaarheid door 9. Om na te gaan of het getal 750485 deelbaar is door 9 (met 'kleinste exponent' = 1) herleiden we in gedachten:

$$\begin{aligned} 750\,485 &= \\ &= 7 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + \\ &\quad + 8 \cdot 10^1 + 5 = \\ &= 7 \cdot (9\text{-voud} + 1)^5 + 5 \cdot (9\text{-voud} + 1)^4 + \\ &\quad + 0 \cdot (9\text{-voud} + 1)^3 + 4 \cdot (9\text{-voud} + 1)^2 + \\ &\quad + 8 \cdot (9\text{-voud} + 1) + 5 = \\ &= 7 \cdot (9\text{-voud} + 1) + 5 \cdot (9\text{-voud} + 1) + \\ &\quad + 0 \cdot (9\text{-voud} + 1) + 4 \cdot (9\text{-voud} + 1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 8 \cdot (9\text{-voud} + 1) + 5 = \\ &= 9\text{-voud} + (7 + 5 + 0 + 4 + 8 + 5) = \\ &= 9\text{-voud} + 29. \end{aligned}$$

En we hoeven alleen nog maar na te gaan of 29, de som van de cijfers van het oorspronkelijke getal, deelbaar is door 9.

Nog een voorbeeld: om na te gaan of 53309647 deelbaar is door 37 (met 'kleinste exponent' = 3) splitsen we het grote getal in groepjes van *drie* cijfers:

$$\begin{aligned} 053\,309\,647 &= \\ &= 53 \cdot 10^6 + 309 \cdot 10^3 + 647 = \\ &= 53 \cdot (37\text{-voud} + 1)^2 + \\ &\quad + 309 \cdot (37\text{-voud} + 1)^1 + 647 = \\ &= 37\text{-voud} + (53 + 309 + 647) = \\ &= 37\text{-voud} + 1\,009 = \\ &= 37\text{-voud} + 1 \cdot (37\text{-voud} + 1) + 9 = \\ &= 37\text{-voud} + 10. \end{aligned}$$

Deze methode om de deelbaarheid van grote getallen te testen is het beste bruikbaar bij delers met een lage 'kleinste exponent'. Een aantal ervan is te vinden in de kolom onder $a = 10$ (tabel 1). Voor de overige moeten we de ontbindingen kennen van $10^1 - 1$, $10^2 - 1$, $10^3 - 1$, etc. In het volgende staatje zijn rechts alle delers < 100 aangegeven met een 'kleinste exponent' van maximaal 8.

$10^1 - 1 = 9 = 3^2$	3, 9
$10^2 - 1 = 99 = 3^2 \cdot 11$	11, 33, 99
$10^3 - 1 = 999 = 3^3 \cdot 37$	27, 37
$10^4 - 1 = 9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$	
$10^5 - 1 = 99\,999 =$ $= 3^2 \cdot 41 \cdot 271$	41
$10^6 - 1 = 999\,999 =$ $= 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$	7, 13, 21, 63, 91
$10^7 - 1 = 9\,999\,999 =$ $= 3^2 \cdot 239 \cdot 4649$	
$10^8 - 1 = 99\,999\,999 =$ $= 3^2 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137$	73

Voor andere delers dan de hier genoemde is de deelbaarheidstest op deze manier erg

onpraktisch. Om dit te illustreren geven we van een aantal priem-delers de 'kleinste exponent' (tussen haakjes): 17 (16), 19 (18), 23 (22), 29 (28), 31 (15), 43 (21), 47 (46).

Er bestaan echter wel verfijningen op de hier gegeven methode. Deze komen erop neer dat behalve met de rest 1 ook met andere (kleine) resten gerekend wordt (bijvoorbeeld ook de rest -1). Bij de splitsing van het te testen grote getal krijgen dan de cijfergroepjes niet meer allemaal het 'gewicht' 1, maar een gewichtsfactor gelijk aan de bij een groepje behorende rest. We gaan hier niet verder op in.

Ten slotte laten we je proberen of je, zonder de complete staartdeling te ma-

ken, kunt uitvinden of 41 een deler is van

1234 56789 98765 43210.

Als er geen zetfout in gekomen is, moet dit wel zo zijn.

Literatuur

Meer over dit onderwerp is te vinden in boeken over wat genoemd wordt: *getaltheorie*. Enkele titels:

R. L. Goodstein, *Grondbegrippen van de wiskunde*, Aula-pocket nr. 271.

F. Schuh, *Leerboek der elementaire theoretische rekenkunde*, 2 delen; dit zeer uitgebreide boek uit 1921 is niet meer in de handel, maar je kunt het door elke openbare bibliotheek laten aanvragen.

A. H. Beiler, *Recreations in the theory of numbers*, Dover, New York.

Oystein Ore, *Invitation to number theory*, The Mathematical Association of America.

°° Rare reeksen

Als je telt: 1, 2, 3, 4, 5, ... kun je je indenken dat je steeds maar door zou kunnen gaan. In werkelijkheid moet je natuurlijk op een zeker moment ophouden, maar je kunt je toch op de een of andere manier wel een beeld vormen van de nooit eindigende rij van alle positieve gehele getallen. We moeten ons goed realiseren dat we hier spreken over getallen, bedenksels van ons, en niet over dingen uit de werkelijkheid die we aan het tellen zijn. Natuurlijk zijn getallen wel voortgekomen uit het tellen van mensen, dieren, planten of dingen, maar wij hebben ze daarvan losgemaakt en denken ons de getallenrij onbeperkt voortgezet. Bij elk denkbaar getal kunnen we in gedachten 1 optellen, en zo een groter getal maken. Er is geen grootste getal.

We kunnen ons dan natuurlijk ook de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ onbeperkt voortgezet denken. De getallen uit de rij worden steeds kleiner, naderen steeds meer tot nul, en er is in de rij geen kleinste getal. Als we ons zulke *oneindige rijen* kunnen indenken, kunnen we ons in gedachten ook wel voorstellen dat we een oneindige rij bekers hebben met daarin opvolgend $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ liter water, hoewel zo iets in werkelijkheid natuurlijk nooit kan bestaan. Zulke gedachtenexperimenten kunnen tot verrassende resultaten leiden.

Neem een maatbeker van 2 liter, en giet er water in. Eerst 1 liter, dan $\frac{1}{2}$ liter, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ enz. De beker bevat dan achtereenvolgens 1 liter, $1\frac{1}{2}$ liter, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{7}{8}$, $1\frac{15}{16}$ en zo voorts. Hij raakt nooit helemaal vol, maar

de ruimte die over is, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ liter, wordt steeds kleiner en nadert tot nul. Je ziet dat het dus mogelijk is *oneindig veel* positieve getallen bij elkaar op te tellen:



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

en toch steeds onder een vaste waarde te blijven. In ons geval loopt de maatbeker van 2 liter nooit over. Zou de beker echter ook maar een fractie kleiner zijn, dan zou hij op zeker moment wél overlopen. Na n keer bevat de beker immers

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \text{ liter.}$$

Het verschil met 2 liter is dan precies $\frac{1}{2^{n-1}}$ liter, en dit nadert tot nul als n onbeperkt toeneemt. Het is dus redelijk om te schrijven

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad (1)$$

We noemen 2 de *som* van de *oneindige reeks*, waarvan de *termen* achtereenvolgens zijn $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$, of, in het algemeen, $\frac{1}{2^k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Een nog kortere notatie voor (1) is:

$$2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

De harmonische reeks

Natuurlijk is het zo dat, wil zoals boven een *oneindige reeks* een *eindige som* hebben, de termen van de reeks tot nul moeten naderen. Want zouden er in de reeks

bijvoorbeeld oneindig veel termen voorkomen die allemaal groter zijn dan $\frac{1}{10}$, dan kom je door ze bij elkaar op te tellen boven elke vaste waarde uit. Anders gezegd, hoe groot je maatbeker ook is, als je er maar voldoende vaak $\frac{1}{10}$ liter water (of meer) in gooit, zal hij op zeker moment vol zijn en dan overlopen. Het tot nul naderen van de termen van de reeks is dus een voorwaarde waaraan zeker voldaan moet zijn wil de reeks een eindige som hebben. Heeft ook *elke* reeks waarvan de termen tot nul naderen een eindige som? De allereenvoudigste reeks die je kunt bedenken waarvan de termen naar nul naderen, is ongetwijfeld

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

Deze reeks heet de *harmonische reeks*. Zou hij een eindige som hebben, m.a.w. zou er een maatbeker zijn die als je er achtereenvolgens 1 liter, $\frac{1}{2}$ liter, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... in giet, nooit zal overlopen? Een beker van twee liter is zeker niet genoeg, want na vier keer heb je al $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{12}$, en dat is meer dan 2. Je kunt het met grotere bekertjes proberen, maar ik vertel je dat elke beker, hoe groot hij ook is, op den duur toch zal overlopen. Dit kun je als volgt aantonen.

Stel maar eens dat we een maatbeker hadden die groot genoeg was om $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ liter te bevatten. We kunnen

natuurlijk aannemen dat hij *precies* groot genoeg is om al dit water te bevatten. Als zijn inhoud dan S liter is, geldt

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

De beker raakt precies vol als we er achtereenvolgens $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ liter in gieten. Laten we dit eens zó doen: eerst $1 + \frac{1}{2}$, dan $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, dan $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, dan $\frac{1}{7} + \frac{1}{8}$, enz. De eerste keer kwam er méér dan 1 liter ($\frac{1}{2}$ liter meer) in, de tweede keer méér dan $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (want $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$), de derde keer méér dan $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, de vierde keer meer dan $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ en zo voorts. Je ziet dus tot je verbazing dat er in het vat van S liter méér dan S liter zou passen (bij de eerste keer hadden we bijvoorbeeld al een halve liter over). Dit is natuurlijk onzinnig, en de conclusie moet luiden dat er geen maatbeker kan bestaan waar alles in past, met andere woorden als je maar genoeg termen van de harmonische reeks

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

bij elkaar optelt, kun je boven elke waarde uitkomen.

Hier is nog een ander kort bewijs. Stel $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$. Neem twee maatbekers van $\frac{1}{2}S$. De *even* termen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$ zijn half zo groot als de termen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ van de volledige harmonische reeks. Zij passen dus samen precies in de ene maatbeker:

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$$

Dan moet de rest natuurlijk in de andere beker passen:

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

Maar $1 > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \frac{1}{5} > \frac{1}{6}, \dots$ en de som van de oneven termen is dus echt *groter* dan die van de even termen. Hier hebben we weer een tegenstrijdigheid.

Hyperharmonische reeksen

Een reeks die op de harmonische reeks lijkt, is

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \quad (2)$$

De algemene term is hier niet $\frac{1}{k}$ maar $\frac{1}{k^2}$. Zo'n reeks heet een *hyperharmonische reeks*. In tegenstelling tot de harmonische reeks heeft deze reeks wél een eindige som, want

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{1}{2 \cdot 2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} &= \frac{1}{3 \cdot 3} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{16} &= \frac{1}{4 \cdot 4} < \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\dots \end{aligned} \quad (3)$$

dus als we n termen van de reeks bij elkaar hebben opgeteld, is het resultaat

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} &< \\ 1 + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}_{=0} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)}_{=0} &= \\ = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Dit is altijd kleiner dan 2, en in een maatbeker van 2 liter kun je dus $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ liter water doen zonder dat hij ooit overloopt. Je houdt zelfs nog flink wat ruimte over, gezien de afschattingen in (3). Met middelen uit de hogere wiskunde kan bewezen worden dat de som van de hyperharmonische reeks (2) gelijk is aan $\frac{1}{6} \pi^2 = 1,64 \dots$

Naast de hyperharmonische reeks (2) zijn er ook andere hyperharmonische reeksen, zoals:

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{k^3} + \dots,$$

of nog algemener:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{k^p} + \dots \quad (4)$$

voor zekere p (die niet eens geheel behoeft te zijn; voor $p = \frac{1}{2}$ staat er bijvoorbeeld

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \dots).$$

Als $p > 2$ is, zal zo'n reeks zeker een eindige som hebben, want elke term $\frac{1}{k^p}$ is dan kleiner dan de bijbehorende term $\frac{1}{k^2}$ uit de reeks (2), en die reeks heeft al een eindige som. Als $p < 1$ is, zal zo'n reeks zeker géén eindige som hebben, want dan is $\frac{1}{k^p}$ *groter* dan de bijbehorende term $\frac{1}{k}$ van de harmonische reeks, en die heeft al geen eindige som. Hoe zit het met de waarden van p tussen 1 en 2?

$1 < p < 2$

Het antwoord luidt dat (4) ook voor deze waarden een *eindige* som heeft. Hier is een eenvoudig bewijs, gevonden door de Amerikanen Teresa Cohen en William Knight. Het werkt overigens niet alleen voor $1 < p < 2$, maar voor *alle* $p > 1$.

Geef de som van de eerste $2N+1$ termen van (4) aan met S_{2N+1} .

Neem weer even en oneven termen bij elkaar:

$$\begin{aligned} S_{2N+1} &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{(2N+1)^p} = \\ &= 1 + \left\{ \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{(2N)^p} \right\} + \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \dots + \frac{1}{(2N+1)^p} \right\}. \end{aligned}$$

Elke term binnen het *eerste* stel accolades is *groter* dan de corresponderende term

uit het *tweede* stel accolades, dus als we hetgeen binnen het tweede stel staat, vervangen door hetgeen er binnen het eerste stel staat, wordt het resultaat groter:

$$S_{2N+1} < 1 + 2 \left\{ \frac{1}{2^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{(2N)^p} \right\}$$

Je kunt nu een factor $\frac{1}{2^p}$ buiten de accolades brengen:

$$\begin{aligned} S_{2N+1} &< 1 + \frac{2}{2^p} \left\{ 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{N^p} \right\} \\ &= 1 + 2^{1-p} S_N. \end{aligned}$$

Omdat S_{2N+1} meer termen bevat dan S_N , is $S_N < S_{2N+1}$, dus

$$S_{2N+1} < 1 + 2^{1-p} S_{2N+1}, \text{ ofwel}$$

$$S_{2N+1} < \frac{1}{1 - 2^{1-p}}.$$

(Omdat $p > 1$, is $2^{1-p} < 1$ dus we mochten door het positieve getal $1 - 2^{1-p}$ delen.) Je ziet dus dat alle sommen S_{2N+1} beneden de vaste, van N onafhankelijke waarde $\frac{1}{1 - 2^{1-p}}$ blijven. Elke

som S_{2N} van een *even* aantal termen is kleiner dan zijn opvolger S_{2N+1} , dus deze sommen blijven ook allemaal onder deze waarde. De reeks (4) heeft daarom voor elke $p > 1$ een eindige som!

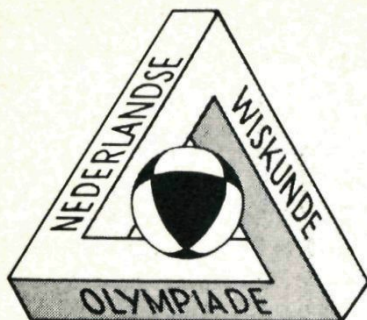
Opgave

Verifiëer dat voor $k > 2$ geldt

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{k-2} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$$

en bewijs hiermee direct (dus zonder vergelijking met $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$) dat de reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \text{ een eindige som heeft.}$$



Nederlandse Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de 20e Nederlandse Wiskunde Olympiade zal op de scholen plaatsvinden op vrijdag 3 april 1981 van 14 tot 17 uur. Begin maart zullen de secties wiskunde het materiaal hiervoor toegezonden krijgen. Deze Olympiade wordt georganiseerd door de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde (secretariaat: Jachtlaan 108, 7313 EC Apeldoorn).

In 1980 namen 2342 leerlingen van 217 scholen aan de eerste ronde deel. De beste 96 van hen kregen een uitnodiging voor de tweede ronde. Negen anderen mochten hieraan ook meedoen op grond van hun prestaties bij de Pythagoras Olympiade 1979/80. De opgaven van de tweede ronde vind je hieronder. In het volgende nummer komen de oplossingen. De prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1980 waren

1. Tonny Hurkens, Merletcollege, Cuyk
2. Jan Adriaan Leegwater, H. Jordanlyceum, Zeist
3. Erik Admiraal, Anton van Duinkerkencollege, Veldhoven
4. Bram Bouwens, SG Philips van Horne, Weert
5. Daan Krammer, SG Bataafse Kemp, Hengelo
6. Sieds van der Schaaf, Chr. Gymnasium, Leeuwarden
7. Matthijs Hebly, Mendelcollege, Haarlem
8. John Somers, Juvenaat HH, Bergen op Zoom
9. Paul van der Wagt, Baudartiuscollege, Zutphen
10. Erick de Vries, RSG Meppel

Opgaven van de 19e Nederlandse Wiskunde Olympiade

Tweede ronde: 28 augustus 1980, 13–16 uur.

1. Gegeven is dat de functie $x \rightarrow x^3 - ax + 1$ ($a \in \mathbb{R}$) drie verschillende reële nulpunten heeft.
Bewijs dat het nulpunt x_0 met de kleinste absolute waarde voldoet aan $\frac{1}{a} < x_0 < \frac{2}{a}$.
2. a. Bepaal het produkt van alle delers van 1980. *7,7005 · 10³*
b. Bepaal het produkt van alle delers van 1980^n ($n = 2, 3, 4, \dots$).
(Onder de *delers* van een positief geheel getal M verstaat men de positieve gehele getallen d waarvoor M/d een geheel getal is.)
3. Gegeven is een niet-rechthoekige driehoek ABC . D is het voetpunt van de hoogtelijn uit A , E dat van de hoogtelijn uit B en F dat van de hoogtelijn uit C . P is het midden van het lijnstuk EF , Q dat van FD en R dat van DE .
 p is de lijn door P loodrecht op de lijn BC , q de lijn door Q loodrecht op CA en r de lijn door R loodrecht op AB .
Bewijs dat p , q en r door één punt gaan.

4. In Venetianië is de kleinste munteenheid een dukaat. De minister van financiën geeft zijn ambtenaren de volgende opdracht: 'Ik wens zes soorten geldbiljetten, elk ter waarde van een geheel aantal dukaten. Die zes waarden dienen zo te zijn dat er een getal N bestaat met de volgende eigenschap.

Elk geldbedrag van n dukaten (n positief en geheel) waarbij $n \leq N$ is, kan worden betaald op zo'n manier dat van elke soort biljetten ten hoogste twee exemplaren worden gebruikt, hetzij om te betalen, hetzij om terug te geven. Ik wens die zes waarden bovendien zo, dat N zo groot mogelijk is.

Bepaal die zes waarden en geef daarbij een bewijs dat aan alle gestelde voorwaarden is voldaan.'

Los het probleem van die ambtenaren op.



Pythagoras Olympiade

Nieuwe opgaven (oplossingen inzenden vóór 28 april 1981)

- PO 25. Bewijs dat voor alle drietallen positieve reële getallen (a, b, c) geldt

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2} (a+b+c).$$

- PO 26. Vanuit een punt in de ruimte vertrekken vier stralen zo, dat alle zes hoeken tussen paren stralen onderling gelijk zijn.

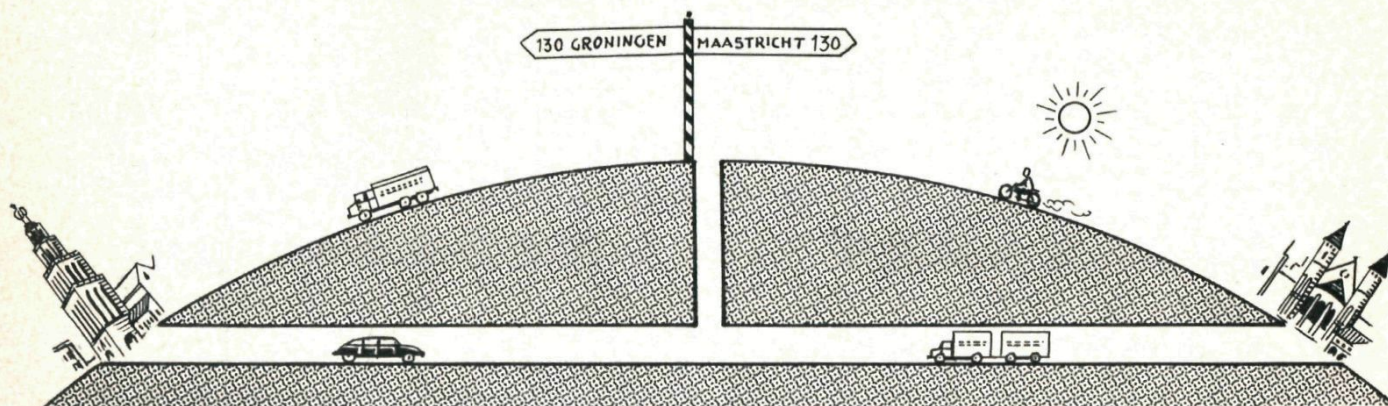
Bepaal van zo'n hoek de cosinus. $-\frac{1}{3}$

- PO 27. Bewijs dat men uit elk zevental gehele getallen er vier kan kiezen met een som die deelbaar is door 4.

Wedstrijdvoorwaarden en prijzen

- * Leerlingen van het voortgezet onderwijs kunnen hun oplossing van een of meer opgaven insturen aan: *Pythagoras Olympiade, Brederode 29, 2261 HG Leidschendam*. Let op de inzendtermijn en zorg voor voldoende frankering.
- * Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Elke oplossing moet op een nieuw vel beginnen.
- * Oplossingen dienen gemotiveerd en volledig uitgewerkt te zijn, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Slechts goed leesbare inzendingen worden bekeken.
- * Wie een aan zichzelf geadresseerde en als brief gefrankeerde open enveloppe meezendt, ontvangt na de inzendtermijn onze oplossingen.
- * Per opgave worden onder de goede oplosers twee boekebonnen van f 10,— verloot.
- * De opgaven van één jaargang vormen samen de *ladderwedstrijd*. De drie inzenders van de meeste goede oplossingen krijgen elk een boekebon van f 25,—.
- * De beste tien van de ladderwedstrijd die niet in een examenklas zitten, krijgen een uitnodiging voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Zij hoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

°Tussen krom en recht



De aarde is een bol. Als we ons van A naar B willen begeven, voert de kortste weg ons langs een grootcirkel van die bol. Maar . . . eigenlijk is er nog een kortere weg: dwars door de aarde heen langs een rechte lijn!

Heb je er enig idee van hoeveel het in afstand zou schelen als je, laten we zeggen van Groningen naar Maastricht, door een rechte tunnel kon rijden? In dit geval is de afstand over land langs de grootcirkel 260 km. Welke van de volgende afstanden benadert dit verschil het dichtste:

2 m, 20 m, 200 m, 2 km, 20 km?

En als we halverwege, bij Dieren in Gelderland, een gat zouden maken dat bij de tunnel uitkomt, hoe diep moeten we dan graven:

1 m, 10 m, 100 m, 1 km, 10 km?

Als je in beide gevallen een schatting hebt aangestreept, probeer dan ook na te gaan waar je op uitkomt met wat meetkunde en wat rekenwerk. Neem daarbij voor de straal van de aarde 6365 km (Preciezer: 6378, . . km langs de equator en 6356, . . km bij de polen, het is geen zuivere bol.)

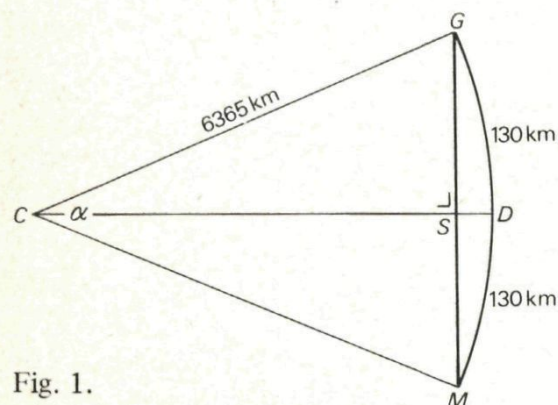


Fig. 1.

Voor wie er niet uitkomt

In fig. 1 is een doorsnede getekend door Groningen (G), Maastricht (M) en het middelpunt C van de aarde. Een maat voor de middelpuntshoek α (in radiaal) krijgen we door de lengte van de boog GM te delen door de aardstraal GC. Voor de tunnellengete kunnen we dan schrijven

$$GM = 2GS = 2GC \sin \frac{\alpha}{2} = \\ = 2GC \sin \left(\frac{\text{boog } GD}{GC} \right) = 259,982 \dots \text{ km.}$$

(Vergeet niet om voor de sinus je reken-dooosje op radiaal in te stellen).

De winst uit de tunnelweg blijkt dus niet meer dan . . . 18 m. Ofwel 0,007%.

De diepte van het gat bij Dieren zal dan ook wel niet veel voorstellen. Toch maar even rekenen. Met behulp van de stelling van Pythagoras in driehoek CSG vinden we:

$$DS = DC - SC = GC - \sqrt{GC^2 - SG^2} = \\ = 1,3 \dots \text{ km!}$$

Verrassend? Is er echt geen rekenfout gemaakt? We bekijken dit nog even nader.

Sterk verschillende verschillen

Figuur 2 geeft de helft van figuur 1, met de raaklijn DE in D . We vragen eerst: is DE langer dan de weg langs boog DG ?

Dit is inderdaad zo, maar het is niet direct zo duidelijk te zien omdat het moeilijk is om op het oog te schatten hoeveel lengte er in de kromming van de boog gaat zitten. Bekijk daarom figuur 3, waarin behalve het raaklijnstuk DE ook een wat betere benadering van de cirkelboog door de gebroken raaklijn $DE_1E_2E_3G$ getekend is. Trekken we stralen vanuit C door alle knik- en raakpunten E_i en R_i , dan geldt overal hetzelfde als in de grijze sector: $E_2R_2 < E_2'E_2'$.

Elke knikraaklijn die binnen de vorige ligt, is dus weer korter. En de limiet waar deze kleiner wordende lengten toe naderen is juist per definitie de lengte van de cirkelboog. Dus $DE > \text{boog } DG$. Hiermee geldt in driehoek EFG (fig. 2):

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{EF}{FG} = \frac{ED - FD}{DS} > \frac{\text{boog } GD - GS}{DS}.$$

De tangens gaat voor kleine α naar nul, dus de (kleinere, maar wel positieve) breuk rechts gaat dan zeker naar nul. Hieraan zien we dan dat het (halve) wegverschil (boog $GD - GS$) voor kleine α

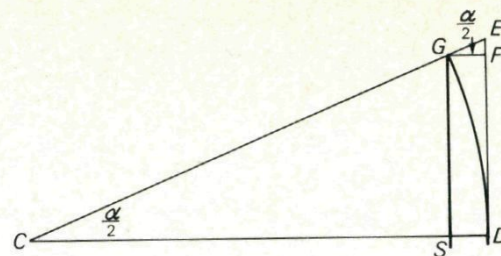


Fig. 2.

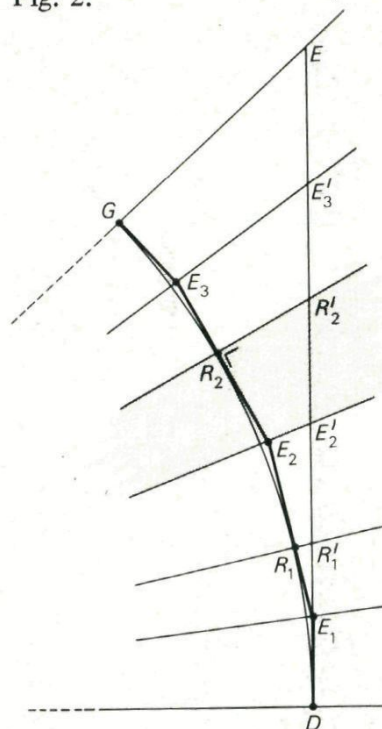
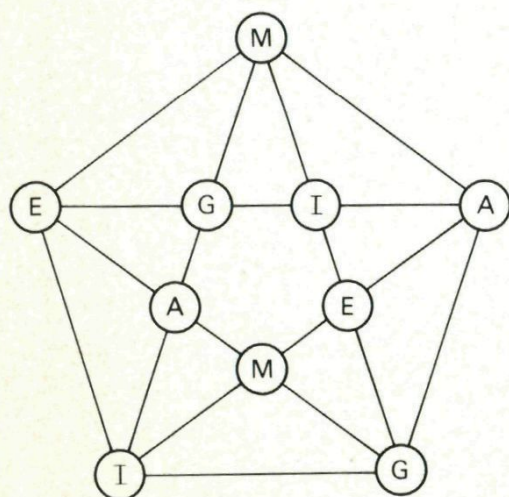


Fig. 3.

een orde kleiner is dan de gatdiepte DS . Dit klopt dus met de 18 m en de 1,3 km uit bovenstaande berekeningen.

°Zo magisch mogelijk



Aan de regelmatige vijfpuntige ster, het *pentagram*, zijn vaak allerlei toverkrachten toegekend. De ster zou bijvoorbeeld, op de grond getekend, bescherming bieden aan wie zich erbinnen bevindt.

Hiernaast is tweemaal het woord **MAGIE** te lezen, met de letters opvolgend door lijnen verbonden. Verplaats nu de letters in de figuur zo, dat dit woord op méér dan twee manieren te lezen is.

Wat is het maximum aantal?

°° Driehoeken in perspectief

In het artikel 'Als je liniaal te kort is . . .' in het vorige nummer is de *Stelling van Pappus* aan de orde geweest, één van de hoekstenen van de *Projectieve Meetkunde*. Deze tak van de wiskunde is voortgekomen uit de studie van de wetmatigheden die het *Perspectief-tekenen* beheersen. Aan dit onderwerp hebben we in nr. 2 aandacht besteed met het stukje 'Leerzame fouten'. We zullen nu iets vertellen over een andere fundamentele stelling van de projectieve meetkunde, de *Stelling van Desargues*.

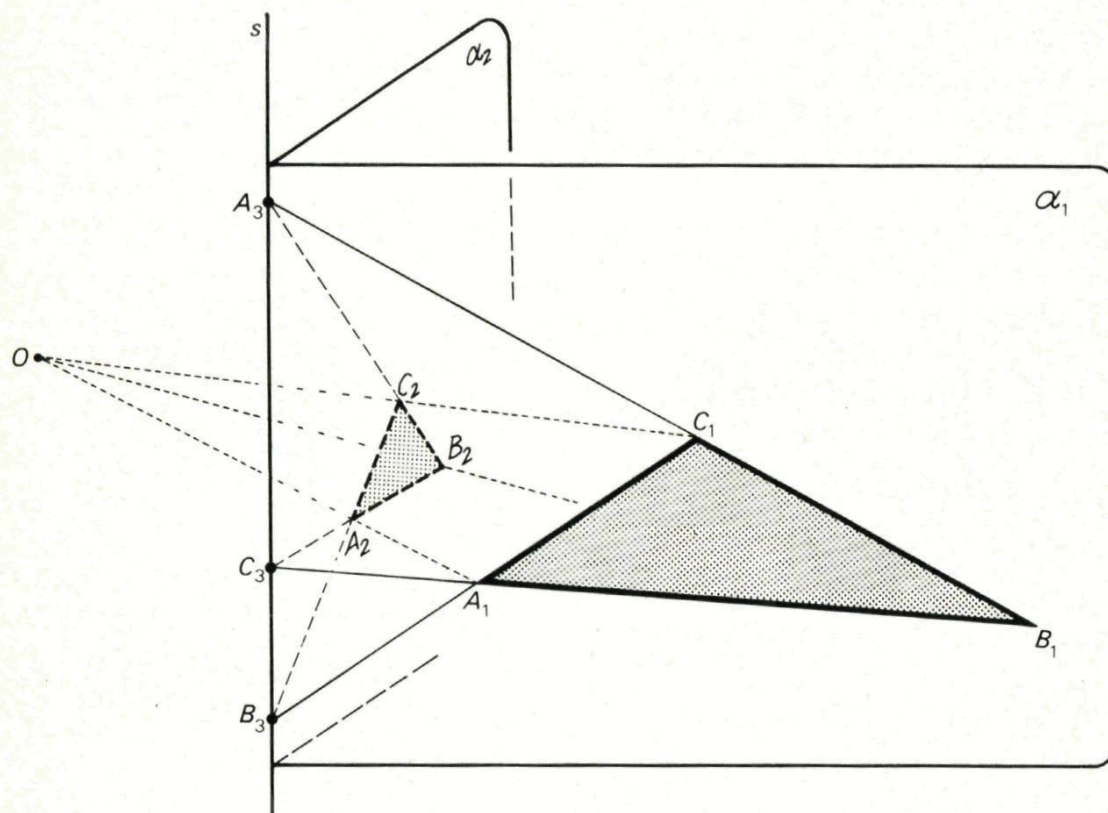


Fig. 1. Twee perspectieve driehoeken in verschillende vlakken.

Figuur 1 toont twee driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ in *perspectieve ligging*. We bedoelen daarmee dat A_1A_2 , B_1B_2 en C_1C_2 door één punt O gaan. Als je één oog bij O houdt, zie je de beelden van de twee driehoeken samenvallen. De driehoeken bevinden zich in twee verschillende vlakken α_1 en α_2 . Als je de zijden A_1B_1 en A_2B_2 verlengt, zullen ze elkaar precies op de snijlijn s snijden. Immers, het snijpunt C_3 van s en A_1B_1 ligt in het vlak γ door O , A_1 en B_1 . Maar ook de punten A_2 en B_2 liggen in γ . A_2B_2 is dus de snijlijn van α_2 en γ . C_3 ligt ener-

zijds in γ en anderzijds op s , dus in α_2 . C_3 moet dus op de snijlijn A_2B_2 van α_2 en γ liggen. Met andere woorden: A_1B_1 en A_2B_2 snijden elkaar in het punt C_3 op s . Evenzo liggen de snijpunten B_3 van A_1C_1 en A_2C_2 en A_3 van B_1C_1 en B_2C_2 op s .

Figuur 1 is zelf natuurlijk geen ruimtelijke figuur, maar een plat plaatje, een projectie. Ook in de vlakke figuur zijn echter de driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ *perspectief* vanuit O en ook in de vlakke figuur liggen de drie punten A_3 , B_3 en C_3 op één lijn.

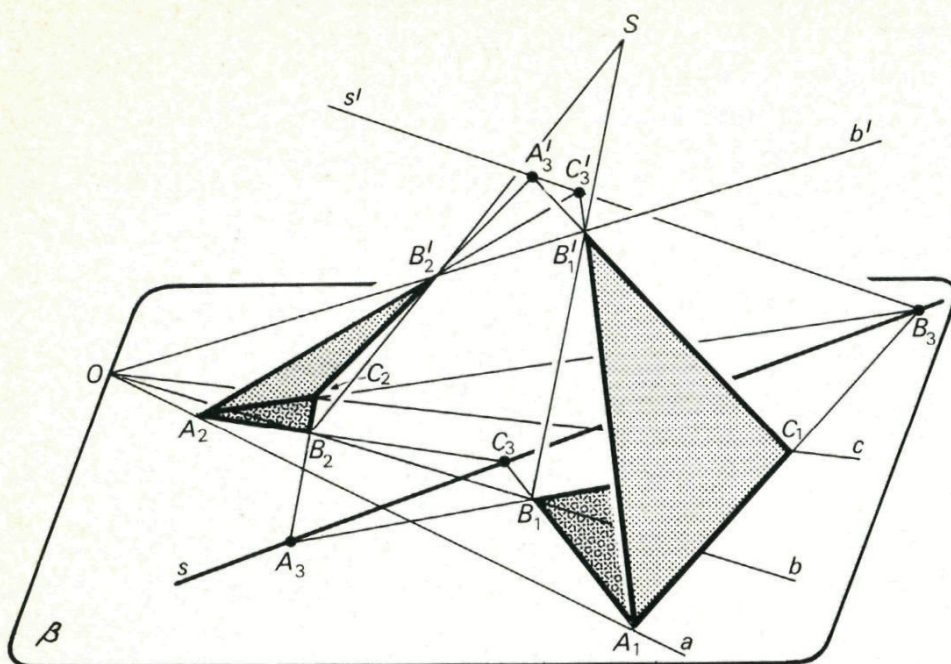


Fig. 2. Perspectieve driehoeken in de ruimte worden vanuit S geprojecteerd tot perspectieve driehoeken in het vlak β .

Eenzelfde ruimtelijke figuur kun je op talloze manieren op een vlak projecteren en in de ruimte zijn er natuurlijk ook ontzaglijk veel paren perspectieve driehoeken waarmee je dit kunt doen. Het lijkt daarom niet zo vreemd te denken dat *elk* paar perspectieve driehoeken *in één vlak* wel als een projectie opgevat kan worden van een ruimtelijk paar in twee elkaar snijdende vlakken. Als dat zo is, dan liggen ook de drie snijpunten A_3, B_3 en C_3 altijd op één lijn.

Het is inderdaad niet moeilijk om bij zo'n vlak stel perspectieve driehoeken een ruimtelijk paar perspectieve driehoeken te maken. Laat maar in een vlak β drie lijnen a, b en c door een punt O gegeven zijn, met A_1 en A_2 op a, B_1 en B_2 op b , en C_1 en C_2 op c . De driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ zijn dus perspectief vanuit O (fig. 2). Neem een punt S buiten β en neem een lijn $b' \neq b$ door O in het vlak door S en b . De snijpunten van b' met SB_1 en SB_2 noemen we B_1' en B_2' . Nu zijn $A_1B_1'C_1$ en $A_2B_2'C_2$ twee in ver-

schillende vlakken α_1 en α_2 gelegen driehoeken die vanuit O perspectief zijn. A_3', B_3' en C_3' liggen op één lijn: de snijlijn s' van α_1 en α_2 . Als je met één oog vanuit S naar β kijkt, vallen $b', B_1', B_2', A_3', B_3', C_3'$ samen met $b, B_1, B_2, A_3, B_3, C_3$. Inderdaad liggen dus A_3, B_3 en C_3 op één lijn: de projectie s van s' vanuit S op β . We hebben hier net als in het artikel 'Als je liniaal te kort is...' een snijpuntsstelling ontdekt die thuishoort in de *projectieve meetkunde*. Het is de

Stelling van Desargues: Stel gegeven zijn drie lijnen a, b en c door één punt O , met op a punten A_1 en A_2 , op b punten B_1 en B_2 en op c punten C_1 en C_2 . Dan liggen de punten $A_3 = B_1C_1 \cap B_2C_2$, $B_3 = A_1C_1 \cap A_2C_2$ en $C_3 = A_1B_1 \cap A_2B_2$ op één lijn.

Net als bij de *stelling van Pappus* werken we hier in het *projectieve vlak*, dwz. het

vlak, uitgebreid met de oneindig verre punten waardoor evenwijdige lijnen een oneindig ver snijpunt krijgen. We hebben in fig. 3 drie gevallen van de stelling van Desargues geïllustreerd. In twee ervan komt een oneindig ver snijpunt voor.

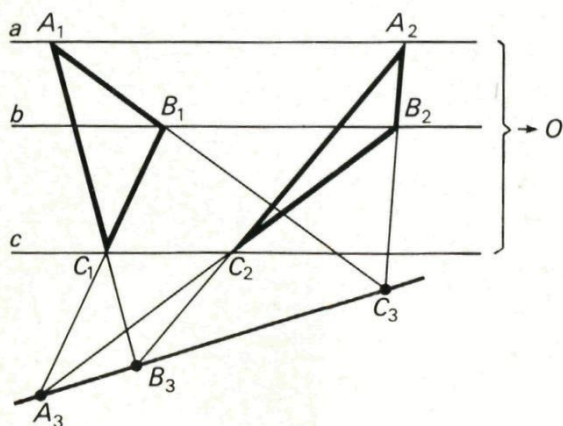
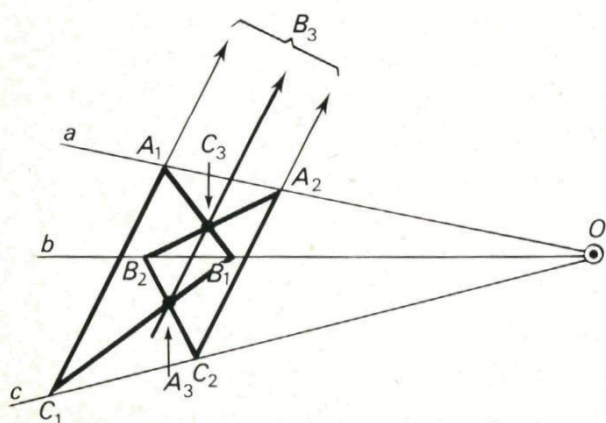
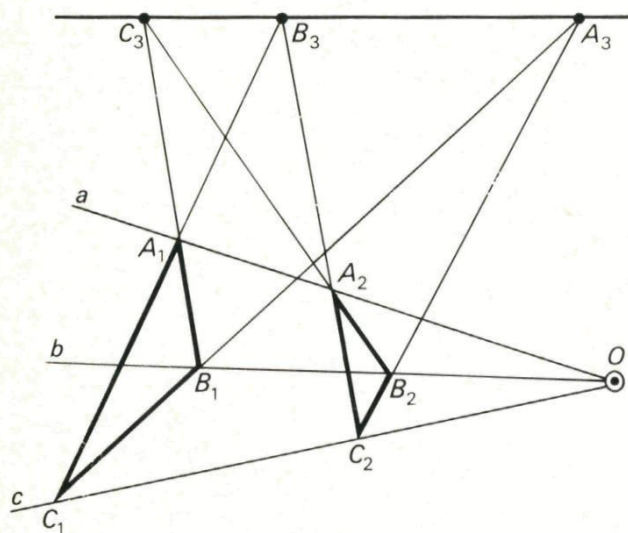


Fig. 3. Drie verschillende Desargues-figuren.

Girard Desargues

De man naar wie de stelling hierboven genoemd is, de Fransman *Girard Desargues*, leefde van 1591 tot 1661. Hij was architect in Lyon. Desargues kan als een van de grondleggers van de projectieve meetkunde worden beschouwd. Het idee om het vlak uit te breiden met oneindig verre punten is al in zijn werk aanwezig. Zijn geschriften zijn echter in een weinig toegankelijke stijl geschreven en ook in de omgang was hij niet gemakkelijk. Hij had met veel mensen ruzie. Op een gegeven moment had hij bijvoorbeeld in Parijs overal pamfletten laten verspreiden gericht tegen de theorieën van een zekere père Dubreuil over het perspectieftekenen. In die pamfletten werd een beloning uitgelooft voor iedereen die kon bewijzen dat Desargues' theorieën over deze materie niet de beste waren!

De omgekeerde stelling

In de stelling van Desargues heet O het *perspectiviteitscentrum* van de twee driehoeken en de lijn door A_3 , B_3 en C_3 de *perspectiviteitsas*. Kort geformuleerd luidt de stelling dus: hebben twee driehoeken een perspectiviteitscentrum, dan hebben ze ook een perspectiviteitsas. De omgekeerde stelling geldt ook (zie fig. 4):

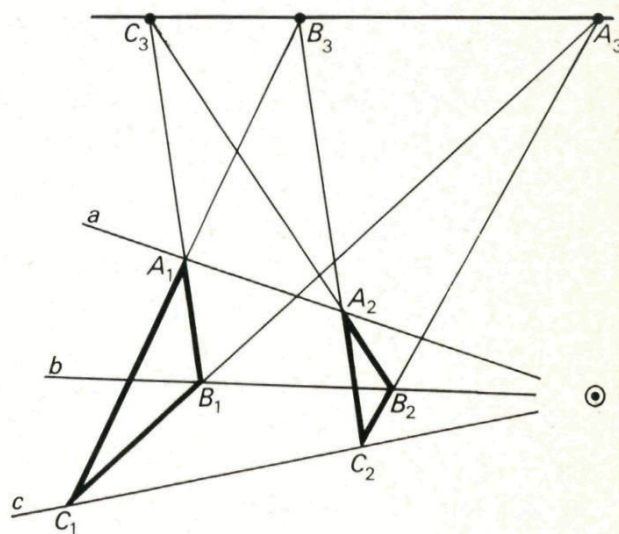


Fig. 4. De duale stelling van Desargues.

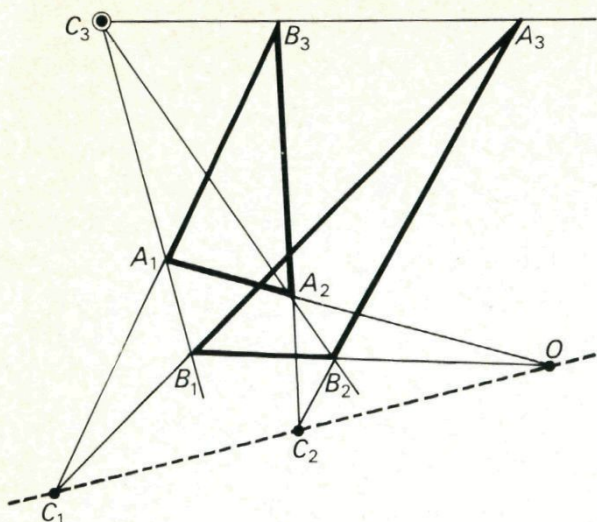


Fig. 5. Het bewijs van de duale stelling.

Omgekeerde stelling van Desargues:
 Hebben twee driehoeken een perspectiviteitsas, dan hebben ze ook een perspectiviteitscentrum.

Het bewijs hiervan volgt merkwaardigerwijs onmiddellijk uit de gewone stelling van Desargues, nu toegepast op $A_1A_2B_3$ en $B_1B_2A_3$ die vanuit C_3 perspectief zijn. Hun perspectiviteitsas is OC_2C_1 , dus de lijn C_1C_2 gaat door het snijpunt O van A_1A_2 en B_1B_2 (zie fig. 5).

Tien paren perspectieve driehoeken

We hebben nu al in één figuur twee paren perspectieve driehoeken ontdekt: $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ zijn perspectief vanuit O en $A_1A_2B_3$ en $B_1B_2A_3$ zijn perspectief vanuit C_3 . Er zijn nog veel meer van die pa-

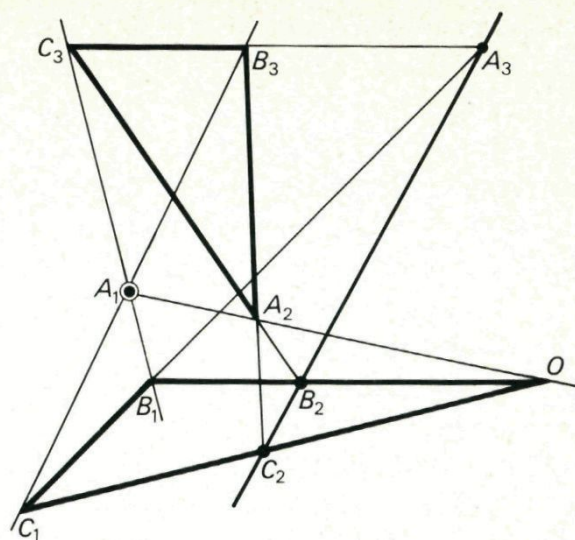


Fig. 6.

ren. De figuur telt 10 punten en 10 lijnen, op elke lijn 3 punten en door elk punt 3 lijnen. Elk van die 10 punten is perspectiviteitscentrum van twee driehoeken. Zo is bijvoorbeeld A_1 het centrum van C_1B_1O en $B_3C_3A_2$. De perspectiviteitsas is hier $A_3B_2C_2$ (fig. 6).

Het ontoegankelijke gebied

Net als de stelling van Pappus kan ook de stelling van Desargues gebruikt worden om het probleem van de te korte liniaal of het probleem van het te kleine papier op te lossen. Je kunt dit zelf controleren. Hier is nog zo'n toepassing. Stel dat een lijn p verlengd moet worden voorbij een ontoegankelijk gebied G . Figuur 7 toont hoe je via de stelling van Desargues een punt A op p aan de andere kant van G kunt vinden. Door twee van zulke punten is de verlengde lijn volledig bepaald.

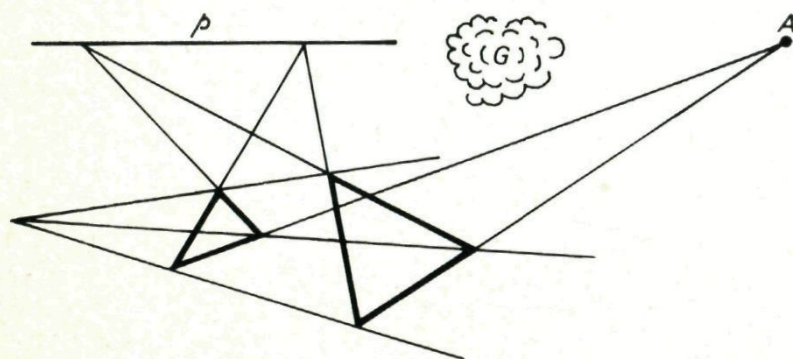


Fig. 7. Het verlengen van een lijn p langs een omweg.

Een symmetrische notatie

We laten ten slotte nog een heel eenvoudige manier zien waarop de figuur van de stelling van Desargues kan ontstaan. Ga terug naar fig. 2 en trek de lijnen $SA_3'A_3$ en $SC_3'C_3$ (waarom liggen die drietallen punten op een lijn?). We hebben 5 punten, nl. S , A_3' , C_3' , B_2' en B_1' , in de ruimte. Er zijn 10 verbindingslijnen van twee van zulke punten en 10 verbindingsvlakken door drie van zulke punten. Snijd je deze lijnen en vlakken met het vlak β dan krijg je 10 *snijpunten* en 10 *snijlijnen* die tezamen de Desargues-figuur vormen.

In het algemeen ontstaat een figuur van Desargues door uit te gaan van 5 punten in de ruimte (geen viertal ervan in één vlak), en de 10 verbindingslijnen en 10 verbindingsvlakken te snijden met een ander vlak. Dit geeft aan hoe je een

mooie symmetrische notatie voor de figuur kunt ontwerpen. De 5 punten in de ruimte noem je R_1 t/m R_5 . Het snijpunt van R_1R_2 met het vlak β heet P_{12} en de snijlijn van het vlak door R_3 , R_4 en R_5 (waar R_1 en R_2 dus *niet* in zitten) met β noem je L_{12} . Evenzo voor de andere punten en lijnen. In fig. 8 is deze notatie gebruikt. Voor de duidelijkheid zijn niet alle lijnen benoemd.

Als i, j, k, l en m de cijfers 1, 2, 3, 4 en 5 voorstellen, genomen in de een of andere volgorde, geldt algemeen

1. P_{ij} ligt op L_{kl} , L_{lm} en L_{km} ;
2. L_{ij} gaat door P_{kl} , P_{lm} en P_{km} ;
3. P_{ij} is het perspectiviteitscentrum van de driehoeken $P_{ik}P_{il}P_{im}$ en $P_{jk}P_{jl}P_{jm}$. L_{ij} is van deze driehoeken de perspectiviteitsas.

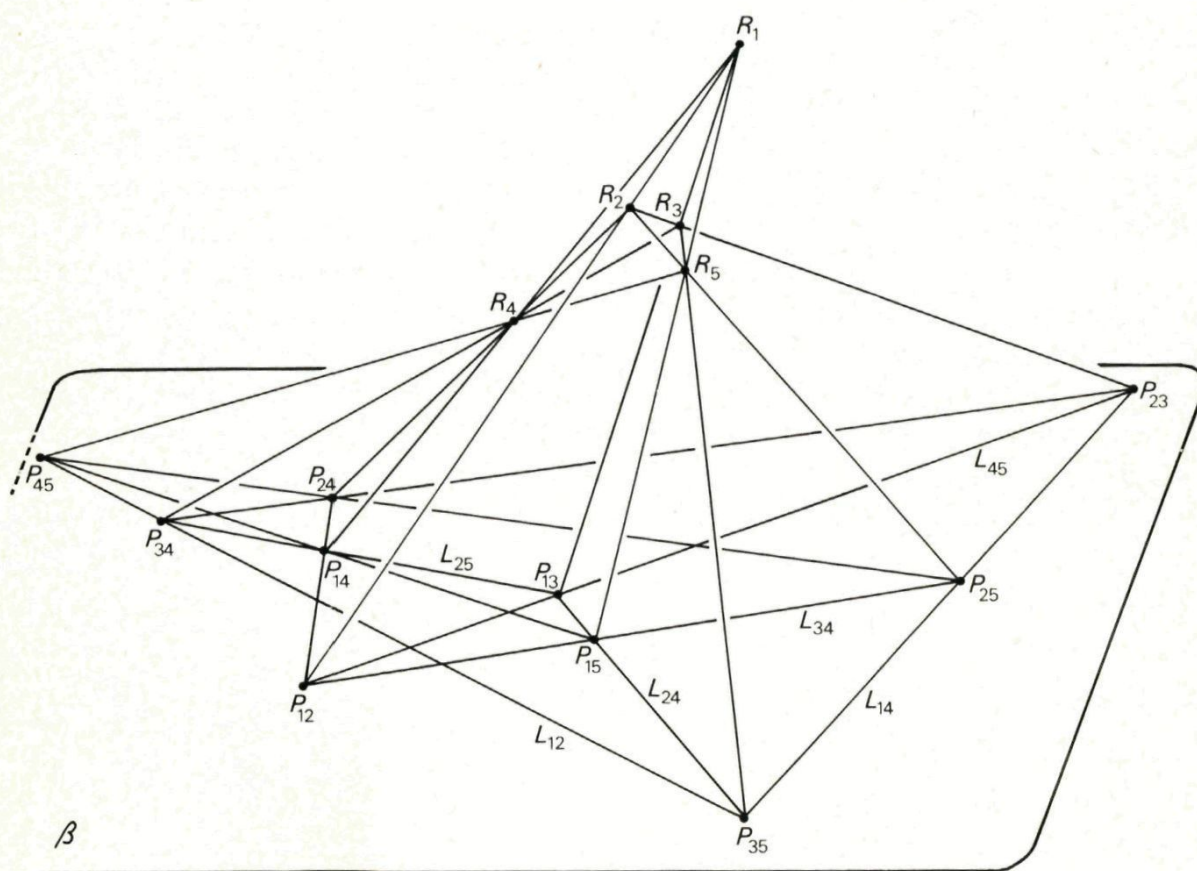


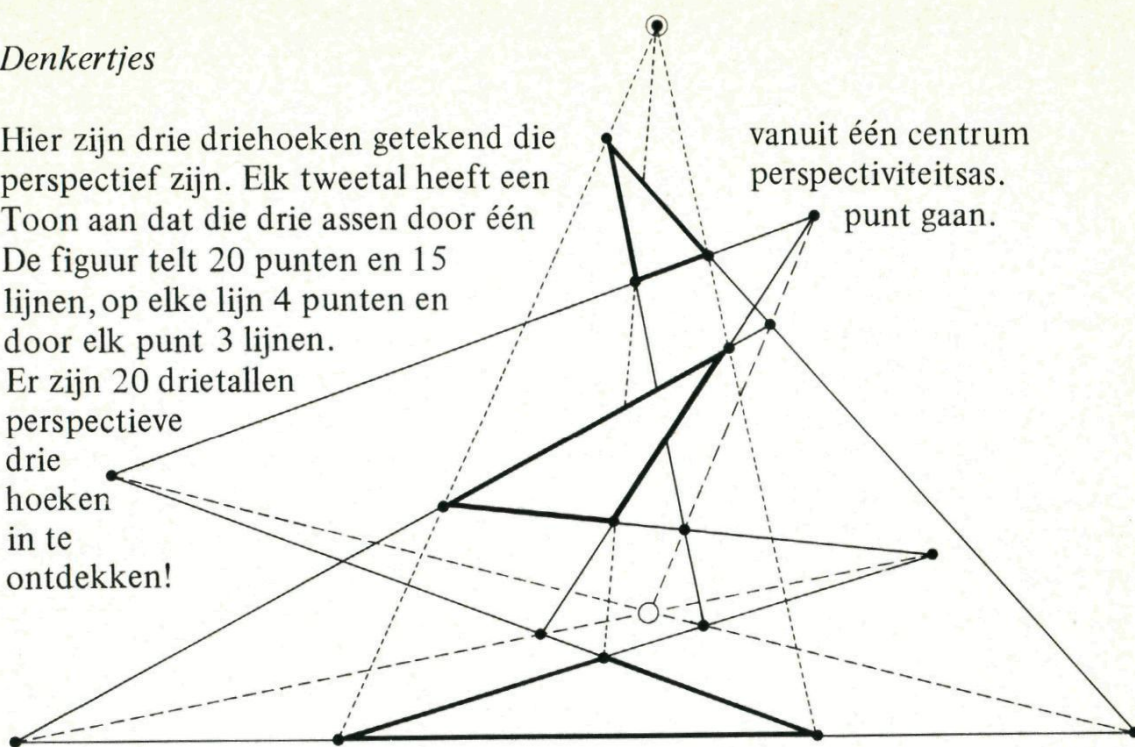
Fig. 8. Een door 5 punten in de ruimte voortgebrachte Desargues-figuur in het vlak β .



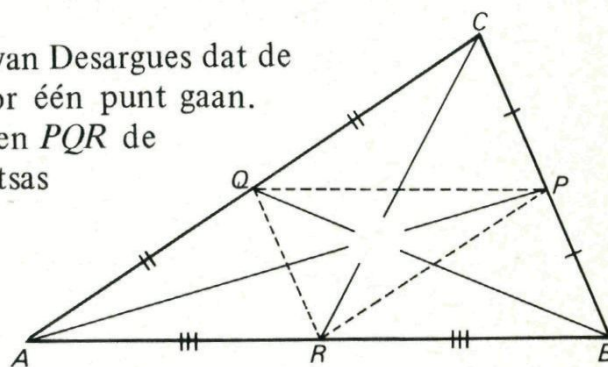
Denkertjes

1. Hier zijn drie driehoeken getekend die perspectief zijn. Elk tweetal heeft een Toon aan dat die drie assen door één De figuur telt 20 punten en 15 lijnen, op elke lijn 4 punten en door elk punt 3 lijnen. Er zijn 20 drietallen perspectieve drie hoeken in te ontdekken!

vanuit één centrum perspectiviteitsas. punt gaan.



2. Bewijs met de omgekeerde stelling van Desargues dat de zwaartelijnen van een driehoek door één punt gaan. (Merk op dat de driehoeken ABC en PQR de oneindig verre lijn als perspectiviteitsas hebben.)



°Let op je salaris



Klaas en Trijn zijn van school af en hebben op verschillende kantoren een baan gevonden. Klaas begint met een salaris over het eerste jaar van f 20 000,—, met een jaarlijkse verhoging van f 800,—.

Trijn krijgt f 10 000,— per *half* jaar, met een *half*jaarlijkse verhoging van f 200,—. Allebei voelen ze zich hier erg tevreden mee. Wie van beide met het meeste recht?

° Slim staartdelen

We wijzen op twee handigheidjes die in sommige gevallen te gebruiken zijn bij het omzetten van een gewone breuk in repeterende decimale vorm.

Complementaire periodehelften

Kijk eens naar de aan het begin van het artikel 'Repeterende breuken en delertesten' (elders in dit nummer) gegeven decimale ontwikkelingen. Zoek eruit de repeterende breuken met een *even* periodelengte. Deel de periode in tweeën, schrijf de beide groepen onder elkaar en tel op.

Als je het goed doet vind je allemaal negens bij $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{23}$ (daar met opzet zó genoteerd) en $\frac{1}{26}$. Bijvoorbeeld: $\frac{1}{17} = 0,0588235294117647$ en

$$\begin{array}{r} 05882352 \\ 94117647 \\ \hline 99999999 \end{array} +$$

We zeggen hier dat de cijfers in de beide halve perioden *complementair* zijn (ten opzichte van 9).

Ook als de teller niet 1 is, blijft dit gelden. Probeer het maar.

Voor breuken met *oneven* periodelengte geldt er niet zoiets, en helaas geldt de eigenschap ook niet voor *alle* breuken met even 'lengte'. We sloegen er zojuist één over: $\frac{1}{21}$. Verder klopt het niet voor $\frac{1}{33}$, $\frac{1}{39}$, $\frac{1}{51}$, Algemeen: het gaat mis voor noemers die géén priemgetal zijn en waarvan een van de factoren een oneven lengte heeft. (De noemers van de laatstgenoemde breuken zijn allemaal drievouden, en $\frac{1}{3} = 0,3$ met de oneven lengte 1.)

We geven hier geen bewijs. De eigenschap kan ons de helft van het werk besparen bij een staartdeling, mits we weten wat de lengte van de periode is en wat het begin is van de repeterende cijfergroep. Voor wat dit laatste betreft geldt nog: als er

geen factoren 2 of 5 in de noemer zitten, begint de repeterende groep direct na de komma. Ongeacht wat de teller is.

Voorbeeld. Stel dat je weet dat bij 73 een lengte 8 hoort, en je bent met staartdelen gekomen tot: $\frac{1}{73} \approx 0,0136$. Dan zijn de volgende vier cijfers 9863 direct op te schrijven als 9-complement van de eerste vier.

Kleine resten

De andere truc geldt wél voor alle noemers. We kijken eerst naar stambreuken, met een teller 1. Als in de staartdeling op zeker moment een *kleine* rest optreedt (bij voorkeur niet boven de 10) kan met weinig moeite het aantal uitkomstcijfers *verdubbeld* worden; we laten dit zien aan de hand van het voorbeeld $\frac{1}{43}$.

De gewone staartdeling geeft na de zevende decimaal voor het eerst een kleine rest: 6. We schrijven dit als

$$\frac{1}{43} = 0,023255(8 + \frac{6}{43}),$$

met op de zevende decimale plaats het gebroken getal $8\frac{6}{43}$. Uit het hoofd links en rechts met 6 vermenigvuldigen geeft:

$$\frac{6}{43} = 0,139534(8 + \frac{36}{43}),$$

ingevuld in de eerste uitkomst

$$\frac{1}{43} = 0,0232558139534(8 + \frac{36}{43})$$

met *veertien* correcte decimalen en met nog een breukdeel op de laatste plaats. Met de rest 36 delen we gewoon verder en vinden dan na de decimalen 8372 een rest 4. We vermenigvuldigen weer uit het hoofd

$$\frac{1}{43} = 0,02325581395348837(2 + \frac{4}{43})$$

met 4 en elimineren het breukdeel $\frac{4}{43}$. We hebben zo een resultaat met 36 decimalen (en een rest van 16); in dit geval is dat overbodig veel omdat de uitkomst al na 21 decimalen gaat repeteren.

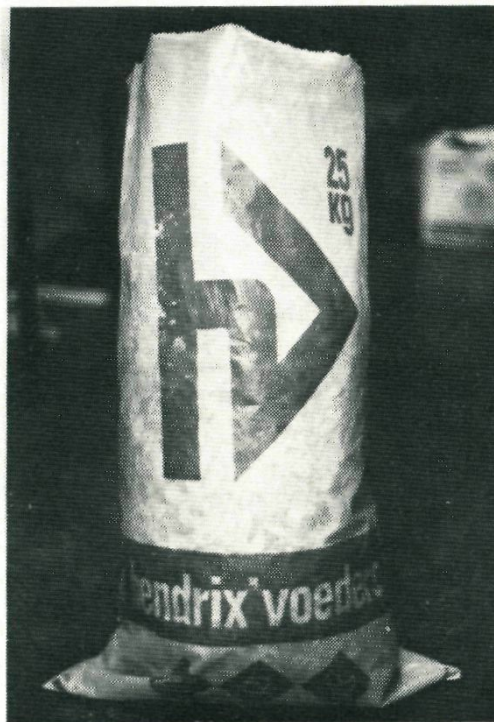
Als de teller van de oorspronkelijke breuk niet 1 is, is de methode ook toepasbaar. Alleen moet je dan eerst met de staartdeling doorgaan tot alle cijfers uit de teller 'op' zijn en dan wachten op een rest 1.

De lezer mag zelf proberen de methode

$$\frac{1}{97} = 0,010309278350515463917525773195876288659793814432989690721649484536082474226804123711340206185567 \dots$$

toe te passen op $\frac{1}{97}$. Na 2 decimalen is de rest 3, na 4 decimalen 9, na 11 decimalen 5 en na 22 decimalen 25. Ook deze laatste rest is goed bruikbaar omdat eenvoudig uit het hoofd kan worden vermenigvuldigd met 100 en gedeeld door 4. De 'rest' wordt dan $25 \cdot 25 = 625 = 6 \cdot 97 + 43$, dat wil zeggen dat bij de 44ste decimaal nog 6 moet worden bijgeteld. Na nog viermaal gewoon delen wordt de halve periode bereikt waarna via de complement-eigenschap direct de volgende 48 decimalen kunnen worden opgeschreven:

Zakversmalling



Plastic vuilniszakken worden gemaakt in de vorm van twee rechthoeken, die aan de twee lange zijden en aan één korte zijde aan elkaar vastzitten. Aan de andere korte zijde is dan de opening van de zak. Als we zo'n zak volstouwen met homogeen materiaal, zoals houtzaagsel, dan gaat de zak rond staan.

Vraag: Hoeveel procent smaller is de volle zak t.o.v. de platte lege zak?

Internationale wiskundewedstrijd

Mersch, Luxemburg, 1980

Oplossingen bij de opgaven 1, 2, 4 en 5

(Zie voor 3 en 6 het vorige nummer)

1. Bepaal alle functies f van $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{Q}$ die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:

(1) $f(1) = 2$.

(2) $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$ voor alle x en y uit $\mathbb{Q}$.

($\mathbb{Q}$ is de verzameling van alle rationale getallen.)

Oplossing

Voor $x = 1$ volgt uit (2): $\forall y \in \mathbb{Q}: f(y+1) = f(y) + 1$. Herhaalde toepassing hiervan geeft $\forall n \in \mathbb{Z}$
 $\forall y \in \mathbb{Q}: f(y+n) = f(y) + n$ (3). In het bijzonder volgt met (1): $\forall n \in \mathbb{Z}: f(n) = n + 1$ (4).

Voor willekeurige $r \in \mathbb{Q}$ met $r = p/q$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) volgt voor $x = r$ en $y = q$ uit (2):

$$f(p) = f(r)f(q) - f(r+q) + 1.$$

Met eenmaal (3) en tweemaal (4) geeft dit $p + 1 = f(r) \cdot (q + 1) - (f(r) + q) + 1$, ofwel $p + q = f(r) \cdot q$, ofwel $f(r) = r + 1$. Deze functie blijkt inderdaad aan de beide voorwaarden (1) en (2) te voldoen, en is dus de enige oplossing van het vraagstuk.

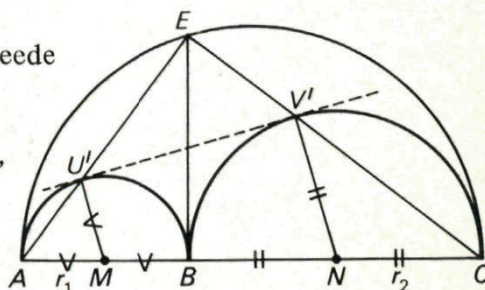
2. Op een lijn liggen de punten A, B en C met B tussen A en C . Aan dezelfde kant van de lijn AC beschrijft men drie halve cirkels met middellijnen AB, BC en AC . De gemeenschappelijke raaklijn in B aan de eerste twee halve cirkels snijdt de derde in E . De raakpunten van de andere gemeenschappelijke raaklijn aan de eerste twee halve cirkels noemt men U en V .

Bepaal de verhouding $\frac{\text{opp } \triangle EUV}{\text{opp } \triangle EAC}$ als functie van $r_1 = \frac{1}{2} AB$ en $r_2 = \frac{1}{2} BC$.

Oplossing

Noem de snijpunten van EA met de eerste, en van EC met de tweede halve cirkel U' en V' . We zullen aantonen dat $U = U'$ en $V = V'$, met andere woorden dat $U'V'$ de beide halve cirkels raakt.

$\angle AU'B = \angle AEC = \angle BV'C = 90^\circ$. Dus $EU'BV'$ is een *rechthoek*, dus $\angle V'U'B = \angle EBU' = 90^\circ - \angle MBU' = 90^\circ - \angle MU'B$, dus $V'U'M$ is een *rechte hoek*. $U'V'$ is daarom een *raaklijn* aan de eerste halve cirkel. Evenzo laat men zien dat het ook een raaklijn aan de tweede is, dus $U = U'$ en $V = V'$.



$$\text{Nu geldt } \frac{\text{opp } \triangle EUV}{\text{opp } \triangle EAC} = \frac{\frac{1}{2} EU \cdot EV}{\frac{1}{2} EA \cdot EC} = \frac{VB}{EA} \cdot \frac{UB}{EC} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

4. Gegeven zijn twee cirkels die elkaar (inwendig of uitwendig) raken in een punt P . Een lijn die één der cirkels in een punt A raakt, snijdt de andere cirkel in B en C .

Toon aan dat de lijn PA bissectrice is van één der hoeken gevormd door de lijnen BP en PC .

Oplossing

Eerst wat voorkennis. Kies je twee vaste punten B en C op een cirkel en een variabel punt P op één van de twee cirkelbogen tussen B en C , dan zijn alle hoeken BPC *gelijk* (fig. 1, zie voor een bewijs het vorige nummer, blz. 51). Is M het midden van de cirkelboog tegenover P , dan zijn dus de hoeken BPM en MPC gelijk: PM is de *bissectrice* van hoek BPC (fig. 2). Het midden N van de andere cirkelboog BC ligt diametraal tegenover M , dus hoek MPN is recht, en daarom is PN de *buitenbissectrice* van hoek BPC . De beide bissectrices van hoek BPC gaan dus door de *middens* van de bogen BC .

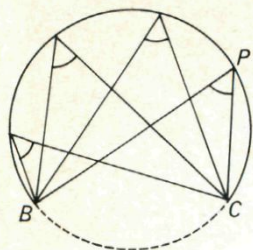


Fig. 1.

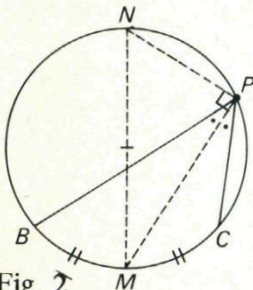
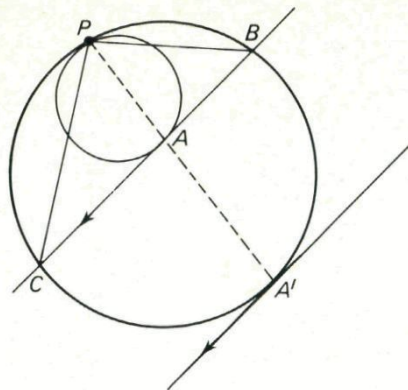
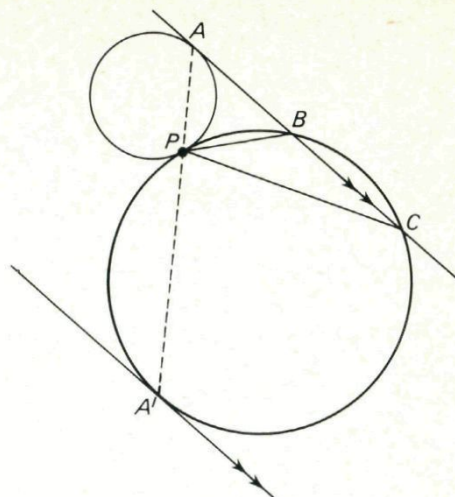


Fig. 2.



inwendig rakende cirkels
Fig. 3.



uitwendig rakende cirkels

Nu het bewijs van de opgave (fig. 3). De puntvermenigvuldiging met centrum P die de cirkel door A overvoert in de cirkel door B en C , brengt A naar een punt A' . Lijnen gaan over in evenwijdige lijnen, en raaklijnen in raaklijnen, dus de raaklijn in A gaat over in de raaklijn in A' , en die is evenwijdig aan zijn origineel, d.w.z. evenwijdig aan BC . Maar dan moet A' het *midden* zijn van een van de bogen BC , dus PA' ($= PA$) is een bissectrice van hoek BPC .

5. Tien spelers begonnen te spelen, ieder met hetzelfde geldbedrag. Om beurten wierpen zij vijf dobbelstenen. Wanneer een speler bij een worp n ogen gooide, betaalde hij aan elk van zijn medespelers een bedrag, gelijk aan $\frac{1}{n}$ maal het bedrag dat die medespeler op dat moment bezat. Zij wierpen en betaalden om de beurt. Bij de tiende worp werden er 12 ogen gegoooid, en na betalen bleek iedere speler precies evenveel geld te hebben als bij het begin van het spel. Bepaal, indien mogelijk, voor elk van de negen voorafgaande worpen het totale aantal ogen.

Oplossing

Noem de spelers S_1 t.e.m. S_{10} en het aantal ogen bij de i -de worp n_i . We mogen het beginbedrag van elke speler op 1 gulden stellen. Er is dus tijdens het spel steeds 10 gulden in omloop. Tot en met de i -de worp hebben de spelers $S_{j+1}, \dots, S_{10}$ bij elke beurt allemaal hetzelfde bedrag ontvangen. Stel dat ze na i worpen ($i = 1, \dots, j$) elk een bedrag van x_i gulden bezaten.

Omdat alle spelers ten slotte weer met 1 gulden eindigden, moesten vanaf de j -de worp de spelers $S_1, \dots, S_j$ ook steeds gelijke bedragen bezitten, want vanaf de j -de worp zijn zij allemaal op dezelfde wijze behandeld. Noem het bedrag dat ze na i worpen ($i = j, j+1, \dots, 10$) bezaten y_i .

Uit de gegevens volgt $x_{i+1} = (1 + \frac{1}{n_{i+1}}) x_i$ (1), en $y_{i+1} = (1 + \frac{1}{n_{i+1}}) y_i$ (2).

Speler S_{i+1} betaalde bij de $(i+1)$ -e beurt aan de andere spelers samen in totaal een bedrag van $(10 - x_i)/n_{i+1}$ gulden (want de andere spelers hadden op dat moment samen $10 - x_i$). Er geldt dus

$$y_{i+1} = x_i - \frac{1}{n_{i+1}} (10 - x_i) = (1 + \frac{1}{n_{i+1}}) x_i - \frac{10}{n_{i+1}} = x_{i+1} - \frac{10}{n_{i+1}} \quad (3).$$

Hieruit volgt via (1) en (2) en nog eens (3), maar nu met i in plaats van $i+1$

$$x_{i+1} - \frac{10}{n_{i+1}} = (1 + \frac{1}{n_{i+1}}) (x_i - \frac{10}{n_i}) = x_{i+1} - \frac{10}{n_i} (1 + \frac{1}{n_{i+1}}).$$

Uit deze vergelijking valt x_{i+1} weg, en na vereenvoudiging ontstaat $n_i = 1 + n_{i+1}$. Omdat gegeven is dat $n_{10} = 12$ volgt hieruit $n_9 = 13$, $n_8 = 14$, $\dots$, $n_1 = 21$.

Antwoorden en oplossingen

bij: Repeterende breuken en delertesten

$a =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$d = 2$	—	1	—	1	—	1	—	1	—	1	—	1	—	1	—	1
3	2	—	1	2	—	1	2	—	1	2	—	1	2	—	1	2
4	—	2	—	1	—	2	—	1	—	2	—	1	—	2	—	1
5	4	4	2	—	1	4	4	2	—	1	4	4	2	—	1	4
6	—	—	—	2	—	1	—	—	—	2	—	1	—	—	—	2
7	3	6	3	6	2	—	1	3	6	3	6	2	—	1	3	6
8	—	2	—	2	—	2	—	1	—	2	—	2	—	2	—	1
9	6	—	3	6	—	3	2	—	1	6	—	3	6	—	3	2
10	—	4	—	—	—	4	—	2	—	1	—	4	—	—	—	4
11	10	5	5	5	10	10	10	5	2	—	1	10	5	5	5	10
12	—	—	—	2	—	2	—	—	—	2	—	1	—	—	—	2
13	12	3	6	4	12	12	4	3	6	12	2	—	1	12	3	6
14	—	6	—	6	—	—	—	3	—	3	—	2	—	1	—	6
15	4	—	2	—	—	4	4	—	—	2	—	4	2	—	1	4
16	—	4	—	4	—	2	—	2	—	4	—	4	—	2	—	1
17	8	16	4	16	16	16	8	8	16	16	16	4	16	8	2	—

bij: Rare reeksen

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} &= 1 + \frac{1}{8} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k^3} < \frac{9}{8} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \left[\frac{1}{k-2} - \frac{2}{k-1} + \frac{1}{k} \right] = \\
 &= \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} 1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \\ \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \\ \dots \\ \frac{1}{n-3} - \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1} + \\ \frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n} \end{array} \right] = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) < \frac{11}{8}.
 \end{aligned}$$

Voor alle n geldt dus $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} < \frac{11}{8}$ en de *oneindige* reeks $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ heeft dus een *eindige* som.

bij: Zo magisch mogelijk

Met in de kleine vijfhoek vanaf M de letters A-G-I-E *linksom* staat er op *acht* manieren MAGIE.
(Uit: *Mathematical Pie*)

bij: Driehoeken in perspectief

1. We volgen het bewijs van de stelling van Desargues aan de hand van fig. 2, maar nu met *drie* in plaats van *twee* driehoeken die vanuit O perspectief zijn. We nemen net als in fig. 2 een hulppunt S en een hulplijn b' . Hiermee maken we *drie* vlakken $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. In het algemeen gaan drie vlakken door één punt. (Je moet maar eens nagaan wat er aan de hand is als dit in deze opgave niet zo is, met name wat er dan over de ligging van de drie gegeven perspectieve driehoeken te zeggen valt.) De snijlijnen van de paren (α_1, α_2) , (α_1, α_3) en (α_2, α_3) gaan natuurlijk door het snijpunt van α_1, α_2 , en α_3 , dus de projecties van die snijlijnen vanuit S op het vlak β , dat wil zeggen de perspectiviteitsassen van de gegeven driehoeken, gaan ook door één punt: de projectie van het snijpunt van α_1, α_2 , en α_3 .
2. Vermenigvuldiging van elke zijde van driehoek ABC vanuit het overliggende hoekpunt met factor $\frac{1}{2}$, laat zien dat de lijnenparen (AB, PQ) , (BC, QR) en (CA, RP) evenwijdig zijn. De drie oneindig verre snijpunten liggen in de projectieve meetkunde op één lijn. Dus ABC en PQR hebben een perspectiviteitsas, en dus ook een perspectiviteitscentrum. Dit centrum is het snijpunt van de drie lijnen die gevonden door verbinding van de paren overliggende hoekpunten (C, R) , (A, P) en (B, Q) behorend bij de genoemde zijde-paren.

bij: Let op je salaris

Het naast elkaar leggen van de salarisstrookjes over een aantal jaren laat zien dat Trijn elk jaar $f\ 100,-$ méér ontvangt dan Klaas.

Nader rekenwerk leert dat een loonsverhoging van één cent *per dag*, in vergelijking met een loonsverhoging van $f\ 1332,25$ *per jaar*, ieder jaar $f\ 664,30$ méér oplevert! (Uit: *Fun With Mathematics*)

bij: Zakversmalling

Als we de breedte van de zak d noemen, wordt de omtrek van de gevulde zak $2d$. De schijnbare breedte wordt nu gelijk aan de middellijn ($2r$) van de cirkel. Er geldt dus: $2\pi r = 2d$ of $2r = 2d/\pi = 0,64d$. De zak wordt dan $0,36\ d$ smaller, ofwel 36%.

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

- ∫ Dr. J. van de Craats, R.U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
- ★ Bruno Ernst, Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht.
- < W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn.
- ↘ Ir. H.M. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginneken.

Secretariaat

- △ Drs. H.N. Pot, Tournovsveld 67, 3443 ER Woerden.
- Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

W. Ganzevoort, M.C. van Hoorn, W. Pijls, G.A. Vonk, D.K. Wielenga.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,90 per jaargang. Voor anderen f 12,95.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

Inhoud

- | | |
|---|--|
| △ Repeterende breuken en delertesten 73, 96 | ∫ Driehoeken in perspectief 86, 97 |
| ∫ Rare reeksen 78, 96 | Let op je salaris 91, 97 |
| Nederlandse Wiskunde Olympiade 82 | △ Slim staartdelen 92 |
| Pythagoras Olympiade PO 25-27 83 | ↘ Zakversmalling 93, 97 |
| ↘ Tussen krom en recht 84 | Oplossingen Internationale Wiskunde-wedstrijd 94 |
| Zo magisch mogelijk 85, 97 | |