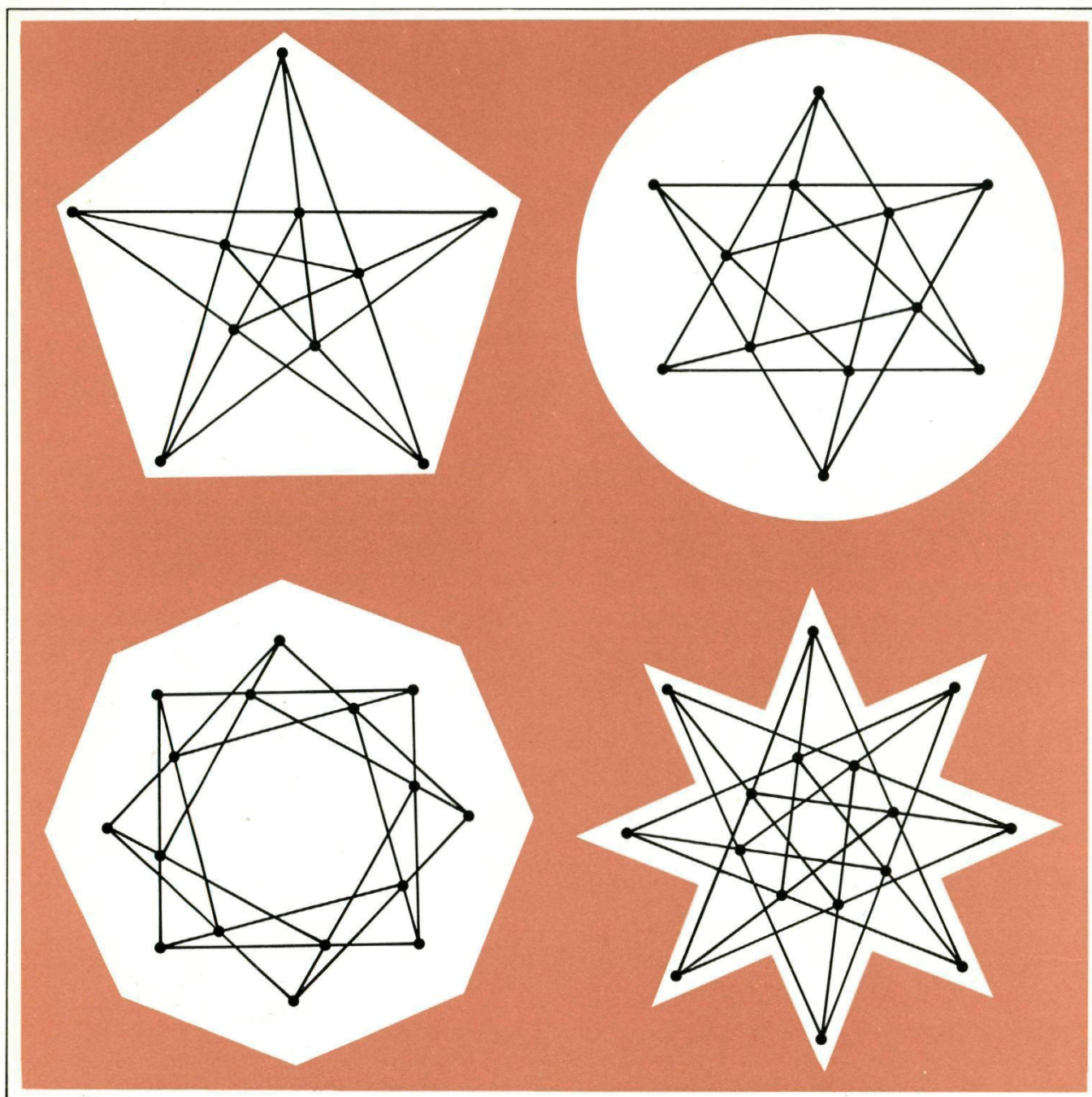


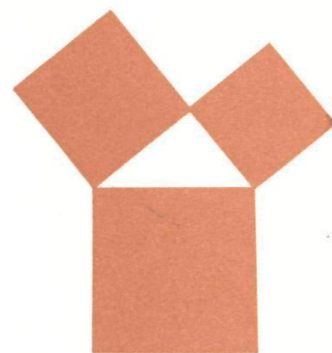


5

jaargang 20 / maart 1981

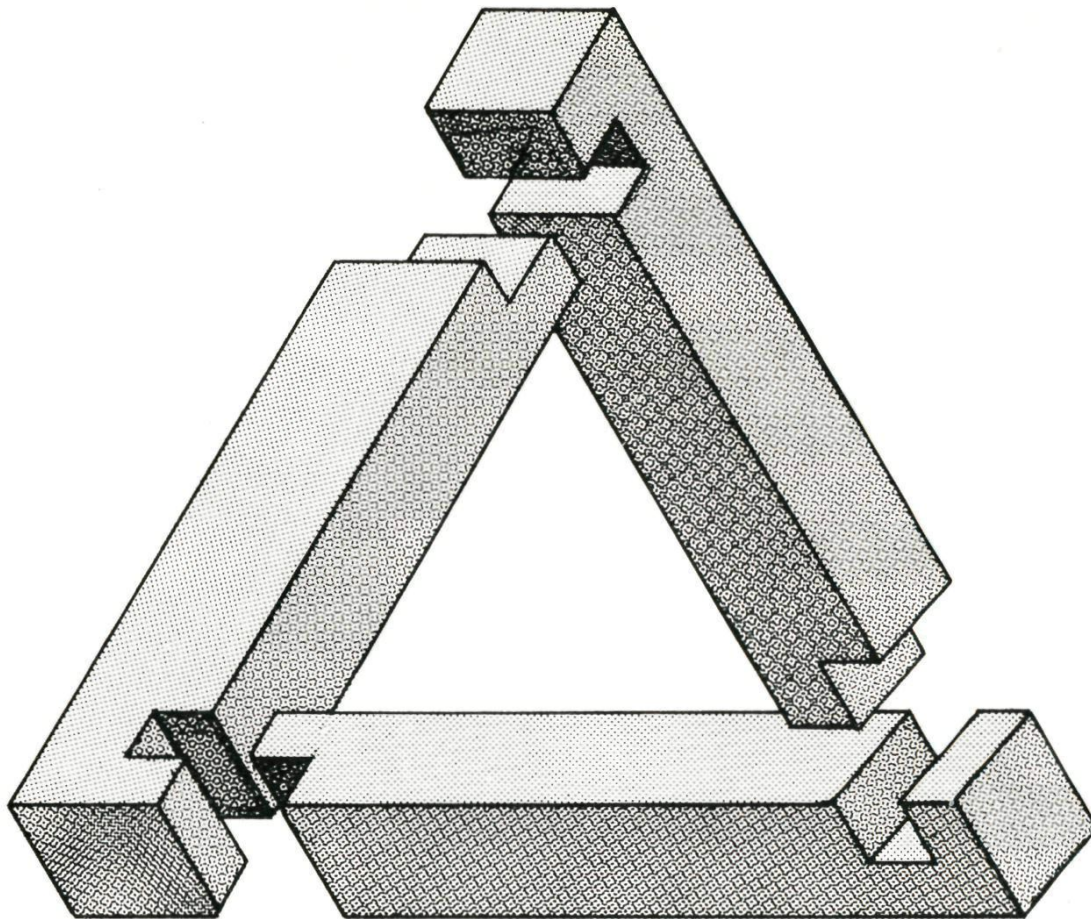
wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 x per schooljaar

Pythagoras



In 'Puzzelen met gekleurde staafjes' wordt gevraagd driehoeken op te bouwen uit gekleurde staafjes. Maar wees niet bang, de hier getekende constructie wordt niet verlangd!

BIJ DE VOORPLAAT

Met regelmatige ster-veelhoeken kun je de mooiste patronen maken. Wij hebben combinaties gemaakt met steeds drie punten op een lijn en drie lijnen door elk punt. Zulke plaatjes komen ook ter sprake in de artikelen 'Puzzelen met gekleurde staafjes' en 'Tweepuntlijnen zijn onvermijdelijk'.

Ten slotte kunnen ze ook dienen als speelborden voor een spel dat beschreven wordt in 'Drie is te veel'. In plaats van kruisjes in de hokjes, zet je opzettertjes op de stippen.

°Reflectie in een kubushoek

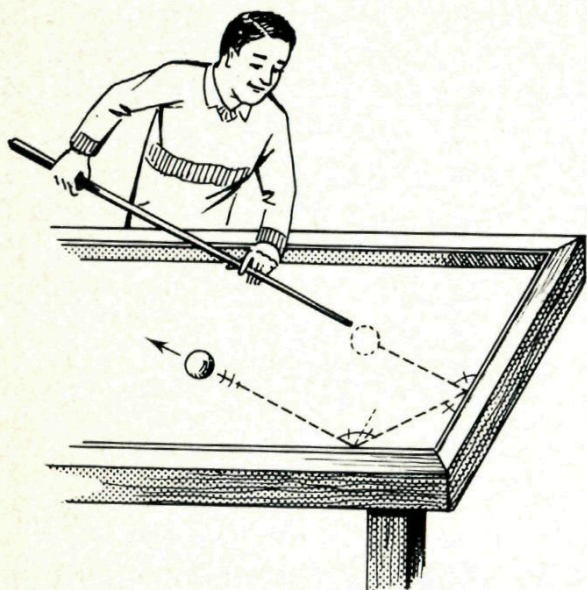
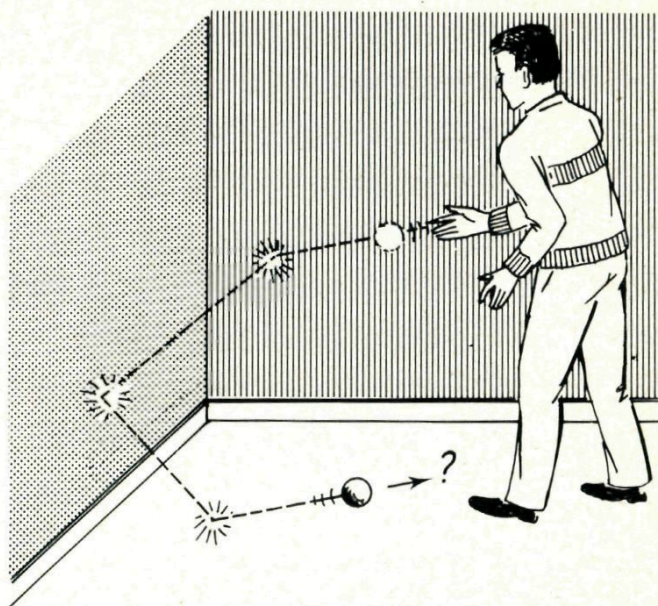


Fig. 1.



Voor een biljartbal die zonder draai-effect tegen de rand (de 'band') van het biljart terugstuitt, geldt in goede benadering: hoek van inval = hoek van terugkaatsing. Een gevolg hiervan is dat bij een stoot 'door de hoek', waarbij twee loodrecht op elkaar staande banden worden geraakt, de bal zal terugkomen in een richting evenwijdig aan de beginrichting. Er is weinig meetkundig inzicht nodig om dit aan de hand van de figuur te verklaren.

Een stuk moeilijker is het om in te zien wat er te zeggen is in het geval van een *ruimtelijke* terugkaatsing, bijvoorbeeld van een bal tegen drie loodrecht op elkaar staande vlakke harde wanden in de hoek van een kamer.

Bij licht

In de genoemde situaties zal het resultaat afwijken van het ideale geval vanwege het niet 'volmaakt elastisch' zijn van de botsingen. In het tweede voorbeeld moet ook de zwaartekracht nog even worden uitgeschakeld als we de baandelen van de bal precies recht willen laten zijn.

Veel zuiverder treden de terugkaatsingseffecten op bij *licht*: Newton constateerde reeds dat veel verschijnselen te verklaren zijn door licht op te vatten als een regen van perfect elastische, massaloze knikker-tjes. We zullen hieronder laten zien hoe licht terugkaatst in een 'kubushoek-spiegel' en wijzen op gevallen waarbij dit in de praktijk goed toepasbaar blijkt te zijn.

Met vectoren

In het ruimtelijke geval is een verklaring het makkelijkst te geven als we kijken naar *richtingsvectoren* die horen bij de verschillende delen van de lichtweg.

Fig. 2 behoeft misschien nauwelijks nadere toelichting. Richtingsvector ν_0 van het invallende licht is ontbonden gedacht in drie onderling loodrechte componenten ν_x , ν_y en ν_z , elk loodrecht op één van de drie spiegelende wanden. Bij de zuiver elastische terugkaatsingen die we hier beschouwen, zal bij elke terugkaatsing de loodrechte component van richting omkeren, terwijl de beide componenten evenwijdig aan de spiegel niet veranderen. Elke component keert zodoende éénmaal

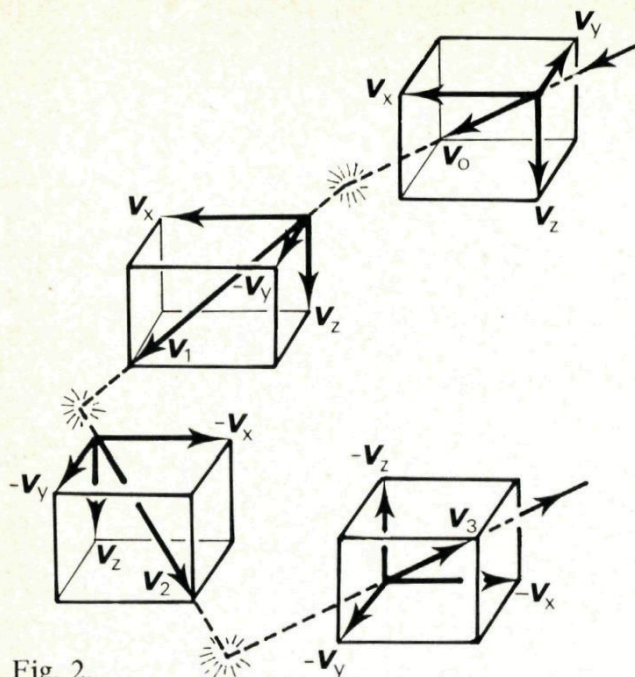


Fig. 2.

van richting om, en dus wordt de richting van het terugkerende licht gegeven door een vector v_3 waarvoor geldt:

$$v_3 = (-v_x) + (-v_y) + (-v_z) = -v_0.$$

Waaruit volgt dat *begin- en eindrichting evenwijdig zijn* (net als bij het biljart).

Dezelfde conclusie geldt wanneer we inwendige terugkaatsing beschouwen tegen de drie grensvlakken glas-lucht in een glas-gevulde drievlakshoek. En zelfs óók nog wanneer de lichtweg door een vierde grensvlak brekend intreedt en uittreedt. Want de evenwijdigheid blijft bij breking behouden.

Toepassingen

Als je een fietsreflector openmaakt en het losse 'glaasje' bekijkt, zie je dat de ene kant mooi vlak is, maar dat de andere kant vol bezet is met een groot aantal kleine piramide-vormige driezijdige puntjes. Als je goed kijkt blijken het allemaal zuivere kubushoekjes te zijn (fig. 3).

Zo'n reflector kaatst (mits aan de vlakke kant en niet ál te scheef beschenen) in donker op straat het licht van autolampen terug. Echter niet zoals een gewone vlakke spiegel met: invalshoek = uitvalshoek

aan de *andere kant* van de normaal, maar aan *dezelfde kant*. Zie fig. 4.

Exact volgens het hier beschreven principe zou al het in de reflectorpuntjes teruggekaatste licht, juist weer in de autolamp terugkeren. Maar de theorie van de *buiging* van het licht bij terugkaatsing tegen een klein vlakje, geeft aan dat niet al het teruggekaatste licht zuiver langs de inval-as gericht zal zijn. De intensiteit is enigszins uitgesmeerd over een kegel van richtingen dicht om die as, waarbij geldt: hoe kleiner de reflecterende vlakjes, hoe breder deze richtingen-kegel. Een klein deel van dit buigingslicht valt zo ook op de ogen van de autobestuurders, zodat hij de reflector op de fiets (of op het

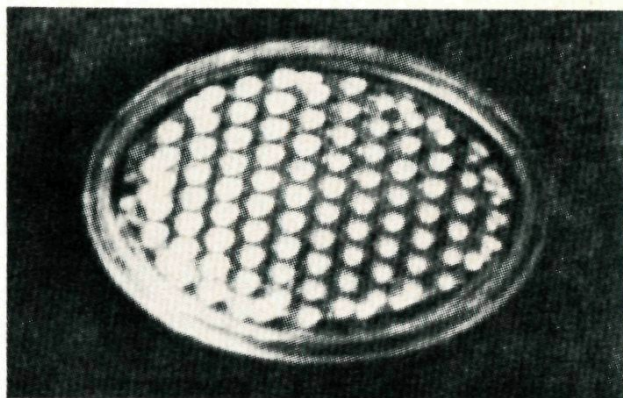


Fig. 3. De achterkant van een reflectorglaasje, vol kubuspuntjes.

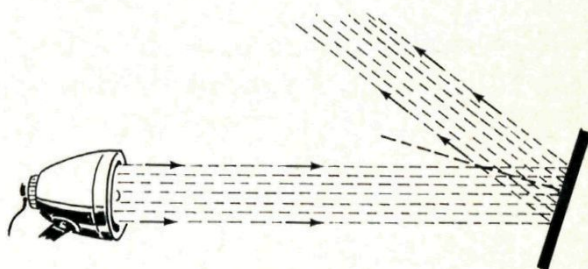
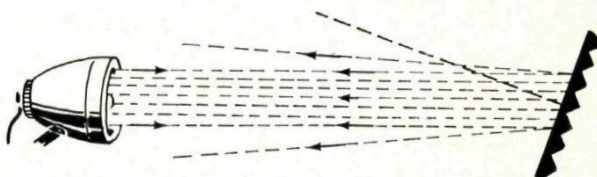


Fig. 4. Vlakke spiegel: terugkaatsing in de richting van de lamp slechts in één speciale stand van de spiegel.



Kubushoek-reflector: terugkaatsing in de richting van de lamp in een groot gebied van standen van de reflector.

bermpaaltje langs de autoweg) ziet oplichten.

Ook door andere oorzaken zal de terugkaatsing iets afwijken. Bijvoorbeeld het niet volkomen vlak zijn en het niet zuiver loodrecht staan van de spiegelvlakjes.

Experimenteer zelf eens wat met een lamp en een reflectorglaasje. De sterkste reflectie neem je waar als je je oog dicht bij de lamp houdt; ga je wat meer opzij dan neemt de lichtsterkte snel af.

De radar-reflector

Hetzelfde principe wordt toegepast om radar-stralen maximaal terug te kaatsen naar waar ze vandaan komen. Een schip in de mist wil zijn eigen uitgezonden signaal zo sterk mogelijk terugontvangen van een walbaken, een drijvende boei of van een ander schip.

Radargolven worden door een metaalvlak teruggekaatst op dezelfde manier als licht door een spiegel. Alleen is nu *inwendige* terugkaatsing, zoals bij het licht in de puntjes van een reflectorglaasje, niet mogelijk. De radar-reflector is daarom een open kubushoekspiegel, bestaande uit loodrecht aan elkaar gelaste ijzeren platen. Meestal op zo'n manier dat er *acht*

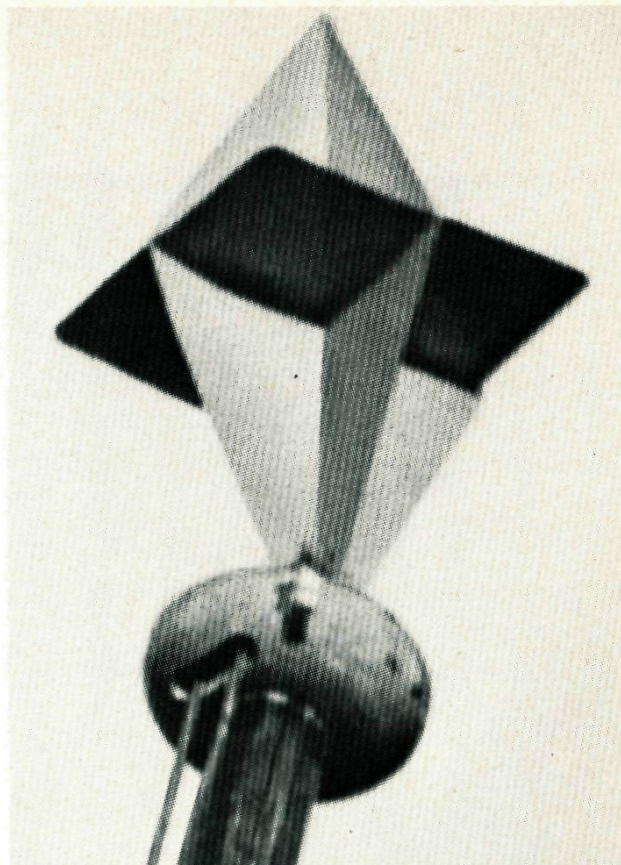


Fig. 5. Een metalen radar-reflector op de vlaggestok van een binnenvaartschip.

kubushoeken gevormd worden die in één hoekpunt samenkomen. Zo wordt de radar-straling, wáár deze ook vandaan komt, altijd in de richting van de bron teruggekaatst.

°Handig wegstrepen

$$\frac{16}{64} = \frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

1. Ga na dat de ongebruikelijke manier van 'wegstrepen' in het bovenstaande voorbeeld toch het goede antwoord geeft. Bij welke breuken (met zowel teller als noemer < 100) geeft dit diagonaal wegstrepen nog meer een correct resultaat?

$$\frac{166666}{666664} = \frac{1\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}}{\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

2. Ook een herhaalde 6 in teller en noemer blijkt weggestreept te mogen worden. Geldt dit voor élk aantal zessen? En geldt het ook bij de andere in de vorige vraag gevonden breuken?



Pythagoras Olympiade

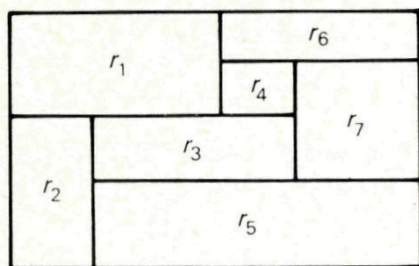
Nieuwe opgaven (oplossingen inzenden vóór 2 juni 1981).

PO 28. Op zekere dag ontdekte Anita, die in januari jarig is, dat haar leeftijd in *maanden* geteld op dat moment precies een kwadraat was van een priemgetal. Kun je bepalen in welke maand die dag viel? *(feb.)*

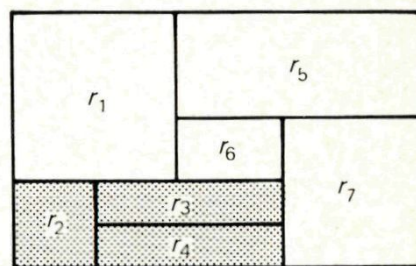
PO 29. Bepaal alle reële getallen x die voldoen aan de vergelijking
 $(x + 1978)(x + 1979)(x + 1981)(x + 1982) = 1978.$ *$\left(\begin{matrix} -1980 + \sqrt{47} \\ -1980 - \sqrt{47} \end{matrix} \right)$*

PO 30. Een verdeling van een rechthoek R in deelrechthoeken $r_1, \dots, r_n$ heet *primitief* als er geen rechthoekig deel van R is (behalve R zelf) dat is opgebouwd uit twee of meer rechthoeken r_i .

Bewijs dat er geen primitieve verdeling is die bestaat uit *precies zes* deelrechthoeken.



primitieve verdeling



niet-primitieve verdeling

Wedstrijdvoorwaarden en prijzen

- * Leerlingen van het voortgezet onderwijs kunnen hun oplossing van een of meer opgaven insturen aan: *Pythagoras Olympiade, Brederode 29, 2261 HG Leidschendam*. Let op de inzendtermijn en zorg voor voldoende frankering.
- * Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Elke oplossing moet op een nieuw vel beginnen.
- * Oplossingen dienen gemotiveerd en volledig uitgewerkt te zijn, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Slechts goed leesbare inzendingen worden bekeken.
- * Wie een aan zichzelf geadresseerde en als brief gefrankeerde open enveloppe meezendt, ontvangt na de inzendtermijn onze oplossingen.
- * Per opgave worden onder de goede oplosers twee boekebonnen van f 10,— verloot.
- * De opgaven van één jaargang vormen samen de *ladderwedstrijd*. De drie inzenders van de meeste goede oplossingen krijgen elk een boekebon van f 25,—.
- * De beste tien van de ladderwedstrijd die niet in een examenklas zitten, krijgen een uitnodiging voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Zij hoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

° Het afbeelden van de werkelijkheid

In dit stukje wordt een opmerking gemaakt bij de twee plaatjes op blz. 97, aan het begin van het artikel 'Reflectie in een kubushoek'. Misschien zag je al dat daar iets niet helemaal in lijkt te kloppen, kijk er anders nog eens naar.

Zoals uit de toelichting blijkt, bedoelen beide figuren weerkaatsingen voor te stellen waarbij steeds de hoek van inval gelijk is aan de hoek van terugkaatsing. Als je dit echter op het getekende biljart met een gradenboog nameet, komt daar niets van uit.

Op zichzelf is dat niet verwonderlijk: de tekenaar heeft duidelijk geen aanzicht willen geven van recht boven, maar van schuin vóór. En de grootte waarin je een hoek ziet hangt sterk af van de richting waarin je er naar kijkt. Probeer maar met de rechte hoek van een boek of een tafelblad. Of kijk naar het plaatje van de kamerhoek, waar de drie snijlijnen van vloer en wanden in werkelijkheid drie rechte hoeken vormen ($= 270^\circ$). Maar in de figuur, hoe je het ook tekent, altijd een volle hoek van 360° .

Toch is er op beide tekeningen wel wat aan te merken. Je ziet (en je kunt name-ten) dat in beide plaatjes de eerste en de laatste richtingen van de baan evenwijdig zijn getekend, iets wat ook in werkelijkheid het geval is. Daaruit blijkt dat de tekeningen niet perspectivisch zijn; anders gezegd: de waarnemer wordt zóver weg verondersteld dat in werkelijkheid evenwijdige lijnstukken niet merkbaar als niet-evenwijdig gezien worden. Een consequentie hiervan is, dat gelijke afstanden op één lijn ook door de waarnemer als gelijke afstanden gezien worden. En dus liefst ook in de tekening als gelijke afstanden moeten worden weergegeven.

Hoe dan wèl?

We laten het aan de lezer over om na te gaan dat de plaatjes in dit opzicht niet kloppen. En om uit te zoeken hoe de baan van de bal er in beide figuren wèl had moeten uitzien om aan het bovengenoemde 'behoud van evenwijdigheid' te voldoen.

Enkele aanwijzingen hierbij:

1. In de biljart-figuur kun je, bijvoorbeeld uitgaande van de 'kaatspunten' op de beide banden en het tussenliggende hoekpunt, een parallellogrammen-rooster tekenen (overeenkomend met rechthoeken op het echte biljart). De juiste richting van de rest van de baan is dan direct te zien.
2. In de kamerhoek-figuur kun je uitgaan van bijvoorbeeld het eerste en het tweede kaatspunt. Uit projectie op de vloer en op de wanden van het tussengelegen stuk van de baan, kan de rest van de baan worden afgeleid.
3. Probeer ook het middelste kaatspunt te vinden, uitgaande van het gegeven eerste en derde. Gebruik hierbij de spiegelbeelden van de gegeven punten ten opzichte van de linker zijwand.

° Somformules (vervolg)

Naar aanleiding van het artikel 'Somformules' (*Pythagoras* 20-3) is Ronald Beekelaar, een 15-jarige leerling van het St.-Vituscollege uit Bussum, zelf verder gaan onderzoeken. Hij vond daarbij al experimenterend een tweetal resultaten die zeker het vermelden waard lijken.

De somformule uit verschilrijen

Als voorbeeld van een getallenrij waarvan we de somformule willen vinden, nemen we de rij T met algemene term:

$$T(n) = n^3 + 2n^2 + 4 \quad (1)$$

Het rechterlid is een veelterm in n , het rangnummer van de term. De hieronder beschreven methode geldt voor alle rijen die door een dergelijke veelterm bepaald zijn. D.w.z. door een formule die te schrijven is als een som van machten van n , vermenigvuldigd met willekeurige coëfficiënten. Andere voorbeelden hiervan zijn:

$$n^7; \quad n^5 - 5; \quad 7n^2 - 2n + \pi;$$

en ook:

$$n(n-1); \quad \frac{1}{2}n^{10} - 6n^3(n^2 + n + 1)^2.$$

Door in (1) in te vullen $n = 1, 2, 3, \dots$ vinden we de termen

$$7, 20, 49, 100, 179, 292, \dots$$

Van deze rij bepalen we de *verschilrij*: de uitkomsten $20 - 7 = 13$; $49 - 20 = 29$; etc. schrijven we versprongen onder de eerste rij:

$$\begin{array}{ccccccccc} 7 & 20 & 49 & 100 & 179 & 292 & \dots \\ & 13 & 29 & 51 & 79 & 113 & \dots \end{array}$$

Dit nog enkele malen herhalen geeft het volgende schema:

$$\begin{array}{ccccccccc} 7 & 20 & 49 & 100 & 179 & 292 & \dots \\ & 13 & 29 & 51 & 79 & 113 & \dots \\ & & 16 & 22 & 28 & 34 & \dots \\ & & & 6 & 6 & 6 & \dots \\ & & & & 0 & 0 & \dots \end{array}$$

Verder gaan dan de nullenrij heeft geen zin, de verschillen blijven dan toch nul. Dit eindigen op een nullenrij is een algemene eigenschap van alle veelterm-rijen. Probeer het zelf maar voor een andere veelterm.

Je kunt ook nagaan dat het *aantal* rijen *boven* de nullenrij, steeds één groter is dan de hoogste exponent van n in de oorspronkelijke (uitgewerkte) veelterm.

Ronald vond nu dat met de *begin*termen uit het verschilrijenschema

$$7, 13, 16, 6 (, 0, 0, \dots)$$

de somformule voor de rij T direct is op te schrijven als

$$\begin{aligned} S(n) &= T(1) + T(2) + \dots + T(n) = \\ &= 7 \cdot \binom{n}{1} + 13 \cdot \binom{n}{2} + 16 \cdot \binom{n}{3} + 6 \cdot \binom{n}{4}. \end{aligned}$$

Hierin zijn de symbolen $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots$ (zónder breukstreep) afkortingen voor:

$$\binom{n}{1} = \frac{n}{1}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

etc.

De somformule is hiermee nog te herleiden tot de standaardvorm voor een veelterm, zonder haakjes. We doen dit alleen bij het volgende voorbeeld.

Nog een voorbeeld

We passen de methode nog even toe op een rij die ook in het oorspronkelijke artikel genoemd werd:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4 = ? ?$$

Het verschilrijenschema wordt:

1	16	81	256	625	1296	...
	15	65	175	369	671	
		50	110	194	302	
			60	84	108	
				24	24	
					0	...

met begintermen 1, 15, 50, 60, 24. Dus de somformule is:

$$\begin{aligned} S(n) &= 1 \cdot \binom{n}{1} + 15 \cdot \binom{n}{2} + 50 \cdot \binom{n}{3} + \\ &\quad + 60 \cdot \binom{n}{4} + 24 \cdot \binom{n}{5} = \\ &= 30 \cdot n/30 + \\ &= 225 \cdot (n^2 - n)/30 + \\ &= 250 \cdot (n^3 - 3n^2 + 2n)/30 + \\ &= 75 \cdot (n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n)/30 + \\ &= 6 \cdot (n^5 - 10n^4 + 35n^3 - 50n^2 + \\ &\quad + 24n)/30 = \\ &= \frac{1}{30} (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n). \end{aligned}$$

En dit resultaat stond ook in afl. 3.

De termformule uit verschilrijen

De rest van dit artikel gaat niet meer over somformules, maar over een vraag die er wel nauw mee samenhangt, en die ook goed met behulp van de verschilrijen is te beantwoorden:

Hoe is een algemene formule te vinden voor de n -de term van de rij die begint als

6, 7, 12 ?

Nu kunnen we uit eindig veel gegeven termen nooit met zekerheid het vervolg voorspellen. Maar als we *aannemen* dat de n -de term wordt gegeven door een *veelterm* formule, dan kunnen we wel vragen naar de eenvoudigste veelterm

(met de langste graad) die in overeenstemming is met deze eerste drie termen.

Ronald ontdekte hiervoor de volgende eenvoudige methode:

Het verschilrijenschema

6	7	12
	1	5
		4

geeft als begintermen 6, 1, 4. Waarmee de termformule is:

$$\begin{aligned} T(n) &= \\ &= 6 \cdot \frac{1}{n} \binom{n}{1} + 1 \cdot \frac{2}{n} \binom{n}{2} + 4 \cdot \frac{3}{n} \binom{n}{3}, \\ &\text{of nog eenvoudiger} \\ &= 6 + 1 \cdot \binom{n-1}{1} + 4 \cdot \binom{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Dit is desgewenst nog weer uit te werken tot:

$$\begin{aligned} T(n) &= \\ &= 6 + 1 \cdot (n-1) + 4 \cdot (n^2 - 3n + 2)/2 = \\ &= 2n^2 - 5n + 9. \end{aligned}$$

Ter controle invullen $n = 1, 2, 3$ geeft de oorspronkelijke termen 6, 7, 12. Ook vinden we $T(4) = 21$, $T(5) = 34$ etc. Dit zijn de termen die volgen op het gegeven drietal, *mits* we aannemen dat de regelmaat in de eerste drie bepaald wordt door een zo eenvoudig mogelijke veelterm.

Als je niet geïnteresseerd bent in de algemene formule, maar je wilt alleen een paar volgende termen hebben, dan kun je ook het verschilrijenschema aan de rechterkant van onder naar boven 'aanbouwen':

6	7	12	21	34							
			↗	↗							
1	5	9	13								
		↗	↗								
	4	→	4	→	4	→	4	→	4	→	...

Bewijzen van de hier gebruikte regels geven we niet. Als je er wat zelf gekozen voorbeelden mee hebt zien uitkomen, zul je waarschijnlijk niet erg meer twijfelen aan de juistheid ervan. Voor een waterdicht bewijs komt de methode van de *volledige inductie* in aanmerking. Daartoe moet je dan nog wel eerst een algemene uitdrukking vinden voor de begintermen van het verschilrijenschema.

Met nog wat aanpassingen zijn de hier genoemde methoden ook bruikbaar voor het vullen van 'gaten' in een gedeeltelijk gegeven rij (het 'interpoleren', naast het boven weergegeven 'extrapoleren'). En ook in het geval waarbij we veeltermfuncties beschouwen met niet alleen (zoals hier) natuurlijke getallen, maar met alle reële getallen als originelen, kan op eenzelfde manier uit een aantal gegeven origineel-beeld paren de functiewaarde in elk ander origineel worden afgeleid. Een en ander is reeds door *Isaac Newton* (1642–1727) onderzocht, zodat gesproken wordt van de *interpolatie-formules van Newton*.

Nog twee termformule-methoden

De vraag uit het vorige paragraafje kan ook nog op andere manieren worden beantwoord.

1) Met de volgende wat grotere formule, die echter het voordeel heeft dat direct blijkt waarom de gegeven termen ermee

overeenstemmen. Ga maar na dat juist is:

6, 7, 12 zijn de uitkomsten voor resp. $n = 1, 2, 3$ in de formule

$$T(n) = 6 \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{(-1)(-2)} + 7 \cdot \frac{(n-1)(n-3)}{(1)(-1)} + 12 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{(2)(1)}.$$

2) De drie gegeven termen 6, 7, 12 zullen altijd voor $n = 1, 2, 3$ voldoen aan een of andere *tweede*-graads vorm

$$an^2 + bn + c.$$

Want deze voorwaarde is te schrijven als

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 12 \end{cases}$$

en dit stelsel heeft juist één oplossing voor a, b en c . Reken maar na.

Een opgave

Zoek de eenvoudigste veelterm die de rij

$$1, 9, 8, 1, \dots$$

beschrijft, en bepaal de volgende termen. Elk van de drie genoemde methoden kun je gebruiken. In het verschilrijenschema moet je consequent doorrekenen met de voorkomende negatieve getallen.



De 19e Nederlandse Wiskunde Olympiade

*Oplossingen van de opgaven van de tweede ronde
op 28 augustus 1980*

1. Gegeven is dat de functie $x \rightarrow x^3 - ax + 1$ ($a \in \mathbb{R}$) drie verschillende reële nulpunten heeft.

Bewijs dat het nulpunt x_0 met de kleinste absolute waarde voldoet aan $\frac{1}{a} < x_0 < \frac{2}{a}$.

Oplossing

Het punt van symmetrie van de grafiek is $(0, 1)$. De grafiek snijdt de x -as drie maal, dus $x_0 > 0$ en $a = -f'(0) > 0$. Zijn x_1 en x_2 de twee andere nulpunten, dan geldt $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = x^3 - ax + 1$. Voor $x = 0$ volgt $x_0 x_1 x_2 = -1$, met zeker één factor tussen -1 en 1 . Dus $0 < x_0 < 1$ waaruit volgt $1 < x_0^3 + 1 = ax_0 < 2$, en wegens $a > 0$: $1/a < x_0 < 2/a$.

Opmerking

De hier gegeven afschattingsmethode kan ook *herhaald* worden, zodat met een rekendoosje bij gegeven a een steeds betere numerieke benadering van het nulpunt gevonden wordt. Daartoe moet het wél zeker zijn dat er tussen de startwaarden van de afschatting (hier 0 en 1) maar één nulpunt ligt. Nader onderzoek leert echter dat er voor getallen a tussen $\sqrt[3]{27/4}$ ($= 1,889 \dots$) en 2 , twee nulpunten van de gegeven functie tussen 0 en 1 liggen.

Een startwaarde die voor elke a tussen deze nulpunten in ligt, is bijvoorbeeld het origineel van het minimum tussen de nulpunten. Het nulstellen van de afgeleide van de gegeven functie geeft hiervoor $x_{\min} = \sqrt{a/3}$.

2. a. Bepaal het produkt van alle delers van 1980 .
b. Bepaal het produkt van alle delers van 1980^n ($n = 2, 3, 4, \dots$). (Onder de delers van een positief getal M verstaat men de positieve gehele getallen d waarvoor M/d een geheel getal is.)

Oplossing

- a. $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Elke deler bevat 0 of 1 of 2 factoren 2 , en 0 of 1 of 2 factoren 3 , en 0 of 1 factor 5 en 0 of 1 factor 11 . Omdat verschillende factorencombinaties steeds een verschillend produkt geven, zijn er $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ delers. Zet naast elke deler d z'n partner $1980/d$, dan komt elke deler precies twee maal voor (ook in het geval van een zuiver kwadraat, met een oneven aantal delers!). Dus het gevraagde produkt van alle delers van 1980 is $\sqrt{1980^{36}} = 1980^{18}$.
- b. Analooq is van $1980^n = 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 11^n$ het aantal delers $(2n+1)(2n+1)(n+1)(n+1)$. En het produkt van alle delers is $1980^n (2n+1)^2 (n+1)^2 / 2$.
3. Gegeven is een niet-rechthoekige driehoek ABC . D is het voetpunt van de hoogtelijn uit A , E dat van de hoogtelijn uit B en F dat van de hoogtelijn uit C . P is het midden van het lijnstuk EF , Q dat van FD en R dat van DE .
 p is de lijn door P loodrecht op de lijn BC , q de lijn door Q loodrecht op CA en r de lijn door R loodrecht op AB .
Bewijs dat p , q en r door één punt gaan.

Oplossing

Zij H het hoogtepunt van driehoek ABC , en Z het zwaartepunt van driehoek DEF . Z verdeelt DP , EQ en FR in de verhouding $2 : 1$. Zij T het beeld van H onder vermenigvuldiging vanuit Z met factor $-\frac{1}{2}$. De beelden van HD , HE en HF zijn dan TP , TQ en TR . Zij zijn evenwijdig met hun originelen, dus het zijn de lijnen p , q en r . Dus p , q en r gaan door één punt (T).

4. In Venetianië is de kleinste munteenheid een dukaat. De minister van financiën geeft zijn ambtenaren de volgende opdracht:
'Ik wens zes soorten geldbiljetten, elk ter waarde van een geheel aantal dukaten. Die zes waarden dienen zo te zijn, dat er een getal N bestaat met de volgende eigenschap. Elk geldbedrag van n dukaten (n positief en geheel) waarbij $n \leq N$ is, kan worden betaald op zo'n manier dat van elke soort biljetten ten hoogste twee exemplaren worden gebruikt, hetzij om te betalen, hetzij om terug te geven. Ik wens die zes waarden bovendien zo, dat N zo groot mogelijk is.
Bepaal die zes waarden en geef daarbij een bewijs dat aan alle gestelde voorwaarden is voldaan.'
Los het probleem van die ambtenaren op.

Oplossing

Bij elke betaling kunnen er, vanuit het standpunt van één van de twee betrokkenen, 0 , ± 1 of ± 2 biljetten van elk van de zes soorten gegeven worden. Het aantal mogelijke bedragen is dus op zijn hoogst $5^6 = 15625$.

Is aan de opdracht van de minister voldaan, dan kan volgens de regels elk geheel bedrag van $-N$ tot $+N$ dukaten worden afgerekend, dus dan zijn er $2N + 1$ mogelijke betalingen. Aangezien $15625 = 2 \cdot 7812 + 1$ geldt dus $N \leq 7812$.

De maximale waarde $N = 7812$ kan inderdaad gerealiseerd worden, met biljetten van $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4$ en 5^5 dukaten. Om een willekeurig geheel bedrag van n (≤ 7812) dukaten te betalen, schrijf men eerst het getal $7812 + n$ ($\leq 5^6 - 1$) in het vijftallig stelsel, als

$$a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5^3 + a_4 \cdot 5^4 + a_5 \cdot 5^5 \text{ met } a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Aangezien $7812 = 2 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^5$ geeft de schrijfwijze $n = (a_0 - 2) + (a_1 - 2) \cdot 5 + (a_2 - 2) \cdot 5^2 + (a_3 - 2) \cdot 5^3 + (a_4 - 2) \cdot 5^4 + (a_5 - 2) \cdot 5^5$ dan het betalingsvoorschrift.

°Tweepuntslijnen zijn onvermijdelijk

De voorplaat, en ook een aantal illustraties bij het artikel 'Puzzelen met gekleurde staafjes', laten patronen zien van (dik gemaakte) punten en lijnen met steeds *drie* punten op elke lijn. Dat is iets bijzonders, want als je zo maar wat punten in het vlak zet, zal er in het algemeen op een (rechte) verbindingslijn van twee van die punten niet nog een derde punt liggen. Bij de figuren van de voorplaat is dit wél zo, althans bij alle *getrokken* verbindingslijnen. Maar niet *alle* puntenparen zijn door een lijn verbonden. Als we de ontbrekende verbindingslijnen tekenen, krijgen we er 'tweepuntslijnen' bij: lijnen met daarop slechts twee punten.

Je zou je kunnen afvragen of het ook mogelijk is een stel punten in het vlak te zetten op zo'n manier dat *elke* verbindingslijn van twee punten nog minstens een derde punt bevat (natuurlijk sluiten we het flauwe geval dat alle punten op een en dezelfde rechte lijn liggen uit). Voor kleine aantallen punten hebben we wat zitten puzzelen om patronen te bedenken zonder tweepuntslijnen, maar succes hebben we daarbij niet gehad. In fig. 1 zie je het beste wat we bereikt hebben voor 3 t.e.m. 9 punten. Steeds hielden we een aantal (3, 4 of zelfs 6) tweepuntslijnen over (de aantallen staan er tussen haakjes bij). Hoe meer punten we namen, hoe moeilijker het werd, en al snel begon het vermoeden post te vatten dat we best eens aan een onmogelijke opgave bezig zouden kunnen zijn.

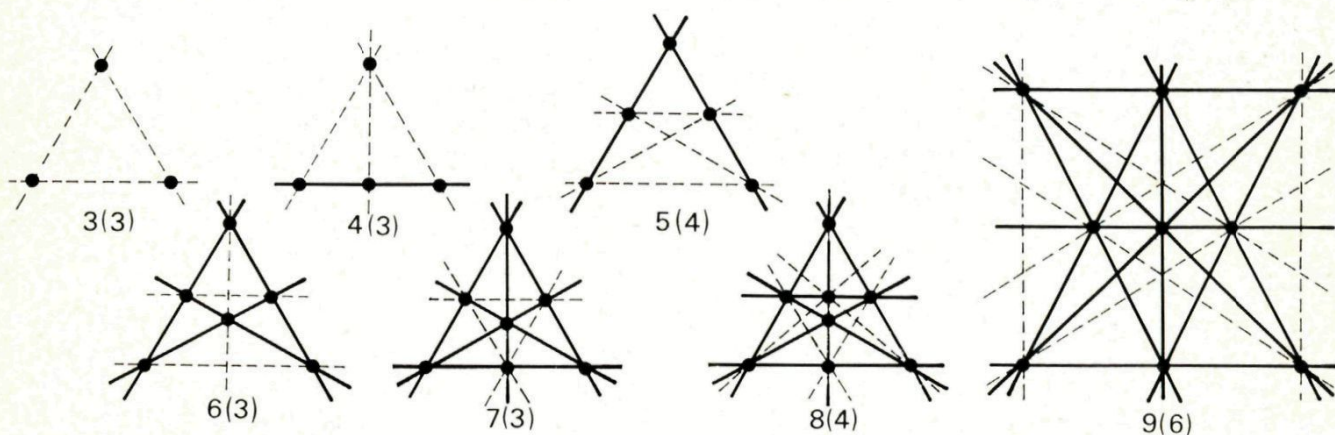


Fig. 1. Puntpatronen met een minimaal (?) aantal tweepuntslijnen.

De Engelse wiskundige J. J. Sylvester hield zich in 1893 ook al met dit probleempje bezig, en ook hij dacht dat het *onmogelijk* is een eindig aantal punten, niet allemaal op dezelfde rechte, te tekenen, zo, dat elke verbindingslijn van twee

van die punten nog minstens een derde bevat. Een bewijs kon hij echter niet vinden, en ook de andere wiskundigen uit die tijd aan wie hij het vraagstuk voorlegde, kwamen er niet uit. Het probleempje raakte wat in de vergetelheid, totdat

T. Gallai in 1933 een oplossing vond. Hij toonde aan dat zo'n patroon zonder tweepuntslijnen inderdaad niet bestaat. Later bewezen L. M. Kelly en W. O. J. Moser zelfs dat er bij n punten altijd minstens $3n/7$ tweepuntslijnen moeten zijn. Het minimale aantal tweepuntslijnen neemt dus minstens evenredig toe met het aantal punten.

Een bewijs

L. M. Kelly vond het volgende eenvoudige bewijs voor het vermoeden van Sylvester. We formuleren het vermoeden nog even:

Heeft men n punten, niet allemaal op één rechte lijn, dan is er minstens één verbindingsrechte van twee punten die verder geen andere punten uit het gegeven n -tal bevat.

Het bewijs gaat uit het ongerijmde. We noemen de punten $P_1, \dots, P_n$ en onderzoeken de afstanden van een punt P_i tot de verbindingsrechte door twee andere punten P_j, P_k ; afstanden *nul* (met P_i juist op P_jP_k) tellen we niet mee. Wegens het eindig zijn van het aantal voorkomende drietallen (P_i, P_j, P_k) is er onder alle afstanden een positieve *kleinste*. Zeg tussen het punt P_m en een verbindingslijn die we l noemen. (Mogelijk komt deze kleinste afstand op meer plaatsen voor.)

Stel nu dat l drie of meer punten bevat. Dan liggen er zeker twee vanuit P_m gezien op dezelfde helft van l , zeg P_a en P_b (P_a dicht bij P_m). Maar fig. 2 laat zien dat de afstand van P_a tot de verbindingsrechte P_mP_b korter is dan de afstand tussen P_m en l ! Tegenspraak. Dus op l kan geen derde punt liggen, waarmee het bewijs geleverd is.

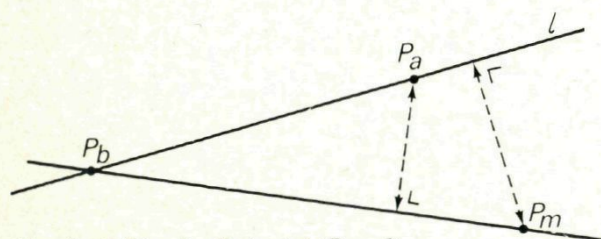


Fig. 2. $d(P_a, P_mP_b) < d(P_m, l)$.

In de ruimte

Je kunt nog opmerken dat het bewijs nergens gebruik maakt van het al dan niet in één vlak liggen van de punten. Het vermoeden van Sylvester geldt dus ook in de ruimte. Trouwens, zou het in de ruimte niet waar zijn, en zou er dus een ruimtelijk n -tal punten zijn zonder tweepuntslijnen, dan zou je onmiddellijk ook een *vlakke* Sylvesterfiguur hebben. Want in elk vlak door *drie* van die punten (niet op één rechte) zou er dan zo'n patroon zijn.

Een toepassing

Bij de 'zevenpuzzel' in *Puzzelen met gekleurde staafjes* wordt gezocht naar patronen (oplossingsschema's) waarin zeven punten door zeven lijnen (recht of krom) tot drietallen verbonden zijn. Elk punt moet op drie lijnen liggen, en elk paar lijnen mag hoogstens één van die zeven punten gemeen hebben. Ga na dat in fig. 3 hieraan voldaan is.

We stellen nu de volgende vraag: is het mogelijk om de punten in fig. 3 zo te verschuiven dat *alle* gebogen lijnen recht worden? In fig. 4 (die ook zo genummerd kan worden dat de verbonden drietallen overeenstemmen met die in fig. 3) is dit al bijna bereikt. Alleen de drie punten op de cirkel liggen nog maar fout.

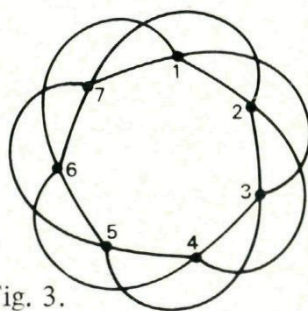


Fig. 3.

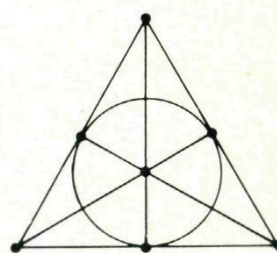


Fig. 4.

Echter, je kunt direct zien dat de zeven driepuntslijnen in fig. 3 en in fig. 4 zorgen voor verbindingen tussen elk tweetal punten. En als al die lijnen *recht* zouden zijn komt dit in strijd met het hierboven bewezen vermoeden van Sylvester. 'Alle verbindingslijnen recht' blijkt dus bij de schema's voor de zevenpuzzel *onmogelijk*.

°° Staartdelen en staartloggen

Als je weet wat een logaritme is, weet je ook dat $^{10}\log 2$ ligt tussen 0 en 1 (want $10^0 = 1 < 2$ en $10^1 = 10 > 2$). Dus $^{10}\log 2 = 0, \dots$ Maar zou je ook zelf, zónder logtafel en zónder de logtoets van je rekendoosje, een aantal van de cijfers achter de komma kunnen vinden? Omdat de methode die we hiervoor zullen geven grote overeenkomst toont met de 'staartdeling', gaan we eerst deze deling nog eens precies bekijken.

Bij de vraag: schrijf $\frac{40}{17}$ als een repeterende decimale breuk, kun je niet zonder meer je rekendoosje pakken en $\boxed{4} \boxed{0} \boxed{:} \boxed{1} \boxed{7}$ intoetsen. De repeterende periode omvat 16 cijfers en wordt zo dus niet volledig gegeven. Dan maar potlood en papier opgezocht en de bekende staartdeling gemaakt.

Bij dit voorbeeld is dat ook best te doen. Maar stel dat hetzelfde gevraagd wordt voor $\frac{33\ 821}{147}$? Enige elektronische hulp is dan toch wel prettig!

Staartdelen met het doosje

We hebben allemaal het patroon geleerd zoals in fig. 1 weergegeven. Probeer na te gaan dat in fig. 2 zowat hetzelfde gebeurt, alleen wat omslachtiger opgeschreven.

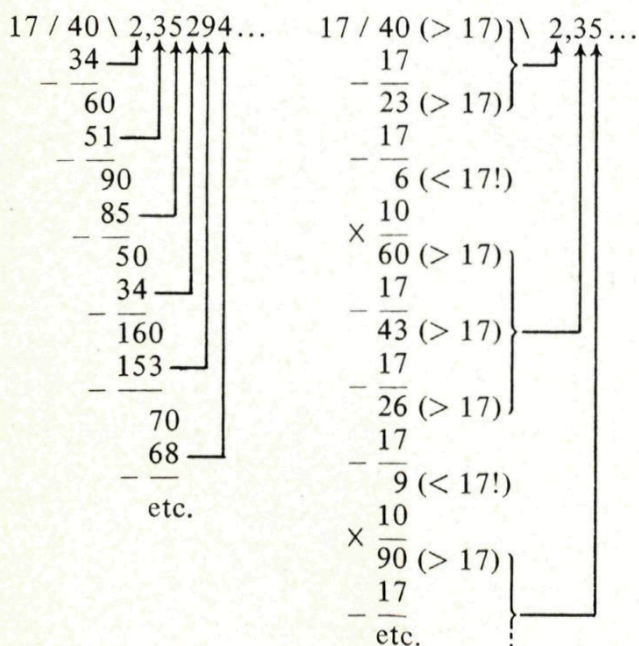


Fig. 1.

Fig. 2.

De laatste methode gaan we nadoen op een rekendoosje dat kan aftrekken en optellen. Makkelijk is als dezelfde bewerking eenvoudig herhaald kan worden (steeds 17 er af). Omdat de manier waarop dit mogelijk is per merk verschilt, zul je dit zelf moeten uitzoeken. Ook een geheugen komt van pas om de 17 te onthouden tijdens het berekenen van het tienvoud.

Volg het schema van fig. 3 met $a = 40$ en $b = 17$. In dit geval kun je wel beginnen bij het tweede vraagblok. Je moet dan de in fig. 2 gegeven resultaten krijgen.

Het bovenste deel van het blokschema zorgt ervoor dat het teken + of - van het antwoord en de plaats van de komma goed komen. Ga dit na. Maak een aantal delingen volgens het hele schema en controleer zelf de resultaten. Krijg je ook

$$\frac{33\ 821}{147} = 230,074\ 829\ 931\ 972\ 889 \dots ?$$

Staartloggen met het doosje

Vergelijk de blokschema's van fig. 3 en fig. 4: 0, -, + wordt respectievelijk 1, :, X. Voer met $a = 2$ en $b = 10$ het schema uit op je rekendoosje (dat nu moet kunnen delen en vermenigvuldigen). Als je het goed doet vind je: 0,3010... ofwel de decimale benadering van $^{10}\log 2$.

Als je weet dat $^{10}\log 2$ in 15 decimalen gelijk is aan 0,30102 99956 63981, kun je zien of deze 'staartlog' methode al dan niet nauwkeuriger is dan het directe resultaat van de logtoets (als je die hebt).

Op dezelfde manier zijn alle logaritmen, voor elk grondtal, te benaderen.

nog wel een verschil op. De staartdeling blijft altijd exact goed, mits het aantal cijfers van de *deler* (*b*) niet de capaciteit van het doosje overtreft. (Een groot aantal cijfers in het *deeltal* is geen bezwaar, ga

na.) Maar de staartlogging blijkt op den duur niet meer correct. Dit omdat er bij de berekening van de tiendemachten onvoldoende ruimte is voor het snel groeiende aantal decimalen.

°°Puzzelen met gekleurde staafjes

Er bestaat een puzzeltje dat als volgt in elkaar zit. In een doosje zitten tien verschillend gekleurde driehoeken, elke driehoek samengesteld uit drie staafjes die netjes in elkaar passen; in fig. 1 zie je hoe. De hele puzzel bestaat dus uit 30 staafjes in tien kleuren, van elke kleur drie. Fig. 2 toont een los staafje.

De opdracht bij deze *tienpuzzel* is om met de 30 staafjes tien andere driehoeken te vormen zó, dat aan de volgende twee spelregels is voldaan:

1. Elke driehoek heeft drie *verschillend* gekleurde staafjes als zijden.
2. Elk tweetal driehoeken heeft hoogstens één kleur gemeenschappelijk.

Volgens spelregel 2 mogen bijvoorbeeld niet tegelijkertijd driehoeken rood-wit-groen en rood-wit-blauw voorkomen. Rood-wit-groen en rood-geel-blauw is echter wel toegestaan.

Eigenlijk bevat de doos meer dan één puzzel. Je kunt namelijk ook alle staafjes van één of meer kleuren weglaten en alleen met de overblijvende kleuren werken. Zo krijg je de *zevenpuzzel* met 21 staafjes in zeven kleuren, de *achtpuzzel* met 24 staafjes in acht kleuren en de *negenpuzzel* met 27 staafjes in negen kleuren. Je zou het ook nog met zes of minder kleuren kunnen proberen, maar zoals we later zullen zien, is dat niet verstandig. De puzzel is dan namelijk onoplosbaar!

In plaats van staafjes kun je ook gekleurde papierstroken, kralen, legostenen of andere gekleurde dingen nemen en daar 'driehoeken' van leggen. Het enige wezenlijke is dat er van elke kleur drie dingen zijn. Omdat *Pythagoras* niet in kleur wordt gedrukt, zullen we verder de kleuren aanduiden met de nummers 1 tot en met 10.

Je kunt met de puzzel aardig wat tijd zoekbrengen. Voor een wiskundige is het *analyseren* van een puzzel interessanter dan het puzzelen zelf. De rest van dit verhaal zal dan ook vooral gewijd zijn aan de bespreking van enige achtergronden van de vier puzzels. Dat we je daarbij een paar oplossingen cadeau geven, en zo de puzzel als puzzel gedeeltelijk voor je verknoeien, moet je maar op de koop toe nemen. Er blijft nog genoeg stof tot nadenken over!

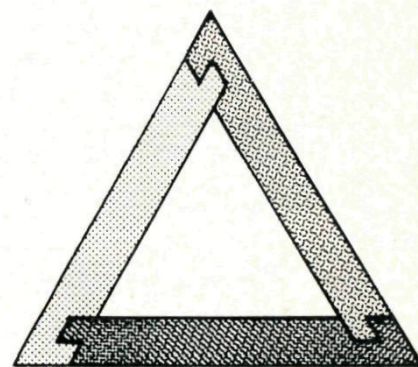


Fig. 1.



Fig. 2.

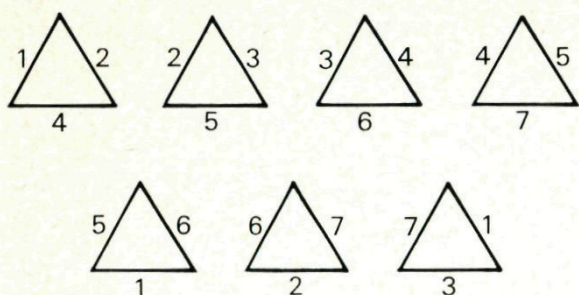


Fig. 3. De zevenpuzzel opgelost.

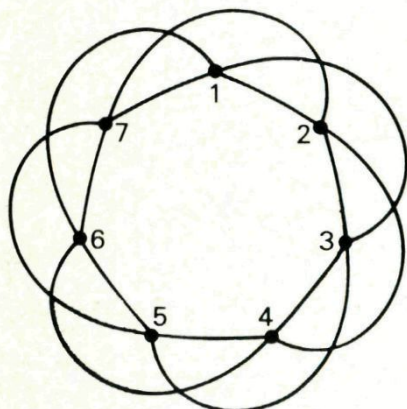


Fig. 4. Een oplossingsschema voor de zevenpuzzel.

Oplossingsschema's

Laten we eerst 21 staafjes in zeven kleuren nemen. Na enig proberen zul je wel snel een oplossing van de zevenpuzzel vinden. Fig. 3 toont er een. Kijk nu eens naar fig. 4. Het lijkt een regelmatige zevenhoek waarvan elke zijde naar één kant verlengd en kromgebogen is om in een verderop gelegen hoekpunt te eindigen. Zo zijn er zeven gebogen lijnen die elk drie hoekpunten verbinden: 1-2-4, 2-3-5, 3-4-6, ..., 7-1-3.

Het merkwaardige is dat fig. 4 een illustratie is van de oplossing van fig. 3: elke (dikke) *punt* stelt een *kleur* voor en elke *gebogen lijn* een *staafjesdriehoek*. Elke gebogen lijn gaat in overeenstemming met spelregel 1 door drie punten. Aan regel 2 is ook voldaan want twee gebogen lijnen hebben hoogstens één (kleur-)punt gemeen. Door elk punt gaan drie lijnen, zoals er ook van elke kleur drie staafjes zijn die in *verschillende* driehoeken moeten zitten (regel 1).

Soortgelijke oplossingsschema's zijn er ook voor de acht-, negen- en tienpuzzel (fig. 5, 6, 7) en in het algemeen voor elke n -puzzel ($n > 6$).

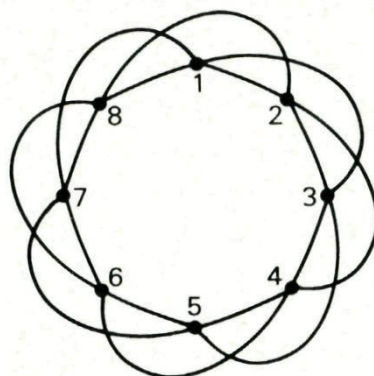


Fig. 5. Een oplossingsschema voor de achtpuzzel.

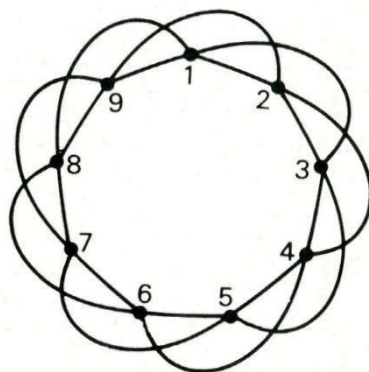


Fig. 6. ... voor de negenpuzzel.

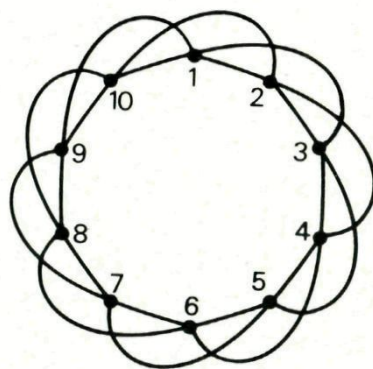


Fig. 7. ... en voor de tienpuzzel.

Dat de *zespuzzel* geen oplossing heeft, is gemakkelijk te zien. Een willekeurige kleur, voorgesteld door een dikke punt, moet in drie staafjesdriehoeken, voorge-

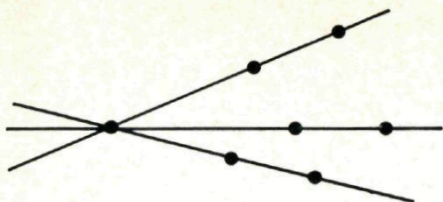


Fig. 8. De zespuzzel is onmogelijk, want er komen minstens 7 kleuren voor.

steld door lijnen, voorkomen. Fig. 8 geeft deze situatie schematisch weer. Op elke lijn zitten nog twee andere punten (regel 1). Volgens regel 2 zijn die zes punten allemaal verschillend: er zijn dus minstens *zeven* punten (kleuren) in het spel.

Het feit dat in elke oplossing van de puzzel elke kleur met precies *zes* andere kleuren verbonden is, zullen we in het vervolg nog vaak gebruiken. Het betekent bijvoorbeeld dat in elke oplossing van de zevenpuzzel elke kleur met *élke* andere kleur verbonden is. In de achtpuzzel is er bij elke kleur *één* niet-verbonden kleur, in de negenpuzzel zijn het er steeds twee, in de tienpuzzel drie.

Andere oplossingen?

De vier puzzels hebben we met de figuren 4 tot en met 7 opgelost, maar toch blijven er nog wat vragen over. Kijk eens naar de figuren 9, 10 en 11. In fig. 9 zie je zeven punten, in fig. 10 en 11 acht punten. Ze zijn verbonden door merendeels rechte lijnen. Figuur 11 lijkt een beetje op fig. 5. Er zijn nu echter vier rechte en vier gebogen lijnen. In fig. 9 en fig. 10 is er één lijn tot een cirkel verbogen. Deze cirkels rekenen we ook tot de 'lijnen'. In elk plaatje zijn er dan evenveel punten als lijnen. Op elke lijn liggen drie punten, door elk punt gaan drie lijnen en twee lijnen hebben hoogstens één punt gemeen. De plaatjes zullen dus ook oplossingen van de zeven- of achtpuzzel voorstellen. Zijn dit oplossingen die we al hadden, of krijgen we nieuwe oplossingen? Hoeveel verschillende oplossingen zijn er? Wat verstaan we eigenlijk onder *verschillende* oplossingen?

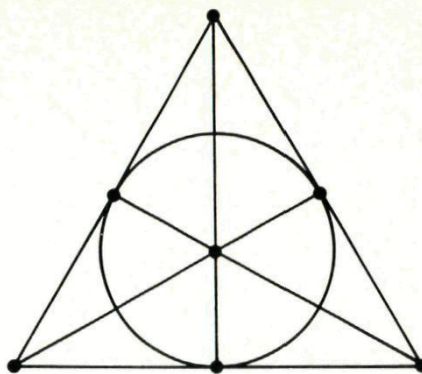


Fig. 9. Variatie op het schema van fig. 4.

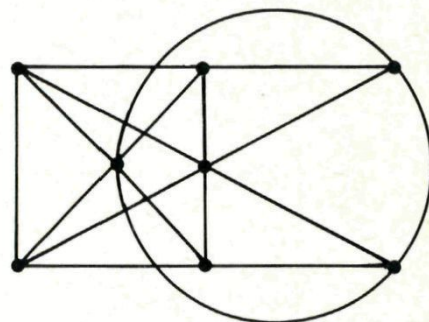


Fig. 10.

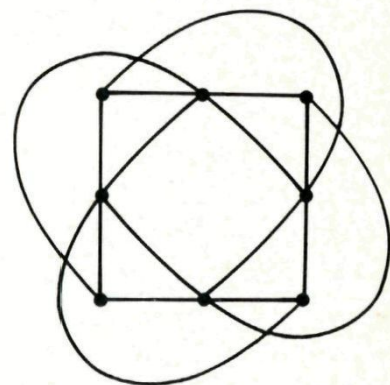


Fig. 11.

Twee variaties op het schema van fig. 5.

Allemaal vragen. We beginnen met de laatste. Natuurlijk zul je twee oplossingen niet verschillend noemen als de driehoeken alleen maar in een andere volgorde liggen. Evenmin is het zinvol van verschillende oplossingen te spreken als je de één uit de ander kunt krijgen door de kleuren onderling te verwisselen (te 'permuteren'). Als je de kleuren dan anders nummert, kun je toch weer hetzelfde schema krijgen.

Verderop zullen we laten zien dat de zevenpuzzel, zo beschouwd, slechts één oplossing heeft. Hetzelfde geldt voor de

achtpuzzel. De negenpuzzel heeft er drie en de tienpuzzel tien. Naarmate je met meer kleuren werkt, stijgt het aantal oplossingen ook erg snel. De elfpuzzel heeft al 31 verschillende oplossingen, en de twaalfpuzzel heeft er zelfs 228!

De negenpuzzel

We hebben oplossingen van de puzzels gegeven aan de hand van schema's met punten en al dan niet gebogen lijnen. Er zijn evenveel punten als lijnen, door elk punt gaan drie lijnen en op elke lijn liggen drie punten. Zoiets is in de voorgaande nummers ook aan de orde geweest, namelijk in de figuren bij de stellingen van *Pappus* (fig. 12) en *Desargues* (fig. 13). Pappus geeft dus een oplossing van de *negenpuzzel* en Desargues van de *tienpuzzel*. Kommen deze oplossingen overeen met die van fig. 6 en fig. 7?

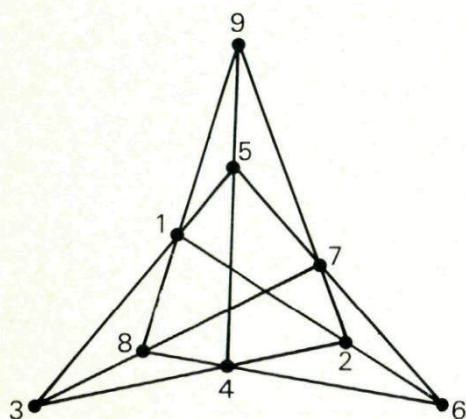


Fig. 12. De figuur van Pappus als oplossings-schema voor de negenpuzzel.

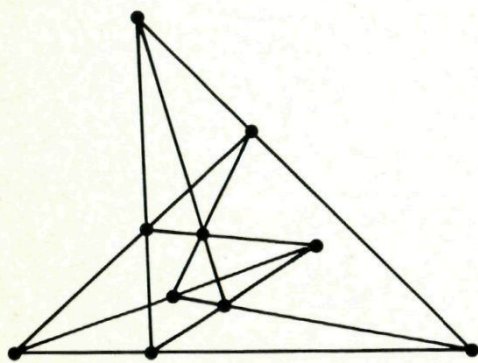


Fig. 13. De figuur van Desargues als oplossings-schema voor de tienpuzzel.

We kijken eerst naar de negenpuzzel en de figuur van Pappus. De nummering die we bij deze figuur gegeven hebben, verschilt van die van fig. 6. Zo zijn bijvoorbeeld in fig. 6 de punten 1, 2 en 4 door een lijn verbonden, maar in fig. 12 is dit niet het geval. Misschien zou dit echter te verhelpen zijn door henummeren. Om dit te onderzoeken kijken we naar de *restfiguur*. Dit is de figuur die ontstaat door alle *niet* verbonden puntenparen te verbinden en alle oorspronkelijke verbindingslijnen uit te vegen. In fig. 14 zie je de restfiguur van fig. 6. Het is een (ster)negenhoek. De restfiguur van fig. 12 bestaat echter uit drie driehoeken (fig. 15). Het is dus duidelijk dat fig. 6 en fig. 12 *verschillende* oplossingen voorstellen want bij gelijke oplossingen moeten ook gelijksoortige restfiguren behoren.

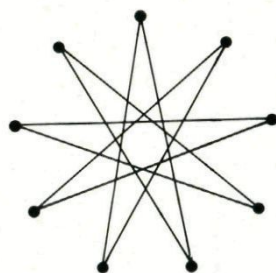


Fig. 14.

De restfiguren van fig. 6 en van fig. 12.

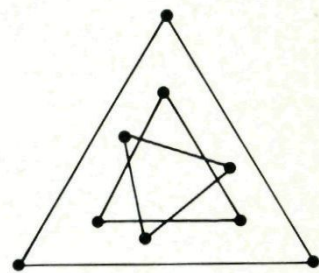


Fig. 15.

Men kan bewijzen dat *elke* oplossing van de negenpuzzel die als restfiguur drie driehoeken heeft, overeenkomt met die van fig. 12. Alle Pappus-figuren hebben zo'n restfiguur en stellen dus dezelfde oplossing van de negenpuzzel voor. Er is ook aangetoond dat elke oplossing die een negenhoek als restfiguur heeft, overeenkomt met die van fig. 6. Kijk maar eens naar fig. 16a. Dat is zo'n oplossing. Figuur 16b is de restfiguur. In deze figuur zijn alle lijnen recht.

Een derde oplossing staat in fig. 17a met als restfiguur fig. 17b. Hier bestaat de restfiguur uit twee 'ketens': een driehoek en een zeshoek. Deze oplossing is dus ver-

schillend van de vorige twee. Men kan aantonen dat hiermee alle mogelijke oplossingen van de negenpuzzel beschreven zijn.

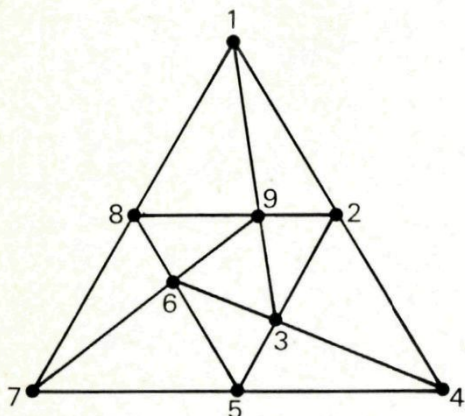


Fig. 16a. Een rechtlijnig schema voor dezelfde oplossing als aangegeven door fig. 6.

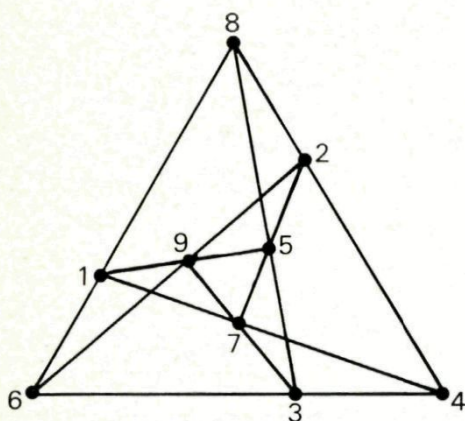


Fig. 17a. Een oplossingsschema voor de derde oplossing van de negenpuzzel.

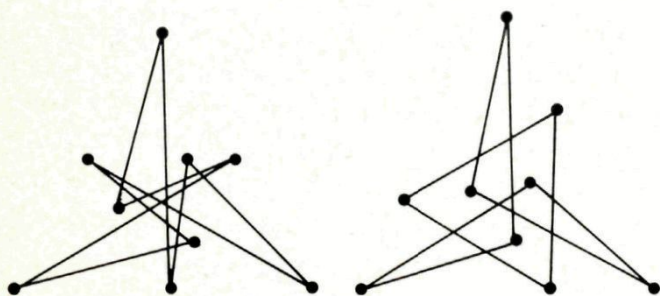


Fig. 16b. Fig. 17b.
De restfiguren van fig. 16a en van fig. 17a.

De tienpuzzel

Fig. 7 en fig. 13 (Desargues) geven oplossingen van de tienpuzzel. De restfiguren kunnen ook hier helpen te onderzoeken

of ze verschillend zijn. Zo'n restfiguur is echter nogal onoverzichtelijk want er komen 15 lijnen in voor, drie door elk punt. Het is eenvoudiger het volgende op te merken. Elk punt is met precies zes van de negen andere verbonden (vergelijk fig. 8). Elk punt heeft dus een *restdrietal* van punten waarmee het *niet* verbonden is. Bij fig. 7 is bijvoorbeeld (5, 6, 7) het restdrietal van 1. Dit restdrietal is onderling verbonden door lijnen die een (enigszins vervormde) driehoek vormen (fig. 18). Hetzelfde geldt voor de restdrietallen van alle andere punten. Bij de figuur van Desargues ligt het restdrietal van een punt echter altijd op één lijn, de perspectiviteitsas van de twee driehoeken waarvan het gekozen punt het perspectiviteitscentrum is (fig. 19). De figuren 7 en 13 stellen dus *verschillende* oplossingen voor!

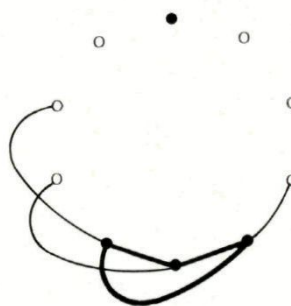


Fig. 18.

Restdrietallen van één punt in fig. 7 en in fig. 13.

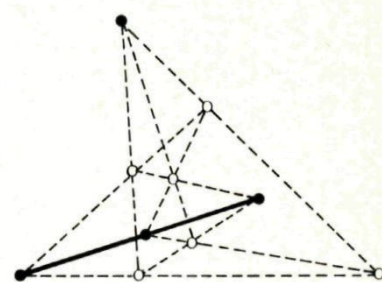


Fig. 19.

De oplossing van fig. 7 is ook in mooie vorm met uitsluitend *rechte* lijnen te realiseren; zie figuur 20.

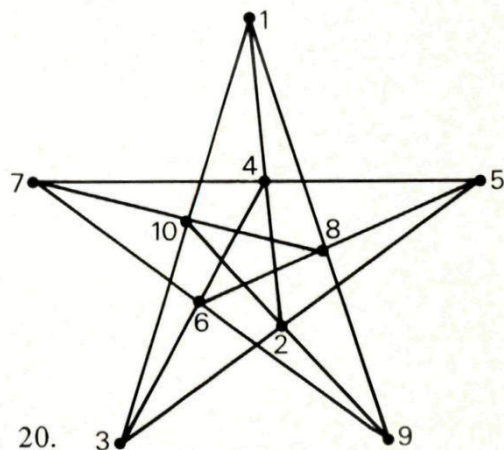


Fig. 20.

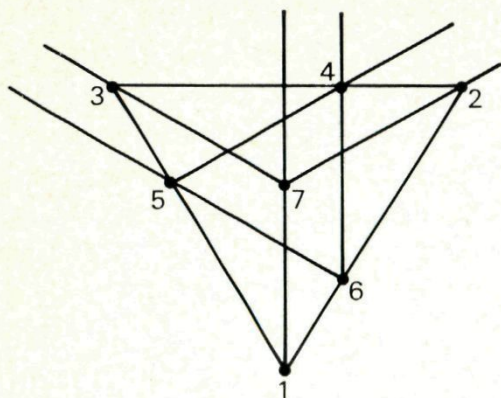


Fig. 21. Een oplossingsschema voor de tienpuzzel met drie oneindig verre punten.

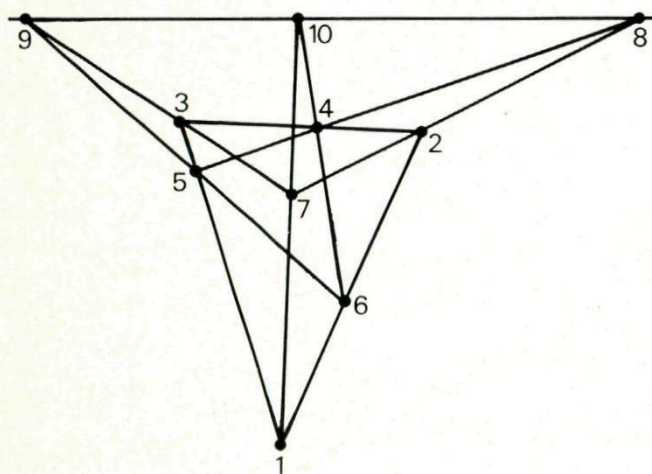


Fig. 22. Het schema van fig. 21, nu met alle punten zichtbaar.

Figuur 21 toont weer een andere oplossing van de tienpuzzel. Hierin komen slechts zeven punten en negen lijnen voor. De ontbrekende lijn is echter de *oneindig verre rechte* met daarop de drie ontbrekende *oneindig verre* punten: de 'snijpunten' van de drie paren evenwijdige lijnen. In fig. 22 is door centrale projectie de oneindig verre lijn een gewone lijn (de 'horizon') geworden. Met punt 1 zijn de punten 4, 8 en 9 niet verbonden. Zij liggen niet op één lijn, maar vormen ook geen driehoek want 4 en 9 zijn niet verbonden. Deze oplossing is dus verschillend van de eerste twee.

Men kan aantonen dat alle Desargues-figuren dezelfde oplossing van de tienpuzzel voorstellen en dat er buiten deze oplossing nog *negen* andere bestaan. Twee

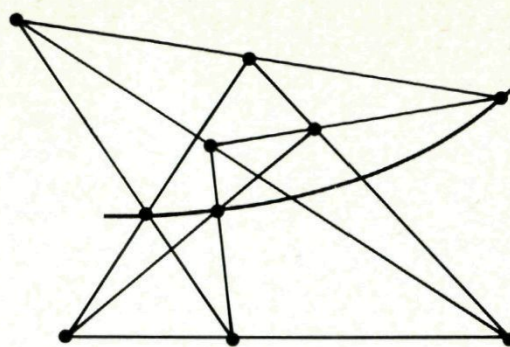


Fig. 23. Een oplossingsschema voor de enige oplossing van de tienpuzzel waarvoor geen rechtlijnig schema mogelijk is.

daarvan hebben we al gevonden. Ze zijn allebei te realiseren met punten en *rechte* lijnen. Dit lukt ook bij zes van de andere oplossingen, maar er is er één, geïllustreerd in fig. 23, waarbij dit niet mogelijk is. Eén van de lijnen hebben we krom moeten tekenen. Er kan bewezen worden dat dit onvermijdelijk is. In totaal hebben we nu vier van de tien oplossingen gegeven. Het vinden van de andere oplossingen (die allemaal onderscheiden kunnen worden aan de tien restdrietallen van de tien punten) laten we aan onze lezers over. Zo blijft er bij de tienpuzzel toch nog wat te puzzelen over!

Eén oplossing voor de zevenpuzzel

We besluiten dit artikel met te bewijzen dat de zevenpuzzel precies één oplossing heeft. Laten we aannemen dat er een willekeurige oplossing gevonden is. We zullen de kleuren van de staafjes zo nummeren dat deze oplossing bij het schema van fig. 4 past. Neem één van de staafjesdriehoeken, en nummer de kleuren hiervan 1, 2 en 4. Een willekeurige vierde kleur geven we het nummer 3. Elke kleur komt samen met elke andere kleur in een staafjesdriehoek voor. Er zijn dus driehoeken met de combinatie 1-3, 2-3 en 3-4. Volgens spelregel 2 zijn die allemaal verschillend. De derde kleur in die drie driehoeken noemen we resp. 7, 5 en 6. De vier driehoeken die we nu genummerd

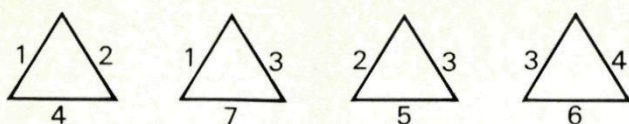


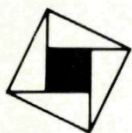
Fig. 24. De zevenpuzzel gedeeltelijk opgelost.

hebben, staan in fig. 24. Van elk van de kleuren 1, 2 en 4 is er nog één staafje over. Regel 2 maakt dat die drie staafjes in verschillende driehoeken zitten. De enige manier om deze driehoeken verder aan te vullen en daarbij kleurencombinaties die al voorkomen te vermijden, is 1-5-6, 2-6-7 en 4-5-7. De oplossing komt dus overeen met die van fig. 4.

We hebben gezien dat zo'n oplossing op veel manieren met die van fig. 4 geïdenti-

ficeerd kan worden. Eerst is er één willekeurige staafjesdriehoek gekozen (zeven mogelijkheden), de kleuren daarvan zijn 1, 2 en 4 genoemd (dit kan op zes manieren) en ten slotte is één van de vier overblijvende kleuren van het nummer 3 voorzien. De rest lag daarna vast. In totaal zijn er dus $7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ manieren om dit te doen!

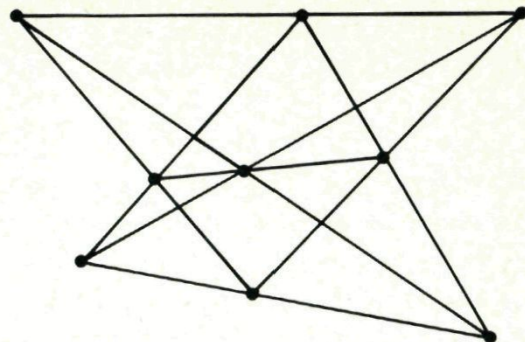
In de Verenigde Staten is een puzzel uitgegeven die niet veel van onze staafjespuzzel verschilt. In het begeleidend materiaal daarbij staan o.a. de 10 oplossingen van de tienpuzzel beschreven. De puzzel heeft CONFIGURATIONS en is ontworpen door Harold L. Dorwart. Het is een uitgave van WFF 'N PROOF, 1490 HG South Boulevard, Ann Arbor, Mi 48104 U.S.A.



Denkertjes

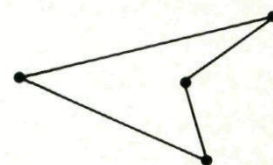
1. Bepaal alle restdrietallen in fig. 22 en fig. 23. Onderzoek telkens of de drie punten op één lijn liggen (vergelijk fig. 19), een driehoek vormen (vergelijk fig. 18), of een driehoek met één of meer ontbrekende zijden vormen (zoals (4, 8, 9) in fig. 22).
2. Ga na dat elk oplossingsschema ook op een andere ('duale') manier gelezen kan worden. Elke *lijn* stelt dan een *kleur* voor, en elke dikke punt een *staafjesdriehoek*. Krijg je door deze interpretatie naast de vier gegeven oplossingen van de tienpuzzel nog nieuwe oplossingen?
3. Nummer fig. 9 zo, dat deze figuur en fig. 4 gelijk gekleurde oplossingen van de zevenpuzzel voorstellen.
4. Nummer fig. 10 en fig. 11 zo, dat deze figuren en fig. 5 gelijk gekleurde oplossingen van de achtpuzzel voorstellen.
5. Laat zien dat een nummering als bedoeld in denkertje 4 op 48 verschillende manieren gerealiseerd kan worden.
6. Verifiëer dat voor de nummering van de Pappus-figuur in fig. 12 geldt: Drie punten liggen op één lijn dan en slechts dan als de som van hun nummers een *negenvoud* is en de resten van de nummers bij deling door 3 alle drie *verschillend* zijn. (Deze notatie is bedacht door de Canadese student E. S. Bainbridge.)

7. Nummer de punten in de Pappus-figuur hiernaast zo, dat deze figuur en fig. 12 gelijk gekleurde oplossingen van de negenpuzzel voorstellen.



8. Toon aan dat denkertje 7 op 108 verschillende manieren kan worden opgelost.

9. Laat zien dat in de restfiguur van een oplossings-schema voor de negenpuzzel geen vierhoek (zie hiernaast) kan voorkomen. (Aanwijzing: tel het aantal lijnen door de vier hoekpunten.)

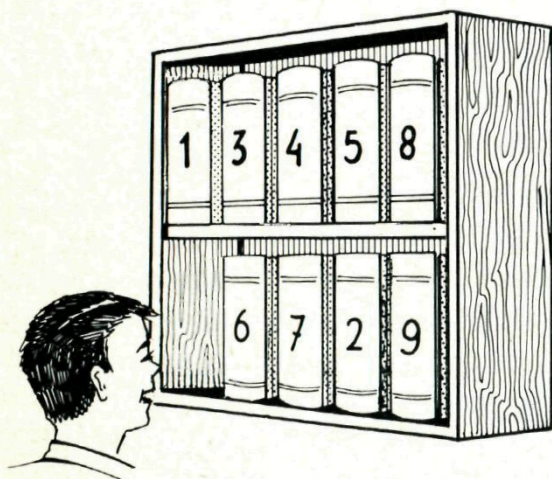


10. Gebruik denkertje 9 om aan te tonen dat de figuren 15, 16b en 17b alle mogelijke restfiguren voorstellen bij de negenpuzzel.

°Een boekenrekpuzzel

Een boekenserie, bestaande uit negen van rugnummers voorziene delen, staat in een kastje, verdeeld over twee planken. Op een keer staan ze zoals op de tekening is te zien. Een puzzelaar zal direct opmerken dat het bovenste 'getal' hier juist het dubbele is van het onderste. Ofwel, met de plankrand als breukstreep $\frac{13458}{6729} = 2$.

Is dit uniek, of bestaan er nog andere rangschikkingen met dezelfde eigenschap?



Probeer zelf een systeem te vinden om efficiënt te zoeken. Dus *niet* alle $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ variaties voor de teller elk apart delen door de $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ bijpassende noemers. Met zo'n systeem is het niet al te moeilijk om alle *twaalf* oplossingen te vinden.

We stappen nu van de tweevouden over naar de drievouden. Is er een breuk, geschreven met de negen cijfers 1 t.e.m. 9, waarbij de teller het drievoud van de noemer is?

En als we hier het antwoord op hebben: welke getallen kunnen nog meer worden voorgesteld (en op hoeveel manieren) door een breuk waarin de cijfers 1 t.e.m. 9 elk juist éénmaal voorkomen? Het lijkt verstandig om deze vragen maar verder aan de computer over te laten. Misschien wil je er eens over nadenken hoe je dat een beetje handig zou kunnen programmeren.

Het blijkt dat er voor de getallen tot en met negen steeds dergelijke breukvormen te vinden zijn (zelfs steeds meer dan één).

Boven de negen komen er 'gaten' (10 en 11 kunnen niet). En boven de 80 hoeven we helemaal niet te zoeken zolang we er niet in slagen om zes boekdelen in het bovenste vak te persen. (Waarom?)

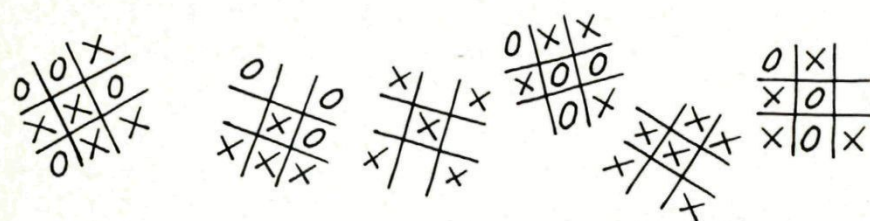
Resultaten

In het volgende staatje (afgeleid uit door G. A. Vonk verkregen computer-resultaten) geven we alleen de *aantallen* oplossingen: 2 (12) betekent dat er 12 breuken van ons soort gelijk zijn aan 2. Zie je enige regelmaat in de voorkomende uitschieters?

2 (12)	16 (3)	35 (5)
3 (2)	17 (27)	37 (1)
4 (4)	18 (1)	38 (2)
5 (12)	19 (2)	43 (1)
6 (3)	22 (1)	44 (5)
7 (7)	23 (3)	46 (1)
8 (46)	24 (2)	52 (1)
9 (3)	26 (9)	53 (4)
12 (4)	27 (4)	59 (1)
13 (4)	28 (1)	62 (2)
14 (8)	29 (2)	66 (1)
15 (2)	32 (1)	68 (1)

Enkele van de oplossingen zelf vind je achterin.

° Drie is te veel



M. C. van Hoorn
H. N. Pot

Het bovenstaande herken je natuurlijk wel als een stukje uit een schoolschrift. Je ziet onder meer het bekende boter, kaas en eieren (of kruisje/nulletje of hoe het allemaal nog meer mag heten), waarbij het de bedoeling is om met je kruisjes een rij, kolom of diagonaal vol te krijgen vóórdat je tegenstander zover is met zijn nulletjes. Ervaren scholieren weten dit spel altijd minstens remise te houden, ongeacht of ze mogen beginnen of niet. Als je dit niet kunt moet je het zelf maar eens uitzoeken.

Je zult wel gezien hebben dat twee van de boven gegeven figuurtjes niet afkomstig zijn van boter, kaas en eieren. Het zijn eindstanden van een ánder spel, eveneens voor twee personen die om beurten één van de negen hokjes moeten vullen. Het doet er nu alleen níet toe wie welk hokje vult, dus beiden kunnen hetzelfde teken gebruiken.

Geen Volle Rechten

Winnaar is degene die het laatste kruisje kan zetten *zonder een rij (3 hokjes naast elkaar) of een kolom (3 hokjes onder elkaar) helemaal vol te maken*. Ga na dat in fig. 1 uitsluitend eindstanden getekend zijn: elk extra kruisje maakt een rij of een kolom (een 'rechte') vol.

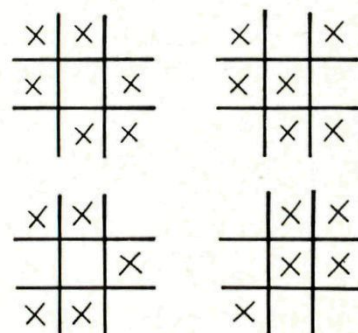


Fig. 1.

Je ziet dat er eindstanden zijn met *vijf* en met *zes* kruisjes. Dit betekent dat afhankelijk van het spelverloop zowel de eerste als de tweede speler een winnende eindstand kan maken. Remise is niet mogelijk. Tot aan het eerste nummer van de volgende jaargang geven we de lezer gelegenheid om zelf uit te zoeken hoe dit spel (laten we het GVR noemen) gewonnen kan worden.¹⁾

Hoe liggen de kansen

We knopen hier nog een andere vraag aan vast: als je het spel speelt zónder de winnende strategie te kennen, heb je dan als *eerste* of als *tweede* speler de beste kans om te winnen?

Zonder verdere toelichting is deze vraag natuurlijk onzin. Het hangt er maar net van af hoeveel je tegenstander van het spel afweet. En het kan ook best zijn dat een speler in zijn eerste beurt puur gokt,

maar in zijn tweede of derde beurt wél de gunstige en ongunstige voortzettingen kan overzien. Of misschien is het wel zo, dat een speler denkt zelf volgens een kansrijk systeem te spelen (misschien uit ervaring tegen één bepaalde tegenstander), maar dat zijn systeem bij gevarieerder tegenspel toch juist slechter is dan puur gokken.

We kiezen voor de volgende beperking in onze vraag. Als bij elke zet, elk volgens de regels toegelaten hokje gelijke kans heeft om een kruisje te krijgen, wat is dan de kans op winst voor de eerste (tweede) speler?

Geen Volle Lijnen

Er zijn vele variaties op het boven gegeven spel te bedenken. We noemen nog het spel GVL, waarbij geen rij, kolom of *diagonaal* volgemaakt mag worden. Ook bij dit spel blijkt er voor één van de spelers een winnende strategie te bestaan. Probeer het maar!

¹⁾ We werden op dit spel gewezen door Diane Downie, USA.



Pythagoras

Een individueel abonnement?

Op dit moment kost een individueel abonnement f 12,95. Daarvoor ontvang je *Pythagoras* een jaar lang op je huisadres.

Voor aanmelding: zie de bon (met verzend-aanwijzing) op de volgende bladzijde.

Voor inlichtingen kun je bellen naar

Wolters-Noordhoff bv:

- tel. 050-16 21 89 voor informatie over abonnementen.
- tel. 050-16 23 14 voor inhoudelijke informatie over het tijdschrift of andere wiskunde-uitgaven.

Pythagoras, een abonnement waard. Ook na de middelbare school!

Tot nu toe heb je *Pythagoras* via de school gekregen. Je hebt je erop geabonneerd omdat je belangstelling had voor de onderwerpen die erin aan bod komen. We denken dat je het ook met veel plezier gelezen hebt.

Velen stellen het op prijs ook na de middelbare schooltijd dit wiskundetijdschrift voor jongeren regelmatig te ontvangen. Bijvoorbeeld omdat ze verder studeren in de wiskunde of een ander exact vak. Of gewoon om 'bij te blijven', omdat de artikelen, de 'Denkertjes' etc. erg boeiend zijn.

Straks is er echter geen leraar of school via wie je je op *Pythagoras* kunt abonneren. Daarom wijzen we in dit laatste nummer van de 20e jaargang speciaal op de mogelijkheid om een individueel abonnement te nemen.

Tot volgend jaar in *Pythagoras*?

Antwoorden en oplossingen

bij: Handig wegstrepen

1. De wegstreep-eigenschap leidt bij de breuk $\overline{xy}/\overline{yz}$ tot de voorwaarde $(10x + y)/(10y + z) = x/z$, ofwel $10xz - 10xy = (x - y)z$. Het linkerlid is een vijfvoud, dus rechts moet $(x - y)$ of z een vijfvoud zijn; wegens $0 < x, y, z < 10$ geldt dus $z = 5$ of $(x - y) = -5, 0$ of 5 .

Deze vier gevallen verder apart uitproberen levert als oplossingen:

$$\frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{16}{64}, \frac{49}{98} \text{ en } \frac{11}{11}, \frac{22}{22}, \dots, \frac{99}{99}.$$

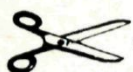
2. Tweemaal ja. Stel dat voor het drietal x, y, z geldt $\overline{xy}/\overline{yz} = y/z$, ofwel $9xz = 10xy - yz$ (1). Bij n gelijke cijfers y in teller en noemer kunnen we schrijven:

$$\frac{\overline{xyy \dots y}}{\overline{yy \dots yz}} = \frac{10^{n+1}x + \overline{11 \dots 1}y}{\overline{11 \dots 1} \cdot 10y + z} \cdot \frac{9xz}{9xz} = \frac{10^{n+1} \cdot 9xz + (10^{n+1} - 1)yz}{(10^{n+1} - 1) \cdot 10xy + 9xz} \cdot \frac{x}{z}.$$

Met substitutie van (1) voor $9xz$ in teller en noemer is dit gelijk aan $\frac{x}{z}$, voor elke n .

bij: Somformules (vervolg)

De veelterm $(n^3 - 15n^2 + 54n - 38)/2$ is voor $n = 1, 2, 3, \dots$ gelijk aan:
1, 9, 8, 1, -9, -19, -26, -27, -19, 1, ...



Wolters-Noordhoff bv / Groningen

Pythagoras

Bij deze abonneer ik mij op *Pythagoras*, het wiskundetijdschrift voor jongeren.

Naam*): _____

Straat: _____

Postcode/plaats: _____

*) Als moet worden geleverd voor rekening van een
(onderwijs)instelling, tevens vermelden:

Naam opdrachtgever: _____

Functie: _____

Handtekening (gemachtigde): _____ Datum: _____

N.B. Deze bon kan in een ongefrankeerde enveloppe opgezonden worden naar Wolters-Noordhoff bv, t.a.v. Vicky Hilarius, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen.

bij: Puzzelen met gekleurde staafjes

2. Neen
5. Kies één lijn (8 mogelijkheden) en nummer de drie punten hierop 1, 2, 4 (dit kan op 6 manieren). Nu liggen ook de nummers 5, 6 en 8 vast, want het zijn de enige punten die niet verbonden zijn met respectievelijk 1, 2 en 4. Vervolgens moet 3 op 1-8 en 7 op 4-5 liggen, waarmee de nummering compleet is. Er zijn dus $8 \cdot 6 = 48$ mogelijkheden.
8. Kies één lijn (9 mogelijkheden) en nummer de punten 1, 2, 6 (6 mogelijkheden). Kies één van de twee niet met 1 verbonden punten en noem die 4 (2 mogelijkheden). Op 2-4 ligt dan 3, op 1-3 ligt 5, op 4-5 ligt 9, op 1-9 ligt 8 en op 3-8 ligt 7. Alles ligt dus vast, en er zijn $9 \cdot 6 \cdot 2 = 108$ mogelijke nummeringen.
9. Als $ABCD$ zo'n vierhoek is, kunnen alleen de diagonalen AC en BD lijnen uit het oplossingsschema zijn. Door elk punt gaan drie lijnen. Van de $4 \cdot 3 = 12$ lijnen door de vier hoekpunten van de vierhoek kunnen hoogstens twee paren samenvallen (en dat zijn dan de diagonalen). In totaal komen we dus zo op minstens *tien* verschillende lijnen, en dat is onmogelijk.
10. De mogelijkheden voor de restfiguur (waarin elk punt met twee andere punten is verbonden) zijn: (1) een negenhoek, (2) een zeshoek en een driehoek, (3) een vijfhoek en een vierhoek, (4) drie driehoeken. In denkertje 9 is bewezen dat mogelijkheid (3) afvalt.

bij: Een boekenrekpuzzel

$$2 = \frac{13458}{6729} = \frac{13584}{6792} = \frac{13854}{6927} = \frac{14538}{7269} = \frac{14586}{7293} = \frac{14658}{7329} = \frac{15384}{7692} = \frac{15846}{7923} = \frac{15864}{7932} = \frac{18534}{9267} = \frac{18546}{9273} = \frac{18654}{9327}.$$
$$3 = \frac{17469}{5823} = \frac{17496}{5832}.$$

Alleen de oplossing met de laagste teller en noemer:

$$4 = \frac{15768}{3942}; \quad 5 = \frac{13485}{2697}; \quad 6 = \frac{17658}{2943}; \quad 7 = \frac{16758}{2394}; \quad 8 = \frac{25496}{3187}; \quad 9 = \frac{57429}{6381}.$$

De grootste breuk van dit soort met 5 cijfers in de teller is $\frac{98765}{1234} = 80,03 \dots$

Uitschieters naar boven in het aantal oplossingen komen voor bij 8, 17, 26, 35, 44, 53 en 62, allemaal negenvouden -1 ; toevallig?

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

- ∫ Dr. J. van de Craats, R.U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
★ Bruno Ernst, Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht.
< W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn.
↘ Ir. H.M. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginneken.

Secretariaat

- △ Drs. H.N. Pot, Tournoyveld 67, 3443 ER Woerden.
Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

W. Ganzevoort, M.C. van Hoorn, W. Pijls, G.A. Vonk, D.K. Wielenga.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 7,90 per jaargang. Voor anderen f 12,95.

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Het abonnementsgeld dient na ontvangst van een nota te worden gestort op girorekening 1308949 van Wolters-Noordhoff.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

Inhoud

- | | |
|---|--|
| ↘ Reflectie in een kubushoek 97 | ∫ △ Tweepuntslijnen zijn onvermijde-
lijk 106 |
| ↘ Handig wegstrepen 99, 120 | △ Staartdelen en staartloggen 108 |
| Pythagoras Olympiade PO 28-30 100 | ∫ Puzzelen met gekleurde staafjes 110,
121 |
| △ Het afbeelden van de werkelijk-
heid 101 | ↘ Een boekenrekpuzzel 117, 121 |
| △ Somformules (vervolg) 102, 120 | Drie is te veel 118 |
| Oplossingen 19e Nederlandse Wiskunde
Olympiade 104 | |

