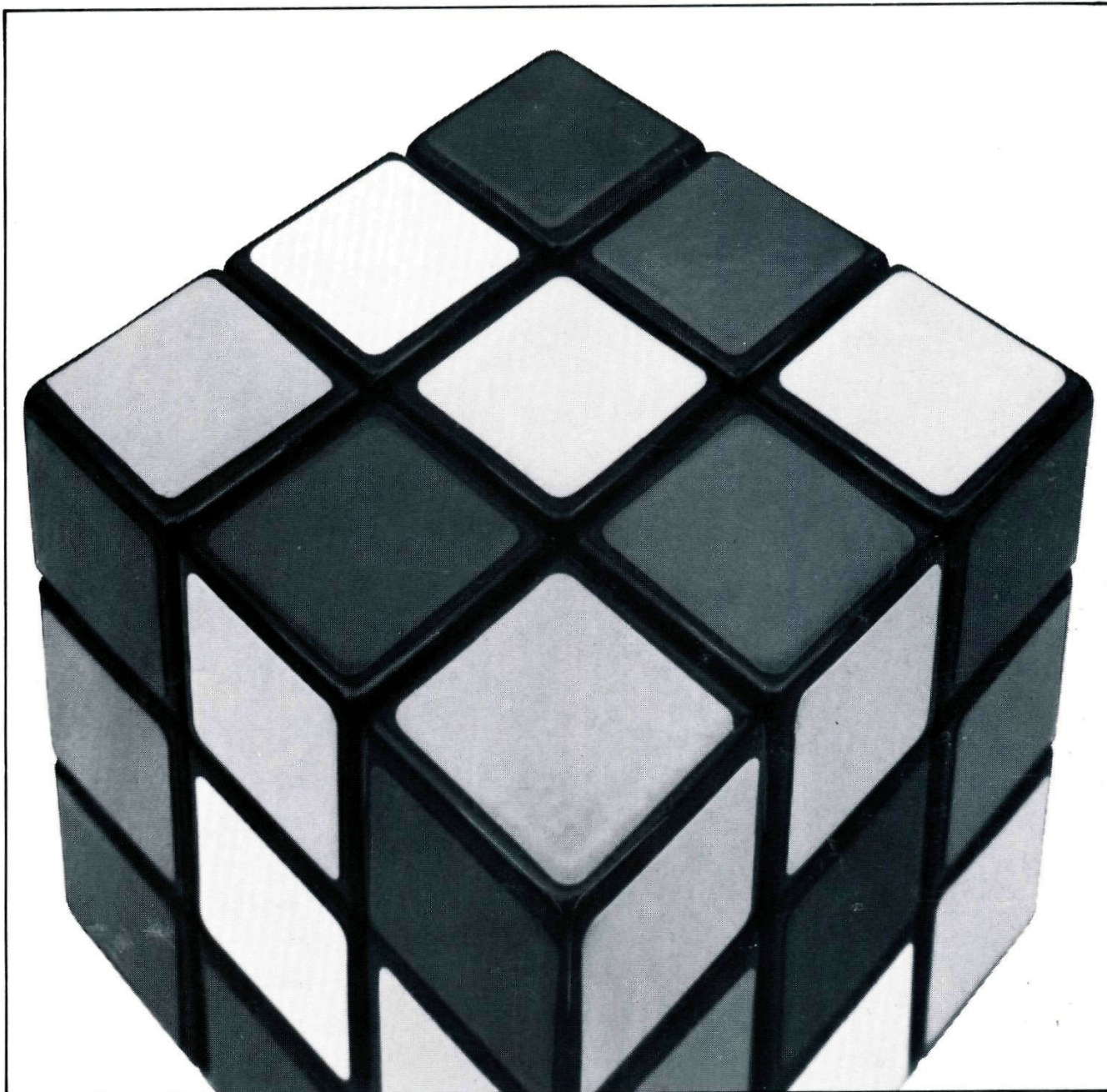


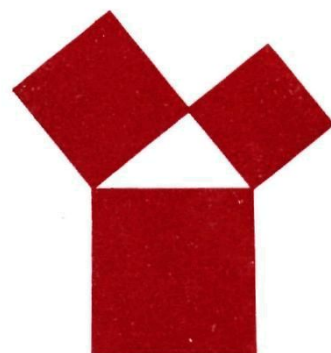


1

jaargang 21 / september 1981

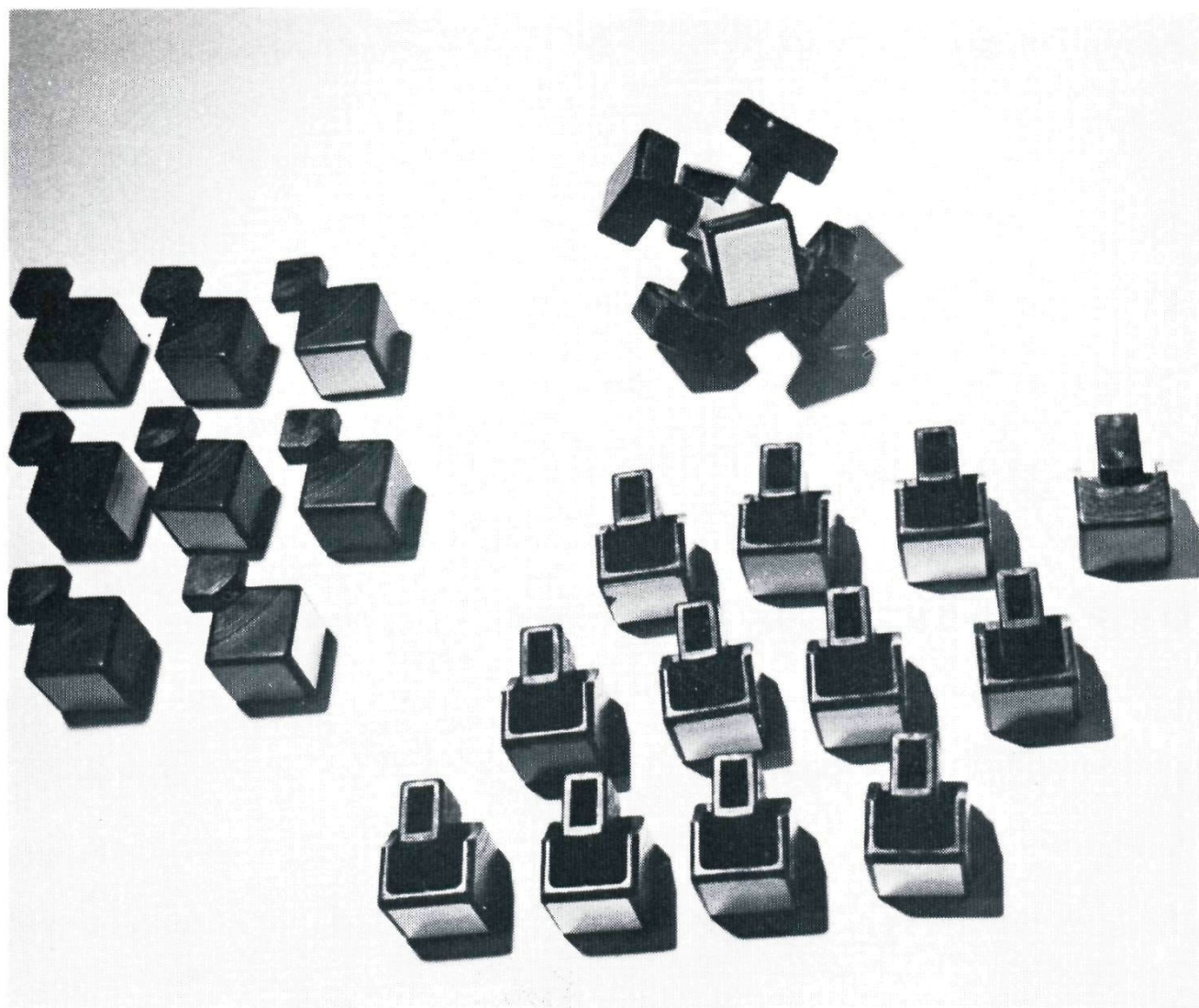
**wiskundetijdschrift
voor jongeren**

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



Clubnieuws!

Er is door enige schoolieren een **draaikubus-club** opgericht. Ze geven een blaadje uit, en organiseren 'kubusdagen' en wedstrijden.

Naam: Cubism For Fun (CFF)

Inlichtingen: Anneke Treep
Folkert Postlaan 15
1391 AV Abcoude
02946 - 1766

Just van Rossum
Hasselaersplein 7
2013 GB Haarlem
023 - 316014

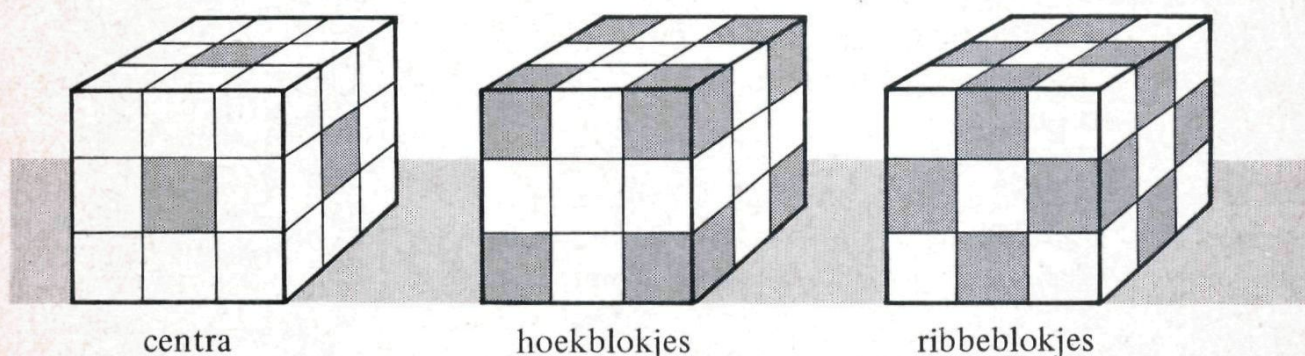
° De Magische Kubus van Rubik

De Magische Kubus is uitgevonden in 1975 door de Hongaarse architect en ontwerper Ernő Rubik. Het lijkt een gewone kubus die is opgebouwd uit $3 \times 3 \times 3$ deeltjes, allemaal even groot. De verrassing komt als we het ding in handen nemen: elk zijvlak kan in zijn geheel draaien om zijn middelpunt, zonder dat de kubus uit elkaar valt. Het bedenken van zo iets lijkt inderdaad wel bijna magie. Zelfs met de kubus in handen kan haast niemand zich indenken hoe dat in elkaar zit. Er komt geen magnetisme, elektronica of andere poespas aan te pas. Het is een louter mechanische constructie.

Rubik heeft van zijn Magische Kubus een hels moeilijke hersenbreker gemaakt door elk zijvlak een andere kleur te geven. Een paar draaiingen (een stuk of vijf is meestal al voldoende) hebben tot gevolg dat de kleuren volkomen door elkaar komen te zitten en het is praktisch onmogelijk het ding weer goed terug te draaien als we niet precies hebben onthouden welke vlakken we in welke volgorde hebben gedraaid. Elke nieuwe draaiing brengt ons dan nog verder van huis, en de opgave is natuurlijk om de begintoestand weer te herstellen.

Astronomische aantallen

Dat blijkt een verschrikkelijk moeilijke puzzel te zijn. Het is zelfs al lastig om één van de zes zijvlakken op kleur te brengen. Maar dan beginnen de moeilijkheden pas goed. Vrijwel elke draaiing brengt het goede vlak weer in de war! Denk niet dat er, door zo maar wat te draaien, kans is de goede stand toevallig tegen te komen. Het aantal mogelijkheden is daarvoor veel te groot. Er zijn ruim viermaal tien-tot-de-negentiende verschillende draai-posities. Dat is een getal van twintig cijfers. Om een idee van de grootte te geven: als we een even groot aantal kubussen op een rij zouden leggen, zou dat een lengte beslaan van meer dan 60-maal de afstand tot Proxima Centauri, na de zon de dichtstbijzijnde ster. Hetzelfde aantal kubussen zou voldoende zijn om heel Nederland te bedekken met een laag kubussen van 200 km dikte!



De kubus telt drie soorten zichtbare blokjes. De *centra* van de zes zijvlakken komen tijdens het draaien niet van hun plaats: zij zitten draaibaar bevestigd aan het centrum van de kubus dat bestaat uit drie aan elkaar verbonden onderling loodrechte assen. Verder zijn er acht blokjes met elk *drie* gekleurde zijkanten die altijd op een *hoekpunt* van de kubus zitten, en twaalf blokjes met *twee* gekleurde zijkanten, die zich altijd bevinden op een *ribbe*, midden tussen twee hoekpunten.

Oplossingsmethodes

De kubuspuzzel bestaat uit de opgave een in de war gedraaide kubus weer in zijn oorspronkelijke stand terug te draaien, dus met alle zijvlakken van één kleur. Of eigenlijk gaat het erom een *methode* te vinden waarmee de kubus vanuit *elke* positie weer naar de beginstand kan worden teruggedraaid. Ervaren kubisten kunnen dat binnen een paar minuten, en kampioenen doen het zelfs vanuit elke stand *binnen een halve minuut!*

Maar daar is natuurlijk heel wat puzzelen, denken en oefenen aan voorafgegaan. Voor de beginner is het al een grote prestatie om in een paar uur één vlak op kleur te brengen. Daarna komt het inzicht dat het niet voldoende is als alle kleuren in zo'n vlak gelijk zijn, maar dat ook de zijkantjes van de betreffende blokjes goed gekleurd moeten zijn. Als dat met veel moeite is gelukt, en bijvoorbeeld de hele *onderlaag* in orde is, zitten in de *middenlaag* nog hoogstens de vier ribbeblokjes in de vier zijvlakken niet goed. De centrale blokjes van de zijvlakken komen immers nooit van hun plaats, dus die zitten automatisch goed. Met vernuft en doorzettingsvermogen is dat ook in orde te maken. Dat is dan echter tevens het punt waar de meesten blijven steken.

De onderlaag en de middenlaag zijn in orde, maar de bovenlaag is nog een chaos. Althans meestal. We kunnen natuurlijk het geluk hebben dat er in de bovenlaag al een paar blokjes goed zitten, of zelfs dat *alle* blokjes toevallig op hun plaats terecht zijn gekomen. Helemaal uitgesloten is dat niet, maar de kans daarop is klein, want bij twee lagen goed, zijn er voor de derde laag nog steeds niet minder dan 62 208 verschillende standen mogelijk. Maar zoals gezegd, de echte kubist mag zich niet door het toeval laten helpen. Hij moet een methode hebben om *elke* stand in orde te brengen.

De systematische aanpak

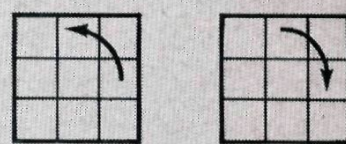
Het zoeken naar uitwegen uit deze doolhof is geen kwestie meer van eenvoudig puzzelen. Nu moet de zaak echt systematisch aangepakt worden. Het gaat erom series draaiingen te bedenken die in het bovenvlak kleine wijzigingen tot stand brengen zonder de rest van de kubus aan te tasten. Het is daarbij haast onvermijdelijk series draaiingen en hun effect op schrift vast te leggen. Slechts weinigen hebben zo'n goed geheugen dat ze het zonder papier en pen afkunnen.

Een ander effectief hulpmiddel is het demonteren en weer goed in elkaar zetten van de kubus. We kunnen dan naar hartelust met kleine series experimenteren, en zo

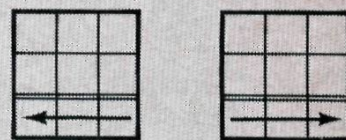
Bovenvlak-schema's

De vierkantjes met pijlen op de bladzijde hiernaast geven steeds een *bovenaanzicht* van de kubus.

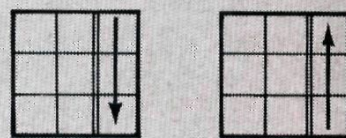
De pijlen duiden op een draaiing over een *kwartslag* (90°) van één der kubusvlakken. En wel een draaiing linksom, resp. rechtsom van:



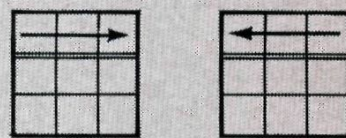
het bovenvlak



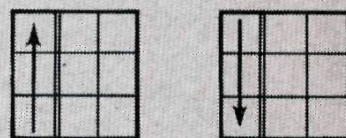
het voorvlak



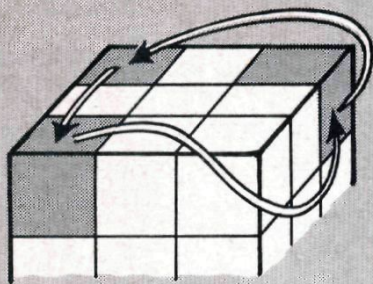
het rechterzijvlak



het achtervlak

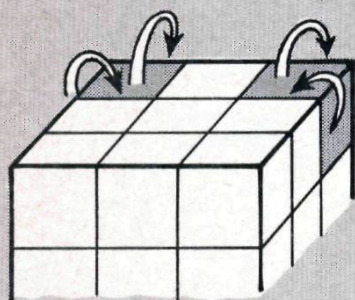
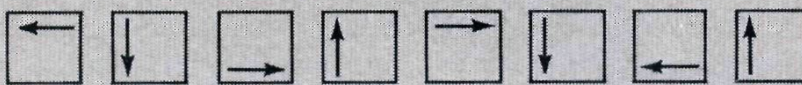


en het linkerzijvlak.



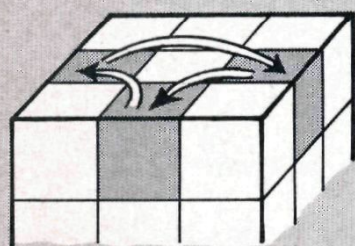
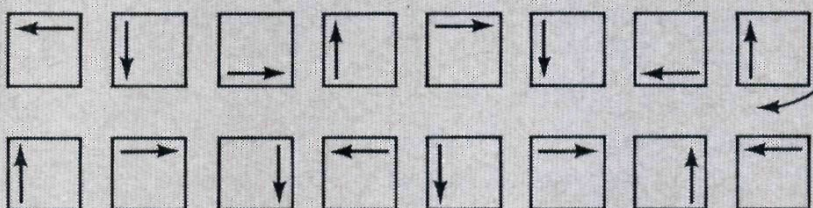
Serie I: drie hoekblokjes uit de bovenlaag schuiven rond tegen de klok in, waarbij er twee kantelen.

Recept:



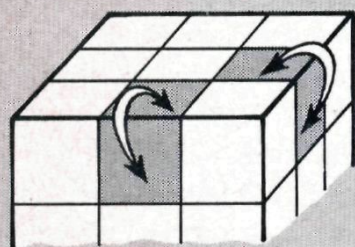
Serie II: alle blokjes houden hun plaats, maar twee hoekblokjes kantelen.

Recept (beginnend met serie I):



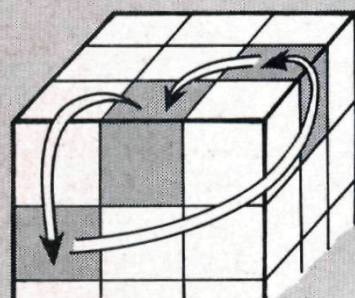
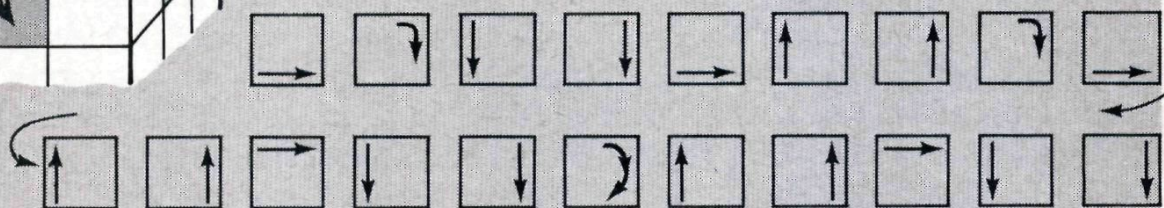
Serie III: drie ribbeblokjes uit de bovenlaag schuiven rond met de klok mee, zonder om te klappen.

Recept (dubbele pijlen duiden op een *halve* draai):



Serie IV: alle blokjes houden hun plaats, maar twee ribbeblokjes klappen om.

Recept (beginnend met serie III):



Serie V: drie ribbeblokjes uit de boven- en de middenlaag schuiven rond.

Recept:

Draai  daarna serie III en dan 

via de oplossing van deelproblemen de grote puzzel proberen te kraken. Sommigen zullen dat misschien verwerpelijk vinden. Het is natuurlijk ook een grotere prestatie om een oplossingsmethode te vinden zonder de kubus ooit uit elkaar te halen. Maar na weken of zelfs maanden vruchteloos draaien, gaat men daar toch genuanceerder over denken. En principieel is er eigenlijk helemaal geen verschil tussen het uitproberen van series op een 'schone' kubus (zodat het effect van zo'n serie onmiddellijk duidelijk is), en het vastleggen met pen en papier van het verschil tussen 'beginstand' en 'eindstand' bij een serie op een 'vuile' kubus. Het demonteren spaart alleen veel tijd en papier.

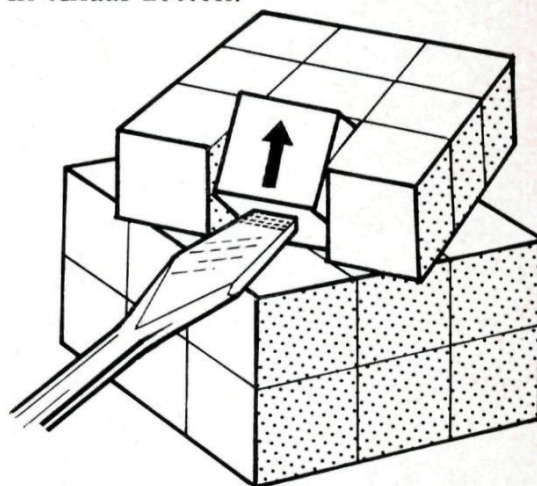
Demonteren

Natuurlijk is er enige geestelijke moed nodig om voor het eerst dit brute hulpmiddel te hanteren. De kubus slijt echter veel meer van het ruw en onvoorzichtig draaien dan van het steeds weer (voorzichtig) uit elkaar halen en weer in elkaar zetten.

Het demonteren gaat als volgt: draai het bovenzvlak een achtste slag (dus over een hoek van 45°).

Neem een blokje dat midden tussen twee aangrenzende hoeken zit in het bovenzvlak. Het kan voorzichtig een beetje omhoog gewrikt worden.

Met een schroevendraaier, sleutel of iets dergelijks kan het dan verder omhoog worden gewipt tot het vanzelf los springt. Pas daarbij op het plastic niet te beschadigen. Als één blokje los is, kan de kubus verder gemakkelijk geheel uit elkaar worden gehaald. Het is handig daarbij soms een vlak wat te draaien waardoor de blokjes gemakkelijker vrij komen.



Als de kubus helemaal uit elkaar is, zien we het middenstuk met de drie assen waar de centra van de zijvlakken draaibaar op vast zitten. Verder hebben we twee soorten losse blokjes: de acht *hoekblokjes* en de twaalf *ribbeblokjes*. Ze hebben inkepingen en uitstulpingen waarmee ze elkaar tijdens het draaien vasthouden. Elk hoekblokje kan op elke hoekpositie in *drie* standen gedraaid zitten, en elk ribbeblokje op elke ribbepositie in *twee* standen. Er is echter voor elk blokje maar één goede positie en stand. Het rood-wit-blauwe hoekblokje behoort bijvoorbeeld thuis op de hoek waar het rode, witte en blauwe zijvlak van de kubus samenkomen, en de kleur die een zijvlak moet hebben, zien we aan het centrale blokje ervan. Er is dus ook maar één mogelijkheid om de kubus zo in elkaar te zetten dat elk zijvlak van één kleur is. Dat is de beginstand, de stand waarin de kubus was toen we hem kregen. Deze stand zullen we voortaan aanduiden met START.

In elkaar zetten

Als we de kubus in elkaar gaan zetten, doen we er verstandig aan dit zo te doen dat de START-positie weer ontstaat. We zullen zo dadelijk uitleggen waarom. Met wat handigheid is dit assembleren zonder veel problemen te realiseren, maar bij het laatste blokje moeten we oppassen. Zorg er voor dat dit een *ribbeblokje* van het bovenzvlak is. Draai dit vlak weer in de 45° stand. Het blokje kan dan schuin op zijn plaats gestoken worden, en met enige kracht naar binnen worden geduwd. Met een klik springt het op zijn plaats.

Natuurlijk kunnen we de kubus nog in ontzaglijk veel andere standen in elkaar zetten. Het is interessant uit te rekenen op hoeveel manieren dit precies mogelijk is. We kijken eerst naar de hoekblokjes. Het eerste hoekblokjes kunnen we op acht plaatsen zetten, en

op elke plaats in drie standen. Voor het volgende hoekblokje zijn er dan nog zeven plaatsen over, ook elk met drie standen. Het daarop volgende hoekblokje heeft dan nog zes plaatsen tot zijn beschikking, ook elk met drie standen. Zo kunnen we doorgaan. Er zijn dus in totaal $(8 \times 3) \times (7 \times 3) \times (6 \times 3) \times \dots \times (1 \times 3) = 264\,539\,520$ verschillende manieren waarop de hoekblokjes in de kubus gezet kunnen worden. De twaalf ribbeblokjes kunnen op elke plaats op twee manieren zitten. Er zijn dus

$(12 \times 2) \times (11 \times 2) \times \dots \times (2 \times 2) \times (1 \times 2) = 1\,961\,990\,553\,600$ manieren waarop de ribbeblokjes in de kubus kunnen worden geplaatst.

In totaal zijn er daarom

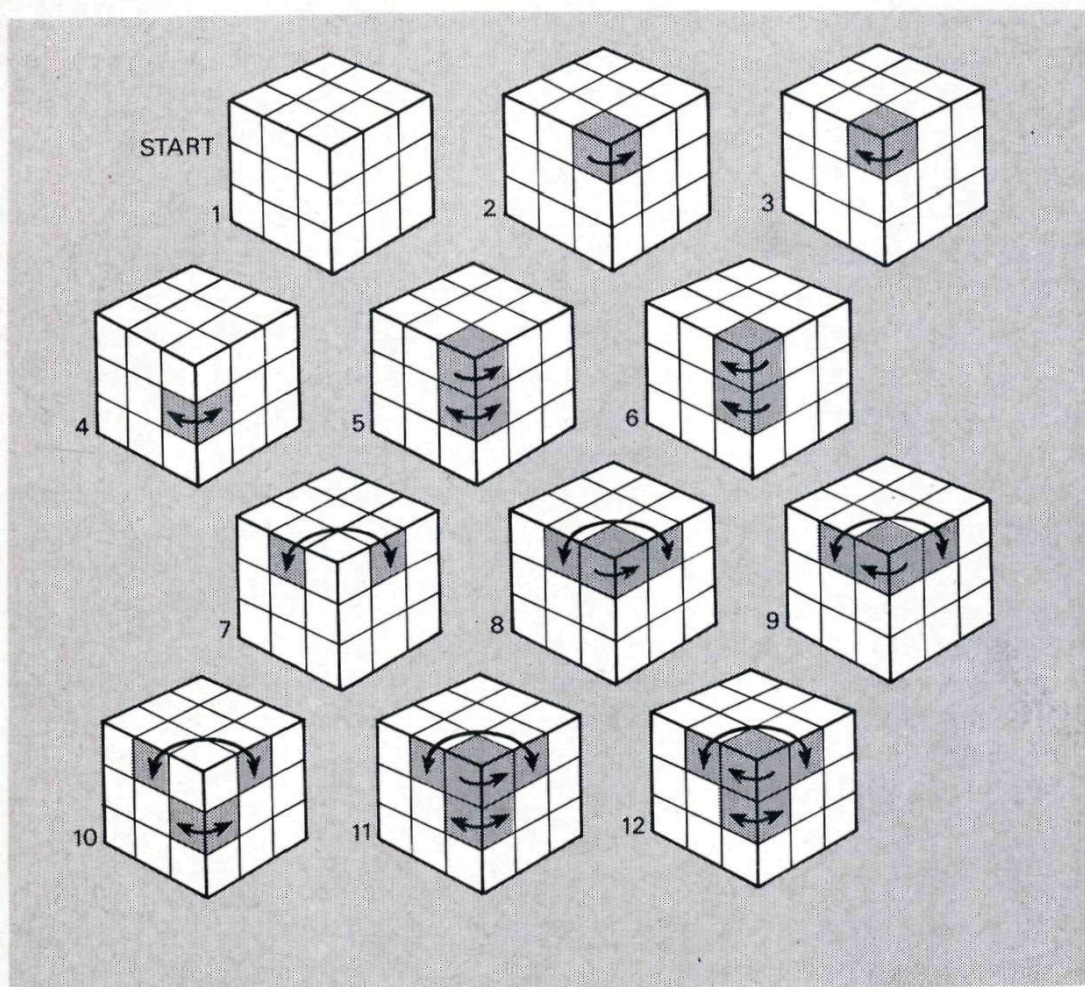
$$264\,539\,520 \times 1\,961\,990\,553\,600 = 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000$$

verschillende manieren om de kubus in elkaar te zetten.

Niet al die posities zijn echter door draaien vanuit START te bereiken. Of, anders gezegd, niet al die posities zijn door draaien naar START terug te voeren. Men kan aantonen dat er twaalf 'banen' zijn, elk met evenveel draaiposities. In elke baan zitten dus

$$\frac{1}{12} \times 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000 = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$$

draaiposities, en in het bijzonder is dit ook het aantal standen waarin de kubus vanuit START kan worden gedraaid. Hoe onvoorstelbaar groot dit aantal is, hebben we hierboven al gezien.



Deze elf variaties van de START-positie zijn *geen van alle* door draaiingen vanuit START te bereiken. En ook niet onderling in elkaar over te voeren. Slechts de schroevendraaier biedt hier uitkomst!

Wanneer is een oplossingsmethode volledig?

Stel dat iemand een methode heeft gevonden waarmee hij er elke keer weer in slaagt de kubus naar START terug te draaien. Hoe weet hij of zijn methode ook echt volledig is? Met andere woorden, hoe weet hij of hij niet ooit eens een situatie tegen zal komen waar hij geen raad mee weet? En als we zo gemeen zijn hem een in de war gedraaide kubus te geven die in een *verkeerde* baan zit (zodat hij START nooit door draaien kan bereiken), hoe komt hij daar dan achter? Zelfs als hij wel eens iets gehoord heeft over de twaalf verschillende banen, hoe weet hij dan of hij echt in een verkeerde baan zit, of alleen maar een onvolledige oplossingsmethode heeft? Eigenlijk mag iemand zich pas volleerd kubist noemen als hij op al deze vragen antwoord weet.

Het zou te ver voeren hier deze kwestie tot in alle details te behandelen, maar een tipje van de sluier zullen we toch oplichten. Op de vorige bladzijde is voor elk van de twaalf banen een karakteristieke stand weergegeven: START, of een stand die daar dicht bij ligt. Als iemand dus bij het draaien één van de elf andere standen tegenkomt, kan hij er zeker van zijn in een verkeerde baan te zitten. Van de twaalf figuren geeft de eerste de START-positie weer. Bij de tweede is één hoekblokje een derde slag linksom gedraaid, bij nr. 3 idem rechtsom, bij nr. 4 is één ribbeblokje omgeklapt, en bij nr. 7 zijn er twee ribbeblokjes verwisseld. Alle andere figuren zijn combinaties hiervan.

Nuttige series

Op veel scholen is de kubuspuzzel een rage, en ongetwijfeld hebben tal van lezers van Pythagoras de puzzel al opgelost. Er zijn ook oplossingsmethodes gepubliceerd in kranten en weekbladen. Maar het leukst is natuurlijk om zelf een methode te verzinnen. Velen komen echter niet verder dan een 'bijna volledige' methode: ze missen net nog een paar trucs om de kubus volledig op kleur te brengen.

Als jij ook op zo'n manier bent vastgelopen, kun je verder komen met een of meer van de op blz. 3 apart beschreven draai-series. De series I t/m IV werken alleen op het *bovenvlak*; de onderlaag en de middenlaag van de kubus tasten ze niet aan. In het bovenvlak hebben ze ook een zeer beperkt effect.

Met deze series zou je zelfs een complete oplossingsmethode voor de puzzel kunnen ontwerpen, maar het zou flauw zijn die hier te publiceren. Dat zou trouwens ook een nogal omslachtige methode worden. We geven deze series met hun beperkte effect alleen om je over bepaalde drempels heen te helpen als je vast zit. Daarna moet je zelf maar weer zien dat je via combinaties en vereenvoudigingen je methode verfijnt.

Nog veel meer over de kubus is te vinden in: *De magische kubus van Rubik*. Geschreven door Jan van de Craats en uitgegeven bij De Muiderkring; ISBN 90 6082 219 6; prijs f 7,50.

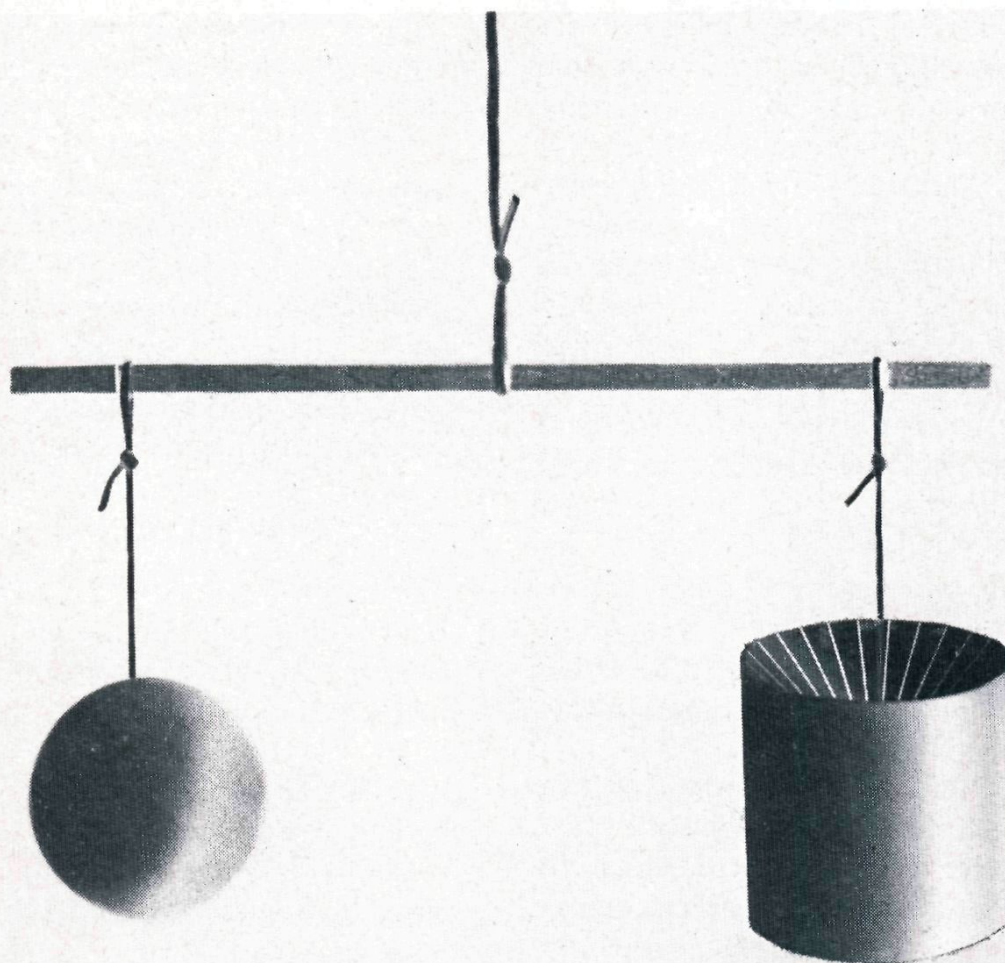


Programmeerwedstrijd

De vorig jaar ook in Pythagoras aangekondigde programmeerwedstrijd voor jongeren (in het kader van een internationale conferentie over computers in het onderwijs) had in Vlaanderen als winnaar: Marc Van Daele, leerling van het St. -Jozef Klein Seminarie te Sint-Niklaas.

De deelname uit Nederland was helaas zodanig minimaal, dat is afgezien van het aanwijzen van een winnaar.

° De bol en de cilinder met dubbele ziel



Op de foto zie je rechts een *dubbel-bezielde vierkante cilinder*. Zowel van boven als van onder is er een kegelvormig deel uit weggenomen, zoiets als de uitholling in de bodem van een wijnfles – de *ziel* van de fles. Juist zó, dat de toppen van de beide kegels in het hart van de cilinder samenvallen. Verder is de diameter van de cilinder gelijk aan zijn hoogte, dus de doorsnede over de as is een vierkant.

Ook zie je een *bol*, met een diameter even groot als van de cilinder.

De vraag is nu, gesteld dat beide lichamen massief zijn en gemaakt van hetzelfde materiaal: welk denk je dat het zwaarst zal zijn?

Anders gezegd: welk lichaam heeft de grootste inhoud? Of . . . ?

Het beginsel van Cavalieri

We zullen aantonen dat ondanks de heel verschillende vorm, de inhouden even groot zijn. We maken daarbij gebruik van het zg. beginsel van Cavalieri.

De Italiaanse wiskundige *Francesco Bonaventura Cavalieri* leefde van 1598 tot 1647. Hij was hoogleraar in de wiskunde aan de universiteit van Bologna en vriend en leerling van de beroemde Galilei. Zijn bekendste werk, de *GEOMETRIA*¹, verscheen in 1635. Hierin zette hij een werkwijze uiteen, waarmee in sommige gevallen kan worden aangetoond dat verschillend gevormde lichamen toch even grote inhouden hebben.

De redenering is bijvoorbeeld toepasbaar op de kegel en de piramide van fig. 1. Als beide lichamen even hoog zijn en ook een even groot grondvlak hebben, zullen horizontale doorsneden op elke andere hoogte eveneens onderling even groot zijn. Cavalieri dacht zich zulke lichamen in dunne schijfjes verdeeld, en redeneerde als volgt:

De inhoud van één zo'n schijfje wordt in hoofdzaak bepaald door de grootte (niet de vorm) van z'n grondvlak én door z'n dikte. Maar de precieze manier waarop het schijfje aan z'n rand schuin toeloopt heeft op de inhoud van het schijfje weinig invloed. En die invloed neemt bovendien nog áf naarmate we de schijfjes dunner nemen.

¹ Voluit in het Latijn: *Geometria indivisibilibus continuorum nova*.

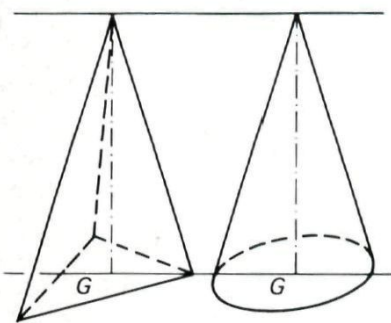


Fig. 1. Piramide en kegel hebben bij gelijke grondoppervlakte een gelijke inhoud.

Zijn conclusie was daarom dat de inhouden van twee even dunne schijfjes in de kegel en de piramide (even hoog boven het grondvlak) als gelijk beschouwd kunnen worden. En daaruit volgt direct dat de inhouden van de totale kegel en piramide — alle schijfjesinhouden samengenomen — ook gelijk zijn.

Dezelfde redenering is van toepassing op de drie in fig. 2 getekende lichamen: bij gelijke hoogte en even grote grondvlakken zijn ook de inhouden even groot.

Samengevat luidt het *beginsel van Cavalieri*:

Als twee lichamen telkens op gelijke hoogte een doorsnede met gelijke oppervlakte hebben, zijn de inhouden van die lichamen gelijk.

Bol en uitgeholde cilinder

Het genoemde beginsel blijkt prachtig toepasbaar op onze bol en uitgeholde cilinder. Zie fig. 3.

We denken beide lichamen op gelijke hoogte horizontaal doorgesneden en bepalen de oppervlakten van de gearceerde cirkel links en de gearceerde ring rechts.

Voor de cirkel is dit πr^2 , of volgens de stelling van Pythagoras $\pi(R^2 - h^2)$.

De ring geeft dezelfde uitkomst: buiten-cirkel minus binnencirkel = $\pi R^2 - \pi h^2$.

De gelijkheid geldt voor elke hoogte h . Dus volgens Cavalieri is *de bolinhoud gelijk aan de inhoud van de uitgeholde cilinder*.

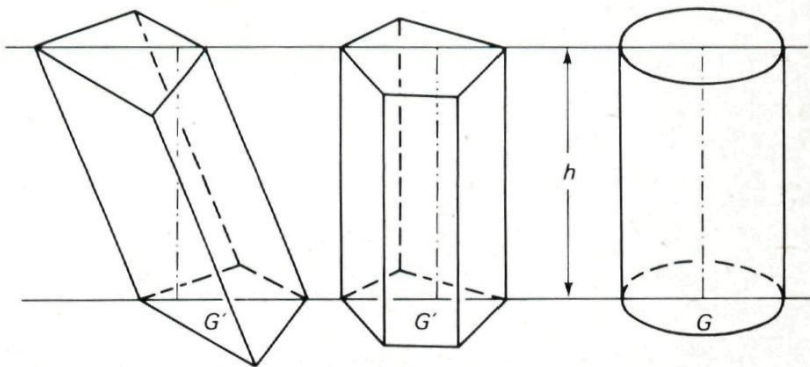


Fig. 2. Driemaal een gelijke inhoud.

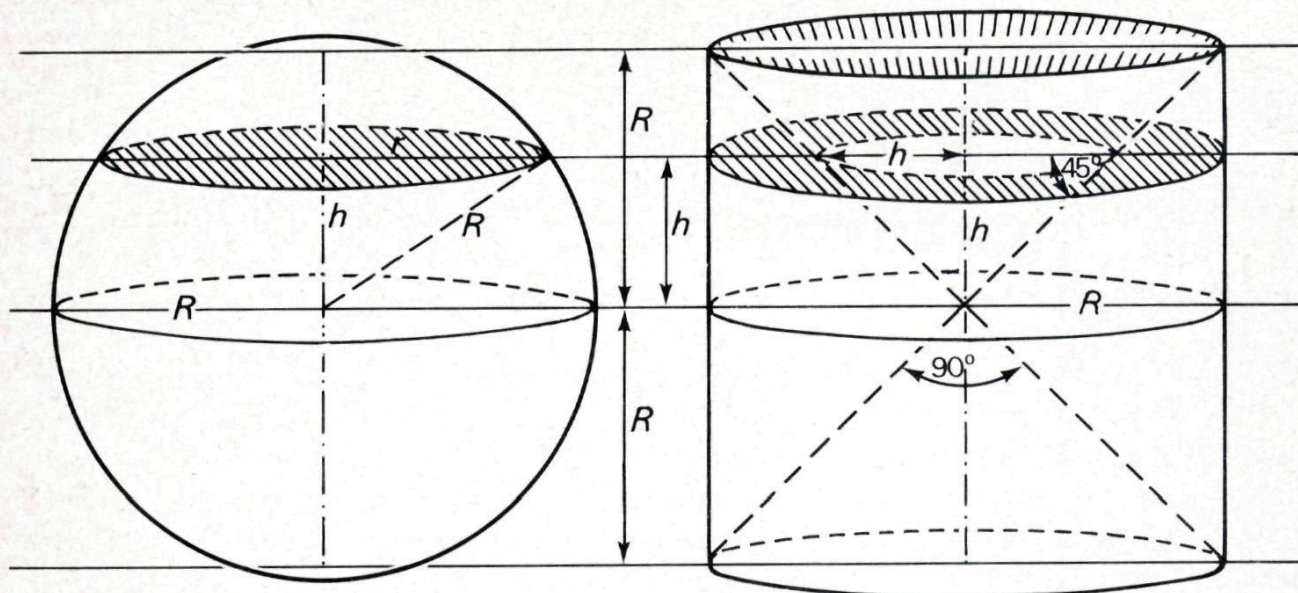


Fig. 3. De gearceerde doorsneden links en rechts zijn even groot.

°° De bolformule

Voor wie de inhoudsformule kent voor de cilinder en voor de kegel, geeft het voorgaande een leuke methode om de inhoudsformule voor de bol te vinden.

In fig. 3 heeft de cilinder een inhoud:

$$\text{grondvlak} \times \text{hoogte} = \pi R^2 \times 2R.$$

En elk van de kegels:

$$\frac{1}{3} \times \text{grondvlak} \times \text{hoogte} = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times R.$$

Toepassing van het beginsel van Cavalieri geeft nu:

$$\begin{aligned} \text{inhoud van de bol met straal } R &= \\ &= \text{cilinder} - \text{twee kegels} = \\ &= 2\pi R^3 - 2 \times \frac{1}{3} \pi R^3 = \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

° Een algoritme voor $\sqrt[3]{x}$

Hoe kun je met een rekendoosje waar alleen een toets $\sqrt{\quad}$ op zit voor gewone worteltrekking, toch een *derdewortel* benaderen? Bijvoorbeeld: $\sqrt[3]{5} \approx \dots$?

Recept

Toets een aantal keren na elkaar de reeks

$$\boxed{5} \quad \boxed{=} \quad \boxed{\sqrt{\quad}} \quad \boxed{\sqrt{\quad}} \quad \boxed{\times} \quad .$$

Als het goed is moet je na een keer of tien blijven uitkomen op 1,7099759. De derdemacht hiervan is juist weer 5.

Onderzoek

- Bepaal op dezelfde manier $\sqrt[3]{8}$.
- Een dalende benadering krijg je door in de eerste toetsreeks slechts éénmaal $\sqrt{\quad}$ te drukken. Bereik je zo dezelfde grens?
- Als je tussenresultaten opschrijft, kun je nagaan dat na elke reeks de resterende fout ongeveer door 4 gedeeld is.
- Misschien kun je begrijpen waarom het bovenstaande werkt als je het volgende algoritme bekijkt, waarin $5 : 3$ wordt bepaald met uitsluitend *tweedelingen*.

$$\boxed{5} \quad \boxed{=} \quad \boxed{:} \quad \boxed{2} \quad \boxed{:} \quad \boxed{2} \quad \boxed{+}$$



Pythagoras Olympiade

Nieuwe opgaven (oplossingen inzenden vóór 23 november 1981).

PO 31. Zoals bekend kan men de Magische Kubus van Rubik demonteren, waarbij de 8 hoekblokjes en de 12 ribbeblokjes vrijkomen, en daarna op tal van verschillende manieren weer in elkaar zetten.

Door een fabricagefout ontstond een kubus met twee aangrenzende zijvlakken geheel in één kleur. Hoeveel, wat kleur betreft onderscheidbare, resultaten zijn er mogelijk wanneer deze foute kubus na demonteren weer in elkaar wordt gezet?

PO 32. Gegeven zijn een balans en vijf gouden munten. Men weet dat drie van de vijf munten even zwaar zijn. En ook dat de vierde evenveel zwaarder is, als de vijfde lichter is.

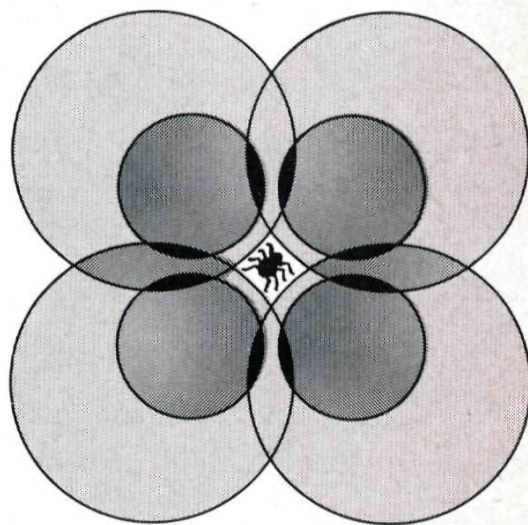
Men legt telkens vier van de vijf munten op de balans, twee op elke schaal. De weegschaal is dan óf in evenwicht, óf weinig uit balans, óf veel uit balans.

Hoeveel wegingen zijn minimaal nodig om zeker te weten welke de zwaardere munt is en welke de lichtere. Motiveer je antwoord.

PO 33. Boven een tafel hangen enige lampen die elk een cirkelvormige lichtkring op tafel geven (niet noodzakelijk even groot). De kringen sluiten een donker gebied in, waar een enigszins lichtschuw spinnetje zit dat niet durft te komen op door meer dan één lamp beschenen plaatsen.

Hoe kan met zo weinig mogelijk lampen het spinnetje belet worden te ontsnappen? Bewijs ook dat de spin met minder lampen altijd weg kan komen.

(Hiernaast zie je een voorbeeld van een opsluiting met 8 lampen.)



Wedstrijdvoorwaarden en prijzen

- * Leerlingen van het voortgezet/secundair onderwijs kunnen hun oplossing van een of meer opgaven insturen aan: *Pythagoras Olympiade, Brederode 29, 2261 HG Leidschendam (NL)*. Let op de inzendtermijn en zorg voor voldoende frankering.
- * Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Elke oplossing moet op een nieuw vel beginnen.
- * Oplossingen dienen gemotiveerd en volledig uitgewerkt te zijn, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Slechts goed leesbare inzendingen worden bekeken.
- * Wie een aan zichzelf geadresseerde en als brief gefrankeerde open enveloppe meezendt, ontvangt na de inzendtermijn onze oplossingen.

- * Per opgave worden onder de goede oplossters twee prijzen t.w.v. f 10 / Bfr 150 verloot.
- * De opgaven van één jaargang vormen samen de *ladderwedstrijd*. De drie inzenders van de meeste goede oplossingen krijgen elk een prijs t.w.v. f 25 / Bfr 400.
- * De beste tien van de ladderwedstrijd die niet in een examenklas zitten, krijgen een uitnodiging voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Zij hoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

Erelijst ladderwedstrijd 1980/81

Aan de Tweede Pythagoras Olympiade, waarvan de opgaven verschenen in de vorige jaargang, hebben 187 leerlingen deelgenomen. Zij zonden oplossingen in van één of meer van de 15 opgaven. Voor elke goede oplossing werd 1 punt toegekend. Er waren 16 deelnemers met 10 punten of meer. Degenen onder hen die niet in een eindexamenklas zaten, hebben een uitnodiging gekregen voor de Tweede Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1981 die in september is gehouden in Apeldoorn.

Voor de winnaars van de Pythagoras Olympiade waren drie boekebonnen van f 25,— beschikbaar. Jeroen Mulder kreeg met 15 punten de eerste van de drie, en omdat er vijf deelnemers waren met 14 punten, moest het lot verder beslissen. Rutger Noot en Eric Postma waren de gelukkigen.

De top-zestien waren:

15	p	Jeroen Mulder, 5-vwo RSG, Roermond
14	p	Hennie Groot Lipman, 5-vwo Florens Radewijns College, Raalte
14	p	Ralph Peeters, 5-vwo Elzendaalcollege, Boxmeer
14	p	Eric Postma, 5-vwo Baudartiuscollege, Zutphen
14	p	Frank Waaldijk, 5-vwo Elzendaalcollege, Boxmeer
14	p	Rutger Noot, 4-vwo Gymnasium Haganum, Den Haag
13½	p	Rob de Jeu, 5-vwo SG Albert Einstein, Pernis
13½	p	William Stassen, 6-vwo Thomas à Kempis SG, Zwolle
13	p	Alexander Deelman, 5-vwo Chr. Gymnasium Sorghvliet, Den Haag
12½	p	Menke Ubbens, 3-vwo RSG Magister Alvinus, Sneek
12	p	Johan Elzer, 5-vwo Prot. Lyceum, Eindhoven
11	p	Auke Zijlstra, 4-vwo RSG, Leeuwarden
10½	p	Harry Oosterveen, 5-vwo Menso Alting College, Hoogeveen
10½	p	Theo Smit, 6-vwo Jacobuscollege, Enschede
10	p	Daan Krammer, 4-vwo SG Bataafse Kamp, Hengelo
10	p	Bart van der Leemput, 6-vwo St.-Janslyceum, 's-Hertogenbosch

°° Slimmer staartdelen

$$\begin{array}{r} 97 \div 2,00 \setminus 0,0206185567 \\ \underline{1\ 94} \\ 600 \\ \underline{582} \\ 180 \\ \underline{97} \\ 830 \\ \underline{776} \\ 540 \\ \underline{485} \\ 550 \\ \underline{485} \\ 650 \\ \underline{582} \\ 680 \\ \underline{679} \\ 1 \leftarrow \end{array}$$

Als je de breuk $\frac{1}{97}$ in decimale vorm wilt schrijven, kan dat door een lange staartdeling te maken. Zoals bij elke breuk het geval is gaat de cijferreeks in de uitkomst van die deling op den duur repeteren, dezelfde cijfergroep komt steeds weer terug. In het geval van $\frac{1}{97}$ blijkt deze cijfergroep, het 'repetendum' van de breuk, maar liefst 96 cijfers lang. Dus je bent wel even bezig met staartdelen!

Het artikel 'Slim staartdelen' in afl. 4 van de vorige jaargang gaf wat methoden waarop dit handiger kan. Maar het blijkt nog véél slimmer te kunnen!! De heer P. A. Hoogendoorn uit Dordrecht wees ons daar op.

Om de methode duidelijk te maken, moeten we bij de noemer 97 uitgaan van een teller 2. Even stug staartdelen blijkt redelijk snel de rest 1 op te leveren.

Dit resultaat kan ook worden genoteerd als: $\frac{2}{97} = 0,020618556(7\frac{1}{97})$ (1)

En het hele verdere repetendum kan nu zeer simpel worden opgeschreven met behulp van het volgende recept:

Vervang $\frac{1}{97}$ aan het eind van (1), door de helft van de decimale vorm van $\frac{2}{97}$ voorzover die *er al* staat.

Dit leidt tot:

$$\begin{aligned} \frac{2}{97} &= 0,020618556(7\frac{1}{97}) = \\ &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{: 2} \rightarrow \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{---}} \\ &= 0,020618556(7 + 0,010309278(3,5 + \frac{1}{97})) = \\ &= 0,0206185567010309278(3,5 + \frac{1}{97}). \end{aligned}$$

Het mooiste komt nu nog.

Want je hoeft je van de minder fraaie vorm tussen de laatste haakjes niets aan te trekken. Een onbeperkt aantal decimalen vind je door op te merken dat het cursief gedrukte '*er al*' in het recept steeds op de *nieuw* verkregen cijferreeks kan slaan. Zodat de procedure oneindig voort te zetten is:

$\frac{2}{97} = 0,02061855670103092783505154 \dots$ enzovoort, enzovoort, steeds maar blijven halveren. (Dat kun je toch wel snel uit je hoofd?)

Hoe lang doorgaan?

Het probleem is nu niet meer om te vinden hoe de cijferreeks verder gaat, maar waar je ermee mag stoppen...

Algemeen geldt hiervoor de regel dat de lengte van het repetendum van een breuk, *maximaal* gelijk is aan: de noemer - 1; onafhankelijk van de teller. Bij $\frac{2}{97}$ komt het beginpatroon 020618... ook inderdaad pas terug na 96 decimalen.

De decimale ontwikkeling van $\frac{1}{97}$ volgt direct uit die van $\frac{2}{97}$ door weglating van de eerste tien cijfers 0206185567. Deze cijfergroep telt dan in het repetendum aan het eind mee, in plaats van aan het begin.

Een ander voorbeeld: $\frac{4}{43} = 0, \dots ?$

Staartdelen geeft al heel snel de rest 1:

$$\frac{4}{43} = 0,09(3\frac{1}{43}).$$

Hierin is ' $\frac{1}{43}$ ' te vervangen door 0,093... : 4.

En je kunt nu uit het hoofd cijfer voor cijfer berekenen en direct erachter schrijven:

$$\frac{4}{43} = 0,093023255813953488372\ 0930\dots$$

: 4 etc.

Probeer het zelf eens

1) Schrijf $\frac{3}{17}$ decimaal.

2) Een wat lastiger, omdat je de cijfers die je opschrijft onmiddellijk weer moet lezen en gebruiken: schrijf $\frac{2}{19}$ decimaal.

3) Schrijf $\frac{6}{13}$ decimaal. Ga hier door met staartdelen tot je de rest 2 vindt, het derde deel van de beginrest 6. De al verkregen cijfers moeten dan natuurlijk gedeeld worden door 3.

(Een rest 1 blijkt bij het uitdelen van $\frac{6}{13}$ niet voor te komen.)

Niet altijd

In veel gevallen werkt de hier aangegeven methode niet zo best (de voorbeelden hierboven zijn speciaal uitgezocht). Er bestaan evenwel nog enkele kunstgrepen en verfijningen meer.

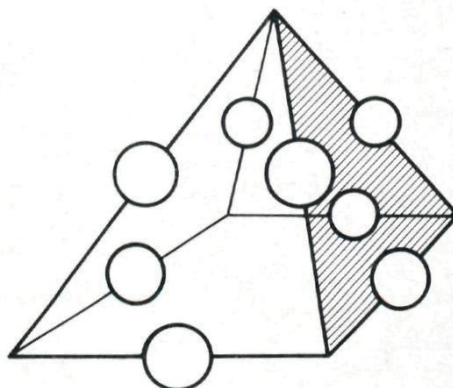
Uiteindelijk blijkt dat het 'gewone' staartdelen weliswaar een standaardmethode is die *altijd* toepasbaar is, maar het is niet de enige methode. Het kan soms bepaald de moeite lonen om te kijken of het niet wat handiger kan.

°Hoeken van van achttien

Plaats de acht getallen

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10

op de acht ribben van een piramide. Zodanig dat de som van de getallen op in één hoekpunt samenkomende ribben steeds 18 is.



°Drie is te veel, strategieën

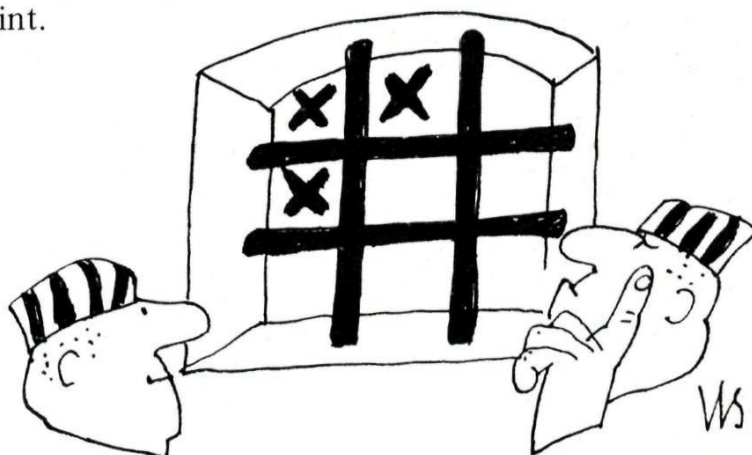
M. C. van Hoorn
H. N. Pot

In aflevering 5 van de vorige jaargang (blz. 118) werd het spel GVR beschreven. We herhalen eerst nog even de regels:

- In een 3-bij-3 patroon vullen twee spelers ombeurten één hokje.
- Winnaar is degene die het laatst een hokje kan vullen, zónder een rij of kolom van drie hokjes helemaal vol te maken.

Een variatie hierop is het spel GVL, waarbij geen rij, kolom, of *diagonaal* van drie hokjes volgemaakt mag worden.

Van GVR geven we nu een complete analyse; van GVL alleen een winnende strategie. Het blijkt dat GVR bij goed spel altijd door de tweede speler gewonnen wordt, en GVL altijd door de speler die begint.



GVR

Hoe vind je een geschikte manier om uit te zoeken hoe je het spel GVR moet spelen om (zo mogelijk) te winnen?

Daartoe vragen we ons eerst af of we *een* manier kunnen bedenken, waarbij we even afzien van de voorwaarde dat het liefst ook een *geschikte* manier moet zijn.

Misschien wel de *mí*nst geschikte manier, maar in theorie wel een mogelijkheid, is

om onder *él*ke stand *ál*le toegelaten vervolgstanden aan te geven. En als dat uiteindelijk volledig getekend is, daaruit af te lezen vanuit welke standen een speler zijn tegenspeler onvermijdelijk op een verliezende stand laat uitkomen. Figuur 1 geeft het eerste begin van zo'n schema.

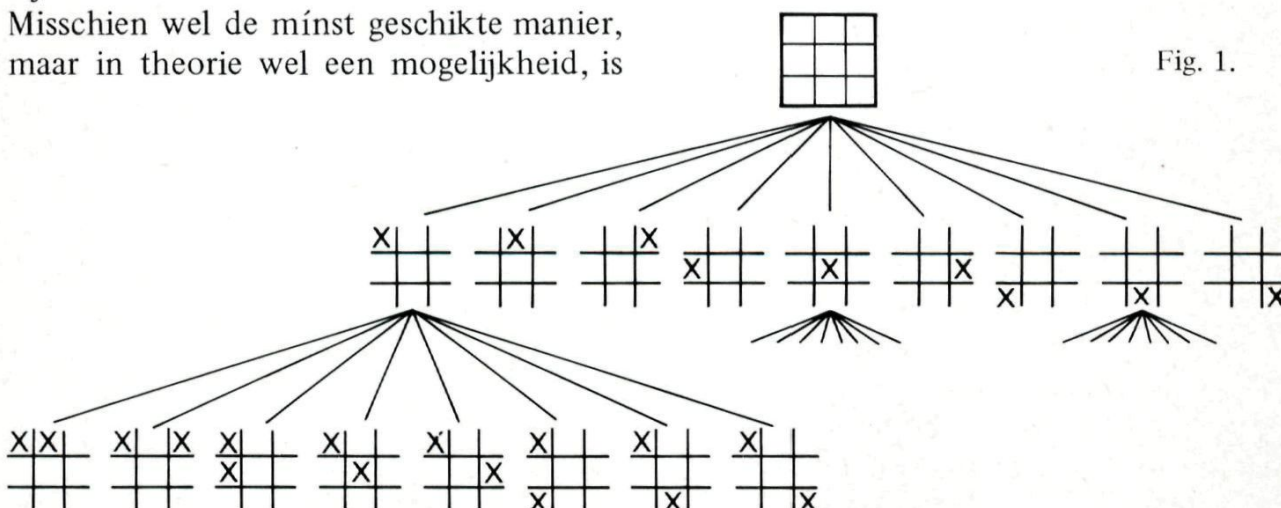


Fig. 1.

Hoewel er in het volledige schema zeker minder dan $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$ standen voorkomen, is dit natuurlijk toch volmaakt onuitvoerbaar.

Maar, we deden het ook wel erg stom.

Als de eerste speler met een hoekhokje begint, maakt het voor de rest van het spel niet uit welke hoek hij kiest! En hetzelfde geldt voor een tussenhokje langs de rand. De eerste speler heeft dus maar *drie* echt verschillende keuzen: hoekhokje, tussenhokje, centrumhokje.

Kijken we in de voorgaande figuur naar de acht getekende mogelijkheden voor de tweede speler, dan vinden we daar paren bij die elkaars spiegelbeeld zijn. Ook dat onderscheid maakt voor het vervolg niet uit.

Met deze vereenvoudigingen gaat het begin van het schema er als volgt uit zien:

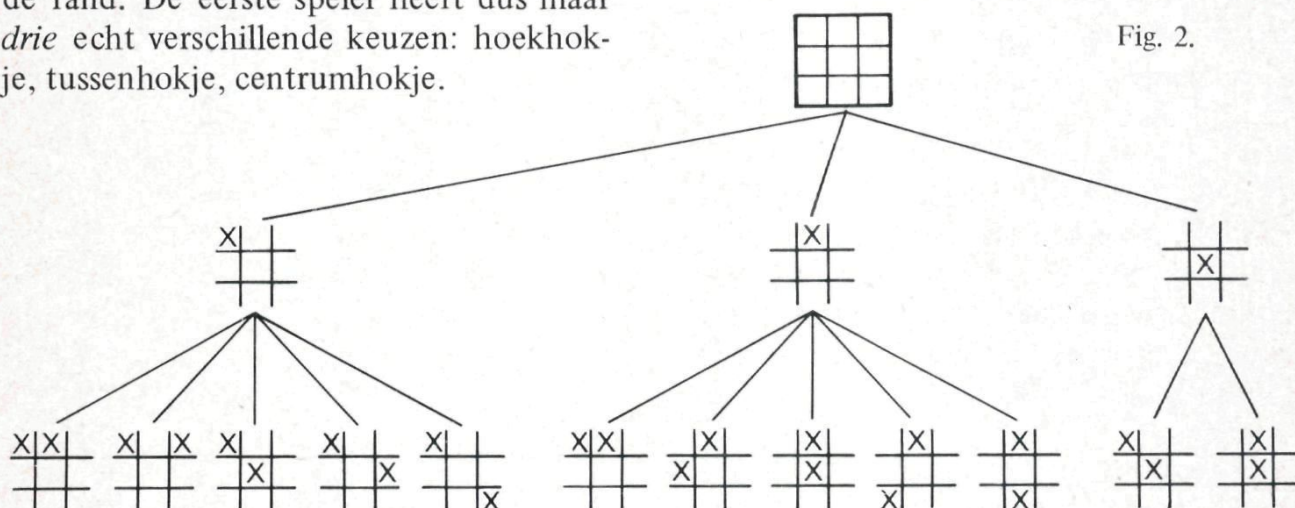


Fig. 2.

Nog een ander soort verkorting zie je in figuur 3. Door kruisverbindingen toe te passen hoeft geen enkele stand meer dubbel getekend te worden.

Dit laatste systeem is al wel praktisch uitvoerbaar, op een niet te klein vel papier. In de vierde rij krijg je 14 verschillende

standen, in de vijfde 17, in de zesde 9 en in de zevende 2.

Probeer maar als je wilt.

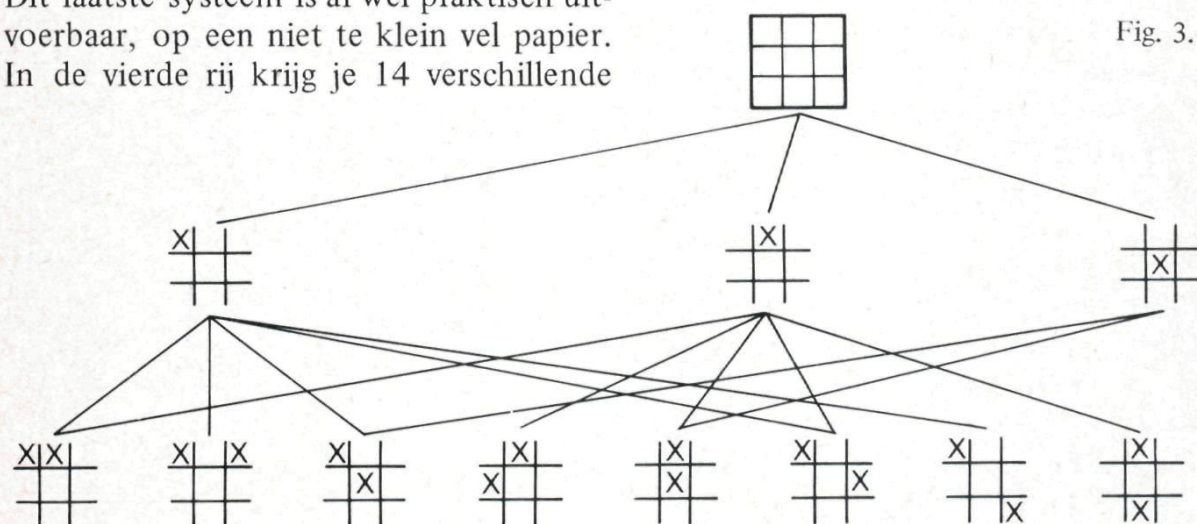
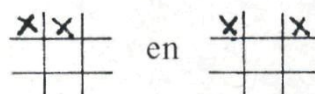


Fig. 3.

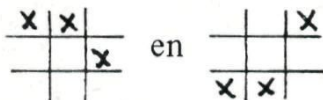
Nog slimmer

Ten slotte is er nog één slimmigheidje om het schema verder af te slanken. Het ligt wat minder voor de hand, maar als je even dóórdenkt blijken ook de standen



in dit spel gelijkwaardig. Of het tweede kruisje in de 2e of in de 3e kolom staat

maakt niet uit. Want voor het al dan niet *vol* zijn van een rij is de volgorde van de kolommen niet van belang. Evenzo zijn de standen



gelijkwaardig omdat de rechter stand uit de linker te krijgen is door herschikking van de (horizontale) rijen.

Zelfs een combinatie van rij- en kolomwisselingen maakt een stand niet wezenlijk anders.

In het schema van figuur 4 is ook deze 'wisseltruc' gebruikt, het schema geeft een complete beschrijving van GVR. Met slechts 14 wezenlijk verschillende spelstanden! Probeer te controleren dat de figuur inderdaad volledig is.

De winststrategie

Eindstand ⑬ is winnend voor de tweede speler (B), eindstand ⑪ voor de eerste speler (A).

Dus B moet zien te verhinderen dat A van ⑦ of van ⑨ naar ⑪ kan gaan. Dit lukt B inderdaad als hij in zijn eerste beurt voor ② kiest; in z'n tweede beurt kan hij dan zowel uit ④ als uit ⑤ naar ⑧ (of eventueel naar ⑩) komen. A heeft daarna geen keus meer en verliest.

Deze keuzen komen in de praktijk van het spel neer op de volgende strategie voor B:

- In zijn eerste beurt moet B een kruisje zetten in dezelfde rechte (rij of kolom) als A in zijn eerste beurt deed; het doet er niet toe waar precies.
- In de tweede beurt zet B zijn kruisje zó dat er juist één lege rechte overblijft. (Soms kan het ook anders, via stand ⑩.)
- In de derde beurt heeft B maar één mogelijkheid.

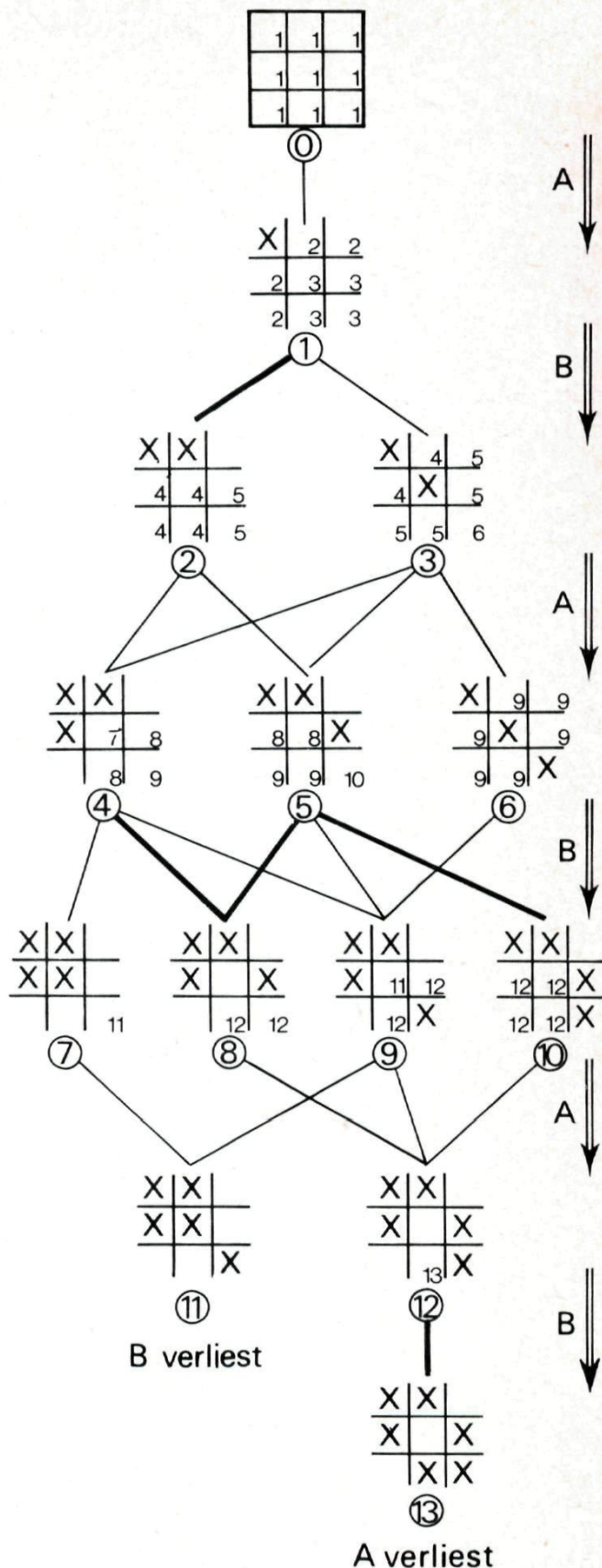


Fig. 4. De nummers in de lege hokjes geven de spelstand aan waartoe een kruisje in dat hokje leidt. De dikke lijnen duiden aan hoe de tweede speler (B) bij elk tegenspel kan winnen.

°° De kansen

Wat is de winstkans voor de eerste speler, indien beide spelers tot het eind toe hun kruisjes op de gok zetten? (Ze zorgen er alleen voor om zo lang mogelijk geen rij of kolom vol te maken.)

Kijk naar stand ① in figuur 4. Van de acht open hokjes zijn er vier die leiden naar stand ② en vier naar stand ③. Dus ② en ③ zijn even waarschijnlijk, ofwel

$$P_2 : P_3 = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}.$$

Nu de volgende beurt:

- ④ ontstaat op vier manieren uit ②, en op twee manieren uit ③;
 - ⑤ ontstaat op twee manieren uit ②, en op vier manieren uit ③;
 - ⑥ ontstaat op één manier uit ③.
- Waaruit volgt voor de kansen van ④, ⑤ en ⑥

$$\begin{aligned} P_4 : P_5 : P_6 &= \\ \left(\frac{4}{6} P_2 + \frac{2}{7} P_3 \right) : \left(\frac{2}{6} P_2 + \frac{4}{7} P_3 \right) : & \\ & : \left(\frac{1}{7} P_3 \right) = \\ \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} \right) : \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \right) : \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} \right) &= \\ \frac{20}{42} : \frac{19}{42} : \frac{3}{42}. \end{aligned}$$

Als je dit denkt te snappen kun je zelf wel proberen om de kansverhouding

$$P_7 : P_8 : P_9 : P_{10}$$

uit te rekenen, en daarna nog

$$P_{11} : P_{12}.$$

Hieruit volgt dan als resultaat:

De winstkansen van de eerste en de tweede speler (bij invullen puur op de gok) verhouden zich als
17 : 53

GVL

Bij het spel GVL doen ook de beide diagonalen mee (dus alle rechte en schuine lijnen met drie hokjes), wat betekent dat rijen kolomverwisselingen zoals hierboven gebruikt, *geen* gelijkwaardige standen meer geven. Het schema blijft dus een stuk ingewikkelder. Als steuntje voor wie het toch probeert te tekenen: er zijn hier 3 standen met één kruisje, 8 met twee, 13 met drie, 15 met vier, 5 met vijf en 1 met zes.

De *eerste* speler wint hier altijd door: eerst het centrumhokje te bezetten, en in z'n tweede beurt juist één rechte (rij óf kolom) leeg te laten.

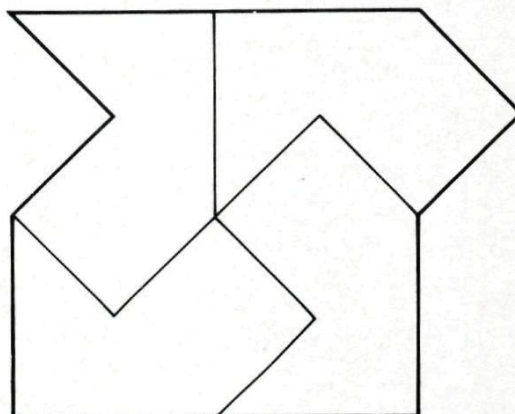
En nu maar winnen!

Of: zelf een eigen variatie op de regels bedenken!

°°° In vijven?

Zoals je ziet is de hier getekende veelhoek in *vier* congruente stukken te verdelen.

Zou dezelfde veelhoek ook in *vijf* congruente stukken verdeeld kunnen worden?

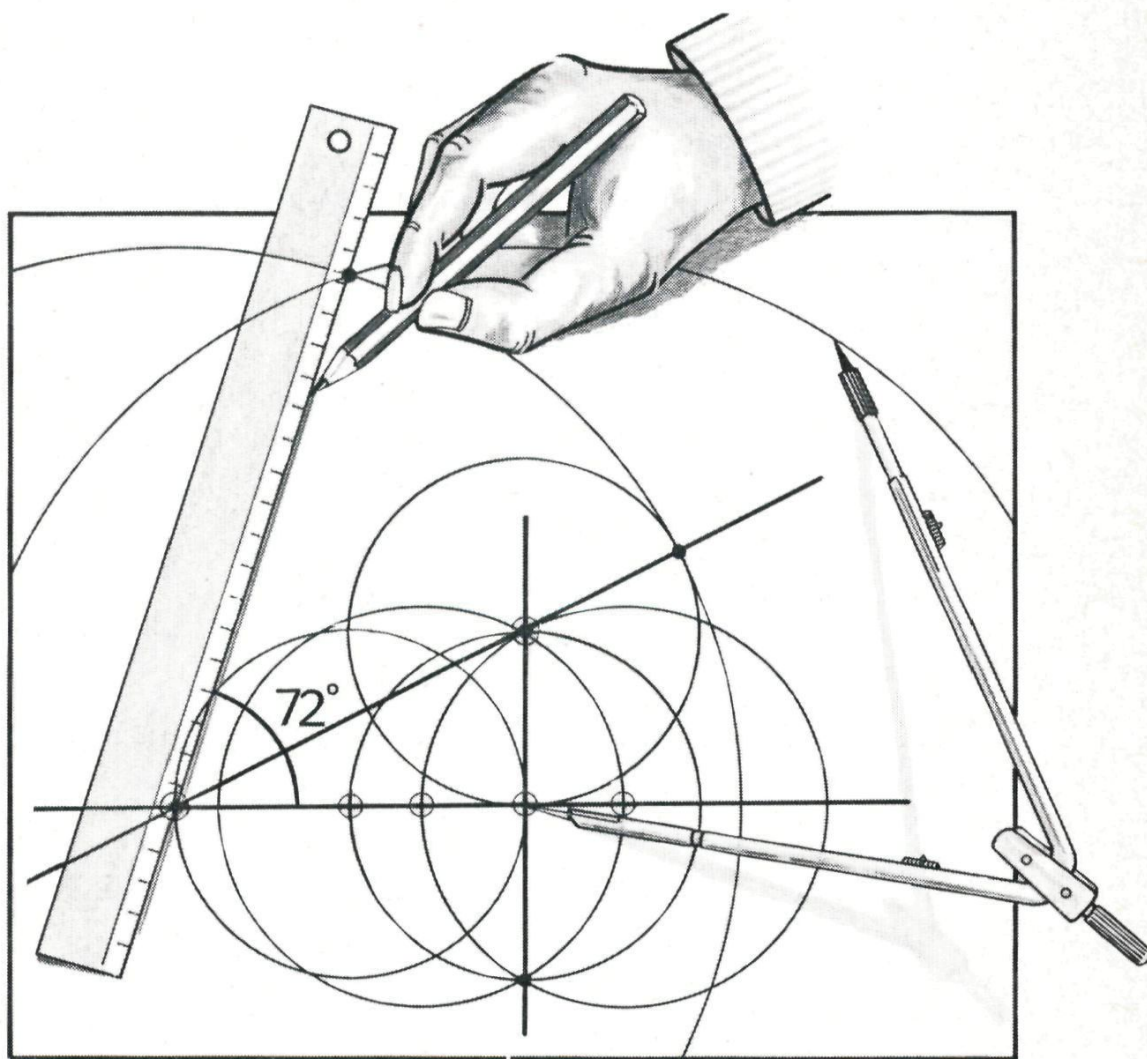


°° Hoeken tekenen zonder gradenboog

Dr. J. T. Groenman

Hoe zou je een hoek tekenen van 10° , 20° , 30° , 40° , ... en van 1° , 2° , 3° , 4° , ... zónder gradenboog (zoals bijvoorbeeld op je geodriehoek voorgetekend staat)?

Voor het nauwkeurig tekenen van *sommige* van deze hoeken is de *passer*, naast de liniaal, een zeer geschikt instrument. De vraag die bij een nieuwsgierige wiskundige dan direct opkomt en waar we in dit artikel op in willen gaan is: wélke hoekmaten zijn met behulp van uitsluitend een ideale passer en een ideale liniaal in principe zuiver te tekenen? We zullen in dit artikel zulke hoeken *construeerbaar* noemen, waarbij we bewust even afzien van het feit dat in de niet-ideale praktijk andere instrumenten en constructie-methoden veelal met minder moeite een betrouwbaarder resultaat geven.



Construeerbare hoeken

We merken eerst op dat we met een passerconstructie gegeven hoeken kunnen *optellen* en *afrekken*. In fig. 1a,b zijn in de gegeven hoeken α en β cirkelbogen

getekend met *dezelfde* straal. Neem dan de afstand BC 'in de passer' en zet deze naar twee kanten af vanuit A . Zo ontstaat fig. 1c met de somhoek $\alpha + \beta$ en de verschilhoek $\alpha - \beta$.

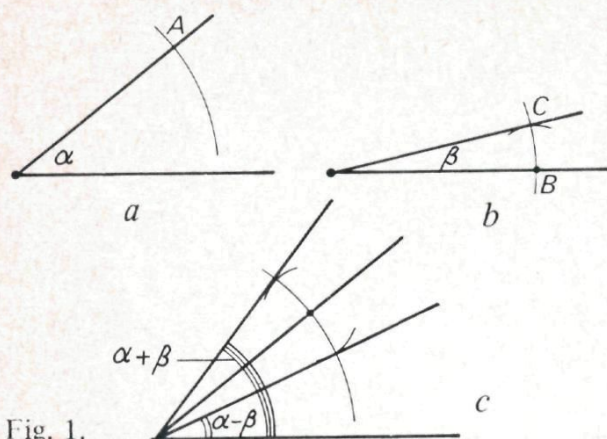


Fig. 1.

Ook kunnen we op bovenstaande manier een gegeven hoek α verdubbelen, en zelfs elk geheel veelvoud $n\alpha$ construeren

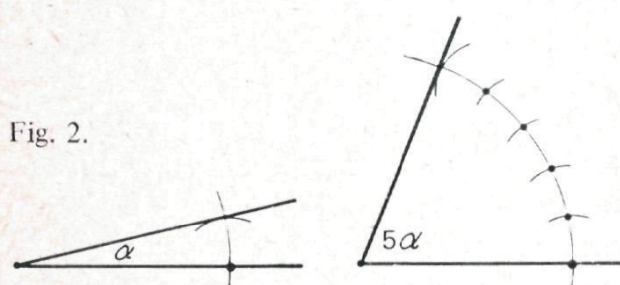


Fig. 2.

Het halveren van een gegeven hoek is mogelijk op de manier van fig. 3, waarbij de bogen 2 en 3 met gelijke straal getekend moeten worden.

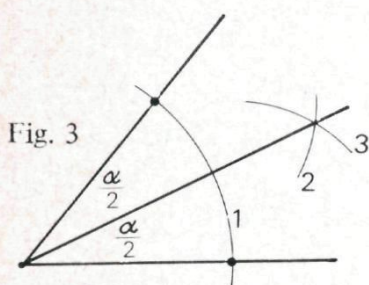


Fig. 3

Uitgaande van een hoek van 60° (met de passer te tekenen!) kunnen we nu door herhaald halveren en combineren hoeken maken van 15° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° , ... En natuurlijk ook $7,5^\circ$, $3,75^\circ$ etc.

Nog andere hoeken

We zullen dadelijk laten zien dat ook een hoek van $360^\circ : 5 = 72^\circ$ construeerbaar is. En dus ook alle veelvouden van 3° ($= 75^\circ - 72^\circ$). Daarmee hebben we het voor wat betreft de heelgradige hoeken gehad.

Zeer lang is er gezocht naar een constructie voor de zuivere *driedeling* (trisectie) van een willekeurige gegeven hoek, met alleen passer en liniaal. Zo'n constructie zou toegepast op het speciale geval van een hoek van 3° , ook de hoek van 1° construeerbaar maken. En daarmee alle heelgradige hoeken. De onmogelijkheid hiervan volgt echter uit een stelling die door het Duitse wiskunde-genie *Carl Friedrich Gauss* in 1796 op 19-jarige leeftijd werd gevonden.

Deze stelling zegt dat uitsluitend hoeken van $\frac{360}{2(2^n) + 1}$ graden (of combinaties of tweedelingen daarvan) construeerbaar zijn. Waarbij nog als voorwaarde geldt dat de noemer $2(2^n) + 1$ een priemgetal moet zijn. Voor n gelijk aan 0 tot en met 4 geeft dit de priemgetal-noemers

3, 5, 17, 257 en 65537.

Maar daarna lijkt het uit te zijn; voor n gelijk aan 5 vond *Euler* de ontbinding:

$$2(2^5) + 1 = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417,$$

dus géén priemgetal. Ook van rond vijftig grotere getallen van deze vorm is tot nu toe aangetoond dat ze te ontbinden zijn, terwijl er nog geen enkel ander priemgetal van dit soort gevonden is. Het kleinste getal uit de rij waarvan nog niet bekend is of het al dan niet priem is, is $2(2^{17}) + 1$ (voor het tientallig uitschrijven van dit getal zijn 39457 cijfers nodig!).

Het bewijs van de genoemde stelling van Gauss is veel te moeilijk om hier te geven. Wel zien we dat de stelling aangeeft dat een hoek van $(360 : 18) = (60 : 3) = 20^\circ$ niet construeerbaar is, waaruit volgt dat er geen algemeen toepasbare trisectie-constructie kan zijn.

De 72°-constructie

We stellen ons een gelijkbenige driehoek ABC voor, met hoeken van 72° , 72° en 36° , en zijde-lengten b , b en $2a$ (fig. 4a, getekend met de gradenboog). De bissectrice BD snijdt hiervan een driehoek BCD af die gelijkvormig is met ABC ; uit de gelijkbenigheid van DAB en BCD volgt dan $AD = BD = BC = 2a$ (fig. 4b). De gelijke verhouding van overeenkomstige zijden geeft

$$\frac{b - 2a}{2a} = \frac{2a}{b} \text{ ofwel } b^2 - 2ab - 4a^2 = 0$$

of

$$b = \frac{2a + \sqrt{4a^2 + 16a^2}}{2} = a + \sqrt{5}a.$$

Nu de constructie, zónder gradenboog. Uitgaande van een willekeurig lijnstuk a is een rechthoekige driehoek met zijden $2a$ en a te construeren. Zie fig. 5. De schuine zijde heeft daar een lengte $\sqrt{5}a$. Verlengen met a geeft de lengte van de opstaande zijde $b = a + \sqrt{5}a$, die omcirkeld vanuit B en C de top A levert. De hoek ABC is bij zuiver construeren nu juist 72° .

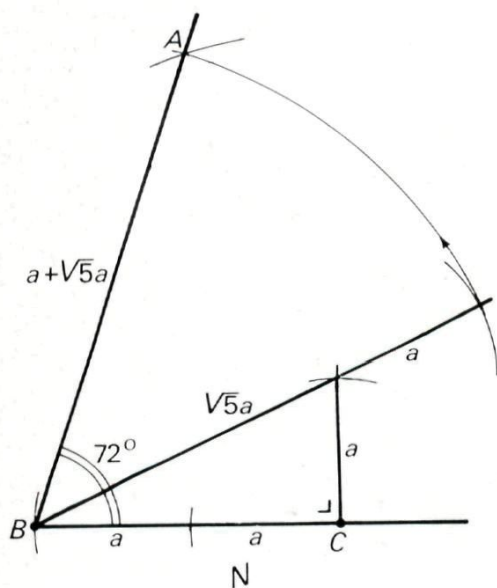
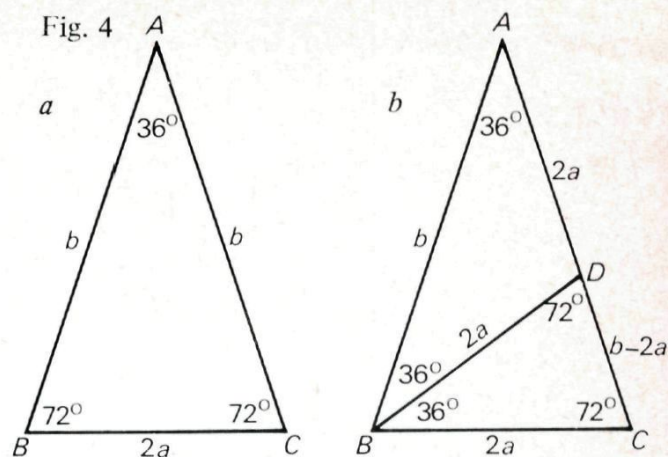


Fig. 5. Kun je zien dat deze constructiefiguur van de 72° -hoek, overeenkomt met de tekening aan het begin van dit artikel?



De bijna-100°-constructie

We laten ten slotte een voorbeeld zien van een hoek die principieel *niet* construeerbaar is, maar die wel heel eenvoudig in een goede benadering (zonder gradenboog) te tekenen is. En wel de hoek met de ronde maat van 100° — al is dit meetkundig gezien geen hoek die een bijzondere rol speelt.

Figuur 6 laat de constructie zien, uitgaande van drie gelijke stukken langs één lijn. Deze constructie is, waarschijnlijk bij toeval, gevonden door een Noorse scholier waarvan ons de naam helaas niet bekend is.

We laten het eerst aan de lezer over om (m.b.v. tweemaal de cosinusregel) te berekenen hoe dicht de 100° benaderd wordt. Een antwoord vind je achterin.

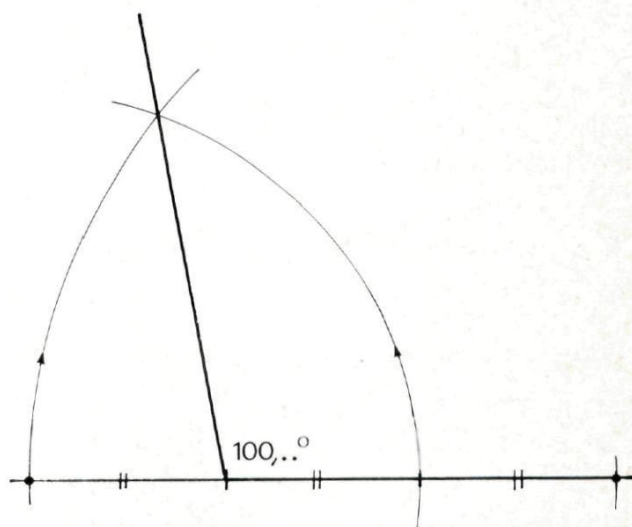


Fig. 6.



Pythagoras Olympiade

Oplossingen en prijswinnaars van de opgaven PO 16–23

PO 16. Bepaal alle drietallen reële getallen (x, y, z) die voldoen aan $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} = 10$.

Oplossing van Jan Baars, 6-vwo Alkwin College, Uithoorn (om typografische redenen iets bewerkt).
De opgave kan geschreven worden als een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden:

$$\begin{cases} x + 1/y = 10 \\ y + 1/z = 10 \\ z + 1/x = 10. \end{cases}$$

Met behulp van de eerste twee vergelijkingen kan de derde worden omgevormd tot

$$z + 1/(10 - 1/(10 - 1/z)) = 10.$$

Na vereenvoudiging wordt dit $z^2 - 10z + 1 = 0$, of (wegens $z \neq 0$) $z + 1/z = 10$. Er geldt dus

$$\begin{cases} x + 1/y = 10 \\ y + 1/z = 10 \\ z + 1/x = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 1/y = 10 \\ y + 1/z = 10 \\ z + 1/z = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = z \\ z + 1/z = 10 \end{cases} \iff \begin{matrix} (x = y = z = 5 + 2\sqrt{6}) \\ \vee \\ (x = y = z = 5 - 2\sqrt{6}). \end{matrix}$$

Er waren 139 inzendingen, waarvan 96 correct. Prijswinnaars: *Bart Rutgers*, 5-vwo Florens Radewijns-college, Raalte, en *Stefan Hukkelhoven*, 5-vwo B.C. Broekhin, Roermond.

PO 17. Gegeven is een punt P op een afstand $r < 1$ van het middelpunt van een cirkel met straal 1. Men kiest punten A , B , C en D op de cirkel zo, dat AC en BD elkaar in P loodrecht snijden. Wat is bij een dergelijke keuze de maximale waarde van $d(A, C) + d(B, D)$?

Oplossing van Johan Elzer, 5-vwo Prot. Lyceum, Eindhoven.

Kies een coördinatenstelsel zo, dat de oorsprong samenvalt met het centrum van de cirkel, het punt P in het eerste kwadrant ligt, de x -as evenwijdig is aan BD , en de y -as evenwijdig aan AC .

Dan geldt voor zekere t ($0 \leq t \leq \pi/2$): $P = (r \cos t, r \sin t)$,

$$A = (r \cos t, +\sqrt{(1-r^2 \cos^2 t)}), \quad B = (+\sqrt{(1-r^2 \sin^2 t)}, r \sin t),$$

$$C = (r \cos t, -\sqrt{(1-r^2 \cos^2 t)}), \quad D = (-\sqrt{(1-r^2 \sin^2 t)}, r \sin t).$$

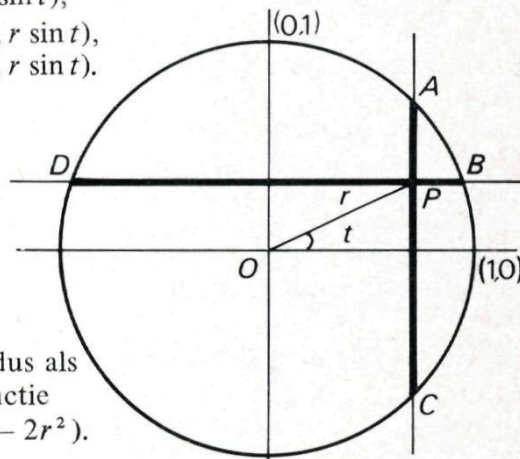
Hieruit volgt

$$d(A, C) + d(B, D) = 2\sqrt{(1-r^2 \cos^2 t)} + 2\sqrt{(1-r^2 \sin^2 t)}.$$

Het rechterlid is bij vaste r een functie van t . Om het maximum te vinden, onderzoeken we de afgeleide naar t :

$$\frac{2r^2 \sin t \cos t}{\sqrt{(1-r^2 \cos^2 t)}} - \frac{2r^2 \sin t \cos t}{\sqrt{(1-r^2 \sin^2 t)}}.$$

In het eerste kwadrant is de afgeleide *nul* als $\cos t = \sin t$, dus als $t = \pi/4$, *positief* als $t < \pi/4$, en *negatief* als $t > \pi/4$. De functie zelf is dus maximaal als $t = \pi/4$, en het maximum is dan $2\sqrt{(4-2r^2)}$.



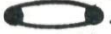
Als aanvulling op Johans oplossing kunnen we nog opmerken dat het ook zonder differentiëren kan: in plaats van het maximum van $d(A, C) + d(B, D)$, kun je ook het maximum bepalen van het *kwadraat* van deze uitdrukking. Als je dat uitrekent, blijkt het na vereenvoudigen een verschrikkelijk simpele vorm te worden, waarvan je het maximum onmiddellijk ziet. Ga maar na!

Erg veel inzenders hadden de opgave niet goed gelezen. Zij dachten dat ook r variabel was. Ze kwamen dan (vaak na zeer ingewikkelde berekeningen!) tot 4 als maximale waarde (nl. indien P samenvalt met het centrum van de cirkel). Maar dat kun je natuurlijk ook zo zien!

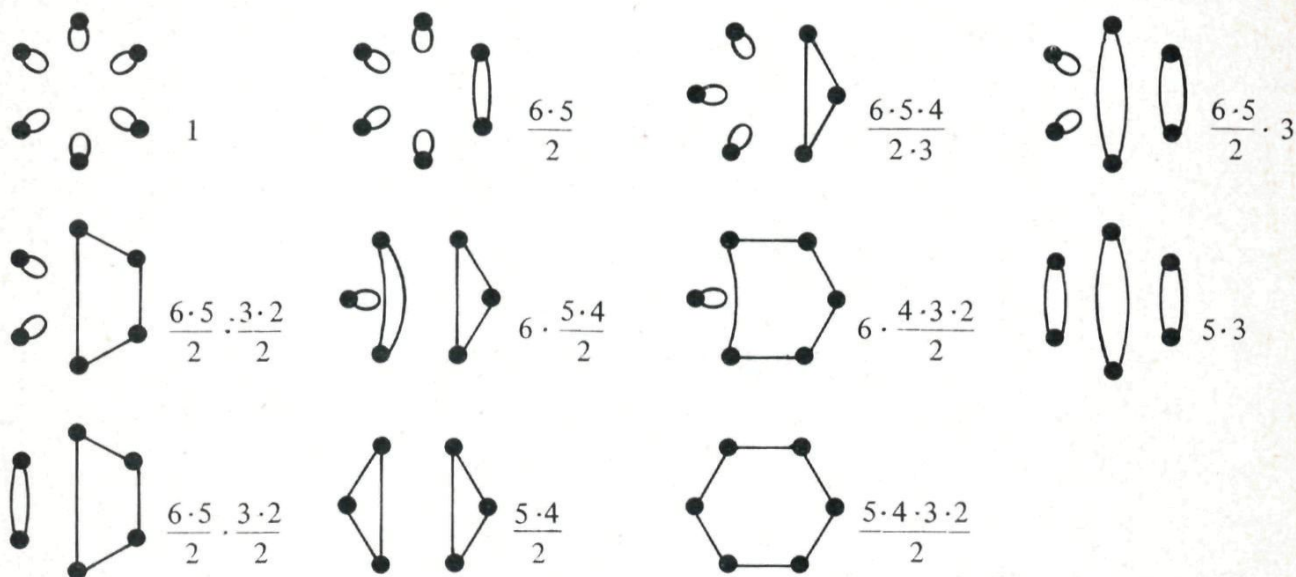
Er waren 109 inzendingen, waarvan 18 correct. Prijswinnaars: *Denis Constales*, Kon. Atheneum, Gent, en *Kees Visser*, 6-vwo RSG, Heerenveen.

PO 18. Gegeven zijn 12 effen gekleurde sokken in 6 verschillende kleuren, van elke kleur twee. Men vormt 6 paren zonder op de kleur te letten. Hoeveel verschillende zestallen paren kunnen er op deze wijze ontstaan? (Gelijk gekleurde sokken zijn niet van elkaar te onderscheiden).

Oplossing van Jan Meier, 6-vwo RSG, Coevorden.

We stellen de zes kleuren voor door zes punten in het vlak, en elk paar sokken door een verbindingslijn tussen de punten die horen bij de kleuren van dat paar. Als de sokken van een paar *gelijk* gekleurd zijn, krijgen we een *lus*: . Als twee paren *dezelfde* kleurencombinatie vertonen, krijgen we een *dubbele verbinding*: . Het totale plaatje bestaat uit 6 punten en 6 verbindingen; in elk punt eindigen twee verbindingsuiteinden.

We groeperen nu alle mogelijke 'plaatjes' naar gelang: 1 het aantal lussen, 2 het aantal dubbele verbindingen, en 3 de samenhang tussen de overige punten. Van elke groep is één voorbeeld getekend, met vermelding van het aantal mogelijkheden binnen die groep.



In totaal zijn er dus: $1 + 15 + 20 + 45 + 45 + 60 + 72 + 15 + 45 + 10 + 60 = 388$ mogelijkheden.

Er waren 85 inzendingen, waarvan 12 correct. Prijswinnaars: *Hennie Groot Lipman*, 5-vwo Florens Radewijns College, Raalte, en *Bart van der Leemput*, 5-vwo St.-Janslyceum, Den Bosch.

De andere inzenders met een correcte oplossing waren: *Alexander Deelman*, 5-vwo Chr. Gymnasium Sorghvliet, Den Haag; *Jeroen Mulder*, 5-vwo RSG, Roermond; *Rutger Noot*, 4-vwo Gymnasium Haganum, Den Haag; *Harry Oosterveen*, 5-vwo Menso Alting College, Hoogeveen; *Ralf Peeters*, 5-vwo Elzendaalcollege, Boxmeer; *Eric Postma*, 5-vwo Baudartiuscollege, Zutphen; *William Stassen*, 6-vwo Thomas à Kempis SG, Zwolle; *Frank Waaldijk*, 5-vwo Elzendaalcollege, Boxmeer, en *Auke Zijlstra*, 4-vwo RSG, Leeuwarden.

Commentaar bij opgave PO 18

Deze opgave is zeer moeilijk. Je ziet dat je systematisch alle mogelijkheden kunt aftellen, maar in een aantal gevallen (met name bij de laatste vijf figuren) is dat lang niet eenvoudig. Talrijke inzenders maakten dan ook fouten door mogelijkheden over het hoofd te zien, of juist dubbel te tellen. Er is in sommige klassen zelfs uitgebreid speurwerk verricht om fouten in redeneringen op te zoeken die tot onjuiste of vermoedelijk onjuiste antwoorden leidden.

Jan Meier maakt in zijn oplossing gebruik van schematische plaatjes. Zulke plaatjes noemen we in de wiskunde *grafen*. In onze opgave maken de grafen duidelijk dat het zinvol is onderscheid te maken tussen lussen, dubbel verbonden punten, en andere punten.

De hierboven gegeven oplossing is bij grotere aantallen paren in deze vorm nauwelijks bruikbaar. Maar toch draagt zij kiemen in zich om een *recursieformule* af te leiden voor het algemene probleem van $2n$ sokken in n kleuren. Als u_n het aantal mogelijkheden is om $2n$ sokken van n kleuren in n paren te verdelen, geldt namelijk

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - \frac{1}{2}n(n-1)u_{n-2} \quad (n = 3, 4, 5, \dots).$$

Je verifieert onmiddellijk dat $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ en $u_3 = 5$. Uit de formule volgt dan $u_4 = 17$, $u_5 = 73$, en inderdaad, $u_6 = 388$!

In de afleiding van deze recursieformule stellen we een verdeling van $2n$ sokken in n paren weer voor met een graaf van n punten, genummerd 1 t.e.m. n , net zoals in de oplossing van Jan Meier. Er zijn weer n verbindingen, en we onderscheiden *lussen*, *dubbele* verbindingen, en *andere* verbindingen. Uit zo'n n -graaf kunnen we een $(n+1)$ -graaf maken door een punt $(n+1)$ toe te voegen, en

1 dat punt van een lus te voorzien, óf

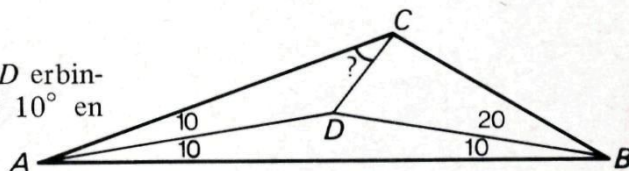
2 één van de al bestaande verbindingen (of lussen) te vervangen door een 'omweg' over punt $(n+1)$. Mogelijkheid 2 kan bij elke verbinding van de n -graaf worden toegepast, maar als een verbinding (i, j) *dubbel* is, geven de omwegen van beide over $(n+1)$ hetzelfde resultaat.

Bij elk paar (i, j) zijn er u_{n-2} n -grafen met een dubbele (i, j) -verbinding, en er zijn $\frac{1}{2}n(n-1)$ paren (i, j) onder de punten 1 t.e.m. n . In totaal zijn er dus bij het maken van een $(n+1)$ -graaf, uit alle u_n mogelijke n -grafen, precies $\frac{1}{2}n(n-1) \cdot u_{n-2}$ dubblures indien men methode 2 toepast. Alle $(n+1)$ -grafen kan men via 1 of 2 verkrijgen, dus in totaal zijn er

$$u_{n+1} = u_n + n \cdot u_{n-2} - \frac{1}{2}n(n-1) \cdot u_{n-2} = (n+1)u_n - \frac{1}{2}n(n-1)u_{n-2}$$

$(n+1)$ -grafen. Hiermee is de recursieformule bewezen.

PO 19. Gegeven is een driehoek ABC en een punt D erin-
nen zo, dat $\angle CAD = \angle DAB = \angle ABD = 10^\circ$ en
 $\angle DBC = 20^\circ$. Bereken $\angle ACD$.



Oplossing: Noem $\angle ACD = x$. Met de sinusregel in de driehoeken ACD en BCD kwamen de meeste inzenders via de gelijkheid $AD = BD$ tot $\sin x \cdot \sin 20 = \sin 10 \cdot \sin (130 - x)$ (1).

Hieruit kun je met wat goniöformules een uitdrukking voor $\sin x$ of voor $\tan x$ krijgen. Veel deelnemers namen op dat moment de rekenmachine ter hand, en kregen voor x ongeveer 30° . *Ongeveer*, want de machine heeft geen onbeperkte nauwkeurigheid. Datzelfde resultaat kun je natuurlijk ook krijgen door een erg nette tekening te maken, en de hoek gewoon op te meten. De uitkomst is echter *precies* 30° !

William Stassen bewees dit door te stellen $x = 30 + y$ waarmee (1) wordt:

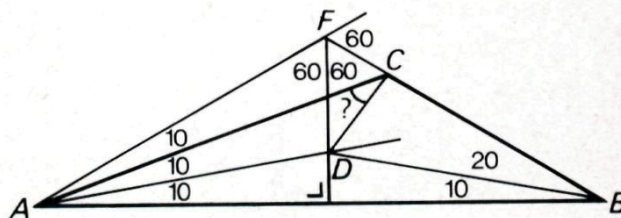
$$\begin{aligned} \sin (30 + y) \sin 20 &= \sin 10 \sin (100 - y) \\ 2 \cos 10 (\sin 30 \cos y + \cos 30 \sin y) &= \sin (y + 80) \\ \cos 10 (\cos y + \sqrt{3} \sin y) &= \sin y \cos 80 + \cos y \sin 80 \\ \cos 10 (\cos y + \sqrt{3} \sin y) &= \sin y \sin 10 + \cos y \cos 10 \\ \sqrt{3} \cos 10 \sin y &= \sin 10 \sin y. \end{aligned}$$

Aangezien $\sqrt{3} \cos 10 \neq \sin 10$ volgt hieruit $\sin y = 0$ en uit de figuur blijkt dat alleen $y = 0$ voldoet. De gevraagde hoek is dus $x = 30^\circ$.

Een mooie *meetkundige* oplossing vonden *Ralf Peeters* en *Frank Waaldijk*.

Zij vulden de figuur met wat hulplijnen aan en merkten op dat C ligt op de *buitenbissectrice* van hoek AFD , en ook op de *binnenbissectrice* van hoek FAD . C ligt dus enerzijds even ver van lijn AF als van lijn DF , en anderzijds even ver van AF als van AD . Dan ligt C dus even ver van AD en FD , dus op de (buiten-)bissectrice van hoek ADF . We berekenen nu

$$\angle CDF = \frac{1}{2} (180 - \angle ADF) = \frac{1}{2} (180 - 100) = 40^\circ, \text{ dus } \angle ADC = 140^\circ \text{ en daarom } \angle ACD = 30^\circ.$$



Er waren 62 inzendingen, waarvan 22 geheel correct. Prijswinnaars: *Ivan van Putten*, 5-vwo Openb. Dalton SG, Voorburg/Leidschendam, en *Rutger Noot*, 4-vwo Gymnasium Haganum, Den Haag.

PO 20. Onder $s(n)$ verstaat men de som van de cijfers van het natuurlijke getal n . Wat is de kleinste waarde van het quotiënt $n : s(n)$ wanneer men n laat variëren over alle natuurlijke getallen van vier cijfers?

Oplossing: Na wat proberen blijkt al snel dat $n = 1099$ wel de goede waarde zal zijn. *Rob de Jeu*, 5-vwo OSG Albert Einstein, Hoogvliet, vond het allerkortste bewijs.

Stel dat er een kleiner quotiënt $\frac{n}{s(n)}$ is dan $\frac{1099}{19}$.

Voor $n = 1000a + 100b + 10c + d$ (met $a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a \neq 0$) geldt dan

$$\frac{1000a + 100b + 10c + d}{a + b + c + d} < \frac{1099}{19} \quad \text{ofwel} \quad 17901a + 801b - 909c - 1080d < 0.$$

Het linkerlid is zo klein mogelijk als de positieve termen minimaal, en de negatieve termen maximaal zijn. Dit is het geval als $a = 1$, $b = 0$, $c = d = 9$. Dan is het linkerlid echter 0, dus voor *geen enkel* toegelaten viertal (a, b, c, d) is het linkerlid negatief; tegenspraak.

Er waren 54 inzendingen, waarvan 44 correct. Prijswinnaars: *Carla van Loon*, 5-vwo Sted. Gymnasium, Leiden, en *Theo Smit*, 6-vwo Jacobuscollege, Enschede.

PO 21. Gegeven zijn vier bollen met straal 1. Elk van de vier raakt de drie andere. Bij elk drietal neemt men het gemeenschappelijke raakvlak dat de vierde niet snijdt. Deze vier raakvlakken vormen een regelmatig viervlak dat de vier gegeven bollen omsluit. Bereken de inhoud van dit viervlak.

Oplossing van Johan Elzer (iets bekort).

Het omsluitende viervlak noemen we $ABCD$; het viervlak met de middelpunten van de bollen als hoekpunten noemen we $EFGH$. Dit laatste is ook een regelmatig viervlak, met hetzelfde centrum als $ABCD$, en met ribbe 2. $ABCD$ ontstaat uit $EFGH$ door puntvermenigvuldiging vanuit het centrum met een zekere factor k .

Een eenvoudige berekening geeft voor de inhoud van $EFGH$ de waarde $\frac{2}{3} \sqrt{2}$. De afstand van het centrum tot elk van de zijvlakken van $EFGH$ is $\frac{1}{6} \sqrt{6}$, dus de afstand van het centrum tot elk van de zijvlakken van $ABCD$ is $1 + \frac{1}{6} \sqrt{6}$.

Het quotiënt van beide afstanden geeft de vermenigvuldigingsfactor $k = 1 + \frac{1}{6} \sqrt{6}$.

De inhoud van $ABCD$ is k^3 -maal die van $EFGH$, dus $(1 + \frac{1}{6} \sqrt{6})^3 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2} = \frac{38}{3} \sqrt{2} + 12 \sqrt{3}$.

Er waren 44 inzendingen, waarvan 19 correct. Prijswinnaars: *Hennie Groot Lipman* en *Eric Postma*. Eervolle vermeldingen: *Auke Reidinga*, 5-vwo RSG, Zwolle, en *Rineke Verbrugge*, 4-vwo Blaise Pascal College, Zaandam.

PO 22. Gegeven is een vlakke stangenvierhoek $ABCD$, dat wil zeggen vier stangen AB , BC , CD en DA die scharnierend aan elkaar zijn bevestigd. In zekere stand staan de diagonalen AC en BD loodrecht op elkaar. Bewijs dat hetzelfde geldt voor *alle* mogelijke standen van de stangenvierhoek.

Oplossing van Theo Smit.

Kies een rechthoekig coördinatenstelsel zo, dat $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (c_1, c_2)$ en $D = (d_1, d_2)$. Dan geldt: $AD^2 = d_1^2 + d_2^2$ (1), $BC^2 = (c_1 - 1)^2 + c_2^2$ (2), en $CD^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2$ (3). Invullen van (1) en (2) in (3) geeft $CD^2 = AD^2 + BC^2 - 1 - 2(c_1 d_1 + c_2 d_2 - c_1)$.

Voor *elke* stangenvierhoek heeft $(c_1 d_1 + c_2 d_2 - c_1)$ dus een *constante* waarde! Deze uitdrukking is het inproduct van de diagonalen AC en BD , want $AC = (c_1, c_2)$ en $BD = (d_1 - 1, d_2)$. Als nu in zekere stand dit inproduct 0 is (bij loodrechte diagonalen), dan is dit inproduct 0 bij *elke* stand. En staan dus ook bij *elke* stand van de vierhoek de diagonalen loodrecht op elkaar.

Er waren 27 inzendingen, waarvan 22 correct. Prijswinnaars: *Frank Waaldijk* en *Stefan Hukkelhoven*. Een eervolle vermelding verdiende de 'mechanische' oplossing van *Auke Zijlstra*.

- PO 23.** Men heeft een rood vat en een groen vat. In het rode vat bevinden zich 1981 ballen, genummerd van 1 tot en met 1981. Het groene vat is leeg. Men schept een aantal ballen uit het rode vat in het groene vat. Daarna blijkt bij geen enkel paar ballen uit het groene vat het nummer van de ene bal tienmaal zo groot te zijn als het nummer van de andere bal. Hoeveel ballen zijn er minstens in het rode vat achtergebleven?

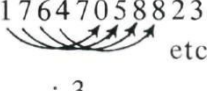
Oplossing van Anita Aarts, 6-vwo St.-Willibrordgymnasium, Deurne.

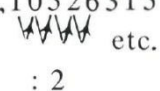
In eerste instantie laat je alle ballen met nummers die eindigen op minstens één nul in het rode vat achter (198 in aantal). Alle andere ballen gaan in het groene vat. Het tienvoud van een getal dat eindigt op één nul, is een getal dat eindigt op twee nullen. Alle ballen met nummers die eindigen op minstens twee nullen, gaan daarom ook in het groene vat. Dit zijn er 19, maar één ervan, nr. 1000, eindigt op drie nullen. Het is het tienvoud van 100, en daarom moet er van het paar (100, 1000) één weer terug in het rode vat. Er zitten dan $198 - 19 + 1 = 180$ ballen in het rode vat, en dit is het minimale aantal.

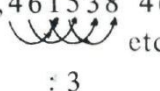
Er waren 30 inzendingen, waarvan 22 correct. Prijswinnaars: *Bart van der Leemput* en *Johan Elzer*.

Antwoorden en oplossingen

bij: Slimmer staartdelen

$$1) \frac{3}{17} = 0,1764705882352941 \ 1764 \dots$$


$$2) \frac{2}{19} = 0,105263157894736842 \ 10526 \dots$$


$$3) \frac{6}{13} = 0,461538 \ 46153 \dots$$


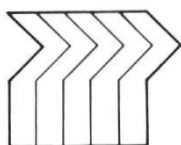
bij: Hoeken van achttien

Uit de gegeven getallen zijn de volgende 3-tallen te vormen met een som van 18:

$$2 + 6 + 10 = 3 + 5 + 10 = 3 + 7 + 8 = 4 + 6 + 8 = 5 + 6 + 7.$$

Hierin komen 2 en 4 elk slechts éénmaal voor. En dus moeten 2 en 4 in *opstaande* ribben voorkomen. Voor de beide andere opstaande ribben blijft dan over $18 - 2 - 4 = 12$ wat alleen nog maar te splitsen is in 5 en 7.

bij: In vijven?



bij: Hoeken tekenen zonder gradenboog

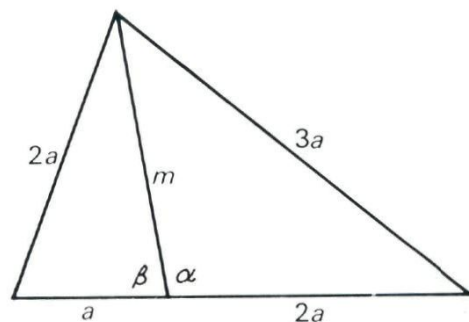
$$(3a)^2 = (2a)^2 + m^2 - 4am \cos \alpha \quad (1)$$

$$(2a)^2 = a^2 + m^2 - 2am \cos \beta \quad (2)$$

Wegens $\cos \beta = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ is de cosinus uit (1) en (2) te elimineren, waaruit volgt: $11a^2 = 3m^2$ ofwel $m = \sqrt{11/3}a$. Invullen in (1) geeft

$$9a^2 = 4a^2 + \frac{11}{3}a^2 - 4\sqrt{\frac{11}{3}}a^2 \cos \alpha \text{ ofwel } \cos \alpha = -1/\sqrt{33}.$$

Benaderen van de wortel en terugzoeken van de cosinus geeft $\alpha \approx 100,02498788^\circ$, slechts een kwart promille naast de 100!



Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

- ∫ Dr. J. van de Craats, R.U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
- ★ Bruno Ernst, Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht.
- < W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn.
- ↘ Ir. H.M. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginneken.

Secretariaat

- △ Drs. H.N. Pot, Tournoyveld 67, 3443 ER Woerden.
- Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

W. Ganzevoort, M.C. van Hoorn, W. Pijls, G.A. Vonk, D.K. Wielenga.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.

Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 9,20 per jaargang.

Voor anderen f 13,50

Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.

Voor België bij J.B. Wolters - Leuven, Blijde Inkomststraat 50, Leuven; postchecknummer 000-000 8081-30

Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.

Abonnees wordt dringend verzocht met betalen te wachten tot hun een acceptgirokaart wordt gezonden.

Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

Inhoud

- | | |
|--|---|
| ∫ De Magische Kubus van Rubik, 1 | △ Slimmer staartdelen, 12, 25 |
| Programmeerwedstrijd, 6 | Hoeken van achttien, 13, 25 |
| ↘ De bol en de cilinder met dubbele
ziel, 7 | Drie is te veel, strategieën, 14 |
| △ Een algoritma voor $\sqrt[3]{x}$, 9 | In vijven? 17, 25 |
| Pythagoras Olympiade PO 31-33, 10 | Hoeken tekenen zonder graden-
boog, 18, 25 |
| Erelijst ladderwedstrijd 1980/81, 11 | Oplossingen PO 16 - 23, 21 |

