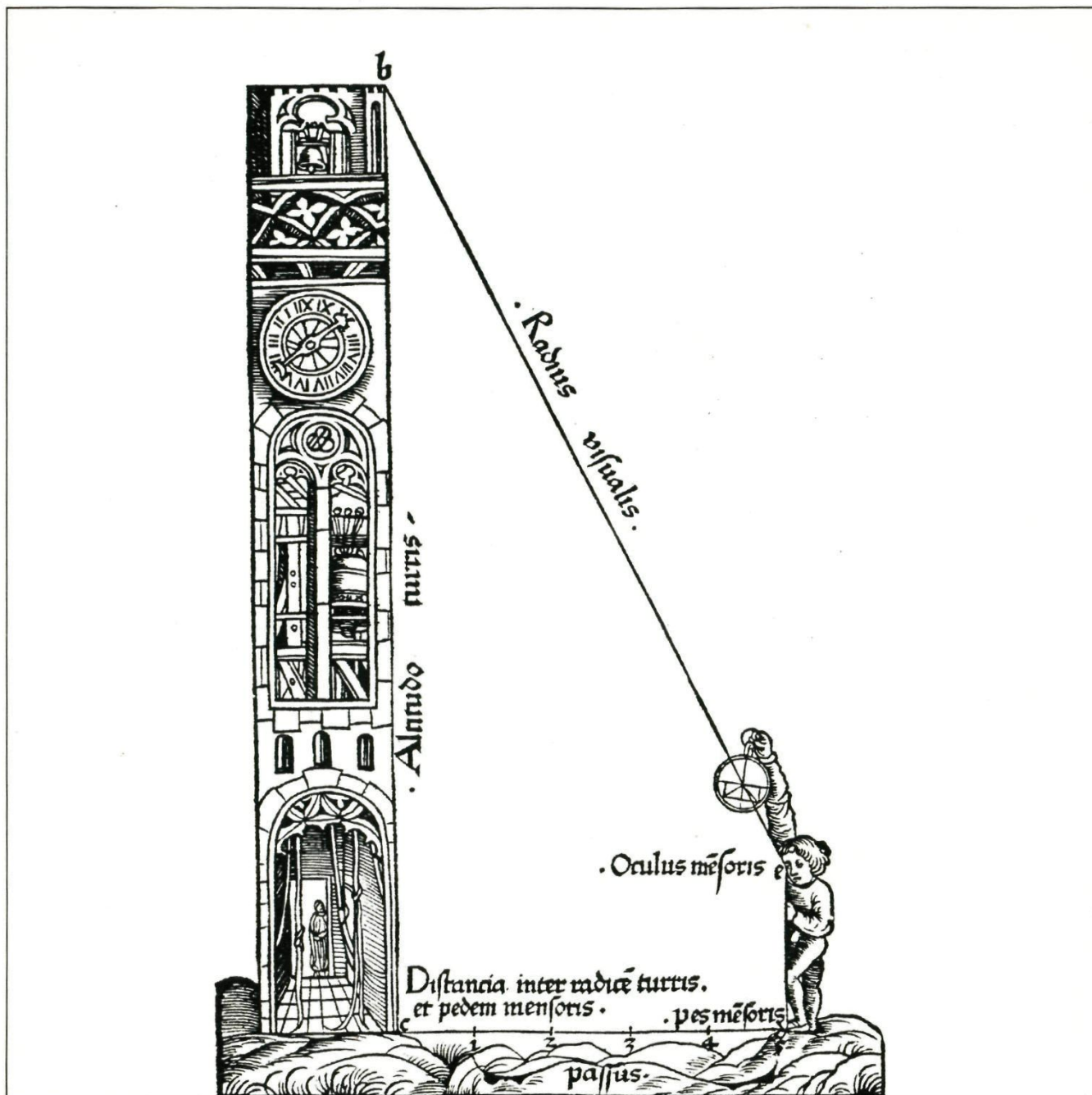


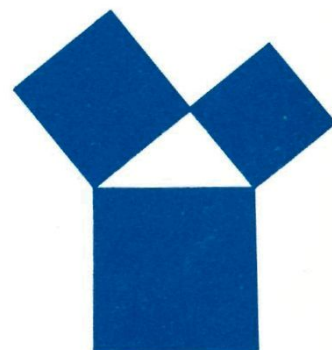


2

jaargang 21 / november 1981

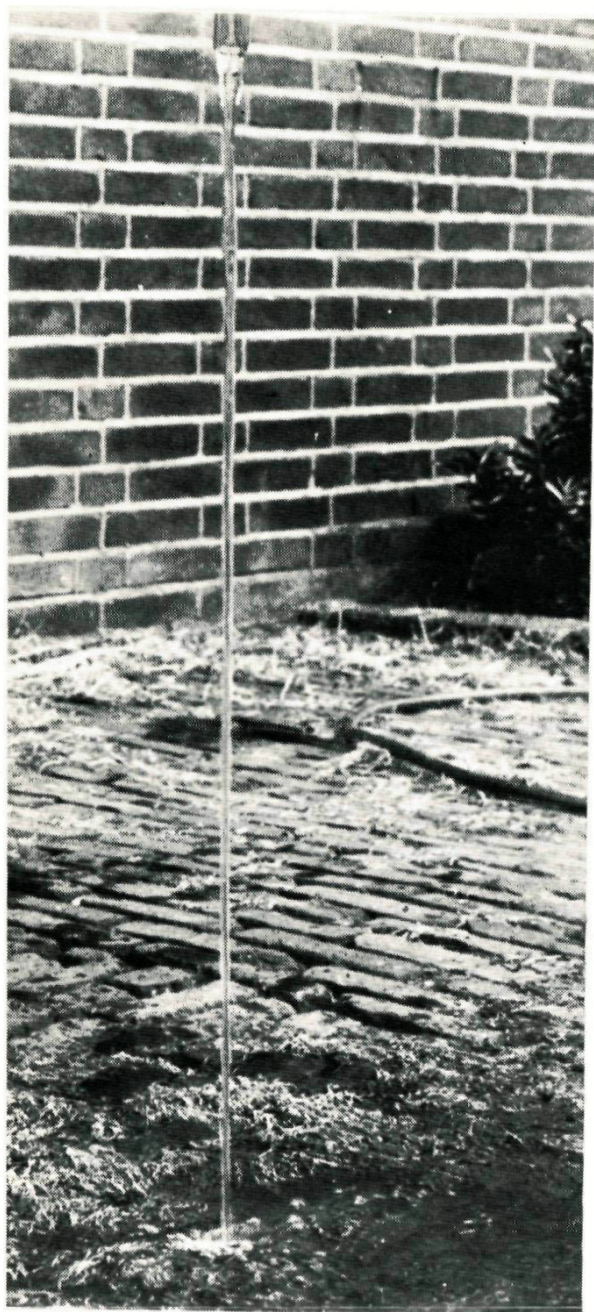
wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff



verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras



In een waterstraal zal het vallen van de waterdeeltjes – net als elke valbeweging – een eenparig versnelde beweging zijn. Een gevolg van het steeds sneller vallen is dat de straal naar beneden toe geleidelijk aan dunner wordt (al is dat op deze foto niet best te zien). In 'De waterstraalkromme' wordt dit afslanken nader onderzocht.

Erratum

In 'De Magische Kubus van Rubik' (afl. 1) ontbraken op blz. 3 in het recept van Serie IV drie pijlpuntjes.

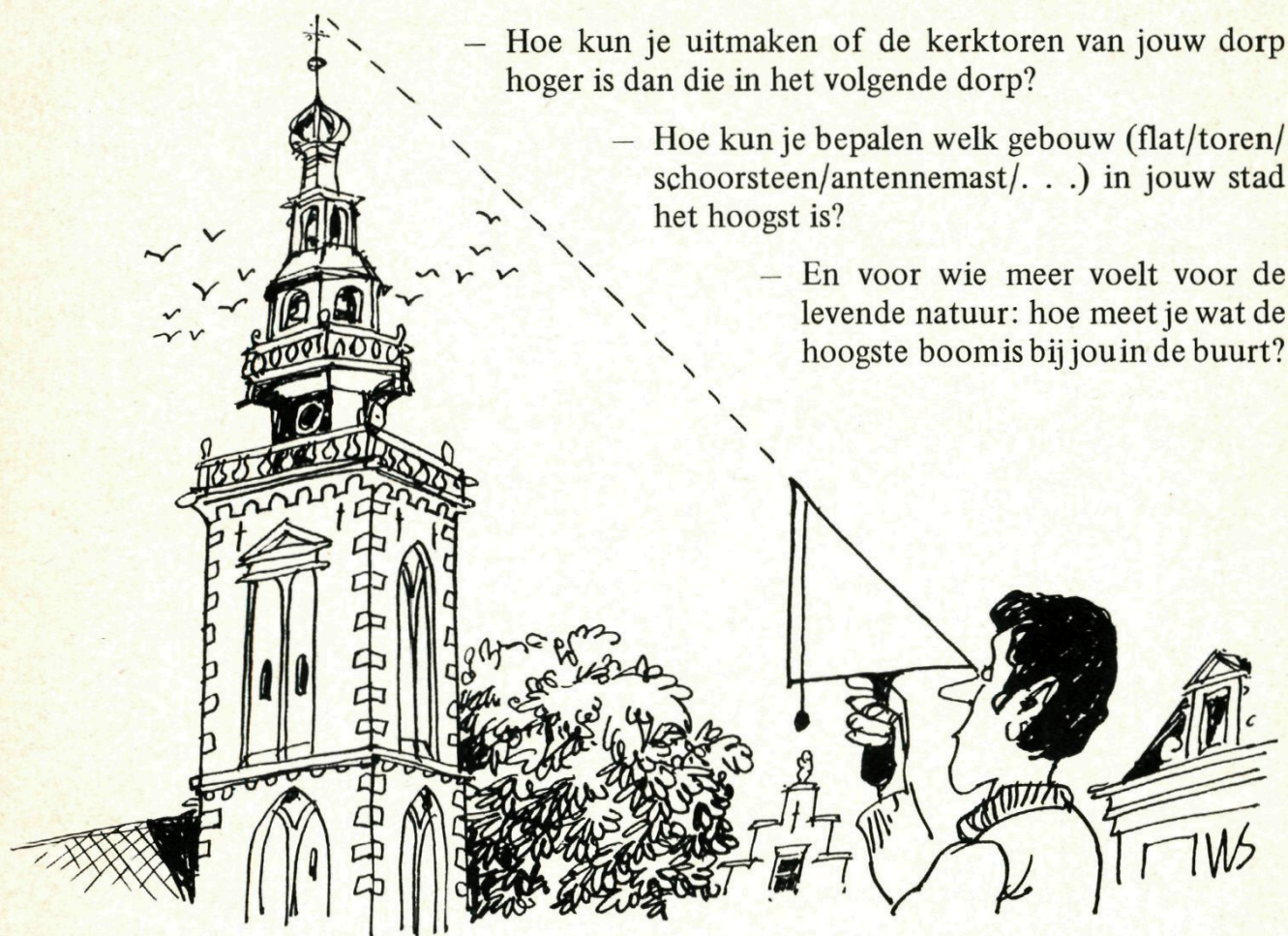
Het *eerste*, *vijfde* en *negende* pijltje in dit recept moeten *dubbel* zijn (net als in Serie III).

BIJ DE VOORPLAAT

Het opmeten van de hoogte van een klokketoren. De afbeelding is afkomstig uit een meer dan 400 jaar oude verhandeling.

Je vindt in dit nummer twee artikelen over hoogtemeting, waarin verschillende methoden besproken worden. Ook wordt uitgelegd hoe je met een gemakkelijk zelf te maken instrument, het *geometrische kwadrant*, op een uiterst simpele manier de hoogte van gebouwen en van bomen kunt bepalen. Probeer het!

°De hoogte van torens en bomen



- Hoe kun je uitmaken of de kerktoeren van jouw dorp hoger is dan die in het volgende dorp?
- Hoe kun je bepalen welk gebouw (flat/toren/schoorsteen/antennemast/. . .) in jouw stad het hoogst is?
- En voor wie meer voelt voor de levende natuur: hoe meet je wat de hoogste boom is bij jou in de buurt?

Op deze vragen zijn tal van antwoorden mogelijk. Voor de hoogte van de kerktoeren bel je de koster op, of in een grotere plaats is er bij het V.V.V.-kantoor wel achter te komen. En in ieder geval bestaat er wel een ambtelijke dienst die voor alle soorten bouwsels de gegevens netjes geregistreerd heeft staan. Maar je voelt wel dat we hier deze kant niet op willen.

We gaan er van uit dat onze lezers zich wel eens afvragen, hoe je zo'n antwoord zélf kunt vinden, zonder afhankelijk te zijn van anderen.

Voor de hoogte van een toren valt dan te denken aan het tellen van de treden tot aan de hoogste trans; met een duimstok meet je de hoogte van één trede, vermenigvuldigen, en klaar! Of je neemt een lang touw mee naar boven en laat dat over de rand zakken.

Bij een kantoorflat meet je in het trappenhuis de afstand tussen twee opvolgende vloeren, en je telt aan de buitenkant het aantal ramen boven elkaar. Met misschien nog wat correcties voor de benedenverdieping en voor de dakconstructie.

De bovenstaande methoden zijn in veel gevallen best praktisch, maar niet altijd. We noemden niet voor niets de bomen: naar de top klimmen is minder eenvoudig, en de zijtakken zitten nooit erg regelmatig verdeeld. Als je niet aan omzagen wilt denken, kom je gauw uit op meetmethoden die wat meer 'meetkundig' zijn. Ofwel: de *driehoeksmeting*. We zullen hiervan een aantal eenvoudige gevallen toelichten.

De houtvestersmethode

In de bosbouw moet de hoogte van bomen eenvoudig en snel gemeten kunnen worden, om bijvoorbeeld de houtopbrengst te kunnen schatten. Dus niet in bomen klimmen, en ook geen dure instrumenten en ingewikkelde berekeningen erbij halen!

Een houtvester gebruikt een 45-45-90-driehoek, voorzien van een schietlood en een handvat (fig. 1a). Hij zoekt een plaats op (*P*) van waaruit de top van de boom langs de schuine zijde te zien is, terwijl tegelijkertijd het touwtje precies langs de verticale rechthoekszijde valt (fig. 1b).

Fig. 1.



Verder bepaalt hij nog de afstand van punt *P* tot de stam van de boom door 'afpassen': met stappen van een meter. Of preciezer: met een meetlint. Figuur 1c laat zien dat deze afstand, opgeteld bij

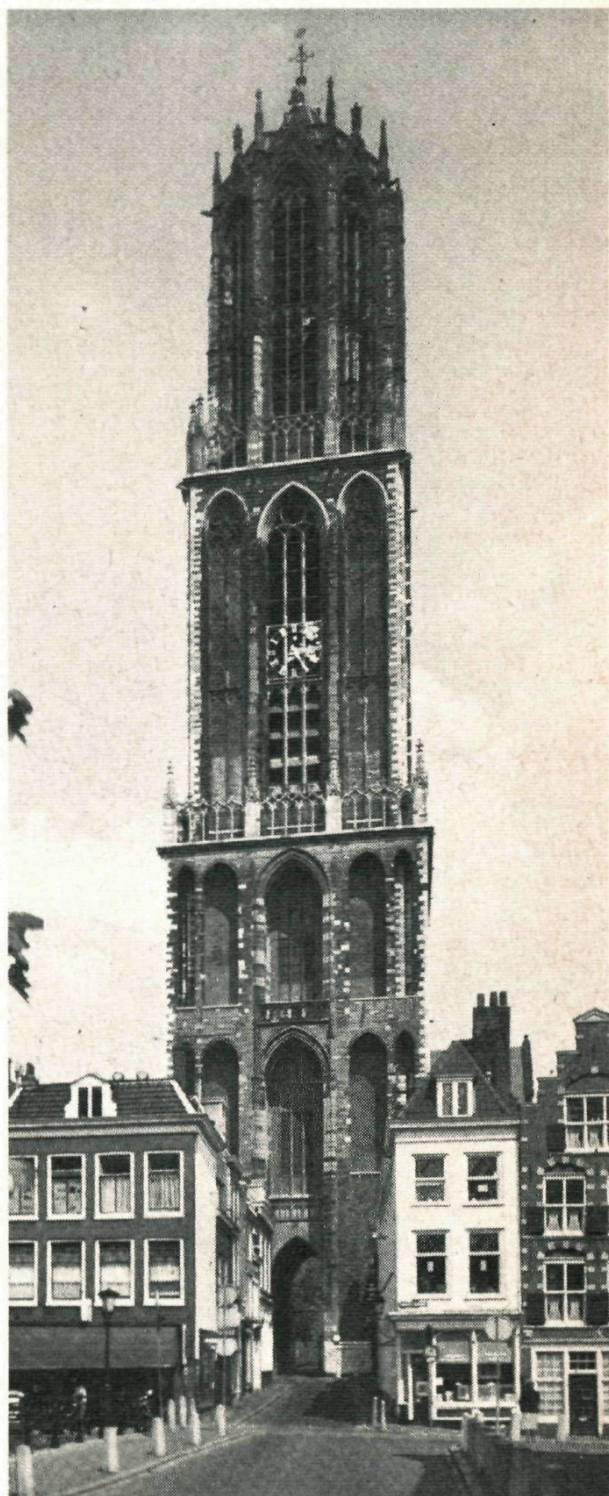


Fig. 2. De Utrechtse domtoren is vanuit de Zadelstraat op te meten met de houtvestersmethode. Wie gaat eens na of de 112 m uit de boekjes, betrekking heeft op het straatniveau of op N.A.P.-niveau?

z'n eigen lengte (eigenlijk: z'n ooghoogte), de hoogte van de boom oplevert.

Deze houtvestersmethode is ook geschikt om de hoogte van gebouwen te meten, mits er vanaf de voet van het gebouw een vrije rechte weg is tot het 45° -punt P . Bij de domtoren in Utrecht bijvoorbeeld, gaat dit uitstekend, zie fig. 2. Er loopt een straat recht op de toren toe, je kunt zelfs in de onderdoorgang precies midden onder de torenhaan komen.

Een variant

Als je vanaf de voet van het op te meten bouwwerk onvoldoende achteruit kunt gaan (wat vaak voorkomt in een korte, smalle straat) is een kleine aanpassing van bovenstaande methode mogelijk.

Je gebruikt dan een meetdriehoek met ongelijke rechthoekszijden. Bijvoorbeeld met de verticale zijde gelijk aan tweemaal de horizontale.

Nog algemener

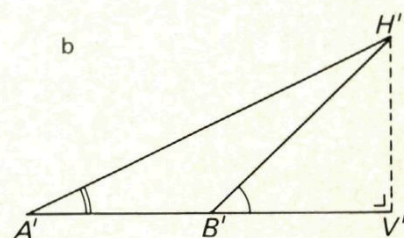
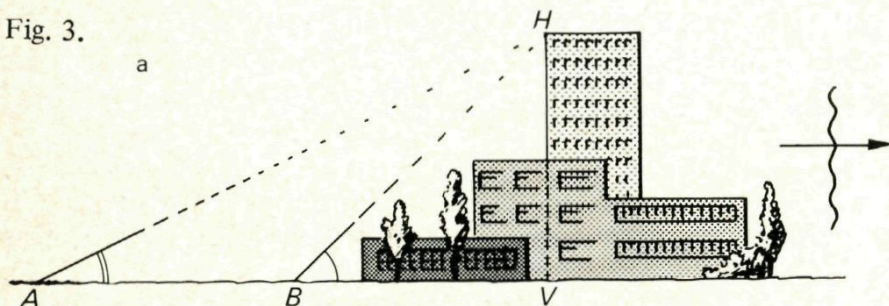
Vaak is het voetpunt van de te meten hoogte niet te bereiken, denk maar aan een bergtop.

De oplossing voor dit geval volgt uit de volgende algemene eigenschap:

Als van een driehoek de grootte van de basis-zijde en van de beide aangrenzende basishoeken bekend zijn, dan kan die driehoek precies getekend worden. In die figuur is dan ook de hoogte van de top op te meten.

Als voorbeeld laten we zien hoe in de situatie van figuur 3a de hoogte van punt H boven het voetpunt V te vinden is.

Fig. 3.



In een punt A meet je met een hoekmeet-instrument (bijv. met een schietloodje op je geodriehoek, zie fig. 4) de grootte van hoek HAV in graden. Dan loop je een stuk recht op het gebouw af, zeg tot B . Onderwijl heb je met een meetlint de afstand AB opgemeten. Met het meegenomen instrument meet je in punt B de hoek HBV .

Gebruik makend van de drie gevonden meetresultaten, teken je driehoek ABH zo precies mogelijk op schaal (fig. 3b). Als je voor de afstand AB 15 meter vond, kun je de tekening bijv. beginnen met een lijnstuk $A'B'$ van 15 cm. Alle afmetingen in de tekening worden zo 100-maal kleiner dan in werkelijkheid.

Vervolgens trek je lijnen door A' en B' met de opgemeten hellingshoeken. Uit het snijpunt H' trek je de loodlijn op $A'B'$, meet de lengte ervan op, en vermenigvuldigt die lengte met 100. Dit geeft de oorspronkelijke hoogte HV .

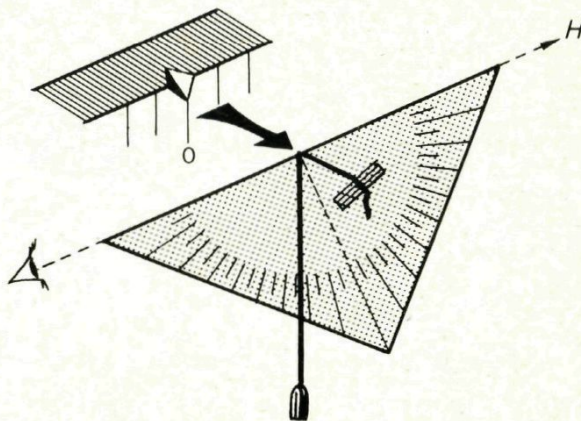


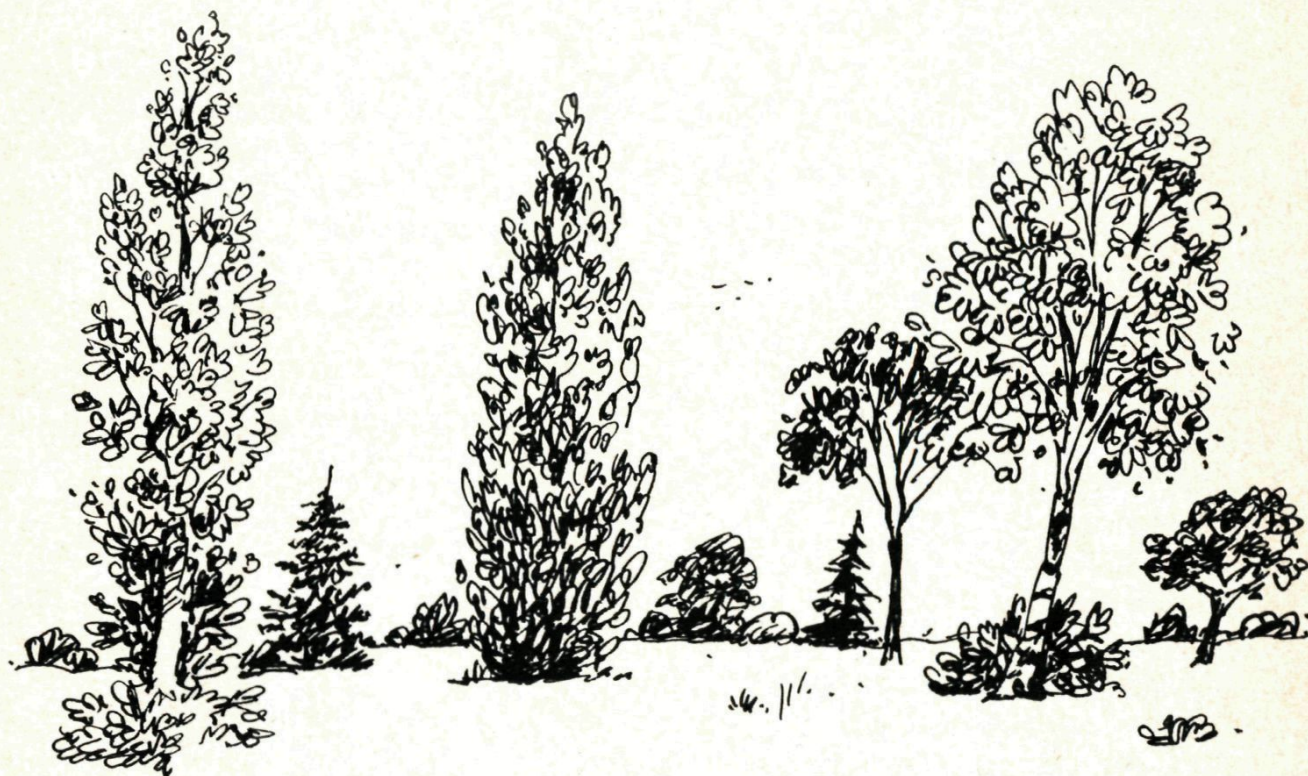
Fig. 4. Zo meet je met je geodriehoek een hellingshoek. Maak met een scherp mesje een heel kleine inkeping, en gebruik als loodlijn een dun garendraadje dat je met een stukje plakband op de achterkant vastzet.

Preciezer

Een landmeter zal lang niet altijd deze tamelijk bewerkelijke schaaltekening maken. Hij weet ook hoe hij uitgaande van de drie meetresultaten, via uitsluitend een *berekening* heel precies de gezochte hoogte kan vinden. Iemand met wat goniometrie-kennis zal wel kunnen vinden hoe dat gaat.

Eenvoudiger

Met die goniometrie vallen we je niet lastig, want het kan ook zonder! Al zo'n duizend jaar geleden waren er mensen die wisten dat het niet altijd handig is om hoeken te meten op een cirkelvormige gradenschaal. Soms is daar beter een gewone rechte meetlat voor te gebruiken. Als je wilt weten hoe dat dan gaat, moet je het stukje 'Hoogten meten met een geometrisch kwadrant' opzoeken.



Het artikel hierboven probeerde je onder meer uit te dagen tot het zoeken van de hoogste boom in je omgeving. Als je dat inderdaad doet, zul je er ook wel nieuwsgierig naar zijn of er op andere plaatsen nog hogere bomen staan. We zijn daar zelf evengoed benieuwd naar, en stellen het volgende voor:

Iedereen die denkt een erg hoge boom gevonden te hebben, schrijft een briefkaart of briefje (aan het redactie-secretariaat van Pythagoras) met:

- de opgemeten hoogte van de top boven de grond,
- de plaats waar de boom staat (zo beschreven dat iemand die niet in de omgeving bekend is hem ook kan vinden),
- het soort boom (voorzover bekend),
- je eigen naam en adres.

Als we resultaten binnenkrijgen, zullen we die natuurlijk in Pythagoras bekend maken. Houdt er rekening mee dat de 'toppers' dan mogelijk gecontroleerd kunnen worden door 'sub-toppers' uit de buurt.

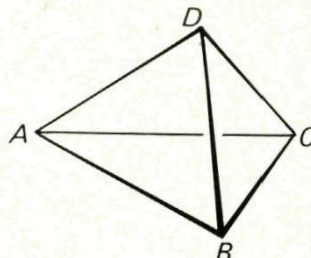


Pythagoras Olympiade

Nieuwe opgaven (oplossingen inzenden vóór 12 januari 1982).

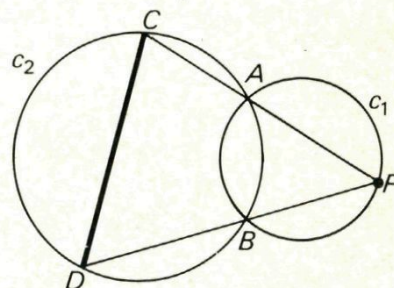
PO 34. Bewijs dat voor elk viervlak $ABCD$ geldt:

$$AB \cdot CD + AC \cdot BD \geq AD \cdot BC.$$



PO 35. Gegeven zijn de cirkels c_1 en c_2 , met snijpunten A en B . Neem op c_1 een punt P . De lijnen PA en PB snijden c_2 nogmaals in C en D .

Voor welk(e) punt(en) P op c_1 is de lengte van het lijnstuk CD maximaal?



PO 36. Gegeven zijn twee positieve gehele getallen m en n . Bewijs dat van de getallen $\sqrt[n]{m}$ en $\sqrt[m]{n}$ er altijd minstens één kleiner dan of gelijk aan $\sqrt[3]{3}$ is.

Wedstrijdvoorwaarden en prijzen

- * Leerlingen van het voortgezet/secundair onderwijs kunnen hun oplossing van een of meer opgaven insturen aan: *Pythagoras Olympiade, Brederode 29, 2261 HG Leidschen-dam (NL)*. Let op de inzendtermijn en zorg voor voldoende frankering.
- * Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Elke oplossing moet op een nieuw vel beginnen.
- * Oplossingen dienen gemotiveerd en volledig uitgewerkt te zijn, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Slechts goed leesbare inzendingen worden bekeken.
- * Wie een aan zichzelf geadresseerde en als brief gefrankeerde open enveloppe meezendt, ontvangt na de inzendtermijn onze oplossingen.
- * Per opgave worden onder de goede oplossers twee prijzen t.w.v. f 10/Bfr 150 verloot.
- * De opgaven van één jaargang vormen samen de *ladderwedstrijd*. De drie inzenders van de meeste goede oplossingen krijgen elk een prijs t.w.v. f 25 / Bfr 400.
- * De beste tien van de ladderwedstrijd die niet in een examenklas zitten, krijgen een uitnodiging voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Zij hoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

Internationale Wiskunde Olympiade

Bij de 22e Internationale Wiskundeolympiade, gehouden van 8–20 juli 1981 in de Verenigde Staten van Amerika, hebben vier Nederlandse scholieren een prijs behaald. Een persoonlijke score van 42 of 41 punten gaf een eerste prijs, 40–34 een tweede en 33–26 een derde.

Tweede prijzen waren er voor *Tonny Hurkens* (17 jr, Haps; 37 p.), *Daan Krammer* (16 jr, Hengelo; 36 p.) en *Paul van der Wagt* (18 jr, Warnsveld; 36 p.).

Een derde prijs behaalde *Bart van der Leemput* (18 jr, Vught; 27 p.).

De overige Nederlanders waren: *Erik Admiraal* (25 p.), *Bram Bouwens* (25 p.) – beide nét buiten de prijzen –, *Erick de Vries* (17 p.) en *Sieds van der Schaaf* (16 p.).

In totaal deden 185 vwo-leerlingen uit 27 landen mee; 19 landen waaronder Nederland, met een maximaal team van 8. De ploeg van de Verenigde Staten behaalde de meeste punten (314), gevolgd door West-Duitsland (312) en Groot-Brittannië (301). De Nederlandse ploeg kwam op de tiende plaats met 219 punten.



De Nederlandse ploeg voor het standbeeld van Einstein, kort na de prijsuitreiking in de National Academy of Sciences te Washington, D.C. V.l.n.r.: Erick de Vries, Tonny Hurkens, Daan Krammer, Bram Bouwens, Paul van der Wagt, Bart van der Leemput, Erik Admiraal, Sieds van der Schaaf en delegatieleider Jan van de Craats.

De zes opgaven, elk goed voor 7 punten, waren achtereenvolgens afkomstig uit: Engeland, West-Duitsland, Nederland, België, de Sovjet-Unie en Finland. De deelnemers hadden $4\frac{1}{2}$ uur de tijd voor het oplossen van de eerste drie opgaven, en een dag later weer $4\frac{1}{2}$ uur voor de volgende drie. Voor Nederland hadden zitting in de jury dr. J. van de Craats (Rijksuniversiteit Leiden) en drs. A. W. Boon (Chr. Gymnasium 'Sorghvliet', 's-Gravenhage).

°°° Opgaven van de 22e Internationale Wiskunde Olympiade (1981)

Van de nrs. 1 en 3, die door de Nederlandse ploeg het moeilijkst gevonden werden, staat achterin een oplossing; de overige volgen in afl. 3.

1. Zij P een punt binnen een gegeven driehoek ABC . D , E en F zijn de voetpunten van de uit P neergelaten loodlijnen op de lijnen BC , CA , resp. AB .

Bepaal alle punten P waarvoor $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$ zo klein mogelijk is.

2. Stel r en n zijn gehele getallen zo, dat $1 \leq r \leq n$. Beschouw alle deelverzamelingen van r elementen van de verzameling $\{1, 2, \dots, n\}$, en neem uit elk van die deelverzamelingen het kleinste getal. $F(n, r)$ is het rekenkundig gemiddelde van al die kleinste getallen.

Bewijs dat $F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}$.

3. Bepaal de maximale waarde van $m^2 + n^2$ als m en n gehele getallen zijn die voldoen aan $1 \leq m \leq 1981$, $1 \leq n \leq 1981$ en $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$.

4. (a) Voor welke waarden van $n \geq 3$ is er een verzameling van n opvolgende gehele getallen groter dan nul zo, dat het grootste getal uit die verzameling een deler is van het kleinste gemene veelvoud van de overige $n-1$ getallen?
(b) Voor welke waarden van $n \geq 3$ is er precies één verzameling met die eigenschap?

5. Drie verschillende congruente cirkels gaan door één punt O . De cirkels liggen binnen een gegeven driehoek, en elke cirkel raakt twee zijden van de driehoek. Bewijs dat het middelpunt van de ingeschreven cirkel, het middelpunt van de omgeschreven cirkel, en het punt O op één lijn liggen.

6. De functie $f(x, y)$ voldoet voor alle gehele getallen $x \geq 0$ en $y \geq 0$ aan

(1) $f(0, y) = y + 1$,

(2) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$,

(3) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$.

Bepaal $f(4, 1981)$.

°° De waterstraalkromme

Als een kraan maar weinig open staat, zien we op de plaats waar het water uit de kraan komt vaak een mooie ronde vorm. Bij verder openen van de kraan verdwijnt die ronding geleidelijk. Wel blijft het zo dat de straal naar beneden toe steeds dunner wordt — totdat het water zich in druppels verdeelt.

We proberen uit te zoeken of er van die straalvormen wat te begrijpen valt. De beschrijving die we hier geven van de valbeweging van het water, leidt tot een vorm voor de rand van de straal die overeenkomt met de grafiek van de functie $x \rightarrow c/x^4$.

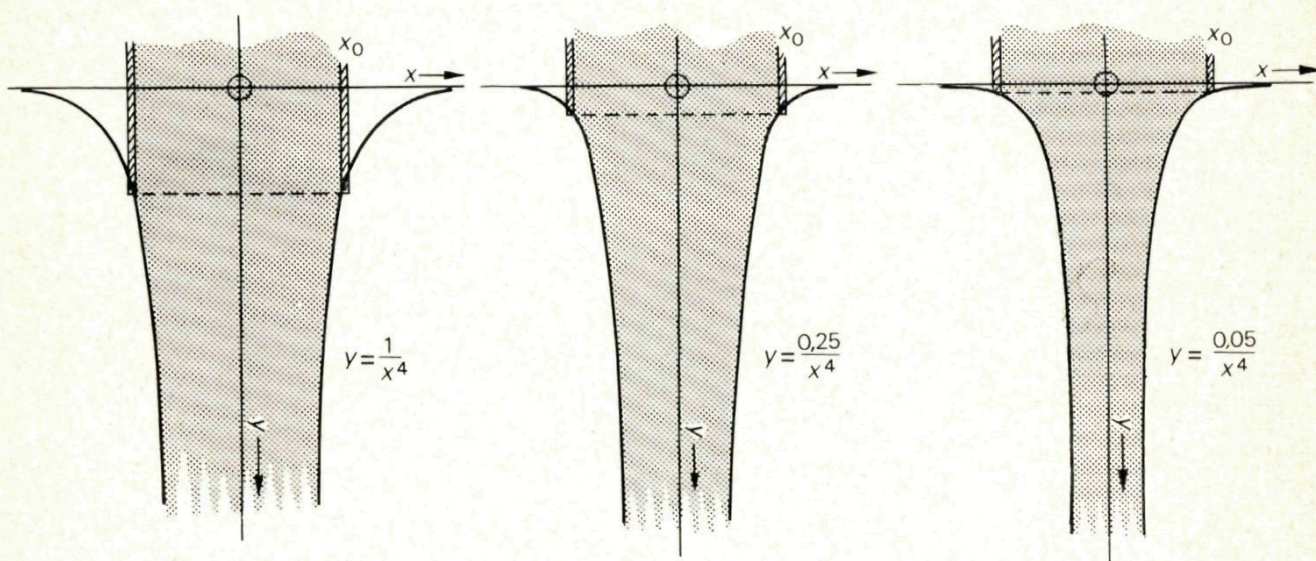


Fig. 3.

Stroomsterkte en stroomsnelheid

Bij een straal zijn er twee begrippen die dicht bij elkaar liggen, stroomsterkte en stroomsnelheid. Voor het eerste kunnen we als eenheid nemen m^3/s , voor het tweede m/s . Hiermee is het onderscheid al aangegeven.

De stroomsterkte is de hoeveelheid water die per tijdseenheid uitstroomt, de stroomsnelheid is de afstand afgelegd per tijdseenheid door een waterdeeltje. Tussen beide is een relatie:

de stroomsterkte is de stroomsnelheid maal de straald doorsnede.

Omdat

- zoals bij elke valbeweging de snelheid van een vallend waterdeeltje tijdens de val toeneemt, en

- de stroomsterkte in een constante straal op elke hoogte even groot is (de hoeveelheid passerend water per seconde is overal even groot),

heeft de genoemde relatie tot gevolg dat de doorsnede van de straal naar beneden toe kleiner wordt.

Vertaald in formules

We voeren wat letters in, zie fig. 2 (blz. 34). In de (ronde) uitstroomopening met straal x_0 heeft het water over de hele doorsnede een verticale snelheid v_0 . Na een valhoogte h is de straal van de ronde doorsnede x , en de snelheid v .

De constante stroomsterkte noemen we i .

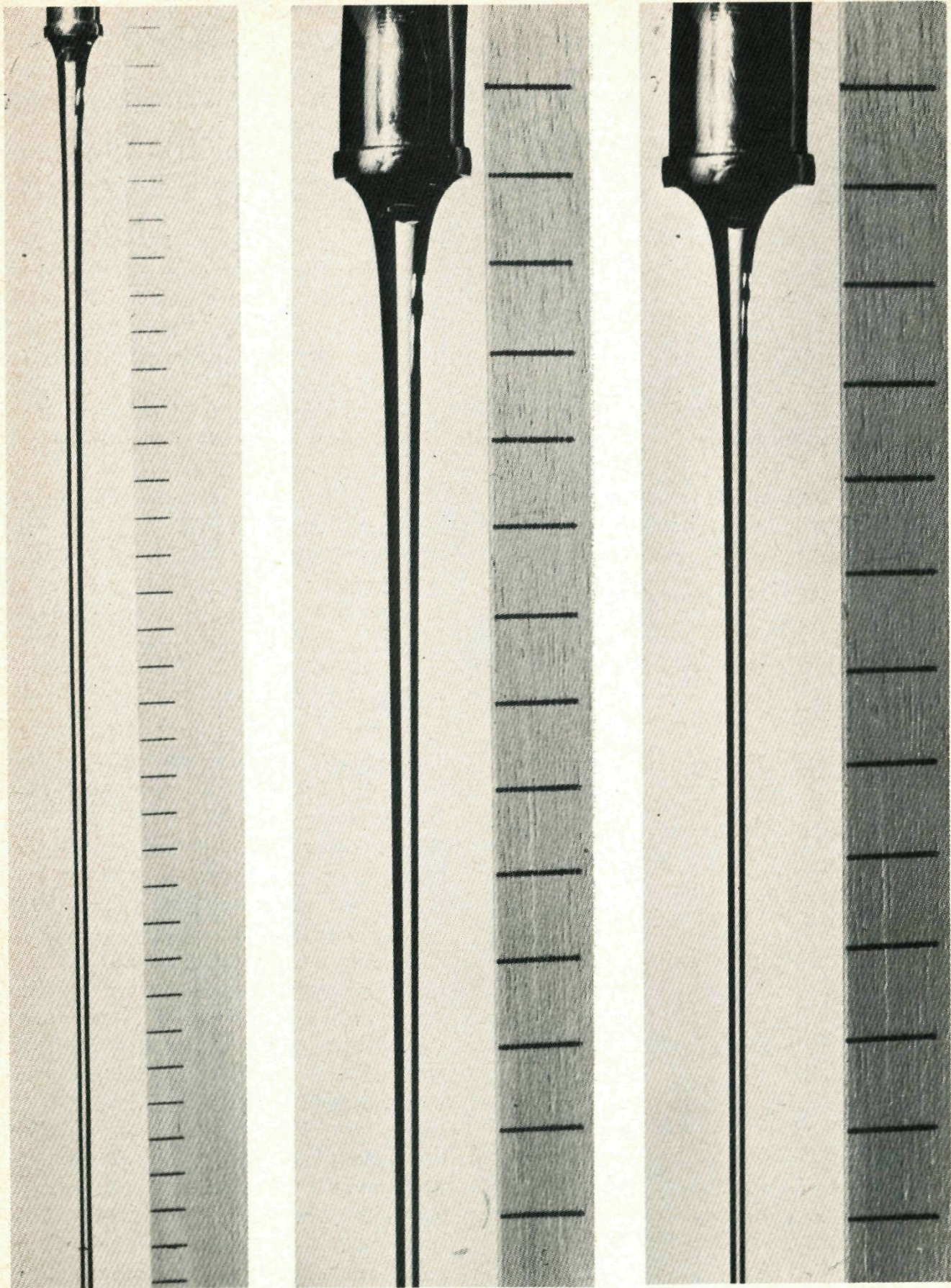


Fig. 1abc. Driemaal een vallende waterstraal. De maatlijntjes staan op 1 cm van elkaar. Wie wat weet van lichtbreking kan wel bedenken hoe deze stralen een zwarte rand kregen. Probeer het maar naar te doen, het gaat heel gemakkelijk.

De zwaartekracht zorgt voor een eenparig versnelde valbeweging met versnellingsconstante g . De valwetten (zie noot onderaan) geven dan een betrekking tussen h en v :

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} \quad (1)$$

Dit gaat wegens $i = v_0 \cdot \pi x_0^2 = v \cdot \pi x^2$ over in:

$$h = \frac{i^2}{2g\pi^2} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x_0^4} \right) \quad (2)$$

De straaltvorm in theorie

Vergelijking (2) laat zien dat de straaltvorm zich het best laat beschrijven in een coördinatenstelsel met de oorsprong op enige afstand boven het uitstroomvlak, en met de positieve y -as verticaal omlaag.

Met de afkortingen $c = i^2/2g\pi^2$ en $y = h + c/x_0^4$ gaat (2) nog over in

$$y = \frac{c}{x^4}.$$

In figuur 3 zijn grafieken van deze relatie getekend voor verschillende waarden van c , d.w.z. voor verschillende stroomsterkten i .

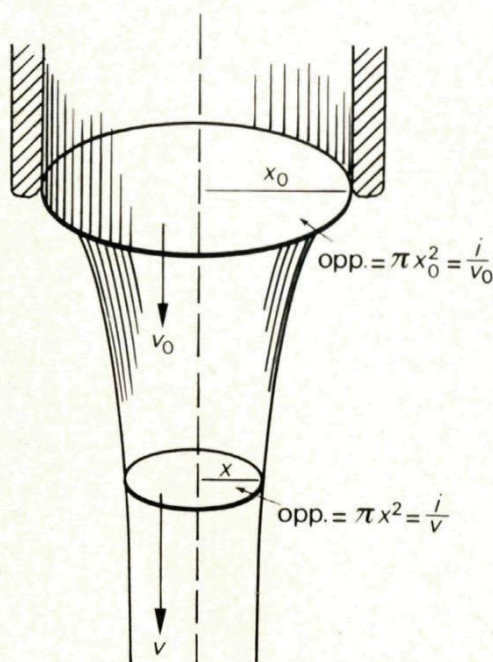


Fig. 2.

Klopt de theorie?

Komt de in theorie voorspelde vorm ook overeen met de werkelijkheid? Een vraagteken is hier wel op z'n plaats, want we hebben o.a. geen rekening gehouden met:

- Het effect van de adhesie-kracht, de kleefkracht tussen het water en de kraanrand.
- De cohesie-kracht in het water, het streven van iedere vloeistof naar een minimaal grensoppervlak. Als de straal erg dun wordt, blijkt dat de opsplitsing in afzonderlijke druppels in dit opzicht voordeliger is. Het 'dunner' worden van de straal uit zich dan verderop in een steeds groter wordende onderlinge afstand tussen de druppels.
- Het niet geheel constant zijn van de verticale snelheid over een hele doorsnede. De buitenste laag van de waterkolom wordt afgeremd door wrijving, eerst met de wand van de kraanbuis, daarna met de lucht.

De controle in het echt

De geldigheid van (2) is te testen door metingen te doen aan een echte waterstraal, d.w.z. aan de fotobeelden in figuur 1a, 1b en 1c.

Meet zo nauwkeurig mogelijk met een loepje de halve straaldiameter, bij de bovenrand en ook ergens lager. De streepjes op de schaalverdeling gaven in werkelijkheid centimeters aan, dus de echte hoogte tussen de meetpunten is in mm te vinden. Vergeet niet ook de straaldikte om te rekenen van foto-millimeters naar echte mm. Met $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ (de versnelling van de zwaartekracht) blijft in (2) alleen de stroomsterkte i als onbekende over. Bij het maken van de foto's is deze ook bepaald, met een litermaat en een seconde-wijzer. We geven die uitkomsten hier niet, maar maken er een klein wedstrijdje van voor enthousiaste meet-kundigen:

Bepaal uit de foto's en formule (2) de stroomsterkte in liters per minuut van

elk van de drie stralen. Schrijf die drie getallen (met je naam, huisadres, school en klas) op een briefkaart, en stuur die uiterlijk 18 jan. '82 aan het redactiesecretariaat van dit blad.

Degene die onze direct opgemeten waarden het dichtst benadert, verdient daar een gratis Pythagoras-abonnement voor het volgende schooljaar mee.

Om toch enige controle te hebben, geven we hier als heel ruwe grenzen:

i (straal a) ligt tussen 0,5 en 5,

i (straal b) tussen 0,2 en 2, en

i (straal c) tussen 0,05 en 0,5 liter/min.

Het beste resultaat is waarschijnlijk als volgt te vinden. Meet op een flink groot aantal hoogten h_i de halve diameter x_i , reken beide om in mm, bereken ook alle x_i^{-4} , en maak een grafiek van de getallenparen (h_i, x_i^{-4}) .

De formule voorspelt een rechte lijn. Kijk in je figuur voor welke punten dit het beste klopt, trek daar zo goed mogelijk een rechte door, en reken verder met de helling van die lijn.

°°° Noot

Wie wel eens met differentiaalrekening gewerkt heeft, kan zien dat de valwetten zich laten afleiden uit het uitgangspunt van een constante versnelling (= snelheidsverandering) g . In formule: $\frac{dv}{dt} = g$. Primitiveren geeft voor de valsnelheid (= hoogteverandering):

$$v (= \frac{dh}{dt}) = v_0 + gt \quad (3)$$

Nogmaals primitiveren geeft voor de valhoogte (met $h = 0$ voor $t = 0$):

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (4)$$

Elimineren van de tijd t uit (3) en (4) geeft de eerder gebruikte formule (1).

°° Even tegen oneven

F. D. Roos

Nog weer anders dan de in het vorige nummer behandelde spelletjes GVR en GVL is de volgende variant van het boter-kaas-en-eieren-spel.

- Meneer E en mevrouw O zetten ombeurten een getal in een hokje van het 3-bij-3 speelveld.
- Meneer E mag alleen *even* getallen gebruiken, mevrouw O alleen *oneven*.
- Het spel stopt zo gauw er een rij, kolom of diagonaal gevuld is met drie getallen. Als de som van die getallen even is, wint meneer E; als de som oneven is, heeft mevrouw O gewonnen.

		7
1		4
13	10	

Voorbeeld. De invulvolgorde was hier: 1 – 4 – 7 – 10 – 13.

Speler E kan nu (op twee manieren) een even drietal maken en dus winnen.

Zoek maar eens uit hoe je dit spel moet spelen.

En als je dat gelukt is, mag je ook een analyse proberen te maken van hetzelfde spel maar nu op een 4-bij-4 bord!

°Keien, takken en looptorren

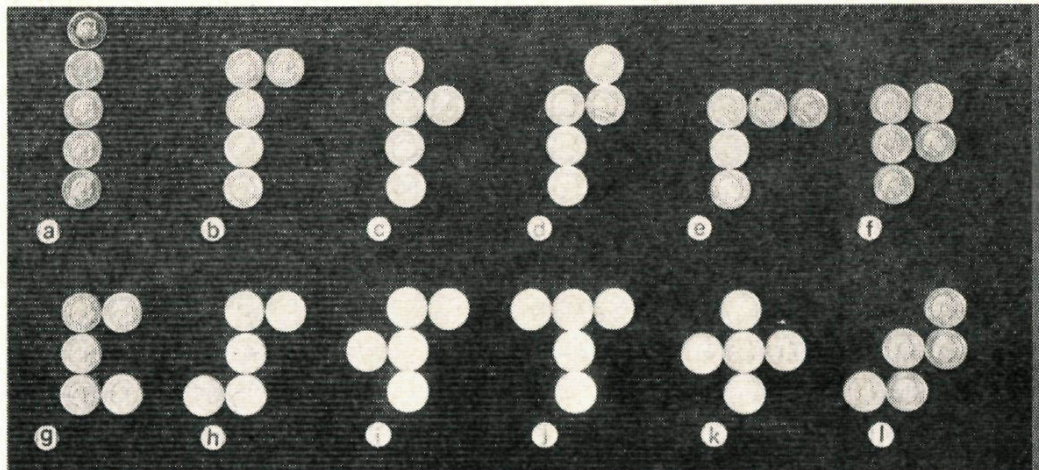
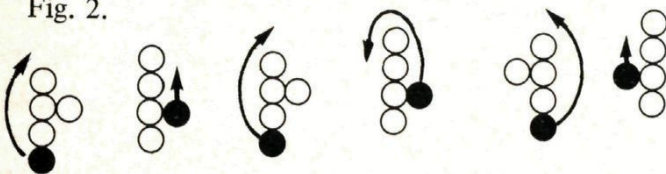


Fig. 1.

Ga na dat fig. 1 alle mogelijkheden geeft om vijf centen zó neer te leggen dat iedere cent horizontaal of verticaal raakt aan minstens één andere cent. We verdelen deze 12 figuren in drie categorieën.

Soms kan door het verplaatsen van één cent een figuur ontstaan die *congruent* is met de oorspronkelijke, dat wil zeggen een figuur die ook kan ontstaan door schuiven, draaien of spiegelen van de oorspronkelijke figuur als geheel. In zo'n geval zeggen we dat de figuur leeft, dit in tegenstelling tot een dode *kei*-figuur (bijv. 1 h). De levende natuur wordt verder onderscheiden in planten en dieren. Hier: in *tak*-figuren (bijv. 1 b) die slechts gedeeltelijk kunnen bewegen, en *tor*-figuren (bijv. 1 c) die vrij kunnen rondlopen. Bij takken kunnen een of enkele centen heen en weer verplaatst worden, bij torren kunnen alle centen op den duur van hun plaats komen. In fig. 2 zie je een tor aan de wandel. Probeer nu ook van de rest van de figuren na te gaan tot welke categorie ze behoren.

Fig. 2.



Voor wat de torren betreft vonden we tot nu toe de volgende soortenaantallen:

- 1 tweetor
- 2 drietorren
- 3 viertorren
- 6 vijftorren
- 4 zestorren
- 9 zeventorren
- 3 achttorren

We laten je er naar zoeken tot het volgende nummer van dit blad. Wel merken we nog op dat één van de zestorren, de *nortor*, gevangen lijkt te zitten. Aan de andere kant bestaan er twee zeventorren, een vijftor en een drietor die in meerdere richtingen vooruit en achteruit kunnen lopen. Zoals de tor hiernaast.



Andere families

Naast de familie van de vijftorren zijn er natuurlijk nog andere torrenfamilies (en ook andere keien- en takkenfamilies): de viertorren, de zestorren, de zeventorren etc. Om te laten zien dat we je niet vergeefs laten zoeken, geeft fig. 3 de beweging van een schuinsmarcherende zeventor.

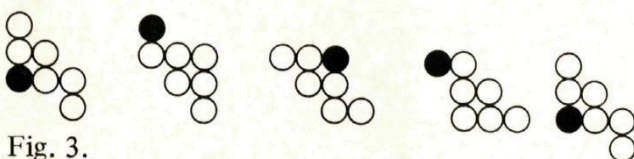


Fig. 3.

°Passende schijven

In figuur 1 zie je de cijfers 1 t.e.m. 5 zowel op de ring als op de cirkelschijf staan. Regelmatig over de omtrek verdeeld, in tegengestelde richtingen. Alleen de beide cijfers 1 staan bij elkaar.

Denk de middenschijf losgeknipt zodat hij in de ring kan draaien. Na $\frac{1}{5}$ draai rechtsom ontstaat de situatie van fig. 2a: nu vallen de cijfers 4 samen. Weer een stap verder geldt dit voor de 2. Dan voor de 5 en tenslotte voor de 3.

Experimenteel blijkt dus in elk van de vijf standen, één cijfer samen te vallen. De vraag is nu: is dat iets bijzonders?

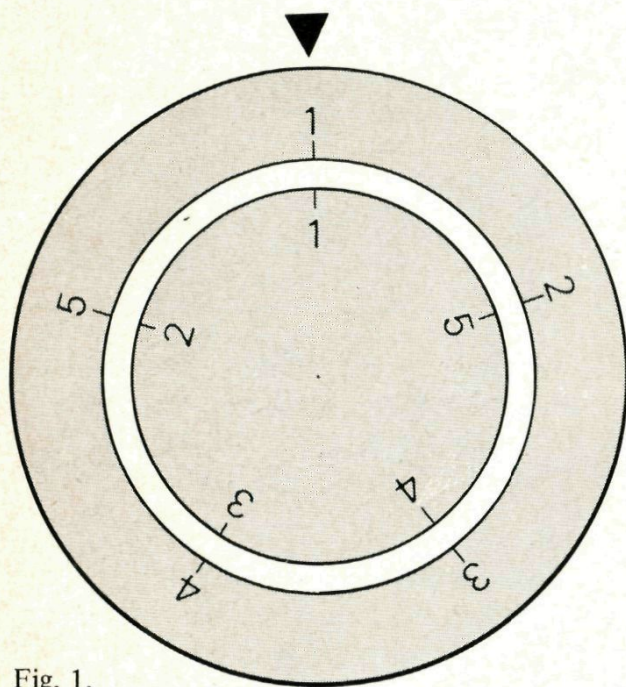


Fig. 1.

Nader onderzoek

Een eerste vraag is: zijn er nog meer 'passende schijven'? Dat wil zeggen, kunnen dezelfde vijf cijfers ook nog in een andere rangschikking op de middenschijf staan? Natuurlijk weer zó, dat bij elke draaistand een cijfer samenvalt.

We laten je er zelf naar zoeken. Er blijken nog twee andere oplossingen te zijn, met de leuke eigenschap dat ze elkaars spiegelbeeld zijn: zo'n schijf is óók op z'n kop in alle standen passend.

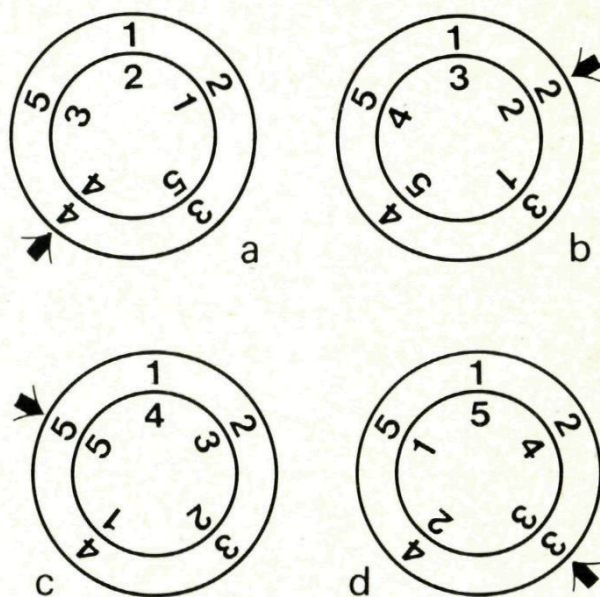


Fig. 2. De middenschijf in fig. 1 is hier telkens één stap verder gedraaid.

°°° Andere aantallen

In plaats van de hierboven gekozen vijfdeling van de ring, kan ook van een andere n -deling worden uitgegaan. Voor $n < 5$ is de zaak snel onderzocht, maar boven de 5 wordt het veel moeilijker.

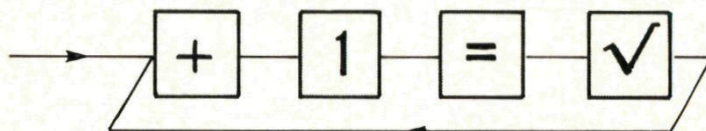
We laten het aan onderzoekende lezers over om te proberen zo veel mogelijk passende schijven te vinden. En daarnaast, om algemene regels te vinden die voor elke n gelden.

Als je leuke resultaten gevonden denkt te hebben, vragen we je ze op schrift te zetten en op te sturen aan het redactiesecretariaat (adres: zie achterflap; zo mogelijk vóór 1 februari 1982).

°°Kettingwortelrijen

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} = ?$$

Misschien kan je rekendoosje je het antwoord vertellen, als je lang genoeg doorgaat met



Hoe ziet de rij van de tussenresultaten na elke cyclus er uit?

Blijft de rij onbeperkt stijgen, dalen of slingeren?

Of treedt er *convergentie* op?

Als je de tussenresultaten op papier geschreven hebt, zie je een stijging die al snel langzamer wordt en welhaast tot stilstand lijkt te komen ergens bij 1,61 ... Nog even doortoetsen geeft 1,618034 ... en nu kun je zo lang doorgaan als je wilt, maar er verandert niets meer.

Hoe zit dat?

Je zult wel weten dat een rekendoosje voor $\sqrt{2}$ geen exacte uitkomst geeft, maar een benadering in (veelal) acht decimalen. Zou het misschien zo zijn dat de rij tot stilstand komt, omdat de aangroeiing op den duur zo klein is dat deze in de afronding bij de wortelbepaling wegvalt? Of zou ook de 'echte' rij altijd onder de grens 1,6180341 blijven? En wat is er dan voor bijzonders aan dit getal?

Voor wie hier niet direct een antwoord op weet, nu eerst een andere opgave. Hoeveel is:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

De limiet die je vindt lijkt wel erg mooi!

We worden nu pas echt nieuwsgierig en gaan verder proberen. Wat is

$$W_3 = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}, W_4, W_5, W_6. \text{ Hee!}$$

Net als bij repeterende breuken

De verklaring van de gevonden resultaten lijkt erg op het 'terugzoeken' van repeterende breuken.

We geven de verklaring niet apart voor bovengenoemde voorbeelden, maar direct voor een willekeurig positief getal g . In nette wiskundetaal gezegd gaat het dan over de rij

$$Wg_1, Wg_2, Wg_3, Wg_4, \dots$$

die term voor term, zogenaamd *recursief*, gedefinieerd is door

$$\begin{aligned} Wg_k &= \sqrt{g} && \text{voor } k = 1, \text{ en} \\ Wg_k &= \sqrt{g + Wg_{k-1}} && \text{voor } k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Als we aannemen (zie ook het laatste paragraafje) dat de termen van zo'n rij niet tot in eeuwigheid over de getallenlijn

blijven springen, maar op den duur allemaal blijken te liggen tussen nauwer en nauwer wordende grenzen aan weerszijden van een bepaald limietgetal, zeg Wg , dan zeggen we dat die rij *convergent* is. Precies in deze limiet is alle variatie juist uit de rij verdwenen en we kunnen dan dus schrijven

$$Wg = \sqrt{g + Wg}.$$

We zien hieraan allereerst dat Wg niet negatief zal zijn (want Wg is gelijk aan een wortel). Kwadrateren geeft

$$(Wg)^2 = g + Wg,$$

een vierkantsvergelijking met als positieve oplossing

$$Wg = (1 + \sqrt{1 + 4g})/2 \quad (1)$$

Klaar! We zien dat $g = 1$ als limiet geeft

$$W1 = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,618 \dots \text{ (juist het getal dat hoort bij de gulden-snede-verhouding),}$$

en verder

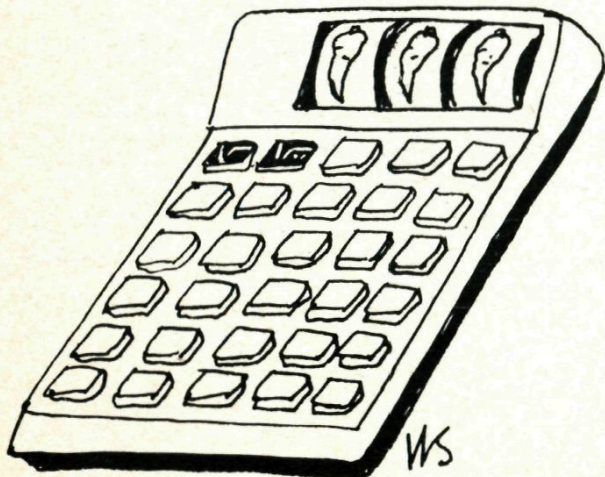
$$W2 = (1 + \sqrt{9})/2 = 2$$

$$W3 = (1 + \sqrt{13})/2 = 2,302 \dots$$

...

$$W6 = (1 + \sqrt{25})/2 = 3.$$

We laten aan de lezer over om na te gaan bij welke getallen g de rij juist een *geheel* getal als limiet heeft.



Stabiliteit

Probeer eens wat er gebeurt als je een keer een fout maakt bij het intoetsen volgens het in het begin aangegeven schema. Je drukt een keer $\boxed{2}$ i.p.v. $\boxed{1}$, of $\boxed{x^2}$ i.p.v. $\boxed{\sqrt{x}}$, of nog wat anders.

Bij een niet al te gekke fout zul je zien dat de termen dan verderop toch weer naar dezelfde limiet naderen. Alleen kan de benadering dan wel 'van bovenaf' i.p.v. 'van onderaf' zijn. We noemen het benaderingsproces hier *stabiel*. Het is immuun voor (kleine) fouten, en dus ook voor de afronding die steeds optreedt bij de benadering van de wortel.

Niet steeds even snel

Het getal g waar de rijen hierboven van uitgingen, hoeft niet geheel te zijn. Probeer maar weer met je rekendoosje dat je uitgaande van $g = 2,5$ of $g = 0,1$ of zelfs $g = \sqrt{273,15}$, eveneens nadert tot de door formule (1) gegeven limieten. Wel zal je wellicht opmerken dat de *snelheid* van benaderen heel verschillend kan zijn.

We gaan dit laatste eens precies na voor $g = 100$, $g = 1$ en $g = 0,01$. Formule (1) geeft hiervoor de limieten:

$$W100 = 10,51249 \dots$$

$$W1 = 1,61803 \dots$$

$$W0,01 = 1,00990 \dots$$

Laat je doosje langs de rijen lopen en kijk na hoeveel termen het verschil met de limiet minder is dan 0,001. Er blijkt:

$$W100_4 = 10,5124 \dots$$

$$W1_7 = 1,6174 \dots$$

$$W0,01_{12} = 1,0089 \dots$$

Dus na resp. 4, 7 en 12 termen wordt de gevraagde nauwkeurigheid bereikt. Als we g nog dichter bij 0 kiezen, komt het benaderingsproces nog trager op gang. We zeggen in zo'n geval dat de convergentie niet gelijkmatig is.

°°° De rij convergeert echt

Voor wie door de resultaten van zijn rekendoosje toch nog niet overtuigd is van het convergent zijn van de hierboven aangegeven rijen, met name voor g net boven nul, geven we in het kort een formeel bewijs.

We laten zien dat elke term uit de rij groter is dan zijn voorganger, maar kleiner dan een alleen van g afhankende 'bovengrens' $(1 + \sqrt{1 + 4g})/2 (= Wg)$; voor positieve g is deze bovengrens groter dan 1). Onder voorwaarde dat voor de k -de term geldt

$$0 < Wg_k < Wg \quad (2)$$

is de volgende afschatting te maken (probeer van elke regel de juistheid na te gaan)

$$\begin{aligned} Wg_k &= \sqrt{(Wg_k^2 - Wg_k - g) + g + Wg_k} = \\ &= \sqrt{\underbrace{(Wg_k - Wg)}_{< 0} \underbrace{(Wg_k + Wg - 1)}_{> 0} + g + Wg_k} \\ &< \sqrt{g + Wg_k} (= Wg_{k+1}) \\ &< \sqrt{g + Wg} \\ &= Wg. \end{aligned}$$

Samengevat:

$$Wg_k < Wg_{k+1} < Wg \quad (3)$$

De eerste term, $Wg_1 = \sqrt{g}$, blijkt aan voorwaarde (2) te voldoen, en dus geldt voor

$k = 1$ conclusie (3). Stap voor stap verdergaand is zo voor de hele rij bewezen

$$Wg_1 < Wg_2 < Wg_3 < \dots < Wg.$$

De termen van de rij naderen dus zeker tot een bepaalde, eindige, limiet $\leq Wg$. Eerder toonden we al aan dat *als er een limiet optreedt, deze gelijk is aan Wg* . Samengenomen volgt hieruit dat de rij voor elke positieve g convergeert, en wel naar de limiet $(1 + \sqrt{1 + 4g})/2$.

Ten slotte merken we nog op dat de limieten van de kettingwortelrijen, bij elke $g > 0$ gegeven door $(1 + \sqrt{1 + 4g})/2$, voor $g \downarrow 0$ naderen tot 1. Maar de rij die hoort bij $g = 0$ zelf, heeft uitsluitend termen 0 en dus ook een limiet 0. De limieten worden dus voorgesteld door een functie die *discontinu* is in 0. De grafiek ervan is getekend in fig. 1.

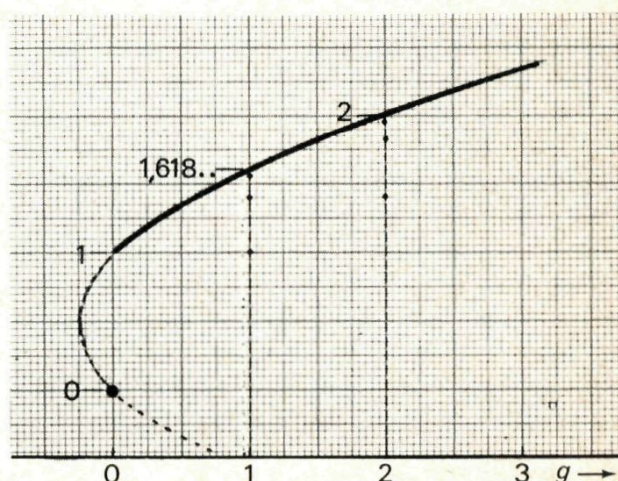
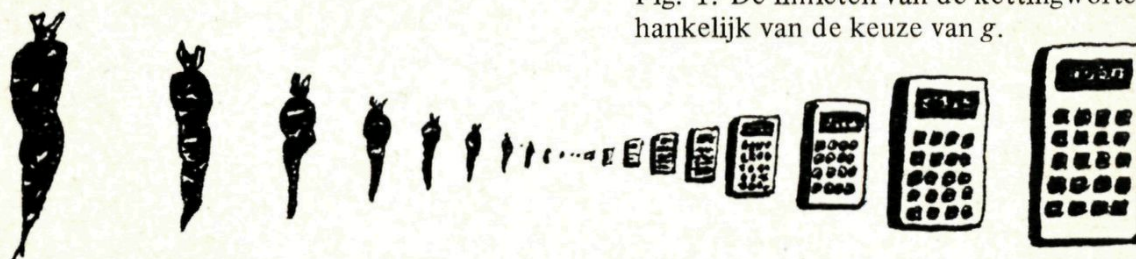


Fig. 1. De limieten van de kettingwortelrijen afhankelijk van de keuze van g .



°° Waar is Zoef?

Arie, Vera en Zoef (de hond) gaan tegelijk de weg op om de benen te strekken. Arie zet

°° Een wat ongewone vergelijking

Dr. J. T. Groenman

$$[x^3] - 3[x^2] + 2[x] = 0 \quad (1)$$

Om deze vergelijking te kunnen oplossen moet je de speciale betekenis van de vierkante haken kennen. Ze duiden de zg. *entier-functie* aan ('entier' is Frans voor 'geheel'): $[x]$ is het grootste *gehele* getal kleiner dan of gelijk aan x . Voorbeelden:

$$[3\frac{2}{3}] = 3; \quad [8,01] = 8; \quad [8] = 8; \quad [7,999] = 7; \quad [\sqrt{143}] = 11; \quad [0] = 0;$$
$$[-5,99] = -6; \quad [-6] = -6; \quad [-6,01] = -7.$$

In figuur 1 zie je een deel van de grafiek.

Terug naar vergelijking (1)

Invullen van $x = 2$ levert:

$$[8] - 3 \cdot [4] + 2 \cdot [2] =$$
$$8 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0.$$

Invullen van $x = 1,5$ levert:

$$[3,375] - 3 \cdot [2,25] + 2 \cdot [1,5] =$$
$$3 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Invullen van $x = -1,5$ levert:

$$[-3,375] - 3 \cdot [2,25] + 2 \cdot [-1,5] =$$
$$(-4) - 3 \cdot (2) + 2 \cdot (-2) =$$
$$= -14 \neq 0.$$

Invullen van $x = \sqrt[3]{7}$ levert:

$$[7] - 3 \cdot [\sqrt[3]{49}] + 2 \cdot [\sqrt[3]{7}] =$$
$$7 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 0.$$

Dit probeerwerk laat zien dat 2 en $\sqrt[3]{7}$ wél in de oplossingsverzameling van (1) zitten, maar +1,5 en -1,5 niet.

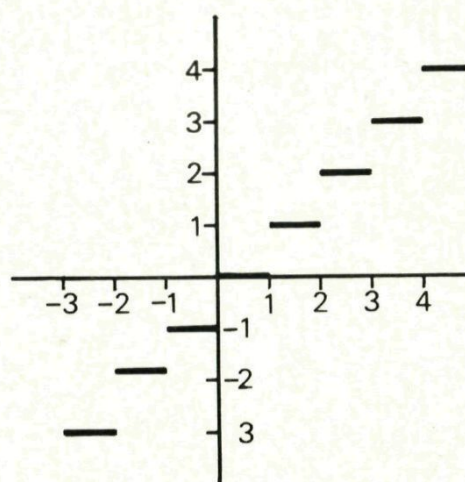


Fig. 1. De grafiek van $x \rightarrow [x]$.

Verder mag de lezer deze zaak uitzoeken. Gevraagd wordt om de oplossingsverzameling te geven van vergelijking (1), in $\mathbb{R}$.

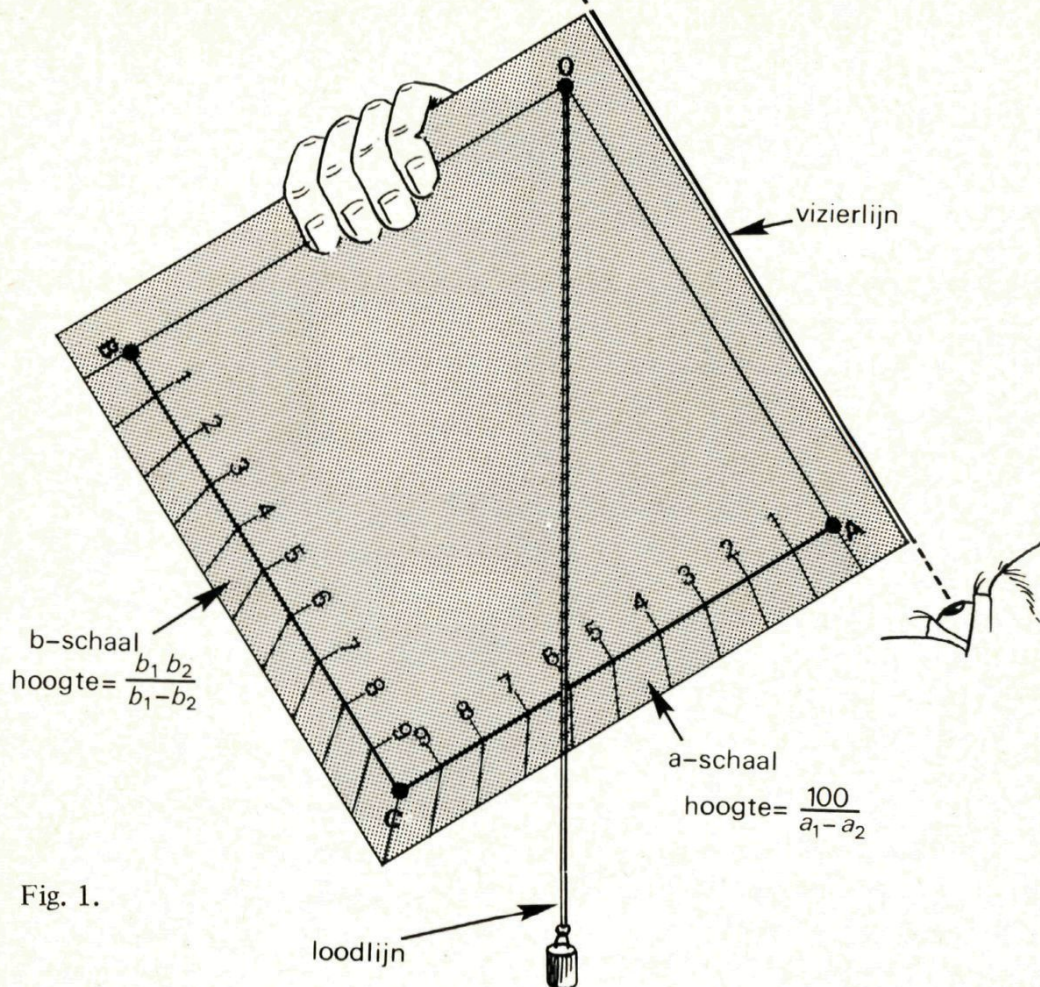
We willen alleen nog kwijt dat die oplossingsverzameling er op de getallenlijn ongeveer uit ziet als:



er flink de pas in, met een snelheid van 8 km/h. Vera gaat er met 5 km/h wat kalmer achteraan. En Zoef draaft natuurlijk onophoudelijk tussen die twee heen en weer, met een constante snelheid van 16 km/h.

VRAAG: Gesteld dat ze dit alle drie volhouden, waar is Zoef dan na een uur, en in welke richting draaft hij op dat moment?

° Hoogten meten met een geometrisch kwadrant



Als je zelf hoogten wilt gaan meten van gebouwen of bomen in je omgeving, kun je dat vaak handig doen met een instrument dat daar vroeger eeuwenlang voor in gebruik geweest is, maar nu in de vergetelheid is geraakt. Het hulpmiddel (eigenlijk is het ding té simpel om het een instrument te noemen) blijkt zo vernuftig te zijn, dat de uiteindelijke berekening beperkt blijft tot 1 deling, ofwel tot 1 vermenigvuldiging en 1 deling.

Het maken van het kwadrant

- Zaag uit een plankje (of snij uit een stevig stuk karton) een vierkant van ongeveer 12 bij 12 cm. Zeker één rand (de *vizer-lijn*) moet mooi recht afgewerkt zijn.
- Op het vierkant teken je twee maatverdelingen. (Als dit op het hout moeilijk gaat, plak je er eerst een stuk tekenpapier op. Je maakt het jezelf nog makkelijker als je er millimeterpapier voor neemt.)
 Begin met een zuiver vierkant van 10 bij 10 cm, met één zijde evenwijdig

aan de vizerlijn. Langs twee andere zijden komt een maatverdeling in centimeters, oplopend genummerd van A tot C (de a-schaal) en van B tot C (de b-schaal). Zie figuur 1. De schuine maatlijntjes buiten het getekende vierkant zijn allemaal gericht op hoekpunt O.

- Sla precies door O een klein spijkertje (of prik een gaatje) en bevestig daaraan een stukje garendraad met een gewichtje.

Klaar!

Hoe er mee te werken

In figuur 2 staan we in de buurt van een watertoren TT' waar we de hoogte van willen bepalen. Je houdt het kwadrant verticaal, met punt O naar boven, en richt het zó dat je met één oog juist de top T van de toren langs de vizierlijn ziet (in de tekening positie ①). Met je andere hand druk je het omlaag hangende 'lood-lijntje' tegen de a-schaal, en lees je af: 7,5 cm.

We lopen 10 meter naar de toren toe (tien flinke passen), en 'viseren' nogmaals op T . Het touwtje hangt nu langs 5 cm.

De gezochte hoogte krijg je tenslotte uit de simpele berekening:

$$\frac{100}{(7,5 - 5)} = 40 \text{ meter.}$$

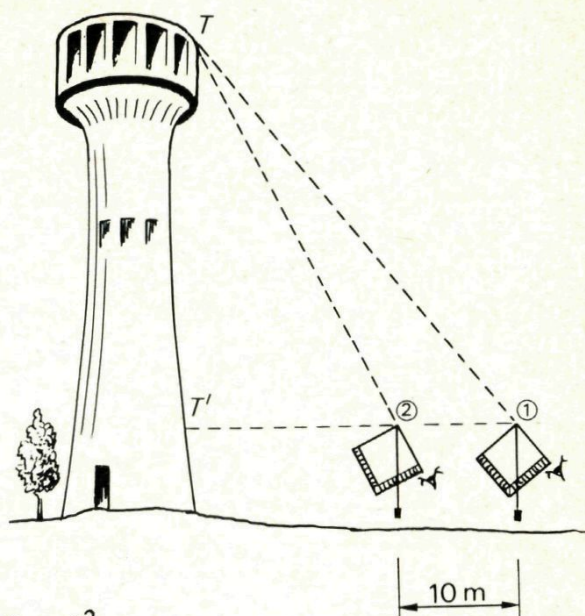
Werken met de b-schaal

Bovenstaande methode gaat alleen goed voor meetplaatsen 'in de buurt' van de toren. Als je er meer dan 40 meter vandaan bent, valt het draadje in het kwadrant niet meer over de a-schaal. Je kunt dan twee dingen doen.

Eén mogelijkheid is om een ander kwadrant te maken: niet vierkant, maar *recht-hoekig* met de a-schaal een heel stuk langer dan de b-schaal.

Toch kun je ook het vierkante ding blijven gebruiken, nu af te lezen op de b-schaal. Stel dat je daar een draadstand vindt op 8 cm, en 10 meter verder van de toren lees je $6\frac{2}{3}$ cm af. Met iets meer rekenen dan in het eerste geval vind je een torenhoogte van

Fig. 2. Voor de bepaling van de hoogte zijn twee metingen nodig, op een afstand van bijv. 10 m van elkaar.



$$\frac{8 \times 6\frac{2}{3}}{8 - 6\frac{2}{3}} = 40 \text{ meter.}$$

°° Waarom werkt het

Met een klein beetje meetkunde-kennis kun je inzien waarom de twee berekeningsmethoden hier het juiste resultaat geven.

Als je geen zin hebt om er zelf wat aan te puzzelen, kun je proberen onze uitleg te volgen, aan de hand van figuur 3. De situatie is dezelfde als in figuur 2, alleen zijn de kwadranten nog een stuk groter getekend. De figuur laat zien dat de driehoek

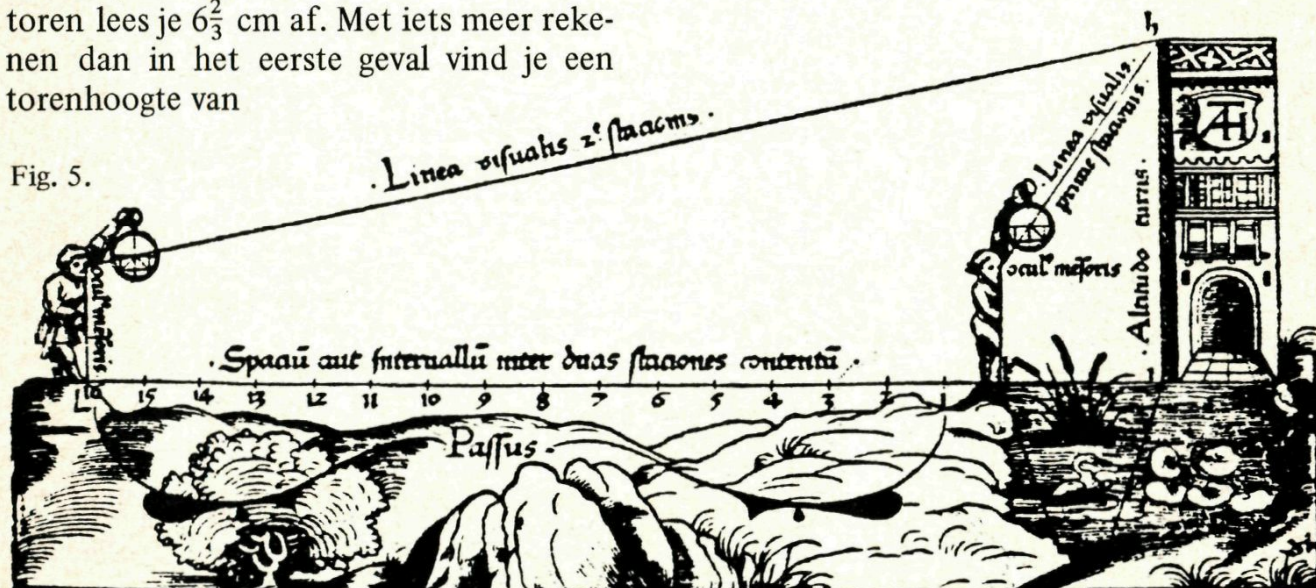


Fig. 5.

ken $O_1A_1P_1$ en $TT'O_1$ gelijkvormig zijn (via een spiegeling); evenzo de driehoeken $O_2A_2P_2$ en $TT'O_2$.

Dit geeft de evenredigheden

$$\frac{T'O_1}{h} = \frac{a_1}{b} \quad \text{en} \quad \frac{T'O_2}{h} = \frac{a_2}{b}.$$

En na aftrekken, met $T'O_1 - T'O_2 = d$

$$\frac{d}{h} = \frac{a_1 - a_2}{b} \quad \text{of} \quad h = \frac{b}{a_1 - a_2} \cdot d \quad (1)$$

Het tweede geval, met aflezing op de b-schaal (b_1 cm), is te verklaren aan de hand van figuur 4. We denken ons eenvoudig het kwadrant zóver vergroot, dat het lood-lijntje toch een aflezing op de (verlengde) a-schaal geeft (a_1 cm). Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken waarin de zijden a_1 en b_1 voorkomen, volgt $a_1 = ab/b_1$. (2)

Op een plaats d meter verder van de toren geeft de b-schaal een aflezing b_2 cm, met evenzo een denkbeeldige waarde op de a-schaal $a_2 = ab/b_2$. (3)

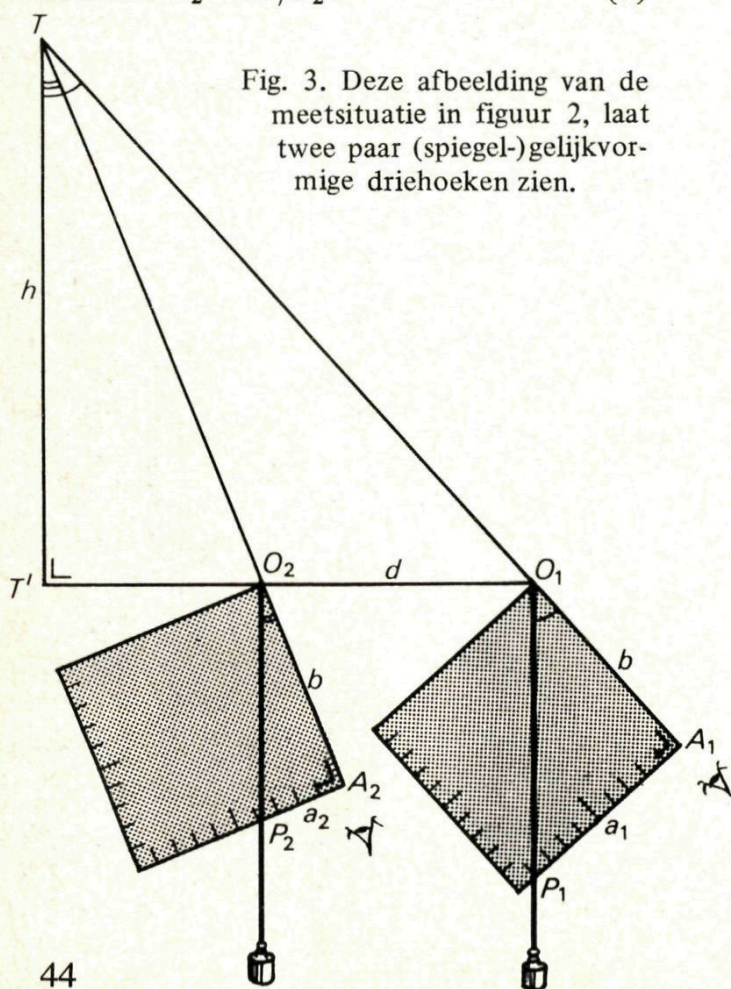


Fig. 3. Deze afbeelding van de meetsituatie in figuur 2, laat twee paar (spiegel-)gelijkvormige driehoeken zien.

Invullen van (2) en (3) in de 'a-schaal-formule' (1) geeft voor de hoogte van de toren

$$h = \frac{b}{\frac{a}{b_1} - \frac{a}{b_2}} \cdot d \quad \text{ofwel} \quad h = \frac{b_1 b_2}{a(b_1 - b_2)} \cdot d \quad (4)$$

Voor het overgangsgeval, met één aflezing op de a-schaal en één op de b-schaal, zul je nu zelf de formule wel kunnen vinden. Figuur 5 geeft een situatie waarin dit zeker van toepassing is.

Ter vermindering van rekenwerk kiezen we in (3) en (4) voor a , b en d mooie waarden: $a = b = 10$ cm, en $d = 10$ m. Bij aflezing van a_1 , a_2 , b_1 en b_2 in centimeters vinden we dan de hoogteformules zoals ze in de voorbeelden gebruikt werden:

$$h = \frac{100}{a_1 - a_2} \text{ meter} \quad \text{en} \quad h = \frac{b_1 b_2}{b_1 - b_2} \text{ meter}.$$

Maak het ding, en probeer het uit! Door achter elkaar een aantal keer de hoogte van dezelfde toren te meten, krijg je een idee van de nauwkeurigheid van deze methode.

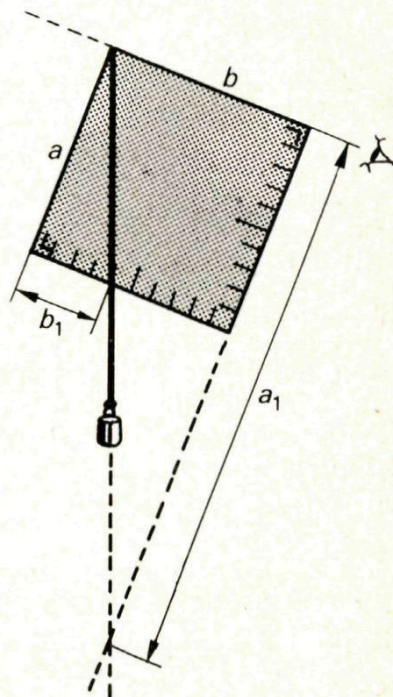


Fig. 4. Uit een aflezing b_1 op de b-schaal is een denkbeeldige aflezing a_1 op de a-schaal te berekenen, omdat geldt: $a_1 : b = a : b_1$.



PO 24. In een vlakke vijfhoek V zijn M_1 tot en met M_5 de middens van de opeenvolgende zijden. Z_i is het zwaartepunt van driehoek $M_i M_{i+1} M_{i+3}$ ($i = 1, \dots, 5$; men stelt $M_6 = M_1$, $M_7 = M_2$ en $M_8 = M_3$). Beschrijf een methode om de hoekpunten van V te bepalen als de vijfhoek $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5$ gegeven is en geef een bewijs dat die methode correct is.

Oplossing van Johan Elzer. 5-vwo Prot. Lyceum, Eindhoven.

P_1 t.e.m. P_5 zijn de opeenvolgende hoekpunten van V , en M_i is het midden van $P_i P_{i-1}$ ($P_0 = P_5$). We kiezen een willekeurige oorsprong, en geven de vectoren naar door hoofdletters aangegeven punten aan met overeenkomstige kleine letters.

Zo is $m_i = \frac{1}{2}(p_i + p_{i-1})$ (1) en $z_i = \frac{1}{3}(m_i + m_{i+1} + m_{i+3})$.

Laat C het punt zijn waarvoor $c = \frac{1}{5}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5)$, dan volgt uit herhaald toepassen van het bovenstaande: $c = \frac{1}{5}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)$. En ook

$p_i - z_i = \frac{1}{6}(4p_i - p_{i+1} - p_{i+2} - p_{i+3} - p_{i+4})$ (met $p_{j+5} = p_j$ voor alle j), en

$z_i - c = \frac{1}{30}(4p_i - p_{i+1} - p_{i+2} - p_{i+3} - p_{i+4})$. Dus $P_i Z_i \parallel Z_i C$ en $P_i Z_i = 5 \cdot Z_i C$.

De *constructie* kan dus als volgt worden uitgevoerd: Kies een oorsprong, bepaal het punt C , en voer een puntvermenigvuldiging uit met C als centrum en factor 6, op de vijfhoek $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5$.

Er waren 21 inzendingen, waarvan 18 correct. Prijswinnaars: *Alexander Deelman*, 5-vwo Chr. Gymnasium Sorghvliet, Den Haag, en *Ralf Peeters*, 5-vwo Elzendaalcollege, Boxmeer.

PO 25. Bewijs dat voor alle drietallen positieve reële getallen (a, b, c) geldt

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Oplossing. De bewijzen van *Rob de Jeu*, 5-vwo OSG Albert Einstein, Hoogvliet, en *Daan Krammer*, 4-vwo SG Bataafse Kamp, Hengelo, waren vrijwel gelijk:

Eerst toonden zij door uitschrijven aan dat $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$,

zodat de te bewijzen ongelijkheid gelijkwaardig is met

$$\frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a} \geq a+b+c. \quad (1)$$

Er geldt $\frac{a^2 + b^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a+b)$ want dit is gelijkwaardig met $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) \iff$

$$\iff \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \iff \frac{1}{2}(a-b)^2 \geq 0.$$

Evenzo voor de twee andere termen in het linkerlid van (1), en optellen geeft het gevraagde resultaat. *Rob de Jeu* merkte nog op dat met dezelfde methode bewezen kan worden dat in het algemeen voor elk n -tal positieve reële getallen $a_1, \dots, a_n$ geldt dat

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}(a_1 + \dots + a_n).$$

Overigens, het werd niet gevraagd, maar we kunnen nog opmerken dat *gelijkheid* slechts op kan treden als alle a_i onderling gelijk zijn. Ook dat volgt uit het bovenstaande bewijs.

Er waren 20 inzendingen, waarvan 16 correct. Prijswinnaars: *William Stassen*, 6-vwo Thomas à Kempis SG, Zwolle, en *Rob de Jeu*.

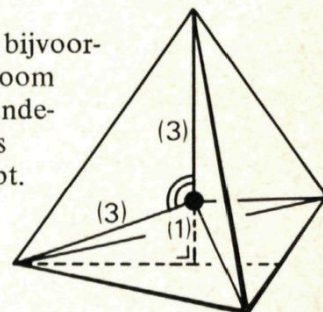
PO 26. Vanuit een punt in de ruimte vertrekken vier stralen zo, dat alle zes hoeken tussen paren stralen onderling gelijk zijn. Bepaal van zo'n hoek de cosinus.

Oplossing. De kern van de meeste bewijzen was er in gelegen het punt met de vier stralen op te sluiten in een regelmatig viervlak of een kubus. Kiest men bijvoorbeeld voor het punt het centrum van een kubus, dan vormen de verbindingslijnen met vier van de acht hoekpunten zo'n regelmatig viertal stralen. Het berekenen van de hoek is dan niet zo moeilijk meer. Deze methode werd o.a. gevolgd door *Marcel Roelofs*, 4-vwo Chr. Lyceum, Almelo en door *Rob van Bommel*, 4-vwo Chr. SG Blaise Pascal, Spijkenisse.

Rob merkte op dat een dergelijke structuur ook in de scheikunde voorkomt, bijvoorbeeld bij de koolwaterstofverbinding methaangas (CH_4), waar een koolstofatoom op regelmatige wijze omringd wordt door vier waterstofatomen. Zijn scheikunde-leraar had hem verteld dat de hoek tussen de verbindingen van C en H precies $109^\circ 28'$ is. Deze opgave gaf hem de gelegenheid na te rekenen of dit wel klopt.

Net als de andere goede oplossers kwam hij op een cosinus van $-\frac{1}{3}$, en dat geeft een hoek die niet *precies*, maar wel *ongeveer* gelijk is aan $109^\circ 28'$.

Klaas Wijbrans, 4-vwo Chr. Lyceum, Almelo, loste de opgave op met een regelmatig viervlak, en gebruikte daarbij de eigenschap dat in elk viervlak de zwaartelijnen elkaar verdelen in een verhouding 1:3 (zie figuur). *William Stassen* berekende de hoek met behulp van de vier vectoren $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$ en $(-1, -1, -1)$, die onderling allemaal gelijke hoeken maken. Tenslotte vermelden we nog *Jeroen Mulder*, 5-vwo RSG Roermond, die (weliswaar op een nogal omslachtige manier) de opgave generaliseerde, en bewees dat in n dimensies de hoek tussen een regelmatig $(n+1)$ -tal vectoren een cosinus heeft van $-\frac{1}{n}$.



Er waren 23 inzendingen, waarvan 22 correct. Prijswinnaars: *Menke Ubbens*, 3-vwo RSG Magister Alvinus, Sneek, en *Marcel Roelofs*.

PO 27. Bewijs dat men uit elk zevental gehele getallen er vier kan kiezen met een som die deelbaar is door 4.

Oplossing van Alexander Deelman.

Van de zeven getallen zijn er minstens 4 even, of minstens 4 oneven. Van deze vier getallen vormt men twee paren. De som van de getallen van elk van die paren is dan even. Van de overige drie getallen zijn er minstens twee even, of minstens twee oneven. De som van zo'n paar is dan altijd even.

We hebben nu dus drie paren met een even som. Elk even getal is een viervoud, of een viervoud-plus-twee. Van de drie paren zijn er nu minstens twee die of beide een viervoud als som hebben, of beide een viervoud-plus-twee als som hebben. In beide gevallen is de som van de vier getallen uit die twee paren een viervoud.

Er waren 21 inzendingen, waarvan 16 correct. Prijswinnaars: *Daan Krammer* en *Jeroen Mulder*.

PO 28. Op zekere dag ontdekte Anita, die in januari jarig is, dat haar leeftijd in maanden geteld op dat moment precies een kwadraat was van een priemgetal. Kun je bepalen in welke maand die dag viel?

Oplossing van Harry Oosterveen, 5-vwo Menso Alting College, Hoogeveen.

Stel de leeftijd van Anita op p^2 maanden (p is een priemgetal). Als $p=2$ of $p=3$ is Anita 4 of 9 maanden oud, en dan zal ze nog wel niet in staat zijn te denken over priemgetallen. Alle grotere priemgetallen zijn oneven, en dus zijn $p+1$ en $p-1$ dan beide even, zodat $(p+1)(p-1)$ een viervoud is.

Verder is p dan niet deelbaar door 3, dus $p+1$ of $p-1$ moet wel door 3 deelbaar zijn. Het produkt $(p+1)(p-1) = p^2 - 1$ is dus een viervoud dat deelbaar is door 3, dus het is deelbaar door twaalf. De leeftijd van Anita is p^2 maanden, dat is dus een aantal maal 12 maanden plus één maand. De dag van Anita's ontdekking valt dus in februari.

Er waren 22 inzendingen, alle correct. Prijswinnaars: *Henk van Evert*, 6-vwo Prot. Lyceum, Eindhoven, en *Auke Reidinga*, 5-vwo RSG, Zwolle.

PO 29. Bepaal alle reële getallen x die voldoen aan de vergelijking
 $(x+1978)(x+1979)(x+1981)(x+1982) = 1978$.

Oplossing van Menke Ubbens.

Stel $y = 1980 + x$, dan wordt de gegeven vergelijking $(y-2)(y-1)(y+1)(y+2) = 1978 \iff$
 $\iff (y^2-4)(y^2-1) = 1978 \iff y^4 - 5y^2 - 1974 = 0 \iff y^2 = 47 \vee y^2 = -42$. Omdat het kwadraat van een reëel getal nooit negatief is, is de oplossing slechts $y = \pm \sqrt{47}$, dwz. $x = -1980 \pm \sqrt{47}$.

Er waren 32 inzendingen, waarvan 30 correct. Prijswinnaars: *Harold van Oostrom*, 4-vwo Chr. SG Joh. Calvijn, Barendrecht, en *Harry Oosterveen*.

PO 30. Een verdeling van een rechthoek R in deelrechthoeken $r_1, \dots, r_n$ heet *primitief* als er geen rechthoekig deel van R is (behalve R zelf) dat is opgebouwd uit twee of meer rechthoeken r_i . Bewijs dat er geen primitieve verdeling is die bestaat uit *precies zes* deelrechthoeken.

Oplossing van Menke Ubbens.

Een zijde van R kan door 1, 2, 3, 4, 5 of 6 deelrechthoeken bedekt worden. Zo'n zijde noemen we dan een 1-zijde, een 2-zijde, ... of een 6-zijde. Een 1-zijde komt niet voor omdat de overige 5 deelrechthoeken dan een rechthoek vormen. Er zijn altijd minstens twee 2-zijden (om de vier hoeken van R in te vullen, zijn al vier rechthoeken nodig, en met de overige 2 kunnen nog hoogstens twee zijden worden aangevuld tot 3-zijde of 4-zijde).

Stel eerst dat er precies twee 2-zijden zijn.

Als ze *aan elkaar grenzen* en een hoekpunt C van R gemeen hebben, bekijken we eerst de deelrechthoek r_1 die in de tegenoverliggende hoek A ligt (zie fig. 1). Omdat AB en AD beide 3-zijde zijn, liggen er aan beide kanten van r_1 deelrechthoeken die geen hoek van R raken. Ze kunnen niet allebei buiten r_1 uitsteken, dus minstens één ervan, zeg r_2 , is kleiner dan r_1 . De in fig. 1 aangegeven inspringende hoek bij r_1 en r_2 kan dan alleen maar opgevuld worden door de deelrechthoek r_3 die C bedekt, en dan kan de verdeling nooit meer primitief worden.

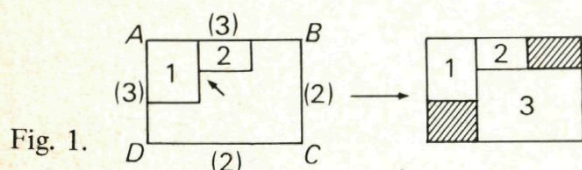


Fig. 1.

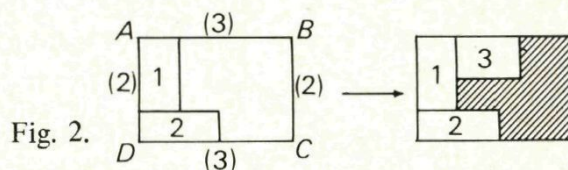


Fig. 2.

Als de twee 2-zijden *tegenover elkaar liggen*, zoals AD en BC , tekenen we eerst r_1 en r_2 die AD bedekken (fig. 2). De deelrechthoek r_3 die grenst aan de kleinste, zeg r_1 , moet tussen r_3 , r_1 en r_2 een 'inham' overlaten, die echter niet meer bedekt kan worden, want BC is een 2-zijde, en DC een 3-zijde.

Aan figuur 3 is te zien dat er bij drie of meer 2-zijden, ook geen primitieve verdeling mogelijk is.

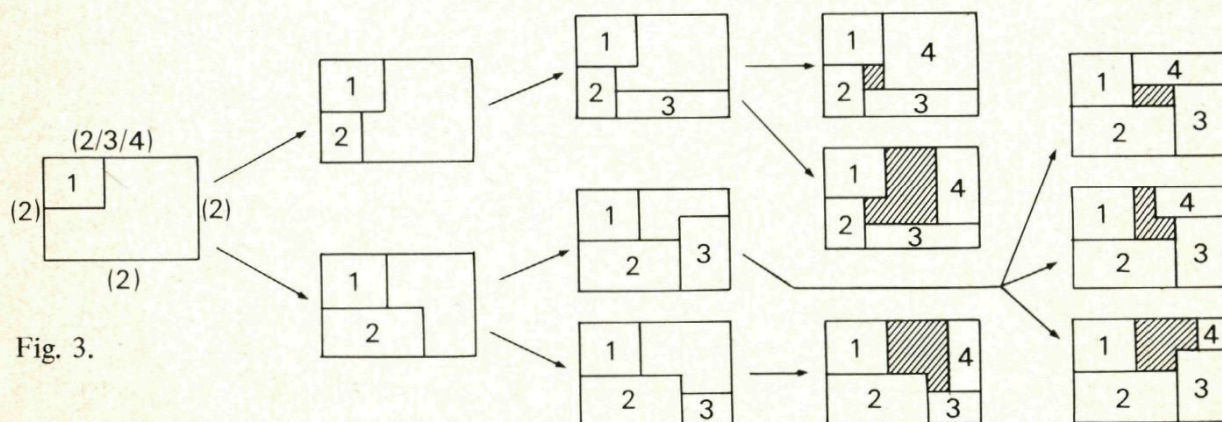


Fig. 3.

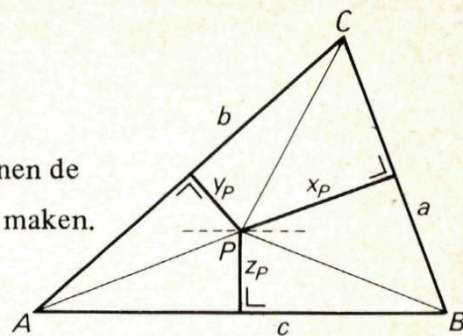
Er waren bij deze lastige opgave 13 inzendingen, waarvan 5 correct. Prijswinnaars: *Alexander Deelman* en *Menke Ubbens*. De overige correcte oplossingen waren van: *Hennie Groot Lipman*, 5-vwo Florens Radewijns College, Raalte, *Eric Postma*, 5-vwo Baudartiuscollege, Zutphen, en *Jeroen Mulder*.

Antwoorden en oplossingen

bij: Internationale Wiskunde Olympiade

Opgave 1 Met letters als in de figuur gaat het om punten P binnen de driehoek die de functie $F(P) = \frac{a}{x_P} + \frac{b}{y_P} + \frac{c}{z_P}$ zo klein mogelijk maken.

Een belangrijke opmerking is dat $\frac{1}{2} a x_P + \frac{1}{2} b y_P + \frac{1}{2} c z_P = \Delta BCP + \Delta CAP + \Delta ABP = \Delta ABC$. Dus de som $a x_P + b y_P + c z_P$ is voor elke P binnen de driehoek even groot (1).



Als P naar de rand van driehoek ABC loopt, bijv. naar zijde a , zal x_P zeer klein worden, en dus $F(P)$ zeer groot. Er is dus minstens één punt P waarvoor F minimaal is, en bij de rand van de driehoek hoeven we er niet naar te zoeken. Neem aan dat M zo'n punt is.

Wegens (1) geldt voor elke P : $a x_P + b y_P + c z_P = a x_M + b y_M + c z_M$. Beperken we ons tot punten P op de lijn $\parallel AB$ door M , dan geldt nog: $z_P = z_M$. Voor deze punten is de functie F te schrijven als

$$F(x_P) = \frac{a}{x_P} + \frac{b^2}{a x_M + b y_M - a x_P} + \frac{c}{z_M} \quad (2)$$

F is minimaal in M , dus de afgeleide naar x_P moet nul zijn voor $x_P = x_M$. Na differentiëren van (2) blijkt deze voorwaarde te herleiden tot: $x_M = y_M$.

Evenzo is voor M ook aan te tonen: $y_M = z_M$. Binnen driehoek ABC is er echter maar één punt P met $x_P = y_P = z_P$, het snijpunt van de drie binnenbissectrices dat tevens het middelpunt is van de ingeschreven cirkel. Dat is dus het gevraagde punt.

Opgave 3 $n^2 - mn - m^2 = n^2 - m(n-m) = \pm 1$, dus $n^2 = m(n-m) \pm 1$. Als $n < m$ is het rechterlid ≤ 0 in tegenspraak met $n \geq 1$, dus $n \geq m$. Het gelijktteken kan slechts optreden als $n^2 = 1$, dus dan is $n = m = 1$. Alle eventuele andere paren positieve gehele getallen (m, n) waarvoor $(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$ geldt, voldoen dus aan $n > m$.

Vullen we $m=1$ in, dan krijgen we ook nog de oplossing $(m, n) = (1, 2)$; $m=2$ geeft $(2, 3)$, $m=3$ geeft $(3, 5)$; $m=4$ geeft geen gehele oplossingen, $m=5$ wel: $(5, 8)$, en zo zouden we in principe stap voor stap alle mogelijkheden af kunnen zoeken. Maar het moet natuurlijk slimmer kunnen (de deelnemers aan de I.W.O. mochten geen rekenmachine gebruiken!).

Bekijk eens de oplossingen die we tot nog toe hebben: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 8)$. Hierin zien we de bekende rij van Fibonacci $1, 2, 3, 5, 8, \dots$ waarin elke term de som is van de voorafgaande twee. Die rij gaat verder als volgt: $13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \dots$

Het grootste paar $(987, 1597)$ met termen kleiner dan 1981 voldoet ook aan de vergelijking, zoals we door invullen onmiddellijk kunnen constateren. Zou dat ook de maximale waarde van $m^2 + n^2$ geven? Als we kunnen bewijzen dat er buiten de rij van Fibonacci geen gehele oplossingen voorkomen, is dat zo. Laten we daarom eens aannemen dat we een willekeurige oplossing (n_2, n_1) hebben van de vergelijking $(n_1^2 - n_2 n_1 - n_2^2)^2 = 1$ met $1 < n_2 < n_1 \leq 1981$ en n_1 en n_2 geheel. Stel $n_3 = n_1 - n_2$, dan is ook (n_3, n_2) een oplossing, want

$$(n_2^2 - n_3 n_2 - n_3^2)^2 = (n_2^2 - (n_1 - n_2) n_2 - (n_1 - n_2)^2)^2 = (-n_1^2 + n_2 n_1 + n_2^2)^2 = 1.$$

En omdat (n_3, n_2) een oplossing is, moet weer $n_3 \leq n_2$ zijn. Als $n_3 < n_2$ is ook (n_4, n_3) een oplossing met $n_4 = n_2 - n_3$. Zo doorgaande vinden we een rij $n_1 > n_2 > n_3 > n_4 > \dots$ met $n_{i+1} = n_{i-1} - n_i$ waarvoor steeds (n_{i+1}, n_i) een oplossing is. Na een eindig aantal stappen moet die rij eindigen want alle termen zijn positieve gehele getallen. Als de rij eindigt, moet $n_{i+1} = n_i$ zijn, maar de enige oplossing met gelijke termen is $(1, 1)$. Terugredenerend zien we dus dat de rij $n_1 > n_2 > n_3 > \dots$ inderdaad een stuk van de rij van Fibonacci moet zijn. Het oorspronkelijke paar (n_2, n_1) staat dus in die rij, en de maximale waarde van $m^2 + n^2$ is daarom gelijk aan $987^2 + 1597^2 = 3524578$.

bij: Een wat ongewone vergelijking

De oplossingsverzameling bestaat uit vijf half-gesloten intervallen:

$$[0, \sqrt[3]{2}) \cup [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}) \cup [\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{9}) \cup [\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{12}) \cup [\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{15}).$$

bij: Waar is Zoef?

Na wat pogingen om het antwoord op deze vraag te vinden (mogelijk met behulp van het soort grafiek dat hier ook in fig. 1 staat getekend) merk je dat de opgave niet zo onschuldig is als hij er uit ziet. Het heen en weer draven van Zoef blijkt namelijk onvoldoende te zijn bepaald. Dit is op verschillende manieren in te zien:

- Als je er van uit gaat dat ze alle drie exact gelijk vertrekken, kun je stellen dat Zoef onmiddellijk voorop ligt, en een vol uur lang rechtdoor draaft zonder nog een keer Arie of Vera te bereiken. Of je kunt stellen dat Zoef op het tijdstip $t = 0$ zowel bij Arie als bij Vera is, en dat de gegevens uit de opgave niet aangeven wat Zoef in die situatie doet.
- Achteruit redenerend kan van elk punt Z op lijnstuk AV in fig. 1 een baan van Zoef terug-geconstrueerd worden; al die banen komen steeds in 0 uit.
- Tenslotte kun je nog nagaan wat het resultaat is als Zoef even (Δt) eerder of later vertrekt. Wat vind je in de limiet als dit tijdsverschil naar nul gaat?

Antwoord: NIETS, want deze limiet bestaat niet! De eindpuntfunctie blijkt namelijk discontinu in $\Delta t = 0$. Zonder helemaal precies uit te rekenen waar Zoef na een uur is, afhankelijk van het startverschil Δt , kun je aan de hand van figuur 1 wel nagaan dat de grafiek van de eindpuntfunctie zo iets wordt als aangegeven door figuur 2. Uit deze laatste grafiek valt niets te concluderen over de positie van Zoef na één uur, in het geval $\Delta t = 0$.

(Ontleend aan: FUNCTION, a school mathematics magazine; Australië)

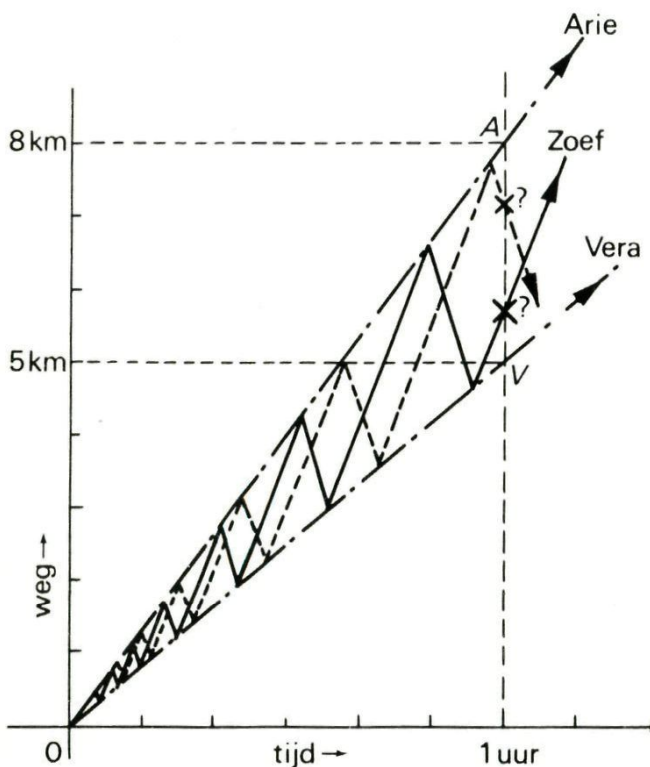


Fig. 1.

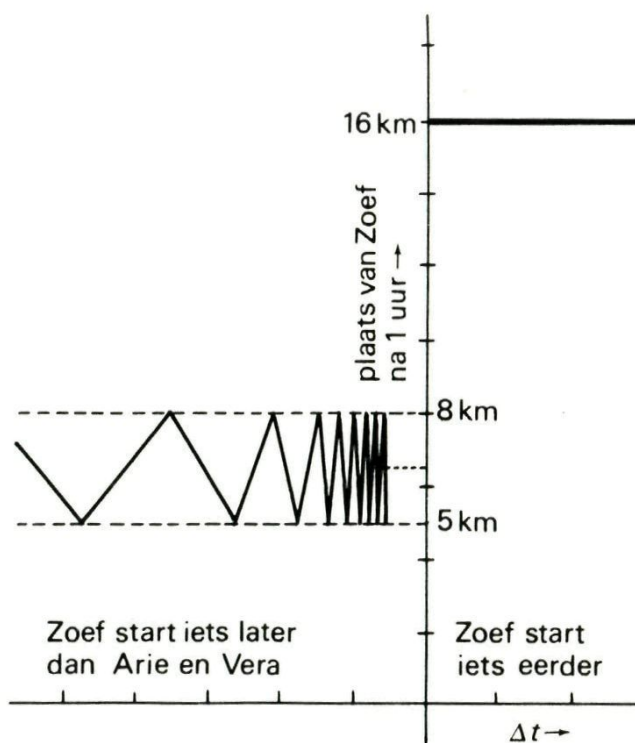


Fig. 2.

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

- ∫ Dr. J. van de Craats, R.U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
★ Bruno Ernst, Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht.
< W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn.
⚡ Ir. H.M. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginneken.

Secretariaat

- △ Drs. H.N. Pot, Tournoyveld 67, 3443 ER Woerden.
Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

W. Ganzevoort, M.C. van Hoorn, W. Pijls, G.A. Vonk, D.K. Wielenga.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 9,20 per jaargang.
Voor anderen f 13,50
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.
Voor België bij J.B. Wolters - Leuven, Blijde Inkomststraat 50, Leuven;
postchecknummer 000-000 8081-30
Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.
Abonnees wordt dringend verzocht met betalen te wachten tot hun een acceptgirokaart wordt gezonden.
Het geheel of gedeeltelijk overnemen van de inhoud zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de redactie is niet toegestaan.

Inhoud

- | | |
|--|---|
| ★ De hoogte van torens en bomen 25 | ★ Hoogten meten met een geometrisch kwadrant 42 |
| Pythagoras Olympiade PO 34-36 29 | △ Kettingwortelrijen 38, 49 |
| De XXII-e Internationale Wiskunde Olympiade 30, 48 | Even tegen oneven 35 |
| △ Keien, takken en looptorren 36 | Een wat ongewone vergelijking 41 |
| △ Passende schijven 37 | △ Waar is Zoef? 40, 49 |
| ⚡ De waterstraalkromme 32 | Oplossingen PO 24-30 45 |