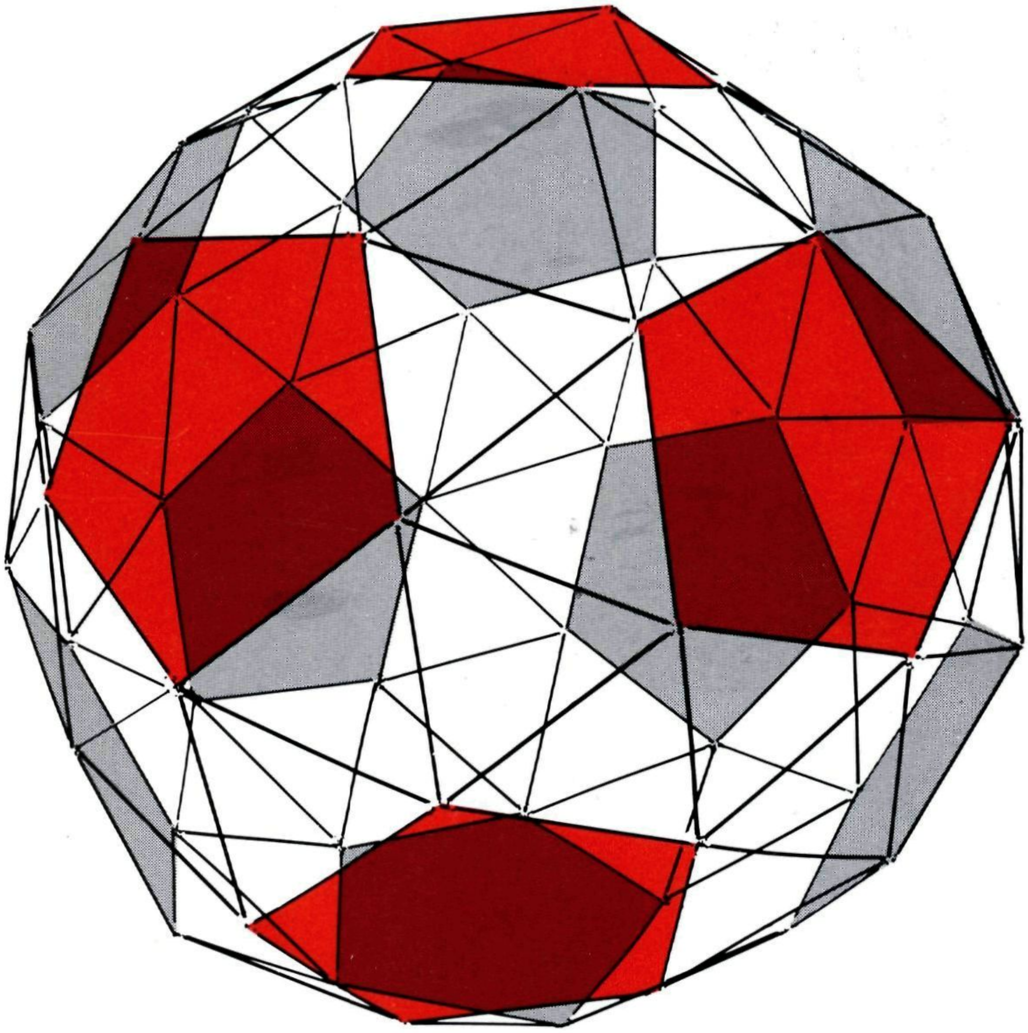


4
jaargang 21 / februari 1982

wiskundetijdschrift
voor jongeren

wolters-noordhoff

verschijnt 5 × per schooljaar

Pythagoras

Wat is er aan de hand als je deze fietsband *twee*-dubbel legt, in plaats van *drie*dubbel zoals hier? (Zie blz. 84).

BIJ DE VOORPLAAT

De foto toont een uit sateh-stokjes opgebouwd model van een 'kranstwaalfvlak', één van de vele zg. half-regelmatige veelvlakken. Zie het artikel hiernaast.

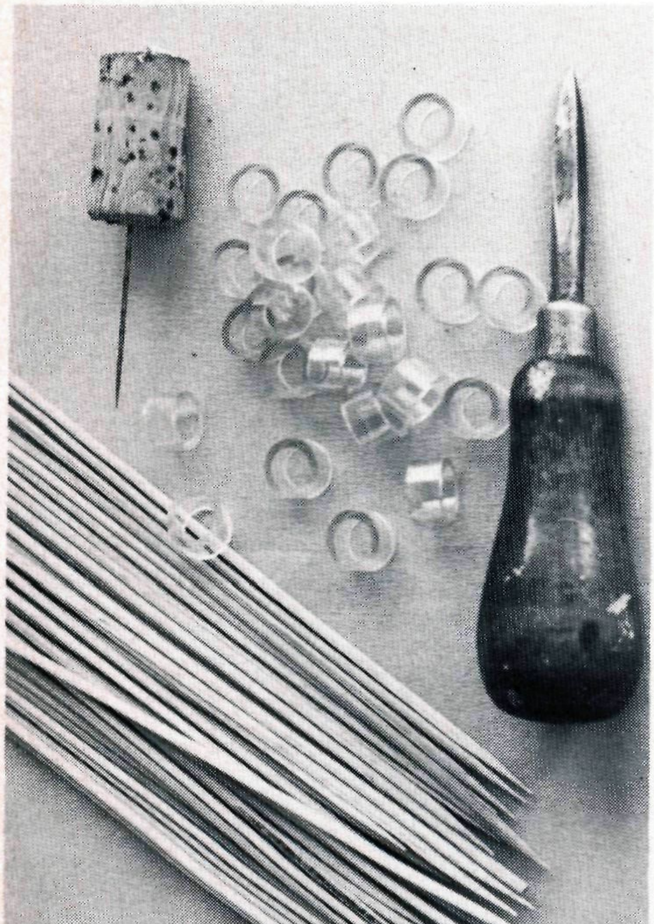
Je ziet een groot aantal gelijkzijdige driehoeken en regelmatige vijfhoeken. Je kunt opmerken dat de foto van dichtbij genomen is: van de regelmatig over de 'bol' verdeelde vijfhoeken is namelijk mínder dan de helft aan de vóórzijde te zien.

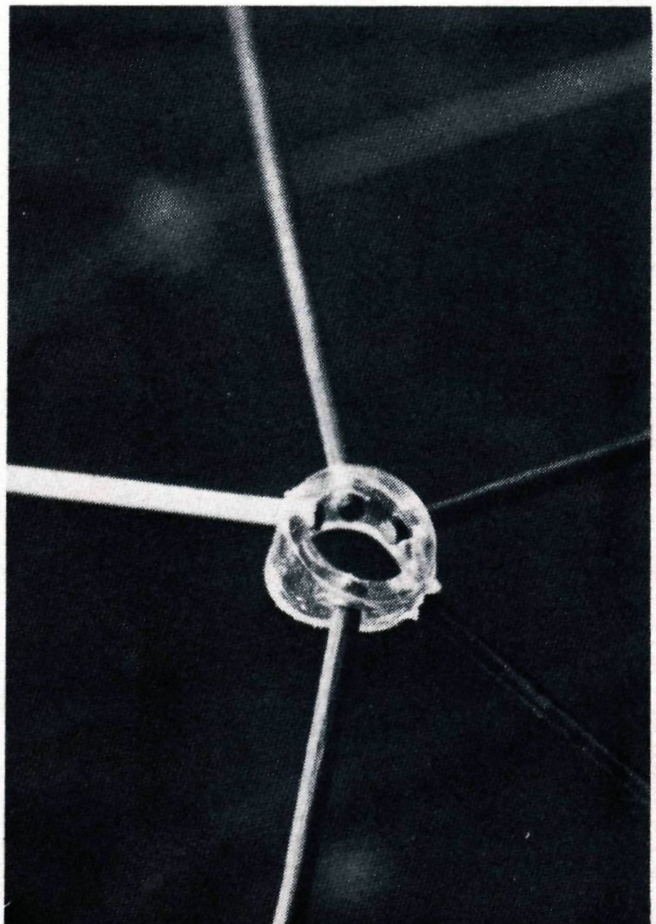
°Kranskubus en kranstwaalfvlak

Originele en mooie kamerversieringen kun je zelf gemakkelijk maken met sateh-stokjes, een schaar, een dunne plastic slang, een naald op een kurk en een priem. Met de schaar knip je smalle ringetjes van de slang af, met de naald prik je er gaatjes in en met de priem maak je ze wat groter. Trek bij dat karwei wel handschoenen aan, want anders krijg je pijn in je vingers! (Je kunt het ook met een in een gasvlam heet gemaakte spijker proberen).

Wat kun je maken? Alles wat je maar wilt. Wiskundigen denken natuurlijk allereerst aan *regelmatige figuren*: het viervlak, de kubus, het achtvlak, het twaalfvlak en het twintigvlak. Maar eigenlijk zijn *halfregelmatige* veelvlakken leuker: de symmetrieën zijn dan iets meer verborgen en dat maakt ze boeiender.

Bij de twee modellen die we gefotografeerd hebben, zijn alle ribben even lang, en ook alle plaatsen waar ribben samenkomen zien er hetzelfde uit. Maar niet alle zijvlakken zijn gelijk. In de zg. *kranskubus* (figuur 1a) is elk hoekpunt omringd door vier gelijkzijdige driehoeken en één vierkant. En bij het *kranstwaalfvlak* (de voorplaat) komen in elk hoekpunt vier driehoeken en één vijfhoek bij elkaar.





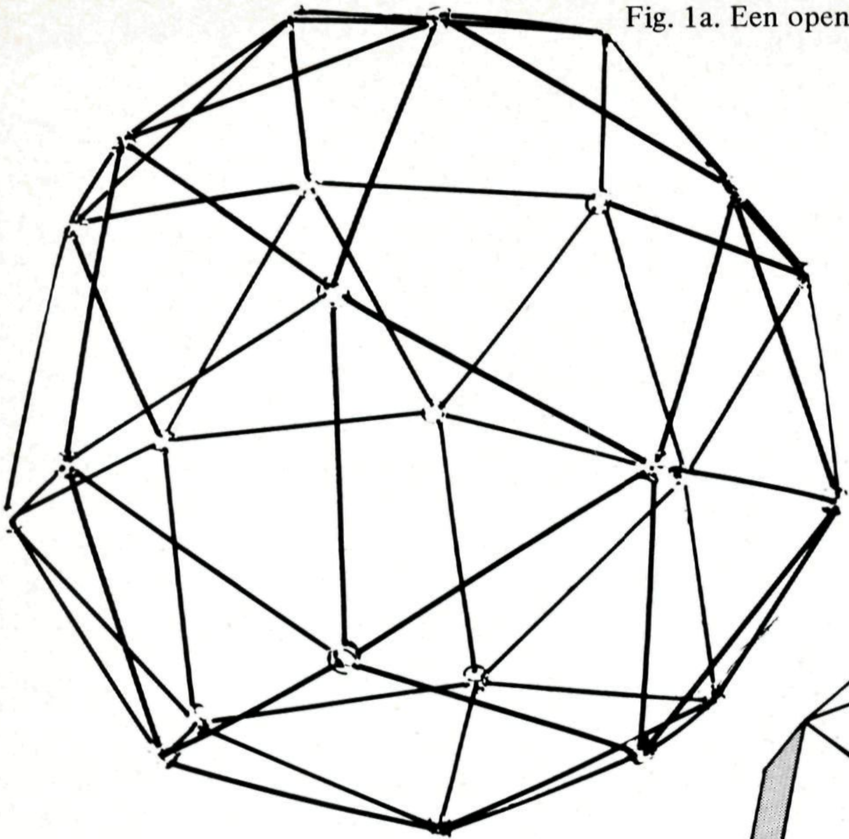
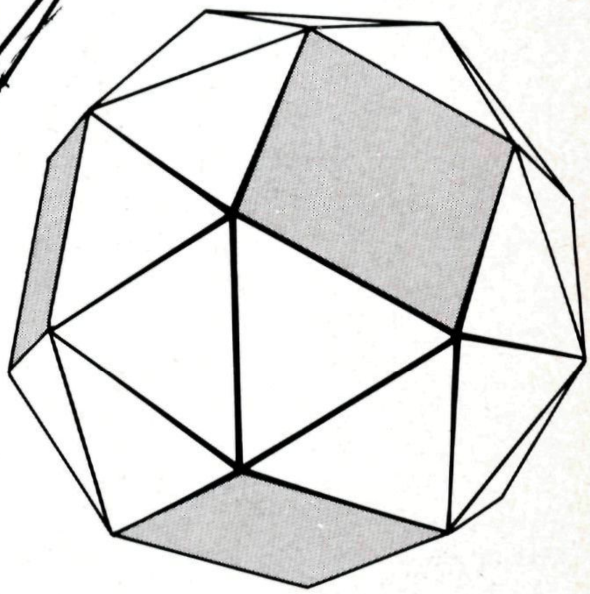


Fig. 1a. Een open model van de kranskubus.

Fig. 1b. Een massieve kranskubus.



De kranskubus

Waarom noemen we ze *kranskubus* en *kranstwaalfvlak*? Een kubus telt zes vierkanten als zijvlakken. De kranskubus heeft óók zes vierkanten, maar elk daarvan is omringd door een krans van gelijkzijdige driehoeken. De foto die we ervan maakten is wel mooi, maar je ziet beter hoe een kranskubus in elkaar zit als we hem als *massief* veelvlak afbeelden. Dat laatste zie je in figuur 1b.

Als je de kranskubus met een gewone kubus vergelijkt, zie je dat de vierkanten een beetje gedraaid zijn. Dat heeft tot gevolg dat de kranskubus geen *spiegelsymmetrie* bezit. Het ding heeft geen symmetrievlakken.

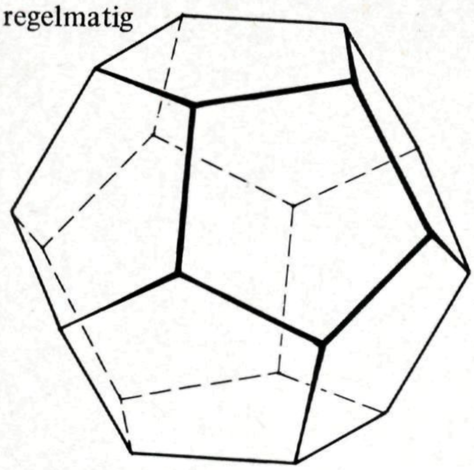
Maar er is wel draaisymmetrie. Als je hem draait over een kwartslag, om een as door de middelpunten van twee tegenover elkaar liggende vierkanten, dan zie je dat hij na afloop precies dezelfde ruimte inneemt als ervoor. Zo'n as is dus een draaias van *viervoudige draaisymmetrie.* Er zijn ook assen van *drie*voudige draaisymmetrie (4 stuks), en niet minder dan 6 assen van *twee*voudige draaisymmetrie.

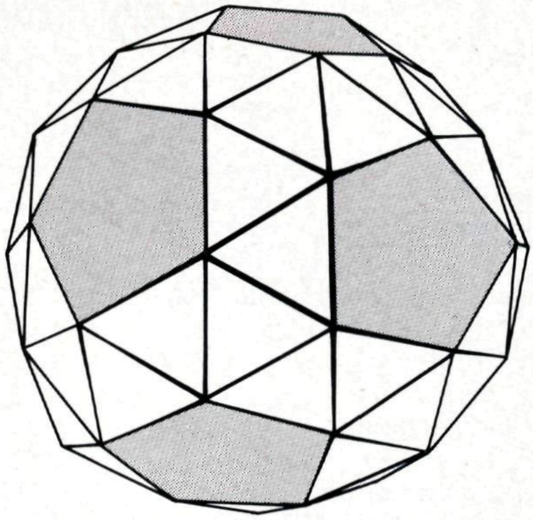
Als je een model met stokjes en ringetjes gemaakt hebt, zul je die assen wel kunnen vinden.

Het kranstwaalfvlak

Een gewoon regelmatig twaalfvlak telt twaalf regelmatige vijfhoeken als zijvlakken. Bij het kranstwaalfvlak zijn er ook twaalf vijfhoeken, maar elk ervan is weer door een krans van driehoeken omgeven (fig. 2 en 3). Ook nu is er alleen maar draaisymmetrie. Er zijn *vijf*voudige, *drie*voudige en *twee*voudige draaiassen. Dit model is een prachtige kamerversiering,

Fig. 2. Een regelmatig twaalfvlak.





maar het maken ervan is wel een heel karwei: trek er maar rustig een paar uurtjes voor uit! En kun je vantevoren berekenen hoeveel stokjes en ringetjes je nodig hebt?

Fig. 3. Een massief kranstwaalfvlak.

Nog meer telwerk

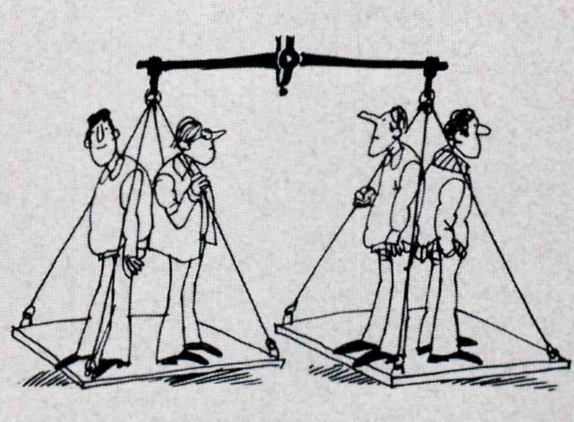
Als je toch aan het tellen bent: hoeveel gelijkzijdige driehoeken zijn er in de kranskubus en in het kranstwaalfvlak? Controleer ook gelijk de geldigheid van de *formule van Euler* voor veelvlakken:

aantal hoekpunten + aantal zijvlakken =
= aantal ribben + 2.

Het is echter misschien beter deze kwesties even te laten rusten totdat je de modellen ook echt gemaakt hebt. Daarom eerst aan het werk. En als je klaar bent zul je ook nog zien dat kranskubus en kranstwaalfvlak beide in *twee soorten* voorkomen: een 'rechter-' en een 'linkervariant'. Houd je er één voor de spiegel, dan zie je in de spiegel de ander!

Voor vier getallen geldt

°I Aad, Ben, Cor en Dik speelden wat op de grote weegschaal van een oude heksenwaag.
Aad en Ben samen gaven juist evenwicht tegen Cor en Dik samen. Aad en Cor wogen samen méér dan Ben en Dik. En Cor bleek lichter dan Dik.
Zet deze knapen in volgorde van gewicht. (uit: Mathematical Pie, Engeland).



°°°II Voor vier reële getallen a, b, c en d geldt: $ab = 1$ (1) en $ac + bd = 2$ (2).
Bewijs: $cd \leqslant 1$. (uit: Középiskolai Matematikai Lapok, Hongarije).

Nederlandse Wiskunde Olympiade

Oplossingen bij de opgaven van de Tweede Ronde van de 20e N.W.O. (1981)

1. Op $\mathbb{R}$ is de functie f gedefinieerd door $f:\ x \to [x] + [2x] + [3x] + [4x] + [5x] + [6x]$. Hierin is $[x]$ het grootste gehele getal dat kleiner dan of gelijk aan x is. Welke waarden kan $f(x)$ aannemen?

Oplossing. Aangezien voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x+1) = [x+1] + [2(x+1)] + \ldots = [x]+1 + [2x]+2 + \ldots = f(x) + 21$, is het voldoende het gedrag te onderzoeken van f op een interval van lengte 1, bijvoorbeeld het interval $[0, 1]$. De 'sprongpunten' van f bevinden zich dan op
$0,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3} = \frac{2}{6},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{3} = \frac{4}{6},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6}$ en 1, met functiewaarden:
$f(0) = 0$, $f(\frac{1}{6}) = 1$, $f(\frac{1}{5}) = 2$, $f(\frac{1}{4}) = 3$, $f(\frac{1}{3}) = 5$, $f(\frac{2}{5}) = 6$, $f(\frac{1}{2}) = 9$, $f(\frac{3}{5}) = 10$, $f(\frac{2}{3}) = 12$, $f(\frac{3}{4}) = 13$, $f(\frac{4}{5}) = 14$, $f(\frac{5}{6}) = 15$ en $f(1) = 21$.
De waarden die $f(x)$ kan aannemen zijn dus alle getallen van de vorm $21k + r$, met k geheel en $r \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 14, 15\}$.

2. Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met centrum M. Op de zijden CA en CB kiest men punten D, resp. E zo, dat $CD = CE$. Het punt F ligt zodanig dat $DMBF$ een parallellogram is. Bewijs dat driehoek MEF gelijkzijdig is.

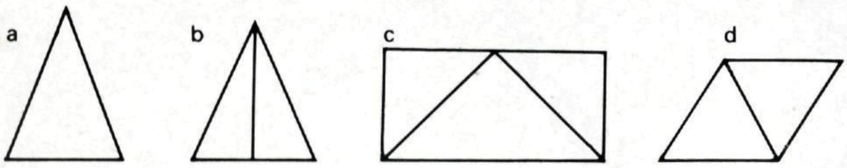
Oplossing. Een translatie langs de vector $\overrightarrow{MB}$ voert M over in B, AC in een lijnstuk $A'C'$ en D in F op $A'C'$. Aangezien $CC' = MB = MC$ en $\angle CMB = 120°$, dus $\angle C'CM = 60°$, is driehoek $C'CM$ gelijkzijdig.
Een rotatie met centrum M over $60°$ voert MC daarom over in MC'. De lijn CE wordt daarbij ook over $60°$ gewenteld, en gaat dus over in een lijn door C' evenwijdig aan AC, d.w.z. in $A'C'$. Omdat $\overrightarrow{C'F} = \overrightarrow{CD}$ en $CD = CE$ gaat E bij deze rotatie over in F. Dat betekent dat driehoek MEF gelijkzijdig is.

3. Men wil de verzameling van de natuurlijke getallen van 1 t.e.m. $3n$ splitsen in n onderling disjuncte verzamelingen $\{x, y, z\}$ van drie elementen zo, dat telkens geldt $x + y = 3z$. Is dat mogelijk voor $n = 5$? En voor $n = 10$? Geef in beide gevallen hetzij zo'n splitsing, hetzij een bewijs dat zo'n splitsing onmogelijk is.

Oplossing. Noem de verzamelingen $\{x_i, y_i, z_i\}$, dan geldt dus $x_i + y_i = 3z_i$. Opgeteld voor alle drietallen geeft dit $\Sigma\, x_i + \Sigma\, y_i = 3\, \Sigma\, z_i$ ofwel $\Sigma\, x_i + \Sigma\, y_i + \Sigma\, z_i = 4\, \Sigma\, z_i$. De som van alle getallen van 1 t.e.m. $3n$ moet dus een *viervoud* zijn. Maar voor $n = 10$ is die som gelijk aan 465, dus dan bestaat zo'n splitsing niet.
Voor $n = 5$ is de som gelijk aan 120, en na enig proberen vindt men voor de drietallen (x, y, z):
(1, 14, 5), (2, 10, 4), (3, 15, 6), (9, 12, 7) en (11, 13, 8), ofwel
(1, 8, 3), (2, 13, 5), (4, 14, 6), (10, 11, 7) en (12, 15, 9).
Opmerking: De genoemde som blijkt een viervoud voor $n = 5, 8, 13, 16, 21, 24, \ldots$. Lukt de opsplitsing in dit soort drietallen dan ook altijd? We weten het niet!

4. Men houdt een draadfiguur op verschillende manieren in een bundel evenwijdige lichtstralen, waardoor er in een vlak loodrecht op de lichtstralen verschillende schaduwfiguren ontstaan. Op deze wijze kan men vormen:
a. een gelijkbenige driehoek, b. een gelijkbenige driehoek met de hoogtelijn uit de top,

c. een rechthoek met daarin een gelijkbenige driehoek, d. een ruit met één diagonaal. (De tekeningen hieronder illustreren de schaduwfiguren, maar ze zijn niet in hun juiste verhoudingen getekend!). De draadfiguur bestaat uit acht rechte stukjes ijzerdraad, waarbij ieder stukje aan beide uiteinden aan tenminste één ander stukje vast zit. Bepaal een figuur die aan bovenstaande beschrijving voldoet, en geef de richting van de lichtstralen aan waarbij de schaduwfiguren a t.e.m. d ontstaan.



Oplossing. De gevraagde draadfiguur is bijvoorbeeld een regelmatige vierzijdige piramide. De richtingen van de lichtstralen zijn (a) langs een zijde van het grondvlak, (b) langs een diagonaal van het grondvlak, (c) langs een lijn van de top naar het midden van een zijde van het grondvlak, en (d) langs een opstaande ribbe.

Pythagoras Olympiade

Nieuwe opgaven (oplossingen inzenden vóór 7 juni 1982).

PO 40. Bij elk natuurlijk getal n hoort één cijfer, zeg $k\,(n)$, dat als kleinste cijfer voorkomt (soms meervoudig) in de gewone tientallige schrijfwijze van n. Bepaal $k\,(1\,000\,000\,000) + k\,(1\,000\,000\,001) + \ldots$

$$\ldots + k\,(9\,999\,999\,998) + k\,(9\,999\,999\,999).$$

PO 41. In het vlak is gegeven een cirkel c met middelpunt $(\sqrt{1981}, \sqrt{1982})$. Bewijs dat op c ten hoogste één punt (x, y) kan liggen waarvoor x en y gehele getallen zijn.

PO 42. Op hoeveel manieren kun je één witte en één zwarte schijf op een (leeg) dambord plaatsen zó, dat wit de zwarte schijf kan slaan? Een op de laatste lijn geplaatste witte schijf wordt beschouwd als dam.

Wedstrijdvoorwaarden en prijzen

* Leerlingen van het voortgezet/secundair onderwijs kunnen hun oplossingen van een of meer opgaven insturen aan: *Pythagoras Olympiade, Brederode 29, 2261 HG Leidschendam (NL)*. Let op de inzendtermijn en zorg voor voldoende frankering.
* Vermeld op elk (éénzijdig beschreven) vel: naam, adres, geboortedatum, school, schooltype en klas. Elke oplossing moet op een nieuw vel beginnen.
* Oplossingen dienen gemotiveerd en volledig uitgewerkt te zijn, met verklarende tekst in goed lopende zinnen. Slechts goed leesbare inzendingen worden bekeken.
* Wie een aan zichzelf geadresseerde en als brief gefrankeerde open enveloppe meezendt, ontvangt na de inzendtermijn onze oplossingen.
* Per opgave worden onder de goede oplossers twee prijzen t.w.v. *f* 10/Bfr 150 verloot.
* De opgaven van één jaargang vormen samen de *ladderwedstrijd.* De drie inzenders van de meeste goede oplossingen krijgen elk een prijs t.w.v. *f* 25/Bfr 400.
* De beste tien van de ladderwedstrijd die niet in een examenklas zitten, krijgen een uitnodiging voor de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Zij hoeven zich dus niet via de eerste ronde te klasseren.

°°°Helemaal geheel

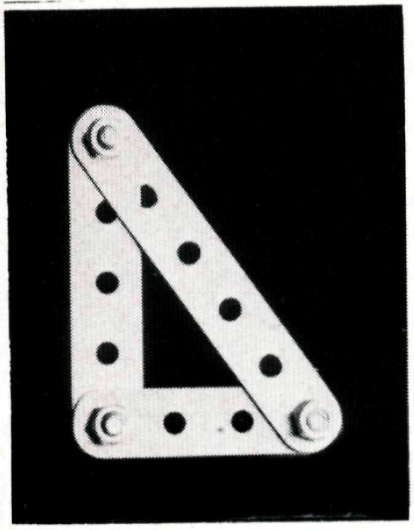


Fig. 1. Als je de gaatjes op de goede manier telt, blijkt dit de bekende rechthoekige 3-4-5-driehoek.

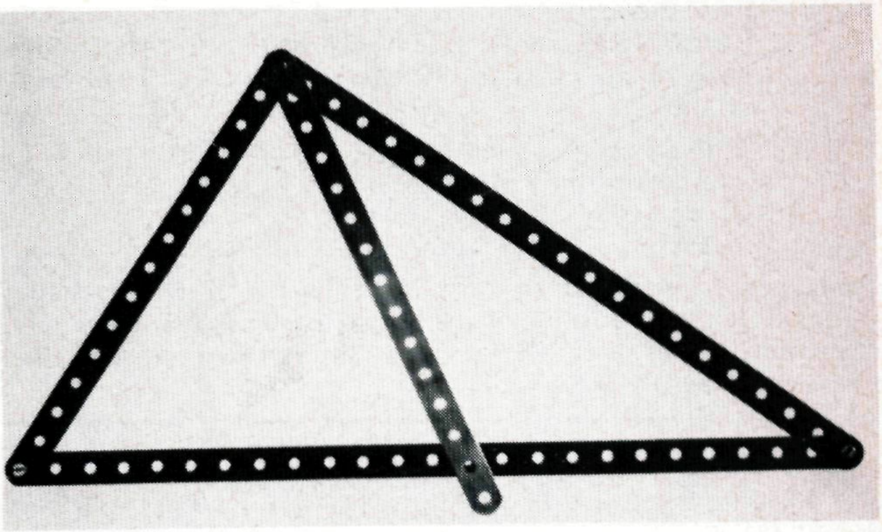


Fig. 2. Is er een stand waarin een gaatje uit de middelste strip precies samenvalt met een gaatje uit de onderste?

Bekend zijn de rechthoekige driehoeken met geheeltallige zijden, de 'Pythagoreïsche driehoeken', zoals 3-4-5, 5-12-13, etc.
Maar ook bij andere figuren kun je zoeken naar gevallen die uit meccano-strips zijn op te bouwen: figuren waarbij alle lijnstukken tussen twee snijpunten geheeltallige lengten hebben.
Enkele zeer uitzonderlijke resultaten worden getoond in de figuren 3, 4 en 5.

Zelf puzzelen
Om nog wat te puzzelen over te laten, ontbreken in figuur 3 nog een drietal maten. Probeer maar of je zelf met je rekendoosje ook voor deze lijnstukken exacte uitkomsten kunt vinden. Als je geen fouten maakt blijken dit ook gehele getallen te zijn.
Wel zal de berekening wat handig moeten worden ingericht om binnen de capaciteit van je doosje te blijven (door te kijken of er vooraf vereenvoudigingen mogelijk zijn in de formules, en of er tijdens de berekening gemeenschappelijke factoren zijn weg te strepen of apart te zetten).
In noot 1, onderaan dit stukje, staat nog een aanwijzing hoe je de uitkomsten met behulp van een aantal keer de cosinusregel kunt vinden. Maar misschien heb je deze aanwijzing niet nodig; er zijn overigens ook andere manieren.

Zeldzaam
Je kunt makkelijk nagaan dat de opgegeven maten in figuur 3 niet te verkleinen zijn zonder in de breuken te komen. Want bijvoorbeeld 3015 ($= 3^2 \cdot 5 \cdot 67$) en 1622 ($= 2 \cdot 811$) hebben geen factor gemeen.
Misschien twijfel je eraan of de hier opgegeven maten overeenkomen met zes snijdende *zuiver rechte* lijnen. Je zult dan een systeem moeten bedenken om alle maten na te rekenen, bijvoorbeeld uitgaande van de zes gegeven maten langs de buitenomtrek van de driehoek (inclusief $z = 2960$). Hiertoe zijn nog de in noot 2 gegeven formules te gebruiken.
We willen wel oprecht verklaren dat het echt uitkomt.

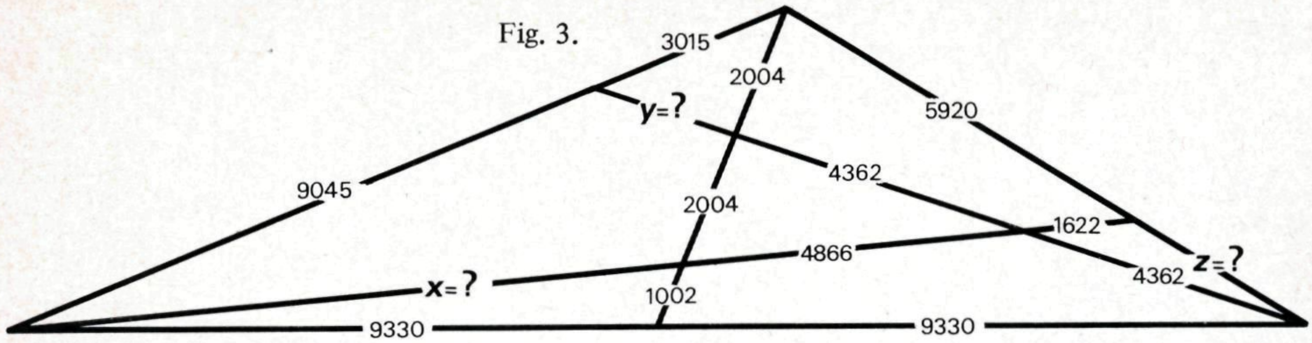


Fig. 3.

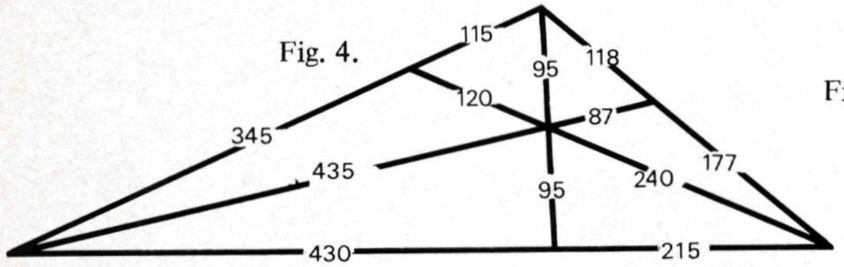


Fig. 4.

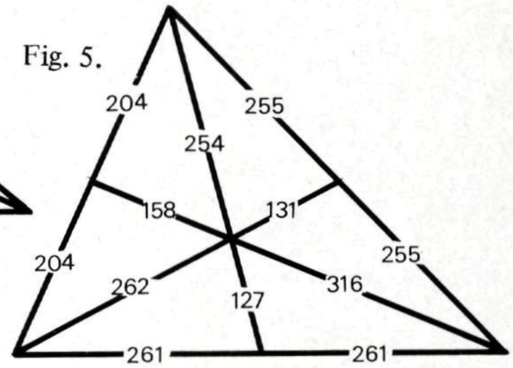


Fig. 5.

Een andere kwestie is natuurlijk: hoe vind je zulke bij elkaar passende getallen? Hier gaan we niet verder op in dan alleen te zeggen dat het vinden hiervan bepaald geen sinecure is (zie noot 3). Weliswaar is aangetoond dat zoiets op oneindig veel manieren mogelijk is, maar de voorkomende getallen zullen vrijwel steeds (veel) groter zijn dan in het hier gegeven voorbeeld.

Twee speciale gevallen

Figuur 4 geeft een bijzonder geval van de situatie van figuur 3, waarbij de drie aan de driehoek toegevoegde lijnen door één punt gaan. De stelling van *Ceva* (Italiaan 1647–1736) zegt dat dan het produkt van de drie 'linker'-stukken van de zijden gelijk is aan het produkt van de drie 'rechter'-stukken. Ofwel hier:

$430 \times 177 \times 115 = 215 \times 118 \times 345$.

Reken het maar na op je doosje.

In figuur 5 zijn de drie lijnen juist de zwaartelijnen. Je kunt zien dat ze de zijden verdelen in stukken 1:1, en elkaar in stukken 1:2.

Bij figuur 2

De zijden van de grote driehoek zijn hier zo gekozen dat de middenstrip inderdaad ergens kan worden vastgeschroefd. Je kunt dit narekenen met de in noot 2 gegeven *stelling van Stewart.*

Het vinden van een dergelijke oplossing (er zijn nog vele andere driehoeken waarbij het ook kan) is eenvoudiger wanneer je echt een stel strips aan elkaar schroeft. Je zoekt dan eerst naar standen waarbij het op het oog wel zowat lijkt uit te komen. Je hoeft dan alleen deze gevallen met de formule te controleren.

Noten

1. Zoek een driehoek zódanig dat de hoek α tegenover de enige onbekende zijde x, óók voorkomt in een tweede driehoek waarvan alle zijden bekend zijn. De figuren 6 en 7 geven hiervan voorbeelden.

Uit tweemaal de cosinusregel:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\alpha$$
$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos\alpha$$

volgt na elimineren van $\cos\alpha$:

$$x^2 = (e^2 - c^2 - d^2)ab/(cd) + a^2 + b^2.$$

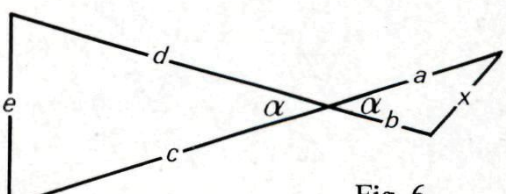


Fig. 6

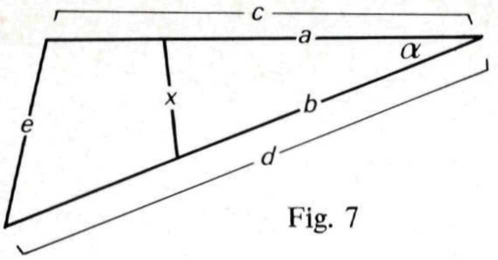


Fig. 7

2.

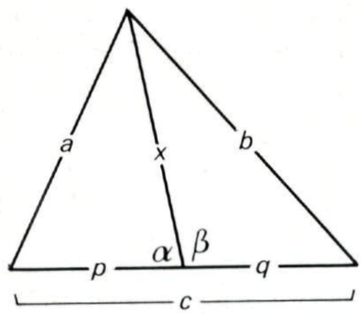


Fig. 8. $x^2c = a^2q + b^2p - pqc$, de 'stelling van Stewart'; (te bewijzen uit tweemaal de cosinus-regel, en $\cos\alpha = -\cos\beta$).

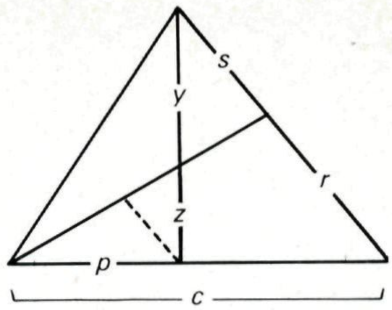


Fig. 9. $y/z = (s/r) \cdot (c/p)$.

3. Wie hier toch meer over wil weten kan deze (en aanverwante) zaken diepgaand uitgezocht vinden in:
J. H. J. Almering, *Rationaliteitseigenschappen in de vlakke meetkunde*; Proefschrift, Universiteit van Amsterdam, 1950.

4. Een aanzet tot dit stukje vormde een speurtocht naar 'mooie driehoeken' door F. D. Roos uit Leek.

°°°Waar of niet?

W. Pijls

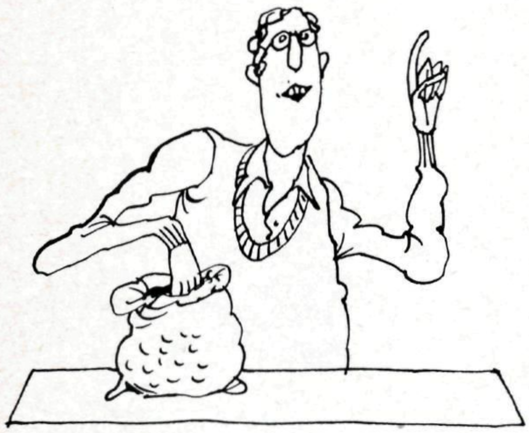
Elk van de vijf volgende stukjes eindigt met een uitspraak. In welke gevallen ben je het daar mee eens?

De loterij

De sportvereniging 'Rood-Zwart' organiseert jaarlijks een loterij. Op vijftig van de duizend loten valt een prijs. Voor de verkoop begint, bepaalt een notaris de winnende nummers; deze lijst wordt in een verzegelde envelop bewaard.
De verkoop verloopt zeer voorspoedig. Maar als tenslotte aan de in dit soort zaken zeer ervaren heer G. Okker gevraagd wordt of hij de 10 nog resterende loten wil kopen, weigert hij met het argument: "Het is nu zéker dat minstens 40 van de 50 prijsloten al door anderen zijn gekocht, terwijl vroege kopers een kans hadden op élk van de 50 prijzen. Bovendien kan ik nu niet meer kiezen welke nummers ik wil hebben."

De bridgetafel

Vier personen zitten om een tafel en spelen bridge. Als de heer J. Oker moet delen, stelt hij voor: "In plaats van steeds rond te gaan wil ik het op een snellere manier doen. Ik geef eerst mijzelf dertien kaarten, vervolgens geef ik er dertien aan mijn partner (de overbuur), dan aan mijn linkerbuurman en tenslotte aan mijn rechterbuur."
Deze laatste protesteert: "Niks d'r van! Jij hebt dan meer kans op hoge kaarten dan ik."

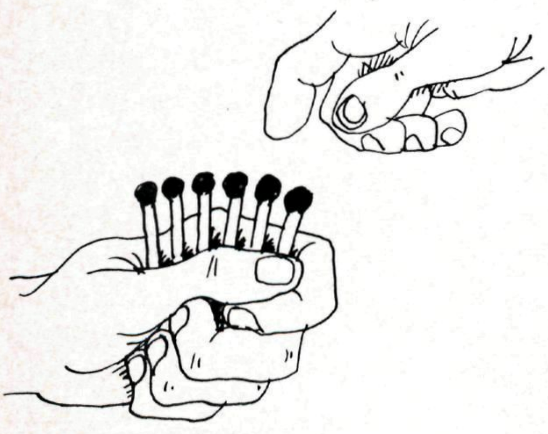


De knikkers

Wiskundeleraar K. Ans vult een zak met 30 witte en 20 rode knikkers. Hij vraagt de klas: "Wat is de kans op een rode knikker als ik er na goed schudden op de tast één uitneem?"
Jan: "Tweevijfde."
Leraar: "Dat dacht ik ook. En reken nu eens uit wat de kans op rood is als ik er eerst *vijf* uithaal en ongezien wegleg, en pas de *zesde* aan jullie laat zien."
Jan (onmiddellijk): "Tuurlijk óók tweevijfde."

De tombola

Onze dorpsfanfare organiseerde op hun laatste grote avond in de pauze een tombola. De genummerde lotbriefjes werden in dichte envelopjes verkocht.
Op een grote tafel stonden alle prijzen uitgestald, voorzien van de winnende nummers. Iemand die zo'n nummer bleek te hebben, kon zijn prijs direct weghalen.
Na een half uurtje, de prijzentafel was toen voor driekwart leeg, hoorde ik iemand zeggen: "Ik koop geen loten meer, want de meeste prijzen zijn toch al weg."



Het kortste eind

Zes kinderen moeten beslissen wie 'hem zal zijn' bij het verstoppertje spelen. Een van hen houdt vijf gewone lucifers en één wat kortere tussen z'n vingers vast (zonder dat te zien is wélke de korte is) en laat de rest trekken.
Nadat er door drie kinderen een hele lucifer is getrokken, onderbreekt een van de anderen met de opmerking: "Dit is niet eerlijk, want ik heb nu méér kans op de korte lucifer dan de kinderen die eerst trokken."

°° De Superkubus en Subsuperkubus

Je zag al aan de plaatjes dat dit stukje weer over de draaikubus gaat. Of eigenlijk moeten we zeggen: over een aantal verschillende draaikubussen. Door het aanbrengen van zekere patronen in de zijvlakken zijn er namelijk puzzels te maken die wezenlijk anders (en nog moeilijker) zijn dan de gewone kubuspuzzel. We zullen proberen je het verschil duidelijk te maken tussen:

– de 'gewone' Magische Kubus,
– de Superkubus, uitgevoerd als gewone kubus mét pijlen, of in een twaalfkleurenvariant, en
– de Subsuperkubus in een zeskleuren-variant.

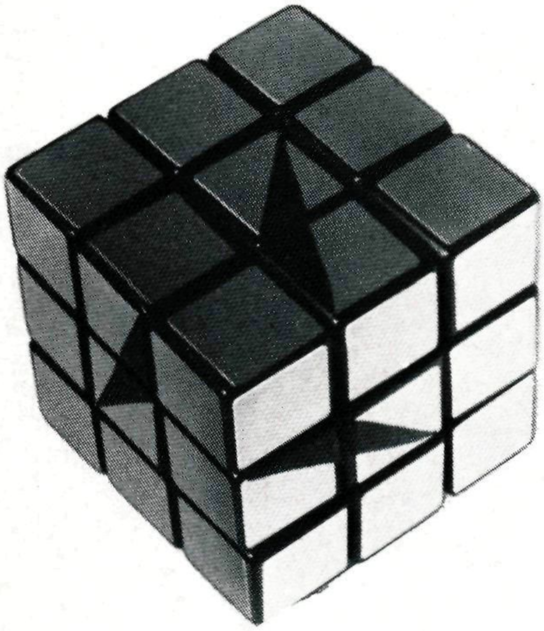


Fig. 1. Een **Superkubus**. De stand van de middenblokjes wordt met zwarte pijlen vastgelegd.

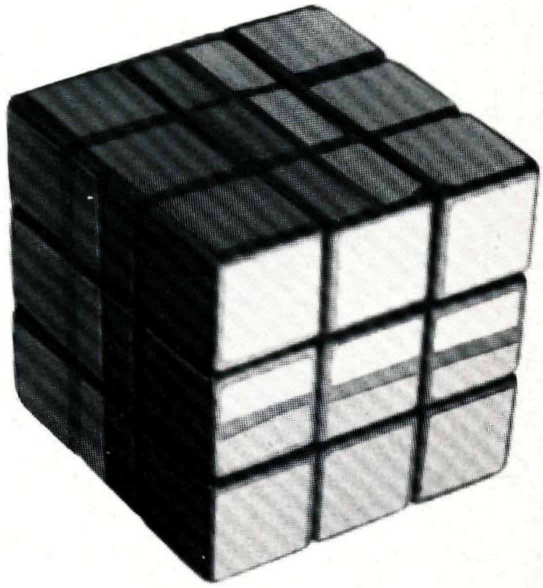


Fig. 2. Een **Subsuperkubus**. Elk van de zes kleuren komt op twee halve zijvlakken voor.

De gewone Kubus
Als je bij de Magische Kubus van Rubik tweemaal achter elkaar de serie van fig. 3 draait, zie je na afloop geen verschil met de beginstand. De kubus lijkt weer helemaal schoon.
Maar toch is er iets veranderd. Je ziet het

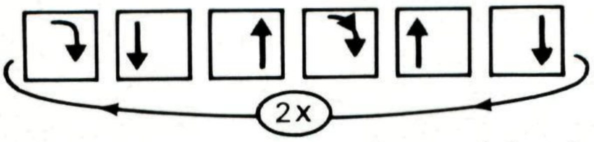


Fig. 3. *Tweemaal* na elkaar uitgevoerd, laat deze serie alleen het middenblokje in het hier afgebeelde bovenvlak over 180° draaien. (Een enkele pijl is een kwartslag, een dubbele een halve slag.)

wel niet, maar het middenblokje van het bovenvlak is een halve slag gedraaid!

De Superkubus
Er zijn allerlei manieren om zulke draaiingen van middenblokjes wél zichtbaar te maken. We spreken dan van een *Superkubus.*
In fig. 1 zie je een mogelijkheid. Alleen is hier de symmetrie van de oorspronkelijke kubus wel heel erg verstoord. Er zijn twee 'bijzondere' hoekpunten gekomen: de punten waar de pijltjes omheen draaien. Dit maakt dat deze Superkubus er niet zo erg mooi meer uit ziet.

De Subsuperkubus

Een veel mooiere, symmetrische kleuring zie je in fig. 2. Hoe de achterkant eruit ziet laat figuur 4 schematisch zien. Elk hoekpunt wordt door drie kleuren 'omringd', en ook op elk ribbeblokje komen drie kleuren voor: één 'hele' en twee 'halve'.

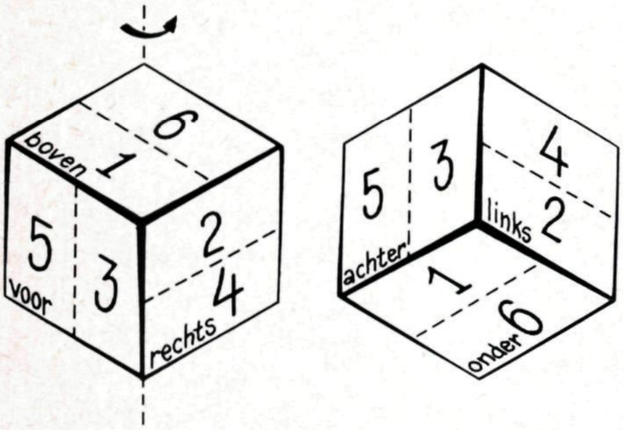
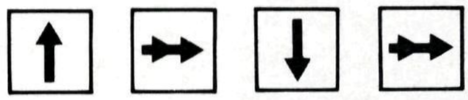


Fig. 4. De kubus van figuur 2 van twee kanten gezien, met zes genummerde kleuren.
De figuur rechts zien we als we de kubus van de linkerfiguur een halve slag draaien om de aangegeven lichaamsdiagonaal.

Misschien werp je tegen dat diametrale hoekblokjes *dezelfde* kleurcombinatie vertonen. Dat is waar, maar . . . ze zitten anders georiënteerd! Op het ene hoekje komt bijvoorbeeld de combinatie rood-wit-blauw *linksom* voor, maar op het diametraal daartegenover zittende hoekje zijn diezelfde kleuren *rechtsom* gerangschikt. Iets dergelijks geldt ook voor de ribbeblokjes.
Juist hierdoor is toch élk hoek- en ribbeblokje uniek.
De zes kleuren zijn *puntsymmetrisch* over het kubusoppervlak verdeeld. Je ziet dus dat *puntspiegeling* een transformatie van de ruimte is die *oriëntatie omkeert*!
Deze kubus is gemakkelijk te maken. Het is een kwestie van plakkertjes lospeuteren, sommige ervan doorknippen, en ze dan weer opplakken. Maar pas op, hij is nog een stuk moeilijker weer goed te krijgen dan de gewone kubuspuzzel. Dus weet waar je aan begint!

Niet de echte

Toch is je kubus zo nog geen echte Superkubus geworden. De *middenblokjes* zijn namelijk wél twee-aan-twee gelijk. En het blijkt mogelijk om via een serie draaiingen twee paren middenblokjes van plaats te laten wisselen, zónder dat dit te zien is door alleen naar de kleuren te kijken.
Om deze wisseling op je kubus te kunnen nadoen, is het niet beslist noodzakelijk om het hele patroon van fig. 4 na te maken. Het is voldoende om de zes middenblokjes van je gewone kubus te voorzien van extra (weer netjes weg te halen) plakkertjes. Die kleur (of nummer) je dan volgens het schema van figuur 4.
Draai nu met deze aangepaste kubus de volgende serie (de figuren stellen weer bovenaanzichten voor; er worden uitsluitend *middenschijven* gedraaid):



In het resultaat zijn de middenblokjes van voor- en achtervlak verwisseld, en ook die van onder- en bovenvlak.
Als je nu alleen de middenblokjes van ondervlak en bovenvlak nog een halve draai-op-de-plaats laat maken (elk apart met de dubbele serie van fig. 1), is het resultaat niet meer te onderscheiden van de uitgangsstand.
Dezelfde truc had je kunnen uitvoeren met de vier middenblokjes in de schijf evenwijdig aan het voorvlak, en ook nog met die in de schijf evenwijdig aan het ondervlak. Zo horen bij elke stand van de blokjes, nog drie 'andere' standen die er *hetzelfde uitzien.* Per zichtbare stand zijn er dus *vier* onzichtbare variaties.

Als een kubus zó gekleurd is dat de hier beschreven standveranderingen van de middenblokjes het kleurpatroon onveranderd laten, zullen we het een *Subsuperkubus* noemen.

Met de kubus van fig. 2 zijn veel mooie

patronen te draaien. Kijk maar eens wat er gebeurt als je bijvoorbeeld alle drie de middenlagen een halve slag draait. Op de gewone kubus zou er dan een 'X' op elk zijvlak verschijnen, maar nu krijg je op elk zijvlak een leuke vlag!

Een twaalfkleuren-Superkubus

Van de bovenbeschreven (zeskleuren-) Subsuperkubus is eenvoudig een echte Superkubus te maken. Bijvoorbeeld door voor de 12 halve zijvlakken (fig. 4) ook 12 verschillende kleuren (i.p.v. 6) te kiezen. Dan heeft echt élk blokje maar één plaats en één oriëntatie.
Op die manier zijn de blokjes makkelijker uit elkaar te houden, waardoor het schoon draaien van de kubus wat eenvoudiger wordt.

Standen en banen

Hoeveel groter is het aantal standen van de Superkubus in vergelijking met de gewone Kubus?
Een middenblokje kan in *vier* oriëntaties in een gegeven zijvlak zitten. Oriëntaties die bij de Superkubus wél te onderscheiden zijn maar bij de gewone niet. Bij zes middenblokjes zou dit dus 4^6 keer zoveel standen geven. Deze standen zijn echter niet allemaal door draaien in elkaar over te voeren. De serie van fig. 1 laat zien dat het wél mogelijk is om één middenblokje een *halve* slag te laten draaien. Maar alleen één *kwart*slag blijkt niet mogelijk.
Wél is mogelijk om de middenblokjes in *twee* zijvlakken elk een kwartslag te laten maken. Je kunt dit zelf op je kubus aantonen: draaien maar! Gevolg is dat alle middenblokjes samen wel een *even* aantal kwartslagen kunnen maken, maar niet een *oneven* aantal. Dit toont aan dat van de bovengenoemde 4^6 standen, de helft door draaien vanuit één beginstand te bereiken is ($= 4^6 \cdot \frac{1}{2} = 2^{11}$).
Bij de gewone Kubus waren er 12 banen, bij de Superkubus zijn het er dus 24. Terwijl er in één baan van de Superkubus 2048-keer zoveel standen zijn als in één baan van de gewone. Het zijn er nu namelijk:

88 580 102 706 155 225 088 000.

Bij de Subsuperkubus is het aantal banen ook 24, en het aantal onderscheidbare standen per baan is zoals we al zagen een kwart van dat voor de Superkubus.

°Een fietsband in drieën

Bij de fietsenmaker heb ik laatst een nieuwe buitenband gekocht. Voor ik hem kreeg werden er met een vlugge beweging wat slagen in gelegd, waarna ik hem meekreeg als op foto 1, in *drie* 'omlopen'. Een handig klein pakje.
Nadat thuis de band verwisseld was, probeerde ik dezelfde draai in de oude band te leggen om hem netjes in de vuilniszak te krijgen. Maar dat viel niet direct mee, en leidde tot een verrassende ontdekking! Ik wilde het eerst eenvoudig houden, met maar één extra omloop. Maar dat wilde de band niet. Hoe ik er ook mee toverde, er bleef een nare slag in zitten (foto 2) en de band sprong steeds terug in zijn oude vorm.
Nog wat draaien en wringen en ineens zat de band in drie bochten. Mooi glad met overal de buitenkant buiten en de binnenkant binnen. Waarmee ik met de vraag zat waarom het in *twee* bochten *niet* wil en in *drie wel?*

Foto 2.

Foto 1.

Nu maar hopen dat elke lezer op dit moment een fietsband bij de hand heeft om het uit te proberen.

Erg eenvoudig blijkt het overigens niet te zijn om de kronkels in je hersens de kronkels in de band te laten volgen. Je kunt natuurlijk tevreden zijn met de constatering: 'Ik zie duidelijk dat het in twee niet gaat en in drie wel. Zo blijkt het nu eenmaal te zijn.' Maar dan kun je geen antwoord geven op vragen als:

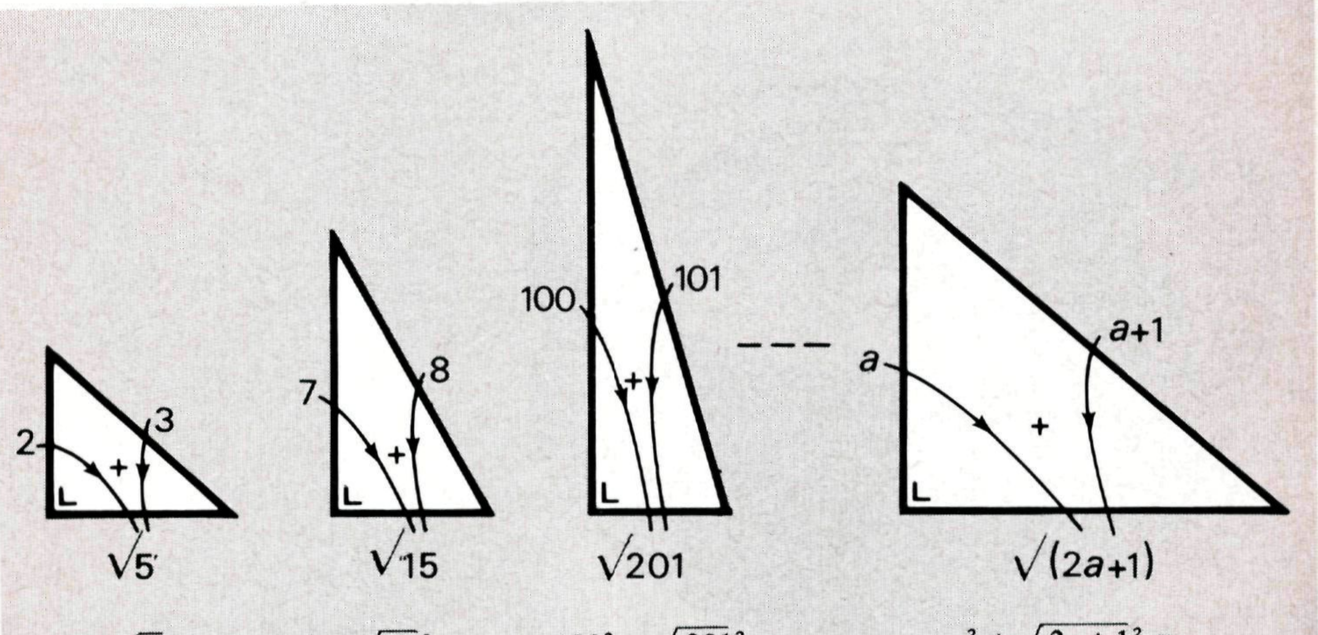
– Hoe is het als je er vier/vijf/zes/. . . bochten in wilt hebben? Je intuïtie zegt misschien dat het voor even aantallen steeds mis zal gaan, maar met een fietsband kun je dat niet echt meer goed uitproberen.
– Hoe zéker weet je dat je bij twee bochten onvermijdelijk met die nare slag blijft zitten? Als iemand beweert dat het toch wel goed kan en een hoge prijs uitlooft aan wie dat vindt, wat doe je dan? Steeds maar aan de band blijven draaien en wringen?

°De stelling van Smaal

Pythagoras is al lang dood, maar *Cornelis Smaal* leeft nog! Hij zit in de tweede klas van de Nassauscholengemeenschap in Breda. Hij leerde werken met de stelling van Pythagoras en kreeg als huiswerkopdracht om met behulp van rechthoekige driehoeken lengten als $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$ te construeren.
Al proberend met behulp van zijn rekenmachine ontdekte hij de volgende variant van de stelling van Pythagoras:

> In een rechthoekige driehoek met een schuine zijde 1 langer dan een der rechthoekszijden, is de lengte van de andere rechthoekszijde de wortel uit de som van de eerste twee.

Dat blijkt altijd zo uit te komen. Kijk maar naar de in fig. 1 gegeven voorbeelden en de eronder gegeven controle volgens Pythagoras.
Cornelis vond de stelling door gewoon wat te experimenteren met getallen die maatgevend zijn voor lengten van zijden in rechthoekige driehoeken.



$2^2 + \sqrt{5}^2 =$
$= 4 + 5 = 3^2$

$7^2 + \sqrt{15}^2 =$
$= 49 + 15 = 8^2$

$100^2 + \sqrt{201}^2 =$
$= 10000 + 201 = 101^2$

$a^2 + \sqrt{2a+1}^2 =$
$= a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$

Fig. 1. De berekening van de basis-lengte volgens Smaal, met eronder de controle volgens Pythagoras.

En als het verschil nu niet 1 is?
Is er met die stelling nog iets te beginnen als het verschil niet 1 is?
Stel eens dat het verschil 2 is. Wel, dan halveren we de beide gegeven lengten, passen de stelling toe, vinden zo de derde zijde, verdubbelen die uitkomst weer, en we zijn er.
Figuur 2 geeft hier een voorbeeld van. Gegeven zijn een rechthoekszijde van 4 en de schuine zijde van 6. Halveren, optellen, wortel nemen en verdubbelen geeft $2\sqrt{5}$ voor de basis.

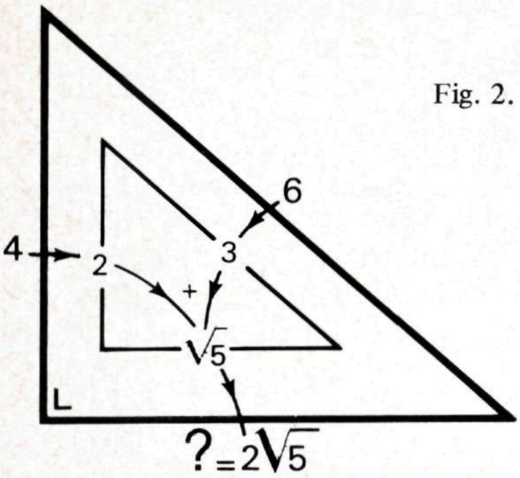


Fig. 2.

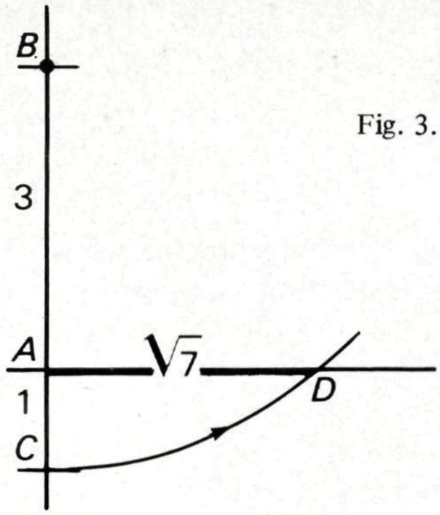


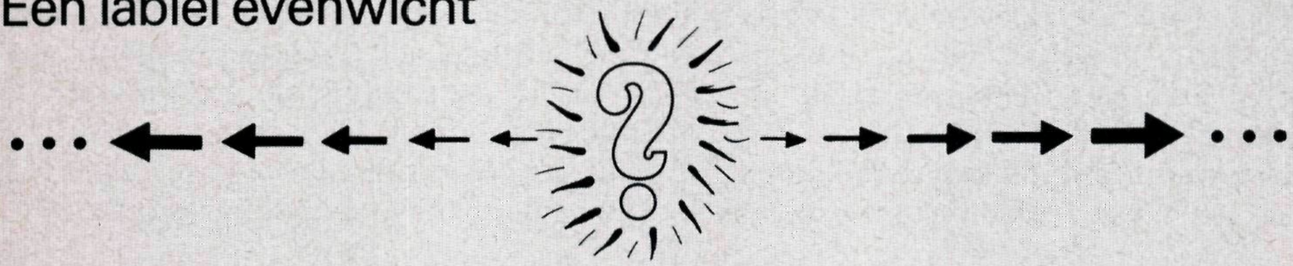
Fig. 3.

Constructie van wortelvormen
Het construeren van een lijnstuk met een lengte van bijvoorbeeld $\sqrt{7}$ gaat nu eenvoudig als volgt (fig. 3):

– Zet op roosterpapier langs een verticale roosterlijn een lengte AB af van $(7-1):2 = 3$ eenheden.
– Teken om centrum B een cirkelboog met een straal BC die 1 groter is.

Het afgesneden stuk AD langs de horizontale roosterlijn door A heeft nu de gevraagde lengte $\sqrt{7}$.

°Een labiel evenwicht



Toets op je rekendoosje een getal in (groot of klein/pos. of neg./met of zonder decimalen, het doet er niet toe).

Toets dan $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$, daarna $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$,

daarna $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$, daarna $\boxed{\times}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$,

daarna . . . etcetera.
Schrijf na elk serietje het tussenresultaat even op. Doe het, en je ziet dat deze tussenresultaten snel naar oneindig schieten, of mogelijk naar min oneindig. Veel leuks is daar niet aan.
Kies nog eens een ander startgetal, en doe hetzelfde. Neem bijvoorbeeld –1, dan 0, dan 1, dan 2. Als je even nagaat wát je eigenlijk aan het uitrekenen bent, is dat wegvliegen naar (min) oneindig best te begrijpen.

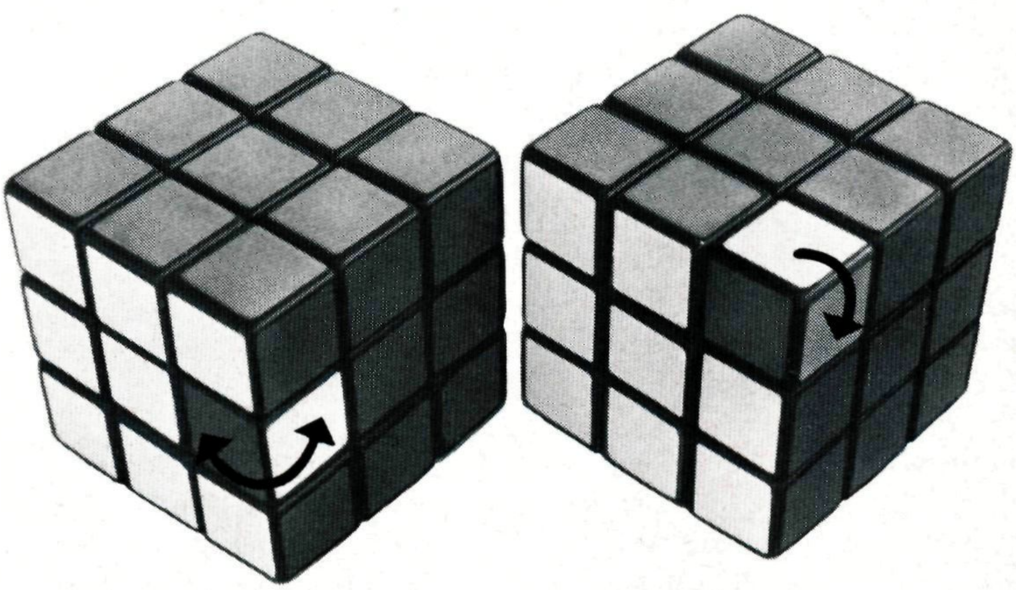
Waar ligt de grens?
Wat wél boeiend is (hopen we), is het zoeken naar de plaats van het scheidingspunt. Een start op 0,3 gaat nog naar omlaag, en een start op 0,4 gaat omhoog.
Je kunt nu zelf aan de slag! Door steeds weer proberen, zijn van het grensgetal net zoveel decimalen te vinden als je wilt. Tenminste, voorzover de rekenprecisie van je doosje dat toelaat.

°°°Stoelendans rond de Kubus

In afl. 1 van deze jaargang hebben we verteld dat er bij de Magische Kubus van Rubik een heleboel standen zijn die je alleen maar via demonteren kunt krijgen. Hoe je ook draait, vanuit de start-positie (de 'schone' kubus) zijn zulke standen onbereikbaar. In dit artikel proberen we wat meer klaarheid te verschaffen over het waaróm daarvan.

We onderscheiden *drie* soorten van zulke onmogelijkheden.
Eén ervan heeft te maken met de oriëntatie van de *hoekblokjes*: de manier waarop ze op een hoek *gedraaid* zitten. Door de oriëntatie van zeven van de acht hoekblokjes ligt de oriëntatie van het achtste blokje vast: van de dríé mogelijke standen van zo'n hoekje zijn er twéé uitgesloten. Het is dus onmogelijk om vanuit start een stand te draaien waarin alles goed zit op één verkeerd gedraaid hoekblokje na.
Een soortgelijke beperking geldt voor *ribbeblokjes*. Elk ribbeblokje zou op elke positie op twee manieren georiënteerd kunnen zitten, de oriëntatie van elf van de twaalf ribbeblokjes blijkt echter die van nummer twaalf vast te leggen. Het kan dus niet voorkomen dat je door draaien vanuit start een stand krijgt waarin alles goed zit op één omgeklapt ribbeblokje na.
En tenslotte is er nog een beperking voor de *onderlinge posities* van de 8 hoekblokjes en de 12 ribbeblokjes tezamen (waarbij er bij geen van de blokjes op gelet wordt in welke oriëntatie het zich bevindt). Uiteraard is door de plaatsing van 19 blokjes de positie van het 20e bepaald (de laatste plaats die overblijft). Bij onze draaikubus geldt echter nog méér: de plaatsing van 18 van de 20 blokjes legt de positie van de laatste *twee* vast. Als dus bijvoorbeeld alle 8 hoekblokjes en 10 van de 12 ribbeblokjes op de goede plaats zitten, dan moeten ook de laatste twee ribbeblokjes op hun plaats terecht zijn gekomen.

Deze drie beperkingen gelden onafhankelijk van elkaar. Als we een gedemonteerde kubus zo maar weer in elkaar zetten, is de kans dat die stand naar start teruggedraaid kan worden 1 op 12 (want $12 = 3 \times 2 \times 2$).

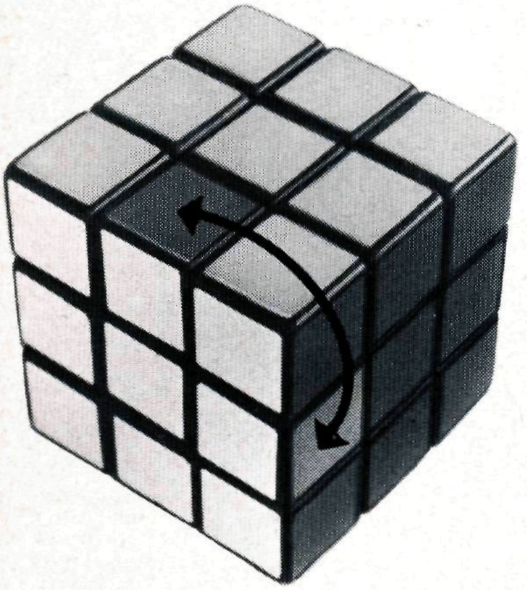


Twee onmogelijke standen: één omgeklapt ribbeblokje, en één gedraaid hoekblokje.

Waarom

Dat is allemaal snel verteld, maar waarom is dat eigenlijk zo? Waarom zijn er die drie beperkingen? Hoe weten we zo zeker dat er onder de letterlijk *onvoorstelbaar* veel draaistanden die de kubus heeft, bepaalde combinaties *nooit* voor zullen komen?
Direct verband hiermee houdt de vraag hoe we weten of een oplossingsmethode *volledig* is. Er zijn tal van oplossingsmethoden bekend, en bij al die oplossingen komen de drie beperkingen wel ergens ter sprake. Er wordt dan gezegd dat in een bepaald stadium bepaalde blokjes alleen nog maar zo-en-zo kunnen zitten. Maar meestal wordt er niet bij verteld *waarom* dat zo is. Waarom kan er nooit een stand ontstaan waar zo'n oplossingsmethode geen raad mee weet? Een echte kubist mag niet tevreden zijn als hij op die vragen geen antwoord weet!

Eigenlijk zijn dat allemaal *wiskundige* problemen. Problemen die we met ons gezonde verstand door logisch redeneren kunnen aanpakken. Steeds gaat het daarbij om hetzelfde principe. We rafelen het hele complexe kubusdraaien uiteen in zijn meest elementaire bestanddelen, en analyseren wat er bij die elementaire draaiingen gebeurt: Hoe veranderen daarbij de oriëntaties van de hoekblokjes en van de ribbeblokjes. En: hoe veranderen hun onderlinge posities.
We zullen ons hier niet bezighouden met die eerste twee beperkingen, de beperkingen voor de oriëntaties. Het zal voor veel van onze lezers best te doen zijn om uit te vinden hoe je die kwesties moet aanpakken, zo erg ingewikkeld is het niet (zie evt. Denkertje 1).
Het is echter veel lastiger om de beperking te analyseren die er is voor de *onderlinge posities* van de hoek- en ribbeblokjes. Daarbij gaat het dus bijvoorbeeld om de vraag waarom je niet door draaien twee hoekblokjes kunt verwisselen en tegelijkertijd alle andere hoek- en ribbeblokjes op hun plaats terug kunt laten keren.
Ook in andere opzichten is dat het meest *wiskundige* probleem dat zich bij het kubusdraaien voordoet. Soortgelijke kwesties komen namelijk overal ter sprake waarbij dingen van plaats wisselen volgens vaste regels, en zo iets komt in de meest uiteenlopende gebieden van de wiskunde voor. Er is dan ook al lang geleden een heel stuk wiskunde ontwikkeld dat direct op ons kubusprobleem toepasbaar is. Daarbij gaat het helemaal niet om verschrikkelijk abstracte zaken maar, zoals zo vaak in de wiskunde, veel meer om op het eerste gezicht zeer ingewikkelde problemen die echter door een systematische aanpak tot klaarheid gebracht kunnen worden.



Een onmogelijke verwisseling van twee ribbeblokjes.

Permutaties en transposities

'Permutatie' is de vakterm die wiskundigen in dit verband gebruiken. Het gaat bij permutaties altijd over *posities,* en over *dingen* die op die posities kunnen zitten. We kunnen bijvoorbeeld denken aan *stoelen,* en aan *mensen* die op de stoelen zitten. Steeds nemen we aan dat er precies evenveel dingen als posities zijn (evenveel mensen als stoelen). Een *permutatie* is nu een *voorschrift* om de dingen van positie te laten veranderen.

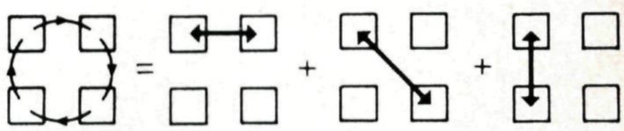
Stel je zit met z'n dertigen in een klas, op 30 (genummerde) stoelen. De leraar heeft 30 kaarten, eveneens voorzien van nummers 1 t.e.m. 30, en hij laat als volgt een verhuizing spelen: Hij schudt de kaarten en deelt ze rond; het *voorschrift* voor de verhuizing, de permutatie, ligt dan vast. Ieder moet naar de stoel verhuizen met het nummer dat zijn kaart aangeeft.
Zo'n stoelendans geeft natuurlijk tijdelijk een geweldige chaos in de klas. De leraar kan de zaak echter ook wel wat ordelijker laten verlopen. Bijvoorbeeld zó: hij vraagt eerst wie nr. 1 heeft, en laat die van plaats wisselen met degene die op stoel nr. 1 zit. Dan laat hij de bezitter van kaart nr. 2 wisselen met degene die op stoel nr. 2 zit, enzovoort, totdat de hele klas op de goede plaats zit. Dat verwisselen van *twee* personen is de allereenvoudigste permutatie die er bestaat. Zo'n verwisseling heet een *transpositie.* Blijkbaar is élke permutatie te beschouwen als een opeenvolging van transposities.
Maar pas op, dat 'ontbinden' van een permutatie in transposities kan op tal van verschillende manieren gebeuren. Waarom zou de leraar juist beginnen met het op de goede plaats zetten van nr. 1? Hij kan net zo goed bij een ander beginnen, misschien is hij dan wel vlugger klaar.
Of hij kan het ook langer laten duren, en eerst maar eens een half uurtje naar willekeur allerlei transposities uitvoeren. Pas daarna begint hij (weer met transposities) de mensen één voor één op hun goede plaats te brengen.

Zo zie je dat er talloos veel manieren zijn om één bepaalde permutatie in transposities te ontbinden. Er is echter iets dat al die mogelijke ontbindingen gemeen hebben. Er geldt namelijk de:

Hoofdstelling over permutaties
Alle mogelijke ontbindingen van één bepaalde permutatie bevatten òf allemaal een *even* aantal, òf allemaal een *oneven* aantal transposities.

Consequenties
Het is helemaal niet vanzelfsprekend dat deze hoofdstelling wáár is. Maar áls de stelling geldt, dan zijn er blijkbaar *twee soorten* permutaties: de *even* permutaties, waarbij elke ontbinding in transposities een even aantal transposities telt, en de *oneven* permutaties, waarbij dat aantal altijd oneven is. Voor het achter elkaar uitvoeren van permutaties geldt dan:
- even na even is: even,
- even na oneven is: oneven,
- oneven na even is: oneven,
- oneven na oneven is even.

Als de hoofdstelling waar is, is ons kubusprobleem ook snel opgelost. Want elke serie draaiingen aan de kubus kunnen we opvatten als de opeenvolging van draaiingen van telkens één zijvlak over een kwartslag (ook het draaien van een middenschijf, want dat is gelijkwaardig met het draaien *de andere kant op* van de beide aangrenzende zijvlakken).
Laten we eerst kijken naar de *hoekblokjes.* Bij zo'n kwartslag verwisselen er vier hoekblokjes cyclisch van plaats. Zo'n *viercykel* kunnen we (in gedachten) ontbinden in *drie* transposities, dus dat is een *oneven* permutatie.
Een serie draaiingen aan de kubus geeft dus een oneven dan wel een even permutatie op de hoekblokjes, al naar gelang het aantal gedraaide kwartslagen even of oneven is.

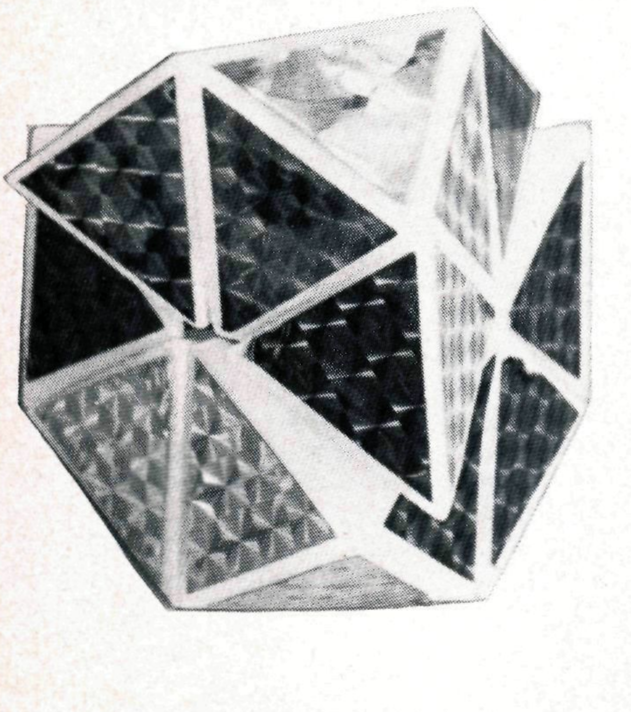


Precies hetzelfde geldt voor de ribbeblokjes. Want ook daarbij geeft elke kwartslag een cyclische verwisseling van vier blokjes.

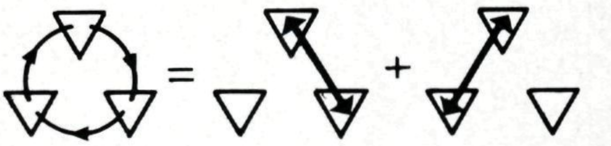
Een serie draaiingen geeft dus altijd permutaties op de hoekblokjes en op de ribbeblokjes die óf *beide* even zijn, óf beide *oneven*. Als bijvoorbeeld na een lange serie alle hoekblokjes weer op hun plaats zitten, moet er een *even* aantal kwartslagen gedraaid zijn (want de *identieke* permutatie kunnen we ook schrijven als de opeenvolging van nul transposities, en nul is even). Op de ribbeblokjes moet dan dus ook een even permutatie zijn uitgevoerd. Eén enkele verwisseling is bijvoorbeeld onmogelijk. Een stand waarbij alles goed zit op twee verwisselde ribbeblokjes na is dus vanuit start onbereikbaar.

Andere puzzels

Er zijn nog veel meer toepassingen van de hoofdstelling. In de wiskunde, maar ook op spelletjesgebied. Zo is er bijvoorbeeld een *draaiviervlak* in de handel (in de hieronder getoonde versie zijn de vier hoekpunten afgeknot). Als puzzel is dat ding heel wat gemakkelijker dan de kubus. Alleen de zes 'ribbeblokjes' kunnen bij dat viervlak van plaats veranderen, de andere blokjes draaien wel, maar ze blijven op hun plaats zitten.

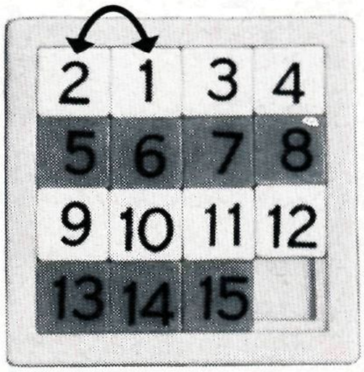


Bij elke slag verwisselen er *drie* ribbeblokjes cyclisch van plaats. Dat is een *even* permutatie, want je kunt zo'n driecykel schrijven als opeenvolging van *twee* transposities.



Elke serie draaiingen moet daarom ook een even permutatie geven op de ribbeblokjes, dus het is bijvoorbeeld onmogelijk een stand te draaien waarbij alles goed zit op twee verwisselde blokjes na.

Een andere toepassing geeft het bekende schuifpuzzeltje van 15 blokjes in een vier-bij-vier raam. Je kunt met behulp van de hoofdstelling aantonen dat het daarbij onmogelijk is een stand te bereiken waarbij twee blokjes zijn verwisseld en de rest op z'n plaats zit. Probeer het maar eens!

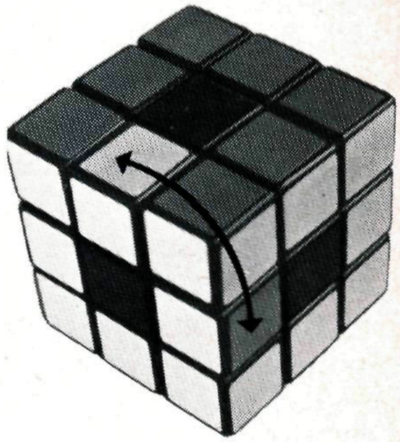


Overigens . . .

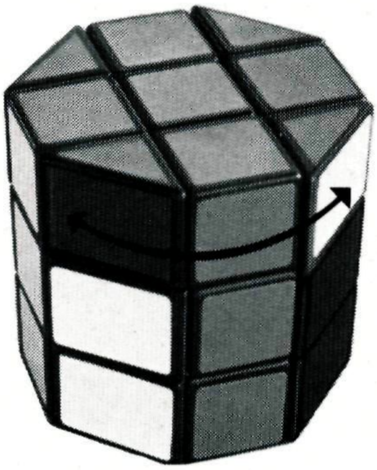
We hebben nu wel aangetoond dat er bij de kubus voor de onderlinge posities van hoek- en ribbeblokjes de beperking geldt dat de permutaties òf beide even, òf beide oneven moeten zijn. Maar daarmee is niet gezegd dat dit ook de *enige* beperking voor de posities is.

Je kunt dat weer op een andere manier laten zien, bijvoorbeeld door een methode te geven waarmee je elke stand die aan deze beperking voldoet kunt terugdraaien naar een stand waarbij alle blokjes op hun plaats zitten. Maar dat is weer een ander verhaal.

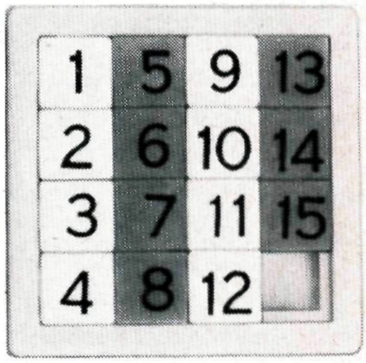
1. Neem je kubus en haal (in gedachte) van elk hoekblokje het plakkertje af van het vlakje dat tot het *onder*vlak of het *boven*vlak van de kubus behoort.
   Waarom is er nu geen enkele serie van draaiingen mogelijk die er toe leidt dat er precies één horizontaal hoekvlakje wél een plakkertje heeft?



2. Waarom kan er bij een kubus met zwart gemaakte centra wél een stand gedraaid worden waarbij alles goed zit op twee verwisselde blokjes na?



3. Waarom kun je bij de Magische Peperbus (met 10 kleuren, voor elk van de 10 zijvlakken) wél een stand draaien waarin op één verwisseling na alle vlakken van één kleur zijn?

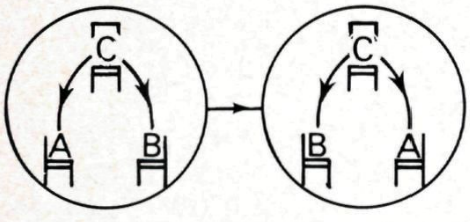


4. Kun je bij het schuifpuzzeltje door schuiven vanuit de beginstand naar de afgebeelde stand komen?

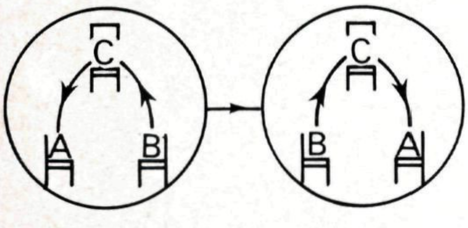
Een bewijs voor de hoofdstelling

Laten we aannemen dat we een aantal stoelen hebben en dat op iedere stoel iemand zit. Er wordt een bepaalde permutatie uitgevoerd, een stoelendans, waardoor na afloop de mensen op een andere manier over de stoelen verdeeld zijn. We willen nu een uitspraak doen over het aantal transposities waaruit die hele permutatie kan zijn samengesteld. Als hulpmiddel daartoe maken we gebruik van een systeem van pijlverbindingen tussen elk tweetal mensen: denk maar ieder mens met ieder ander verbonden door een onzichtbare draad met een pijl erop. Hoe die pijlrichtingen gekozen zijn doet niet terzake; wel blijft die richting voor elk *mensen*-paar tijdens de hele dans onveranderd.
Als iedereen *zit*, leggen die pijlen óók een richting vast tussen elk *stoelen*-paar. Maar déze richtingen zijn na de dans voor een deel wél omgewisseld. Zo'n richingswisseling bij een stoelenpaar noemen we een *omkering*.
We kijken eerst naar dit soort omkeringen bij één enkele transpositie, d.w.z. een dans waarbij alleen *twee* mensen (zeg A en B) van plaats wisselen. Eén omkering treedt natuurlijk op tussen de stoelen van A en B. Elke andere persoon, C,

blijft op z'n plaats zitten. Voor wat zijn stoel betreft kunnen alleen omkeringen voorkomen t.o.v. de stoelen van A en B. Maar daarvoor geldt het volgende.



pijlen gelijk gericht: geen omkering



pijlen ongelijk gericht: twee omkeringen

Als de pijlen op de draden van C naar A en B allebei *naar* C *toe* of allebei *van* C *af* wijzen, geeft dat géén omkeringen. Wijzen ze echter *verschillende* kanten op, dan krijgen we twéé omkeringen.

Dit geldt voor alle personen C ongelijk aan A en B, dus als we op deze manier het aantal omkeringen tellen, krijgen we er telkens 0 of 2 bij. We hadden er al één (voor de verbinding AB) dus het totale aantal is *oneven*.

Nu is ons bewijs vrijwel rond. Want als een *even* aantal transposities wordt uitgevoerd, krijgen we een even-maal-oneven = even aantal omkeringen, terwijl er bij een *oneven* aantal transposities een oneven aantal omkeringen ontstaat. Het aantal omkeringen bij een permutatie hangt echter alleen af van de beginstand en de eindstand, en niet van de manier waarop zo'n permutatie tot stand is gekomen. Is dus het aantal omkeringen even, dan moet in elke ontbinding in transposities een even aantal transposities zitten, en omgekeerd. Daarmee is de hoofdstelling bewezen.

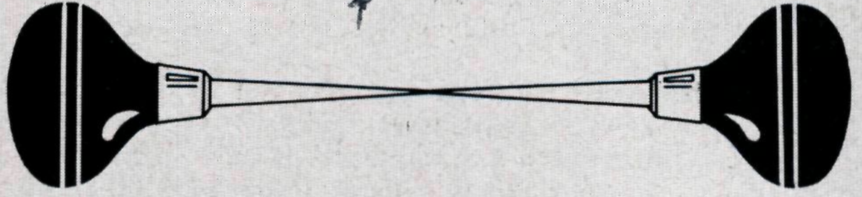
°Priempalindromen in de tachtiger jaren

Dat we in een zeer uitzonderlijk decennium leven mag blijken uit het feit dat van de volgende tien palindroomgetallen (getallen met een symmetrisch cijferpatroon) er maar liefst *vijf* priem zijn. Dat is: geen deler $\neq 1$ bevatten. Welke vijf?

1980891	1981891	1982891	1983891	1984891
1985891	1986891	1987891	1988891	1989891

De enige keer in de geschiedenis dat er nog meer priem-palindromen bij elkaar zaten (zelfs 4 opeenvolgende jaren!) was juist een eeuw geleden. Onder de volgende tien getallen zijn er slechts *drie* die nièt priem zijn. Welke drie?

1875781	1876781	1877781	1878781	1879781
1880881	1881881	1882881	1883881	1884881



Correspondentie

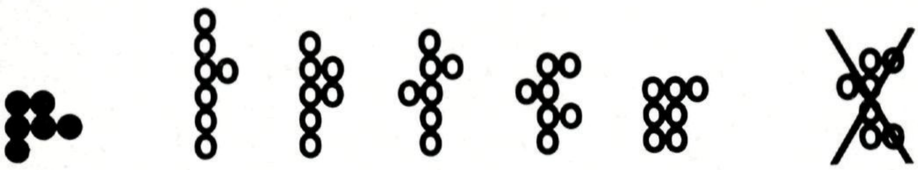
n.a.v. artikelen in voorgaande nummers

Keien, takken en looptorren

(Pyth. 21-2 p. 36 en 21-3 p. 70)

We zaten ernaast!

Twee lezers, Wiebe Kees Goodijk uit Hardegarijp en Andreas Reinicke uit Eindhoven, signaleerden dat onze soortentelling niet helemaal correct en nogal incompleet was. Bij elkaar vonden ze nog één nieuwe zestor en maar liefst vijf nieuwe zeventorren, terwijl één van de op blz. 70 gegeven 'zeventorren' niet blijkt te kunnen lopen:



Wiebe Kees gaf verder nog een systematische onderverdeling van alle n-tor figuren. Deze leidde tot de volgende vermoedens voor alle grotere even resp. oneven torren:

- Er zijn 3 verschillende $(2n)$-torren ($n = 2$, 4, 5, 6, . . .).
- Er zijn $4n+1$ verschillende $(2n+1)$-torren (n = 3, 4, 5, 6, . . .), waarvan er $3n-1$ rechtlopend en $n+2$ schuinlopend zijn.

We zijn benieuwd of er iemand is die deze uitspraken weet te weerleggen!

Passende schijven

(Pyth. 21-2 p. 37)

Tot nu toe kregen we op dit probleem reacties van *Daan Krammer* (Hengelo-O) en *Floor van Lamoen* (Leeuwarden). Daan bewees dat er bij *even* nummer-aantallen geen passende schijven bestaan; Floor vond een groot aantal van de hieronder gegeven resultaten.

De meeste oplossingen zijn te krijgen door te werken met 'constante sprongen' op de schijf. Maar bij $n=7$ en $n=9$ blijken er ook andere goede oplossingen te zijn!

ring: 1-2-3-4-5-

schijven:	sprong:
1-5-4-3-2-	-1
1-3-5-2-4-	$+2$
1-4-2-5-3-	-2

ring: 1-2-3-4-5-6-7-

schijven:	sprong:
1-7-6-5-4-3-2-	-1
1-3-5-7-2-4-6-	$+2$
1-6-4-2-7-5-3-	-2
1-4-7-3-6-2-5-	$+3$
1-5-2-6-3-7-4-	-3
1-4-7-2-6-5-3-	geen regelmaat

ring: 1-2-3-4-5-6-7-8-9-

schijven:	sprong:
1-9-8-7-6-5-4-3-2-	-1
1-3-5-7-9-2-4-6-8-	$+2$
1-8-6-4-2-9-7-5-3-	-2
1-5-9-4-8-3-7-2-6-	$+4$
1-6-2-7-3-8-4-9-5-	-4
1-9-5-7-6-2-4-3-8-	geen regelmaat

Een algemene uitspraak over het totale aantal oplossingen voor iedere n, is nog niet gevonden. De redactie blijft hier belangstelling voor houden!

Dat je bij *even* aantallen n niet naar passende schijven hoeft te gaan zoeken, laten we als volgt zien. Beschouw een ring met de opeenvolgende nummers 1-2-3-. . .-n-, met daarin een *passende* schijf. Dit passend zijn betekent dat:

- er een nummer is (zeg a) dat op de schijf op dezelfde plaats zit als op de ring, en
- er een ander nummer (b) is dat op de schijf 1 plaats verder zit (rechtsom) dan op de ring, en
- er nog een ander nummer (c) is dat op de schijf 2 plaatsen verder zit dan op de ring, etc. etc., en
- dat het laatst overblijvende nummer (z) op de schijf $n-1$ plaatsen verder zit dan op de ring.

Omdat de nummers op de ring regelmatig met 1 oplopen (afgezien van op één plaats een sprong van $n-1$ omlaag) zegt het bovenstaande ook dat:

- er een nummer a is op de schijf naast hetzelfde nummer a op de ring, en
- er een nummer b is op de schijf naast $b+1$ (of $b+1-n$) op de ring, en
- er een nummer c is op de schijf naast $c+2$ (of $c+2-n$) op de ring, etc. etc., en
- er tenslotte het nummer z is op de schijf naast $z+n-1$ (of $z+n-1-n$) op de ring.

In deze uitspraken worden de n getallen 1, 2, 3, . . ., n twéé keer allemaal benoemd: als *schijf*nummers en als *ring*nummers. In welke volgorde dat gebeurt valt niet te achterhalen, maar op de *totalen* van die beide reeksen is de volgorde niet van invloed. Gelijkstellen van beide totalen geeft:

$$a+b+c+\ldots+z \;=\; a+b+1 \text{ (of } b+1-n) + c+2 \text{ (of } c+2-n) + \ldots + z+n-1 \text{ (of } z+n-1-n).$$

Het rechterlid is te vereenvoudigen tot: $a+b+c+\ldots+z \;+\; 1+2+3+\ldots+n-1 \;-\;$ een n-voud, waarmee de vergelijking overgaat in: $1+2+3+\ldots+n-1 \;=\;$ een n-voud, ofwel $\frac{1}{2}(n-1)\cdot n \;=\;$ (een geheel getal) $\times\, n$. Dus $\frac{1}{2}(n-1)$ moet geheel zijn, en dus n *oneven*!

De waterstraalkromme *(Pyth. 21-2 p. 32)*

Op de vraag om uit de foto's op blz. 33 de stroomsterkten af te leiden, zijn binnen de inzendtermijn geen antwoorden binnengekomen. Bij het maken van de foto's werd met een klok en een maatkannetje gevonden: $i_a = 1{,}25$ l/min; $i_b = 0{,}57$ l/min; $i_c = 0{,}19$ l/min.
Het antwoord op de vraag in het onderschrift op blz. 33 is, dat de gebruikte achtergrond niet overal wit was. Aan beide zijden naast de op de foto's zichtbare witte baan was de achtergrond *zwart*. Door de zijkanten van de stralen heen kijk je 'om een hoekje' tegen die zwarte achtergrond.

De constructie van een éénradshoek *(Pyth. 21-3 p. 58)*

Het (programmeerbare) rekendoosje van *Franc Grootjen* uit Veenendaal zocht naar driehoeken met geheeltallige zijden waarin een hoek van omstreeks 1 rad voorkomt. Zijn beste resultaat voor de zijdelengten onder de honderd, is een driehoek met zijden 76-90-55.
Uit de cosinusregel volgt voor de hoek tegenover zijde 76:

$$\arccos \frac{90^2+55^2-76^2}{2\cdot 90\cdot 55} \approx 0{,}999\,999\,14 \text{ rad}, \quad \text{met een afwijking van } 0°\,00'\,0{,}18''.$$

Voor een *rechthoekige* driehoek met *twee* geheeltallige zijden is het beste resultaat onder de honderd:

$$\arctan \frac{95}{61} \approx 0{,}999\,991 \text{ rad.}$$

Omtrek = oppervlakte *(Pyth. 21-3 p. 60)*

Nog twee opmerkingen bij dit artikel.

1. Driehoeken met eenzelfde maatgetal voor omtrek en oppervlakte hebben steeds een *ingeschreven cirkel met straal 2.* Als zo'n driehoek geheeltallige zijden heeft, zijn ook de stukken waarin die zijden door de incirkel worden verdeeld, geheeltallig. Controleer het maar in de vijf getekende driehoeken op blz. 60.

2. De s-formule geeft de oppervlakte van een willekeurige driehoek op een symmetrische manier uit de drie zijden. Een lezer zond ons nog een andere fraaie formule die hetzelfde doet:

$$\mathrm{Opp}(\Delta ABC) = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4)}$$

De juistheid hiervan is niet zo moeilijk aan te tonen, uitgaande van de vorm voor $\frac{1}{2}hc$ op blz. 61.

Antwoorden en oplossingen

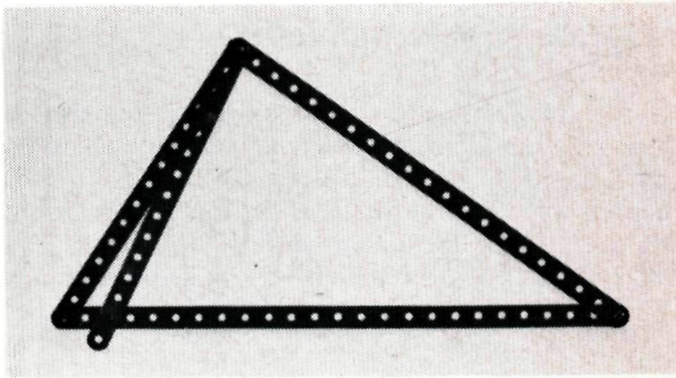
bij: Voor vier getallen geldt

I De gegevens leiden tot de vergelijking: $A + B = C + D$ (1), $A + C > B + D$ (2) en $C < D$ (3).
(2) + (1) $\Rightarrow 2A + B + C > B + C + 2D \Rightarrow A > D$; (2) – (1) $\Rightarrow C - B > B - C \Rightarrow C > B$.
Dus van zwaar naar licht: **Aad, Dik, Cor, Ben.**

II Elimineren van a uit (1) en (2) geeft: $c/b + bd = 2$.
Vermenigvuldigen met b (want uit (1) volgt $b \neq 0$) geeft: $db^2 - 2b + c = 0$.
Uit het gestelde in de opgave volgt dat deze vierkantsvergelijking voor b oplossingen heeft. Dus: discriminant $= 4 - 4dc \geqslant 0 \Rightarrow cd \leqslant 1$.

bij: Helemaal geheel

De foto hiernaast beantwoord de vraag uit figuur 2.
In figuur 3 geldt:
$x = 9732$, $y = 2181$, $z = 2960$.



bij: Waar of niet?

De loterij. Wat de heer Okker zegt is wel waar, maar het is geen argument dat invloed heeft op de prijs-kans per lot. Wél is het zo, dat vroege kopers (in tegenstelling tot de heer Okker) de mogelijkheid hadden hun eigen kans op een prijs te verhogen door méér loten te kopen. Maar als zij ook aan een maximum van 10 loten gebonden zijn, geldt voor hen évenzeer dat er zeker 40 prijzen op andere loten vallen.
De vrije nummer-keuze verhoogt de winstkans van vroege kopers niet; het ontbreken ervan is daarom ook niet in het nadeel van de laatste koper.

De bridgetafel. Indien de kaarten goed geschud zijn heeft iedere speler een *gelijke* kans op elk van de 52 kaarten. Dit geldt voor élke manier waarop de kaarten gedeeld worden.
'Goed schudden' (van de *dichte* kaarten) betekent namelijk per definitie dat er niets meer te zeggen valt over de plaats van een bepaalde kaart in het pakje. Dit geldt evenzeer voor hóge kaarten.

De knikkers. Jan heeft gelijk.
De situatie komt overeen met die aan de bridgetafel. Na goed schudden heeft élk van de 50 knikkers een even grote kans om als *eerste* gepakt te worden. En evenzo is er geen enkele reden waarom sommige van de 50 knikkers een grotere kans zouden hebben dan andere, om als *zesde* naar buiten te komen. Voor élke knikker is die kans $\frac{1}{50}$, 20 ervan zijn rood, dus de kans op een rode zesde is $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

De tombola. De slotuitspraak lijkt voorbarig te zijn gedaan. Het bijna leeg zijn van de tafel is – in een weloverwogen afweging van prijskansen – alléén van belang als er ook over iets anders nog iets bekend is. En wel over de fractie van het aantal loten dat op dat moment nog niet verkocht is. In de probleemstelling wordt over dit laatste echter niets gezegd.

Het kortste eind. Op het moment dat het vierde kind een lucifer trekt, is *een* van de *drie* overgebleven lucifers de korte. Voor het éérste kind was dat *een* van de *zes.*
Toch is de procedure wèl eerlijk, want het vierde kind vergeet te bedenken dat het best mogelijk was geweest (een kans van 50%) dat hij helemaal niet had hoeven trekken.

bij: Een labiel evenwicht

De gezochte grens ligt heel dicht bij 0,36787944. Theoretisch is aan te tonen dat $1/e$ de exacte grens is. Waarbij e het (naar *Euler* genoemde) irrationale getal is dat ook optreedt als grondtal van de 'natuurlijke logaritme'. $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots = 2{,}718281830\ldots$

bij: Stoelendans rond de Kubus

Denkertje 1. We tonen dit aan door aan elk van de acht hoeken van de kubus een getal toe te kennen dat de oriëntatie van het blokje op die plaats beschrijft. En wel $-1/0/+1$ al naar gelang het blokje na een denkbeeldige éénderde kanteling rechtsom/neutraal/linksom, met het zwarte vlakje horizontaal zou komen. Wat gebeurt er nu als we aan de vlakken van de kubus gaan draaien (het frame met de middenblokjes blijft daarbij in een vaste stand)?
Bij draaiing van boven- of ondervlak blijft van alle hoeken de oriëntatiewaarde ongewijzigd. En bij een *zij*vlaksdraaiing van een kwartslag zijn er twee hoeken (diagonaal in dat zijvlak) waar die waarde *met 1 toeneemt,* en twee waar die *met 1 afneemt.* Ga dit maar na op je kubus. Het totaal van alle hoekoriëntaties blijft dus bij élke zijvlaksdraaiing (én elke draaiings*reeks*) constant. Waaruit volgt dat vanuit een schone stand, nooit een situatie met uitsluitend één gekanteld hoekblokje te bereiken is.

(Op een dergelijke manier is ook aan te tonen dat het onmogelijk is om uitsluitend van één ribbeblokje de oriëntatie te laten veranderen. Maak ze allemaal zwart-wit, en kijk op hoeveel posities er kleurwisseling optreedt bij één draai van een zijvlak.)

Denkertje 2 en 3. De sleutel zit in beide gevallen in het feit dat sommige (bij de peperbus) of alle (bij de zwarte-middens-kubus) hoek- en ribbeblokjes geen *vaste plaats* meer hebben t.o.v. het centrale assenkruis.
Draai bij de zwarte-middens-kubus vanuit de start-positie een *middenschijf* een kwartslag, dan lijkt het alsof de vier ribbeblokjes uit die schijf een *viercykel* hebben ondergaan. Met een geschikte *driecykel* op drie van die vier ribbeblokjes kun je er *twee* op hun plaats zetten (t.o.v. de rest van de blokjes). De andere twee zitten dan nog verwisseld.
Bij de *peperbus* hebben de schuine hoekkolommen geen vaste plaats. Verwissel je van twee van zulke kolommen *twee maal twee* blokjes (dat is een even permutatie), dan lijkt het of de peperbus goed is gedraaid op de *laatste* twee blokjes na uit die twee kolommen.

Denkertje 4. Ja. Het is een even permutatie, want er zijn 6 verwisselingen voor nodig. Probeer het maar! Overigens, bij een drie-bij-drie puzzel (met 8 blokjes) of een zes-bij-zes puzzel (met 35 blokjes) zou het niet gaan!

Pythagoras

Dit tijdschrift wordt uitgegeven onder auspiciën van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde.

Redactie

∫ Dr. J. van de Craats, R.U. Math. Inst., Postbus 9512, 2300 RA Leiden.
★ Bruno Ernst, Stationsstraat 114, 3511 EJ Utrecht.
< W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn.
↯ Ir. H.M. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Nieuw Ginneken.

Secretariaat

Δ Drs. H.N. Pot, Tournoysveld 67, 3443 ER Woerden.
Aan dit adres kunnen bijdragen voor Pythagoras worden gezonden.

Medewerkers van de redactie

W. Ganzevoort, M.C. van Hoorn, W. Pijls, G.A. Vonk, D.K. Wielenga.

Verdere gegevens

Pythagoras verschijnt 5 maal per schooljaar.
Voor leerlingen van scholen, collectief besteld via één der docenten, f 9,20 per jaargang.
Voor anderen f 13,95
Abonnementen kan men opgeven bij Wolters-Noordhoff bv, Afdeling Periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen.
Voor België bij J.B. Wolters - Leuven, Blijde Inkomststraat 5C, Leuven; postchecknummer 000-000 8081-30
Bij elke 8 abonnementen of een gedeelte ervan (met een minimum van 5) wordt één gratis abonnement verstrekt. Maximaal 10 gratis abonnementen per school.
Abonnees wordt dringend verzocht met betalen te wachten tot hun een acceptgirokaart wordt gezonden

---

Inhoud

∫ Kranskubus en kranstwaalfvlak 73
Δ Voor vier getallen geldt 75, 96
Oplossingen 20e N.W.O. 76
Pythagoras Olympiade PO 40-42 77
Δ Helemaal geheel 78, 96
Waar of niet? 80, 96
∫ De Superkubus en de Subsuperkubus 82
Δ Een fietsband in drieën 84
↯ De stelling van Smaal 86
Δ Een labiel evenwicht 87, 97
∫ Stoelendans rond de Kubus 88, 97
Δ Priempalindromen in de tachtiger jaren 93
Correspondentie 94